

地球大気の特異固有解として得られる北極振動

田中博 (筑波大学 計算科学)

1. 研究の背景と目的

北極振動 (Arctic Oscillation: AO) とは北極圏とそれを取り巻く中緯度帯の間の気圧場の南北振動のことで、近年、大気の大規模変動やテレコネクション、地球温暖化の研究において特に注目されている (Thompson and Wallace 1998)。

北極振動は北半球海面更正気圧 p_s の EOF-1 として定義されるが、この海面更正気圧 p_s の時間的変動の原因を力学的に考察すると、それは大気の順圧成分の力学的変動が主な原因となっていることが以下の式からも理解できる。

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} \simeq - \int_0^{p_s} \nabla \cdot V dp \simeq -p_s \nabla \cdot V_0 \simeq \frac{p_s}{gh_0} \frac{\partial \phi_0}{\partial t}$$

ここで、海面更正気圧 p_s の時間的変動は気圧座標系の連続の式により、大気の鉛直コラムで質量積分した質量フラックスの収束によって制御される。この鉛直積分は大気の順圧成分 (添字の 0) と等価であり、それは浅水方程式の質量保存則により後述する順圧高度場の時間変動と等価である事が示される。したがって、 p_s で定義した北極振動指数と大気の順圧成分で定義した北極振動指数が、構造も時系列も一致するのは当然であり、北極振動の本質は大気の順圧成分の力学を調べることににより、その原因を探ることが可能となる。図 1 は NCEP/NCAR 再解析データの冬季順圧成分から解析される EOF-1 の構造で、容易に北極振動と同定できる。

Deser (2000) や Itoh (2002) によると、AO とは NAO と PNA がもたらす実体のない統計的な虚像である。それに対し、Wallace and Thompson (2002) はあくまで物理的な実体を持つモードであるとして、両者はいまだに論争となっている。北極振動の物理的な実体や力学的な成因解明に向けた研究は数多くなされているが、それらの中で Kimoto et al. (2001) や Watanabe and Jin (2004) による中立モード理論は、AO が力学的な実体を持つとの立場に立つ主張である。AO が力学的なモードである事を示すためには、支配方程式をある基本場で線形化し、その固有モードや中立モードの中に AO モードの存在を見出せば良い。しかし、これまでの研究では、AO に似た

モードは得られているものの、万人を納得させられるだけの力学的 AO モードの検出には至っていないと考えられる。

Tanaka and Matsueda (2005) では、上記の論争を再検証する目的で、これまでに北極振動や PNA などの大規模変動の再現が実証されている順圧大気大循環モデルを冬季の基本場で線形化し、その力学的固有モードと強制中立モードの解析を行った。今回の研究では Itoh and Kimoto (1999) に従い、超粘性を用いた点が先行研究との違いである。

北極振動が力学的固有モードと強制中立モードのどちらかで理解されたとして、そのどちらの理解が正しいかが次の問題となる。本研究では、レーリー摩擦を大きくして固有値をシフトした際に、どのような外部強制にตอบสนองして北極振動モードが励起されるのかを特異値解析により調べ、この問題を考察した。

2. 基礎方程式系

本研究で用いたモデルは、3次元スペクトル展開したプリミティブ方程式系の鉛直波数 0 のみで方程式系を閉じた順圧大気大循環モデルである。経度、緯度、気圧、時間を (λ, θ, p, t) とすると、気圧座標系でかかれたプリミティブ方程式系は以下のベクトル方程式で表せる。

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{N} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{U} = (u, v, \phi')^T$ は大気の状態変数で、 (u, v) は水平風ベクトル、 ϕ' はジオポテンシャルの各等圧面全球平均からの偏差で定義される。左辺の \mathbf{M} と \mathbf{L} は鉛直方向と水平方向の微分オペレータ、右辺の \mathbf{N} は非線形項、 \mathbf{F} は外部強制項である。

波数空間への展開基底としての 3次元ノーマルモード関数を用いることで、(1) 式で表される大気の状態変数 \mathbf{U} および外部強制項 \mathbf{F} の 3次元ノーマルモード展開を行う。

$$\begin{aligned} U(\lambda, \theta, p, t) &= \sum_{nlm} w_{nlm}(t) X_m \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p), \\ F(\lambda, \theta, p, t) &= \sum_{nlm} f_{nlm}(t) Y_m \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p), \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $w_{nlm}(t)$ と $f_{nlm}(t)$ は大気の状態変数と外部

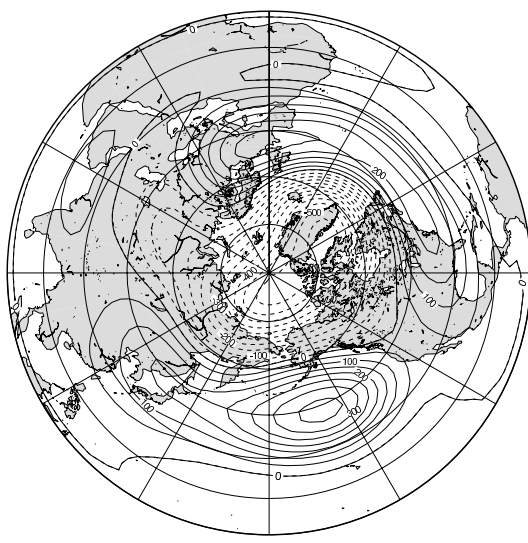


図 1: Barotropic height of the Arctic Oscillation computed as the EOF-1 for the DJF mean anomaly w_i for the NCEP/NCAR reanalysis during 1950 to 1999. The contour interval is 50 m with dashed lines for the negative area.

強制項の展開係数で、展開基底の正規直交性により、以下のフーリエ変換で求められる。

$$\begin{aligned} w_{nlm}(t) &= \langle U(\lambda, \theta, p, t), X_m^{-1} \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) \rangle, \\ f_{nlm}(t) &= \langle F(\lambda, \theta, p, t), Y_m^{-1} \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) \rangle \end{aligned} \quad (3)$$

以上のフーリエ変換により、プリミティブ方程式系の 3 次元スペクトルモデルが以下のように導かれる。

$$\frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i = -i \sum_{jk} r_{ijk} w_j w_k + f_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

ここで、 τ は無次元時間、 σ_i はラプラス潮汐方程式の固有振動数、 r_{ijk} は非線形相互作用係数で実数となる。また、添字を $w_{nlm} = w_i$ の様に簡略化してある。添字以外の i は虚数単位である。

力学過程としての線形項の導出や非線形相互作用係数 r_{ijk} の計算法は Tanaka and Terasaki (2005) の付録に添付した。このスペクトルモデルは、ひとたび係数と外力さえ求めれば、数値的に簡単に解くことのできる常微分方程式系である。物理過程としての外力 f_i の定式化は容易でないが、 f_i を除く他の力学過程の精度は 1% 以下の誤差の範囲で表現されている。そこで、NCEP/NCAR 再解析データを用いて、本研究では、大気変数 w_i の他に (4) を逆算することで、 f_i のデータベースも同様に作成し、後述の解析に用いた。

北極振動やブロッキングなどの長周期変動は順圧構造を持つことから、上記の 3 次元スペクトルモデルにおいて、大気の鉛直平均場に相当する鉛直波数 0 の順圧成分のみで方程式を閉じさせることを考える。非断熱加熱に関わる物理過程は傾圧成分に含まれるため、順圧成分では外力 f_i として摩擦力 d_i のみを考慮すればよい。本研究では、以下で示される粘性摩擦項と地

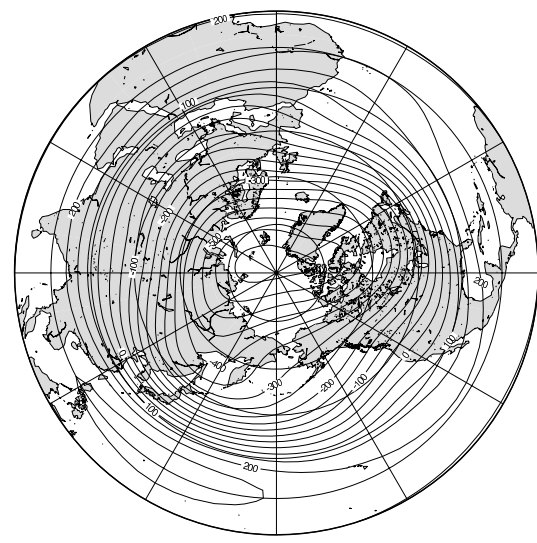


図 2: Barotropic height of the DJF climate by the NCEP/NCAR reanalysis used for the basic state of the model.

表摩擦項を考え、これらを力学項の一部に含めて解析を行った。

$$d_i = -k_D c_i^{-4} w_i - \nu_S w_i, \quad (5)$$

ここで、 k_D は超粘性係数、 c_i は Rossby 波の位相速度、 ν_S はレーリー摩擦係数である。

3. 固有モードと中立モード

次に、非線形方程式 (4) を図 2 のような冬季気候値の基本場で線形化し、変数 w_i を実部と虚部に分けて方程式を実数の式に書き直すと

$$\frac{dx}{d\tau} = Ax + f \quad (6)$$

となる。ここで、 x は (w_R, w_I) からなる実数ベクトルで、 A は基本場と摩擦力から決定する実数行列、 f は主に順圧傾圧相互作用による外力で、ここでは乱数と考える。

はじめに、外力 f を無視し、時間変化項に振動数 ν を代入して、上式の固有値問題 (EVP) を解くと、力学系の固有解としての固有モードが得られる。

$$\nu x = Ax \quad (7)$$

一方、定常を仮定し、 $0 = Ax + f$ の強制問題に対し $A = U\Sigma V^T$ のように特異値展開 (SVD) して x について表すと、

$$x = -V\Sigma^{-1}U^T f \quad (8)$$

となり、外力 f に対し最も励起されやすい中立モード SVD-1 が特異値 Σ の最小値に付随して v_1 として求められる。

同様にして、固有値が重根を持たず、シンプルな場合には、 $A = V\Lambda V^{-1}$ のような固有関数展開が可能で

SVD Analysis (Diffusion only)

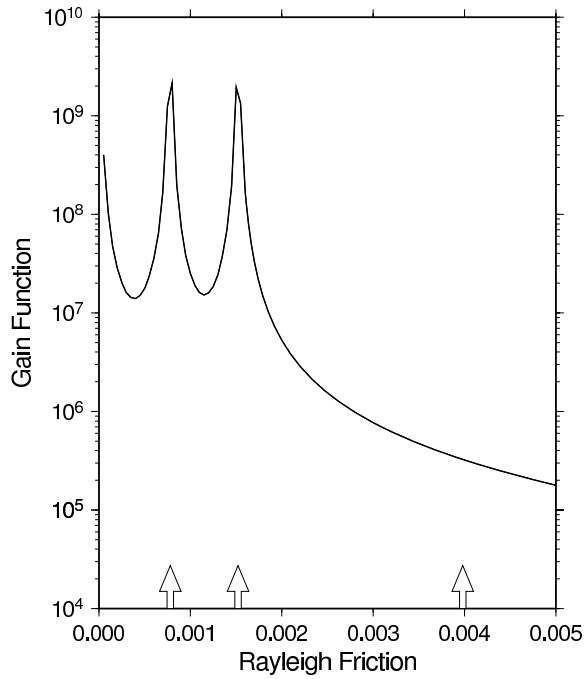


図 3: A linear response function of the dynamical system as a function of the Rayleigh friction ν_S . The peaks represent the singular eigenmodes EVP-1, EVP-2, EVP-3, respectively, from the right. Arrows indicate the linear damping where SVD analyses are conducted.

ある。この場合、固有関数は一般に直交しないので、 $U^T V = I$ となるような V の Adjoint モード U を A^T の固有値問題を解いて用いることで、定常強制問題は

$$x = -V\Lambda^{-1}U^T f \quad (9)$$

のように解くこともできる。本研究ではこの両者について解析を行った。

4. 結果

固有値問題および特異値問題の結果は、数値として表 1 にまとめられている。基本場は順圧不安定を含むことから、固有値は一般的に複素数となり、振幅の増減と同時に構造が周期的に変化するモードが得られる。しかし、中には固有値が実数となり、符号を除いて構造が時間的に一定の定在モードが検出できる。本研究では、固有値や特異値の最も小さいモードを検出する目的から、実数固有値を持つモードについて、その増幅率の順に EVP-1 から EVP-10 までをリストアップした。

表 1 の結果によると、レーリー摩擦を入れない場合の固有値には 2 つの不安定モード EVP-1, EVP-2 が存在し、EVP-3 以降は減衰モードとなった。特に EVP-3 の固有値は極めて 0 に近いことから、レーリー摩擦を入れない場合の特異値問題では、この EVP-3 が第一特異解 (SVD-1) と同じ構造となることが確認されて

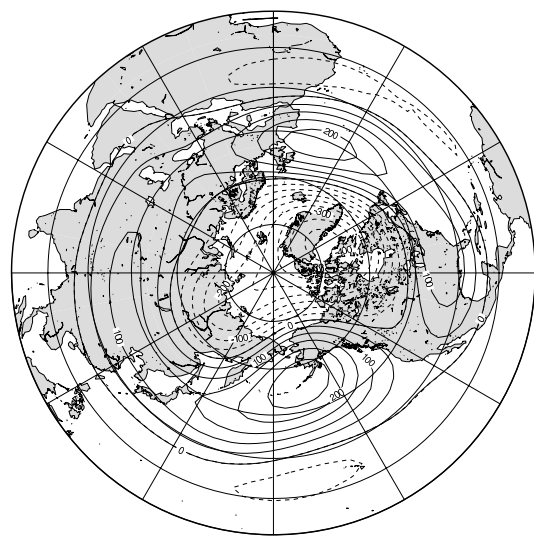


図 4: Barotropic height of the EVP-3 which is identified as SVD-1 for the absence of the Rayleigh friction.

いる。

表 1. EVP-1 から EVP-10 までの実数固有値 ν_R 、EVP-1 の増幅率分だけレーリー摩擦 ν_S を導入し、固有値シフトした結果 $\nu_R - \nu_S$ 、固有値シフト後の SVD-1 から SVD-10 の特異値 s_i 。

No.	ν_R	$\nu_R - \nu_S$	s_i
1	1.52×10^{-3}	0.0	0.0
2	7.78×10^{-4}	-7.44×10^{-4}	6.32×10^{-4}
3	-1.09×10^{-9}	-1.52×10^{-3}	1.27×10^{-3}
4	-1.41×10^{-6}	-1.52×10^{-3}	1.45×10^{-3}
5	-3.66×10^{-6}	-1.53×10^{-3}	1.53×10^{-3}
6	-5.52×10^{-5}	-1.58×10^{-3}	2.16×10^{-3}
7	-6.71×10^{-4}	-2.19×10^{-3}	2.53×10^{-3}
8	-2.52×10^{-3}	-4.04×10^{-3}	3.44×10^{-3}
9	-4.47×10^{-3}	-6.00×10^{-3}	4.19×10^{-3}
10	-9.43×10^{-3}	-1.09×10^{-2}	5.04×10^{-3}

中立モード理論では、不安定解が存在すると解はやがてその不安定モードに支配されることから、適当な摩擦を導入することで、すべて減衰解または安定解にする必要がある。そのため、EVP-1 の増幅率分だけレーリー摩擦を導入すると、EVP-1 の実数固有値はゼロとなり、他はすべて減衰解となる。固有値がゼロとなるこの特殊なモードを、本研究では特異固有モードと呼ぶことにする。固有モードの構造はレーリー摩擦では変化しないので、固有値のシフト後に特異値分解を行えば、固有値が 0 の EVP-1 が SVD-1 となるのは言うに及ばない。

図 3 には、レーリー摩擦 ν_S を変化させた場合の、外力に対する線形応答曲線を示した。 $\nu_S = 0$ ではたまたま EVP-3 がほぼ共鳴を起こし、このモードが SVD-1 となっている。しかし、 ν_S を導入することで EVP-2 が共鳴を起こし、さらに ν_S を増加させると減衰時間 52 日で EVP-1 が共鳴しこれが特異固有モードとなる。中立モード理論では、さらに強い摩擦を導入し、すべての固有モードが減衰モードとなる状況で、外力に最も反応して励起される第一特異解が解析される

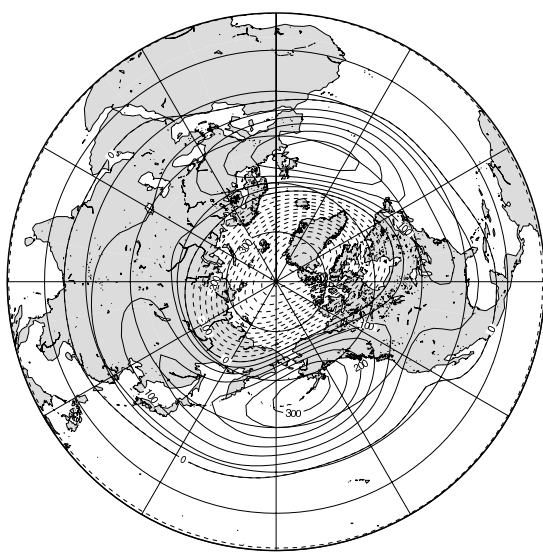


図 5: Barotropic height of the singular eigenmode EVP-1 which is easily recognized as the AO pattern.

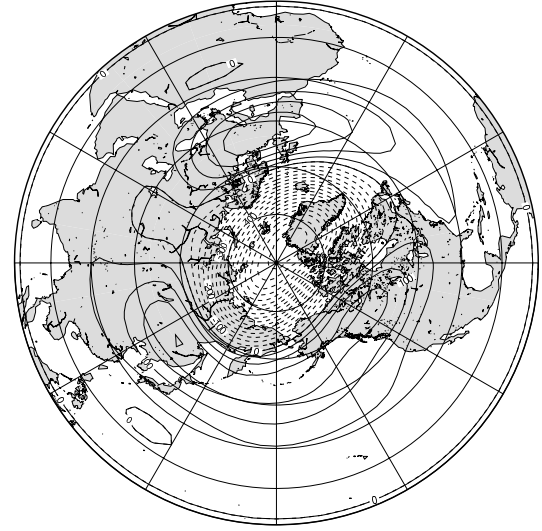


図 6: Barotropic height of the SVD-1 for reasonably strong Rayleigh friction at the right-most arrow in Fig. 3.

が、その構造は固有解としての最小減衰モード (Least Damping モード) の線形応答曲線のすそのを見ていることになる。

図 4 は EVP-3 の構造であり、それは容易に北極振動と同定される。これはレーリー摩擦項を入れないときの第一特異解 SVD-1 として解析される中立モードの構造である。固有解の中には不安定モード EVP-1 と EVP-2 が存在し、図のモードは増幅率の順では 3 番目の EVP-3 が特異化して SVD-1 となっている。

図 5 は最大不安定モードとなる特異固有解 EVP-1 の構造であり、それも容易に北極振動と同定される。これら EVP-1 から EVP-3 の固有解はいずれも北極振動と同定される極めて似通った構造を持つことが示された。

モデル大気のレーリー摩擦をさらに大きくして固有値をシフトすると、固有解は減衰モードとなり、中立モード理論で説明される最小減衰モードとなる。このときの SVD-1 の構造は特異固有解とは別なものとなり、特異解の共鳴応答曲線の端で特定の外部強制によって励起される定常強制モードとして理解されることになる。

図 6 はレーリー摩擦による減衰時間を 20 日としたときの SVD-1 の右特異ベクトルの構造であり、図 7 はそのような応答をもたらす外力に対応する SVD-1 の左特異ベクトルの構造である。解析の結果、SVD-1 の構造は、観測される北極振動と同様に、極域で負、北太平洋と北大西洋に正の極を持つ構造を示した。特異固有解の構造 (図 5) と比較すると、太平洋上の正域が東西に伸びているという特徴が見出せる。この SVD-1 を励起する外部強制の構造は、極域で負、中緯度で正の分布に波数 3 程度の波が重なっている。この構造は固有値問題の Adjoint モードと同じ構造であり、レーリー摩擦の値を変化させても、安定して現れる。

最後に、観測大気の北極振動指数が正負に大きく振れる際に、大気の順圧成分への外力 f_i が図 7 のよう

な構造になっているかどうかを、1950-2004 年の日々の NCEP/NCAR 再解析データを用いて調べた。図 8 は、図 7 に射影された外力指数の時系列である。ただし、(4) で示される摩擦項を含んだ外力への射影である。この外力指数と北極振動指数の相関係数は、各指数の 365 日移動平均に対し 0.35 であり、相関は有意であるものの、北極振動の分散の 12% (決定係数) を説明するに過ぎないこと判明した。

以上の結果から、北極振動は中立モードとして順圧成分の外力の直接的な応答で励起されるとは考えにくいので、極めてランダムな外力に反応して特異固有モードが励起され、北極振動となることが推察される。

5. 北極振動の力学的考察

本研究の結果、および、同一の非線形順圧モデルを用いて行った北極振動の数値実験の先行研究 (Tanaka 2003) と照らし合わせると、北極振動は物理的実体を伴った大気の力学モードであり、統計的虚像ではないと結論づけられる。

北極振動の説明として、任意の外力により自然励起される特異固有モードと、特定の外力に反応して励起される中立モードの 2 通りの理解が可能であり、そのどちらが正しいかを突き止める必要があった。本研究の結果から、ランダムな外部強制に共鳴して特異固有解となるモードが成長し、北極振動パターンを生成するプロセスが提示された。この共鳴応答は不安定モードを含む複数のモードで可能である。一方、中立モード理論で説明される強い摩擦項の下での北極振動は、特異固有解の共鳴応答曲線の端で励起される最小減衰モードとして理解されるが、外力との応答関係は弱いかが示された。

今後、さらに検証が必要であるが、北極振動の分散の大部分は、外力の構造とは無関係に、特異固有モードとして任意のタイムスケールで自然励起されているものと考えられる。

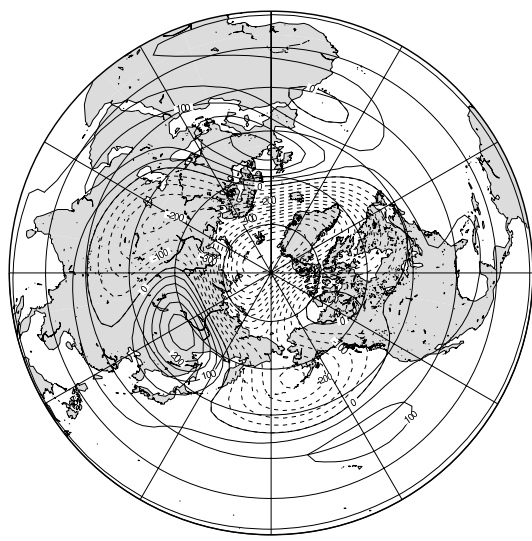


図 7: External forcing of the SVD-1 for reasonably strong Rayleigh friction at the right-most arrow in Fig. 3.

謝辞

本研究の一部はアラスカ大学国際北極圏研究センターおよびアサヒビール学術振興財団による助成金の下で行われた。

参考文献

- Deser, C., 2000: On the teleconnectivity of the Arctic oscillation. *Geophys. Res. Lett.*, **27**, 779–782.
- Itoh, H., 2002: True versus apparent arctic oscillation. *Geophys. Res. Lett.*, **29**, 8, 10.1029/2001GL013978.
- Itoh, H. and M. Kimoto, 1999: Weather regimes, low-frequency oscillations, and principal patterns of variability: A perspective of extratropical low-frequency variability. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 2684–2705.
- Kimoto, M., F.-F. Jin, M. Watanabe, and N. Yasutomi, 2001: Zonal-eddy coupling and a neutral mode theory for the Arctic Oscillation. *Geophys. Res. Lett.*, **28**, 737–740.
- Tanaka, H.L., 2003: Analysis and modeling the Arctic Oscillation using a simple barotropic model with baroclinic eddy forcing, *J. Atmos. Sci.*, **60**, 1359–1379.
- Tanaka, H.L. and M. Matsueda, 2005: Arctic oscillation analyzed as a singular eigenmode of the global atmosphere. *J. Meteor. Soc. Japan*, **83**, 611–619.
- Tanaka, H.L. and K. Terasaki, 2005: Energy spectrum and energy flow of the Arctic Oscillation in the phase speed domain. *SOLA*, **1**, 65–68.

Arctic Oscillation Index

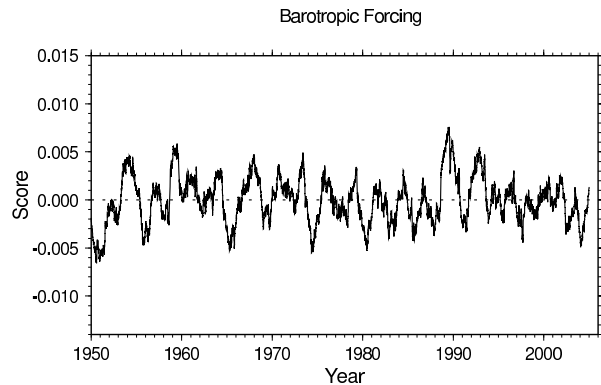
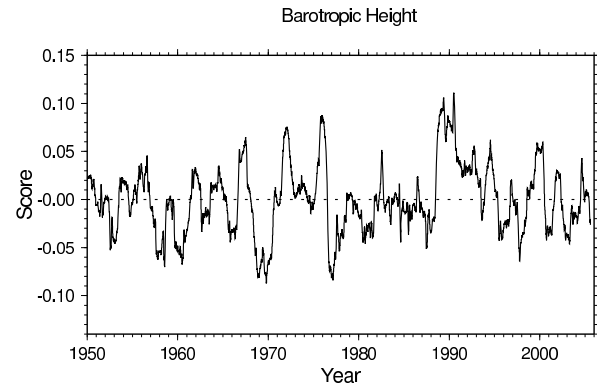


図 8: AO Index and the score time series of the external forcing by the NCEP/NCAR reanalysis projected on the SVD-1 in Fig. 7 for 1950 to 2004. Values are 365-day running mean.

Thompson, D. W. J. and J. M. Wallace, 1998: The arctic oscillation signature in the wintertime geopotential height and temperature fields. *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 1297–1300.

Wallace, J. M. and D. W. J. Thompson, 2002: The Pacific center of action of the Northern Hemisphere annular mode: Real or artifact? *J. Clim.*, **15**, 1987–1991.

Watanabe, M. and F.-F. Jin, 2004: Dynamical prototype of the Arctic Oscillation as revealed by a neutral singular vector. *J. Clim.*, **17**, 2119–2138.