

# スペクトル解析 ハンドブック

日野幹雄—総編集

朝倉書店

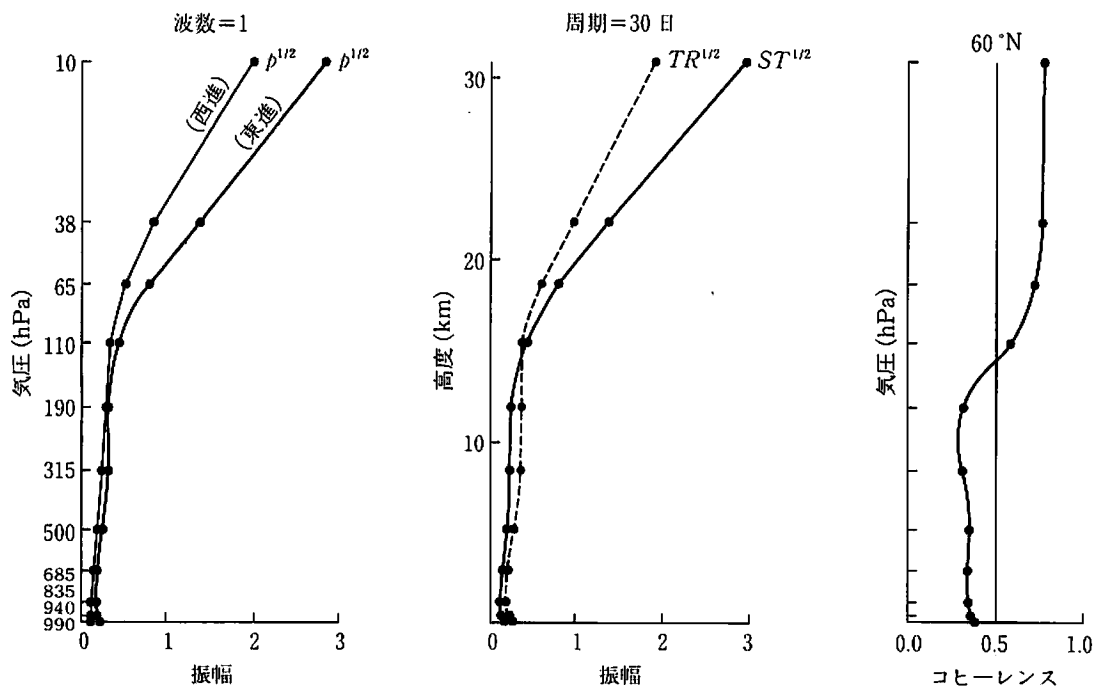


図 5.36 モデルの等圧面高度(波数 1, 周期 30 日)の東進と西進成分の振幅(左), 定滞波と移動波の振幅 ( $ST^{1/2}$ ,  $TR^{1/2}$ ), 東進と西進成分の間のコヒーレンス(右)の高度分布(北緯  $60^\circ$ , 10~3 月)

参考文献

- 1) Hayashi, Y.: Space-time spectral analysis and its applications to atmospheric waves, *J. Meteor. Soc., Japan*, 60, 156-171, 1982.

5.4 地球大気の3次元スペクトル展開

5.4.1 東西波数展開

地球大気にはさまざまな空間スケールの現象が特徴的な時間スケール(ライフサイクル)をもって発生しては消滅している(図 5.37)。例えば、地表面近くの大気境界層には  $1\text{ cm} \sim 100\text{ m}$  程度のスケールの渦が存在し、数秒~数分の時間スケールで発生・消滅をくり返している。ここで、渦あるいは擾乱とは大小さまざまな渦巻きを含んだ乱流のように乱れた流れの意味で用いてある。境界層上部には日中、サーマル(熱気泡)が上昇してできる積雲対流がポップコーン状に形成される。積雲や雄大積雲が組織化されたクラウドクラスターやメソ擾乱など、空間スケールが大きくなるとそれに伴ってライフサイクルも長くなる。海陸風は海陸分布の熱的なコントラストにより日周期で交代する風系で、代表的なメソスケールの現象である。さらにスケールが大きくなると、それまで3次元的だった流れも水平2次元的になり、数百 km の台風、数千 km の温帯低気圧(高低気圧波動)、数万 km のプラネタリー波など

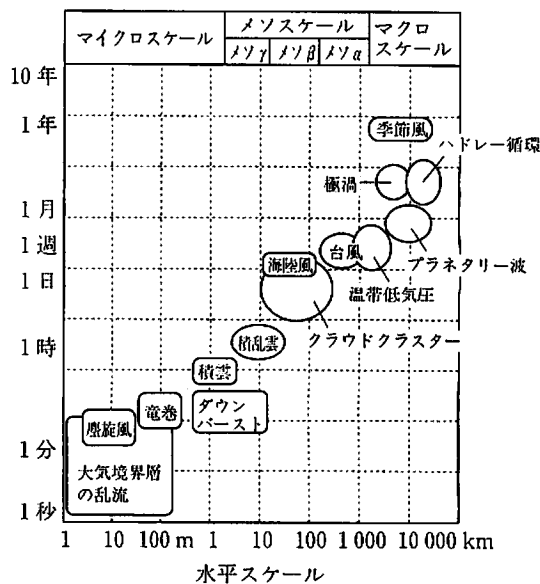


図 5.37 大気の運動の時間・空間スケール  
横軸は現象の代表的な水平スケール、縦軸は現象の代表的な時間スケールを示す。

がそのスケールを代表する顕著な大気現象となる。高層天気図でみると中緯度に東西に並ぶ高低気圧波動の典型的な波長は  $4000 \sim 6000\text{ km}$  程度であり、東西方向に地球を1周する間に気圧の波が5~7周期含まれるような特徴的なスケールを持っている。この温帯低気圧に代表される東西波数5~7の波動あるいは渦を気象学では総観規模擾乱と呼ぶ。

一方、プラネタリー波は主にロッキー山脈やチ

ベット高原などの力学的な影響で偏西風が蛇行して形成される地球規模(マクロスケール)の波動であり、地球をとりまく東西波数1~4程度のスケールをもつ。海陸分布の熱的なコントラストにより年周期で交代する風系をモンスーン(季節風)というが、これもマクロスケールの現象である。地球大気の中で最も空間スケールが大きい現象として、放射加熱の南北差が原因で励起されるハドレー循環があげられる。これは成因論的には東西方向に一樣と考えられ、赤道で上昇し中緯度で下降する東西波数0の熱対流である。そのほかに、地球を東西にとりまく中緯度の偏西風ジェット気流、低緯度の偏東風ジェット、高緯度の極渦などの風系も東西波数0のマクロスケールの現象である。

地球大気にはどのスケールにどの程度の強さの現象が存在するかを、定量的に分析する最も古典的な手法に東西波数展開(調和解析)がある。例えば、気圧分布の1つの指標である500 hPa 等圧面高度  $z$  を北緯  $45^\circ$  の緯度円に沿ってグラフにしてみると図 5.38 のようになる。これは冬季の典型的な例であるが、ロッキー山脈とチベット高原の影響で大陸の西岸に高気圧、東岸に低気圧が形成される。そのようなマクロスケールのプラネタリー波に、温帯低気圧に伴う総観規模擾乱が重なっている様子がうかがえる。気象学においては、気圧  $p$  や等圧面高度  $z$ 、温度  $T$ 、風速  $V=(u, v)$  などの気象要素は、時間的にも空間的にも連続関数として扱われる。緯度  $\theta$ 、経度  $\lambda$  を座標軸とする球面座標系で、特定の緯度円に沿ってこの変数  $z(\lambda)$  の東西方向の分布をみると、それは周期  $2\pi$  の周期関数になる。周期  $2\pi$  の連続関数は収束するフーリエ級数に展開できることから、これを定量的に波数分解してスペクトル分布を調べることができる。

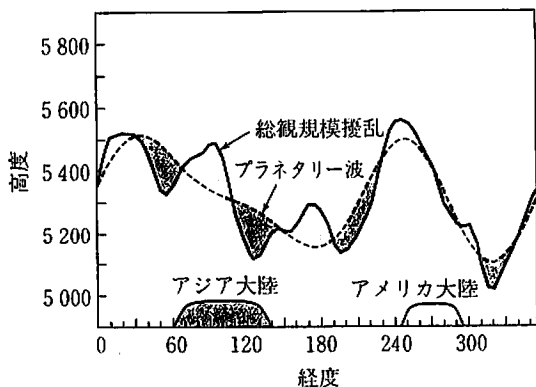


図 5.38 北緯  $45^\circ$  の緯度円に沿う 500 hPa 等圧面高度  $z$  の分布(実線) 破線は波数  $n=0-3$  の合成。

$$z(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n e^{in\lambda} \quad (5.4.1)$$

$$Z_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(\lambda) e^{-in\lambda} d\lambda \quad (6.4.2)$$

ここで、 $Z_n$  は東西波数  $n$  の複素フーリエ展開係数である。このようなフーリエ級数展開式のペアを導くために、式(6.4.2)のたみ込み積分を内積く、 $\langle \rangle$  として定義し、次の複素フーリエ関数の正規直交条件が用いられる。

$$\langle e^{in\lambda}, e^{in'\lambda} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} e^{-in'\lambda} d\lambda \quad (5.4.3)$$

$$= \delta_{nn'} \quad (5.4.4)$$

ここで、 $\delta_{nn'}$  はクロネッカのデルタであり、 $n=n'$  のときにはその値が1となり、それ以外ではすべて0となる量である。式(5.4.1)の両辺と  $e^{in\lambda}$  の内積をとり、次にこの正規直交条件を用いることで式(5.4.2)が得られる。さらに、パーセバルの定理により、 $Z_n$  を用いて高度場の分散を波数展開することにより、どの波数にどれだけの分散の寄与があるかを定量的に調べることができる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z^2(\lambda) d\lambda = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |Z_n|^2 \quad (5.4.5)$$

$$= |Z_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|Z_n|^2 \quad (5.4.6)$$

これが、一般に調和解析と呼ばれる解析手法であり、内容的には線スペクトル解析と同じである。負の波数による貢献は正の波数に加算されて表現される。

図 5.39 はこのようにして得られた 500 hPa 高度

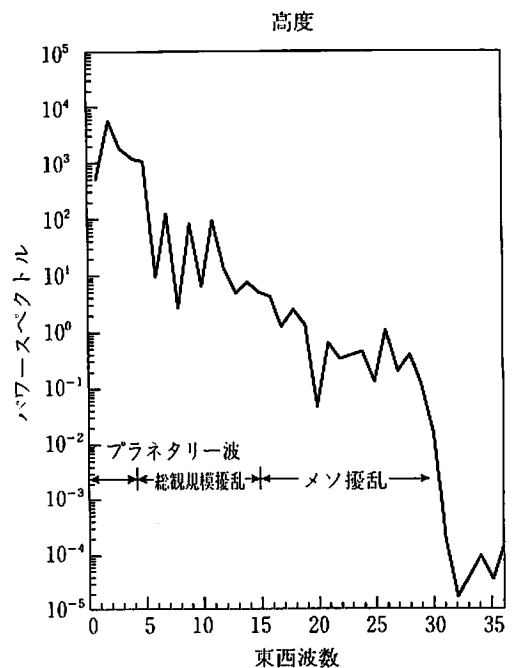


図 5.39 北緯  $45^\circ$  の緯度円に沿う 500 hPa 等圧面高度場のスペクトル分布

場のスペクトル分布であり、プラネタリー波、特に波数2が最も卓越し、次いで総観規模擾乱、そしてメソ擾乱の順にスペクトル強度が落ちていく特徴がわかる。

次に、等圧面高度場の分散に代えて風速の分散について同様の波数展開を行うと、それは大気の運動エネルギーのスペクトル展開になることを示す。全球数値予報に用いられるような静力学平衡を仮定した大気モデルにおいて、単位質量当たりの運動エネルギー  $K$  は水平風ベクトル  $v=(u, v)$  を用いて  $K = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$  のように表せる。したがって、ある緯度円に沿う平均値をバーで表すと  $\bar{K}$  は、

$$\bar{K} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(u^2 + v^2) d\lambda \quad (5.4.7)$$

$$= \frac{1}{2}(U_0^2 + V_0^2) + \sum_{n=1}^{\infty} (|U_n|^2 + |V_n|^2) \quad (5.4.8)$$

となり、波数に展開できる。ここで、 $U_n, V_n$  はそれぞれ  $u, v$  の複素フーリエ展開係数である。波数に展開した右辺第1項は帯状流、つまり東西波数0の運動エネルギー成分  $K_0$  を表し、亜熱帯ジェットなどの運動エネルギーの指標となる。そして、東西波数  $n$  の運動エネルギーは  $K_n = |U_n|^2 + |V_n|^2$  と定義され、それが波数  $n$  のスケールの運動エネルギーの貢献量を意味することは、パーセバルの定理からも明らかである。このようにして、スペクトル手法により大気全体の運動エネルギーをスケールごとに分けて定量的に評価することが可能になる。

実際に観測されたデータを東西波数展開し、得られた運動エネルギースペクトルを大気全体で質量積分した結果を図5.40に示す。この図は日本の気象

庁(JMA)が作成した全球気象データを、アメリカの気象庁(NMC), ヨーロッパの気象庁(ECMWF)に相当する機関が作成しているものと比較している。スペクトルの値は冬季平均したものであり、運動エネルギーはプラネタリー波に集中しており、波数1~3ではエネルギーレベルにあまり差がみられない。一方、総観規模擾乱からメソ擾乱にかけて、スペクトルは波数の-3乗則に従うレッドノイズになっている。NMCによる全球気象データは、この解析結果によると波数40で突然エネルギーレベルが落ちている。これは数値予報モデルの解像度が東西波数40で切断されているというスペクトルモデルの特徴が現れたもので、現実大気にそのような特徴があるのではない。また、ECMWFによる全球気象データは、波数30を超えたあたりからJMAやNMCの2倍のエネルギーレベルになっていることがわかる。このように、同一の気象観測データを用いて作成されたはずの全球気象データが、機関により異なって処理されて公開されていることが、このスペクトル解析の結果から明瞭である。

地球規模の大気の運動がどのようなメカニズムで形成・維持されているのかを研究する学問のことを大気大循環論という。大気の運動エネルギースペクトル  $K_n$  がどのようなプロセスで変動し、あるいはどのようにして平衡状態を保っているのかを知るとは、大気大循環の研究において重要である。例えば、場所によっては100 m/sを越える中緯度の亜熱帯ジェットなどは粘性摩擦に対抗するエネルギー供給がなければ、1週間もしないうちに静止してしまうことが知られている。大気大循環のエネルギーを支えているメカニズムが何であるかを力学的に探るためには、運動エネルギー方程式を導いて、そのエネルギー収支を調べる必要がある。そのような運動エネルギー方程式は  $K_n$  の定義式  $|U_n|^2 + |V_n|^2$  を時間で微分し、そこにスペクトル表示した運動方程式を代入することで得られる。Saltzman<sup>5)</sup>に従って、大気全体で質量積分した運動エネルギー方程式をまとめると以下ようになる。

$$\frac{\partial K_n}{\partial t} = C_n + M_n + L_n + D_n \quad (5.4.9)$$

ここで、 $C_n, M_n, L_n, D_n$  はそれぞれ、波数  $n$  における運動エネルギーの生成、波数  $n$  と帯状流との間のエネルギー変換、波数  $n$  とそれ以外の波とのスケール相互作用、そして粘性摩擦によるエネルギー散逸を表す。右辺各項を観測データに基づいて実際に計算することで、 $K_n$  がどの項により供給され、どの項により消散しているかがわかる。

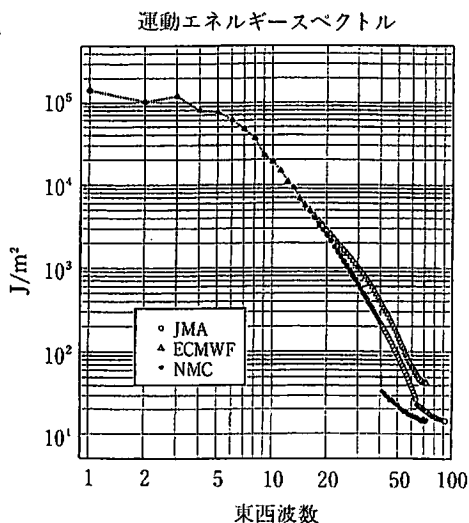


図5.40 東西波数空間における冬季平均の運動エネルギー  $K_n$  ( $J/m^2$ ) の分布<sup>1)</sup>  
JMA, ECMWF, NMCの3種類のデータの比較を示す。

大気大循環のスペクトルエネルギー論を完成させるためには、運動エネルギー方程式と対になって現れる有効位置エネルギー方程式を導く必要がある。大気の運動エネルギーの供給源は、内部エネルギーと重力位置エネルギーの和からなる全位置エネルギーであるが、大気の密度成層がいたるところ水平一様なときには、全位置エネルギーが大量にあっても運動エネルギーに変換されることはない。そこで、観測される全位置エネルギーから、運動エネルギーを生成しえない密度成層が水平一様な基本場を差し引いた残りを有効位置エネルギー  $A$  として定義する。この際、断熱の閉じた系では  $K$  と  $A$  の総和が保存されるようにする。このようにして定義される有効位置エネルギー  $A$  は、適当な静的安定度のパラメータ  $\gamma$  を用いて  $A = \frac{\gamma}{2} \overline{T'^2}$  のように温度の分散で表されるので、運動エネルギーと同様に東西波数に展開することができる。

$$\bar{A} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\gamma}{2} T'^2 d\lambda \quad (5.4.10)$$

$$= \frac{\gamma}{2} B_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma |B_n|^2 \quad (5.4.11)$$

ここで、 $B_n$  は温度偏差  $T'$  の複素フーリエ展開係数であり、温度偏差は通常全球等圧面平均に対して計算される。有効位置エネルギースペクトル  $A_n = \gamma |B_n|^2$  は  $K_n$  同様にプラネタリー波で最もエネルギーレベルが高く、高波数ほどレベルが低下するレッドノイズの特徴を示す。この有効位置エネルギースペクトルの収支式を導くには、 $A_n$  の定義式  $\gamma |B_n|^2$  を時間で微分し、そこにスペクトル表示した熱力学の第1法則を代入する。Saltzman<sup>5)</sup> に従って、大気全体で質量積分した有効位置エネルギー方程式をまとめると以下ようになる。

$$\frac{\partial A_n}{\partial t} = -C_n + R_n + S_n + G_n \quad (5.4.12)$$

ここで、 $C_n, R_n, S_n, G_n$  はそれぞれ、波数  $n$  における有効位置エネルギーから運動エネルギーへの変換、波数  $n$  と帯状成分との間のエネルギー変換、波数  $n$  とそれ以外の波とのスケール相互作用、そして非断熱過程と温度場との相関による有効位置エネルギーの生成を表す。 $C_n$  は運動エネルギー方程式にも現れており、 $A_n$  の減少が  $K_n$  の増大をもたらす関係にある。 $A_n$  と  $K_n$  の和エネルギー収支式にはこの項は現れないことから、有効位置エネルギーから運動エネルギーへの変換と解釈でき、傾圧変換と呼ばれている。 $L_n$  と  $S_n$  はすべての波(波数1以上)で足し合わせると0になることから、波-波相互作用という。また、 $M_n$  と  $R_n$  はすべての波数

(波数0を含む)で足し合わせると0になることから帯状-波相互作用と呼ばれる量である。右辺各項を観測データに基づいて実際に計算することで、 $A_n$  についてのエネルギー収支を定量化できる。

国際協力のもとで1979年に世界で初めて集中気象観測が行われた全球天気実験(FGGE)データに基づいて、上記のエネルギースペクトルを求めた結果を図5.41に示す<sup>3)</sup>。左右の小棒がそれぞれの波数(ここでは0~15)における  $A_n$  と  $K_n$  のエネルギーボックスで、数値はエネルギー量を表す。矢印とその数値はエネルギー変換量で、左から右に向かってそれぞれ  $G_n, R_n, S_n, C_n, L_n, M_n, D_n$  を示している。ソールツマンボックスと呼ばれるこの図の表現は複雑になっているが、この図から大気大循環のエネルギー流をスケールごとに知ることができる。大気大循環の主なエネルギー源は、熱帯で加熱、極域で冷却することによる帯状有効位置エネルギーの生成  $G_0$  にあり、それは南北の温度こう配に比例する  $A_0$  を増大させる。 $A_0$  は  $C_0$  で表されるハドレー循環により、 $K_0$  にその一部が変換されるが、その大部分は総観規模擾乱(波数4~10)によって、 $A_n$  を経て  $K_n$  へと変換される。これは、南北の温度こう配の増大が中緯度での傾圧不安定をもたらし、 $A_0$  に蓄積されたエネルギーが温帯低気圧の発達として総観規模擾乱に流れることを意味する。温帯低気圧に伴う東側暖気の上昇と、西側寒気の上昇による有効位置エネルギーから運動エネルギーへの変換が、このようなエネルギー流の実体である。そして、擾乱による南北混合は南北の温度こう配を緩和し、 $A_0$  を減少させる。 $K_n$  に集まった運動エネルギーは粘性摩擦により消散される一方で、 $K_0$  に流れ、偏西風ジェットに運動エネルギーを供給している。このスペクトルエネルギー論の展開は、偏西風ジェット気流の維持機構やスケール相互作用に関する理解を深め、大気大循環研究の発展に貢献した。

#### 5.4.2 球面調和関数展開

前項で述べた東西方向の1次元スペクトル解析の問題点は、異なる緯度の緯度円に沿う解析結果が、異なるスケール(波数)を意味しており単純に南北で平均できないという点にある。例えば、赤道に沿う波数1と北緯60°に沿う波数1ではスケールに2倍の差がある。高緯度の北緯80°の波数1は赤道に沿う波数1の約1/6にすぎない。図5.41などはそれを無視して、全球で平均してエネルギーのスケール相互作用をみているので、解釈には注意が必要である。

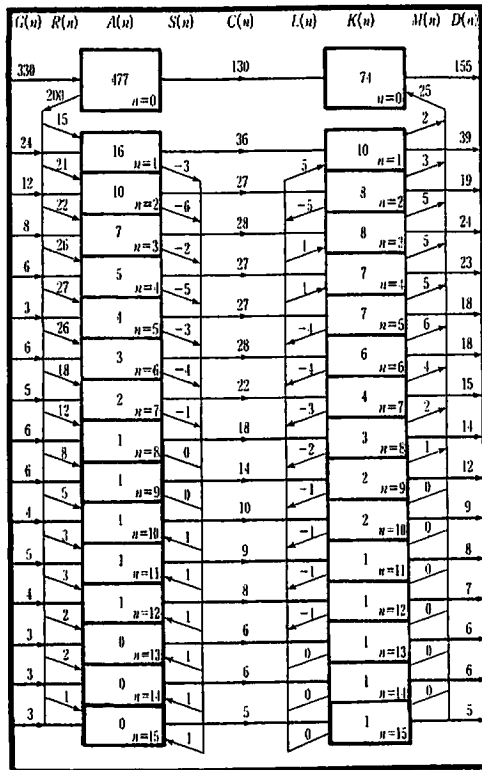


図5.41 全球天気実験 (FGGE) データに基づいて計算したソールツマンエネルギーボックス図<sup>3)</sup>  
 ボックスの数値はエネルギー ( $10^4 \text{ J/m}^2$ ), 矢印の数値はエネルギー流 ( $10^2 \text{ W/m}^2$ ) を示す。

この問題を解決するために波数展開を南北にも拡張したものが、球面調和関数展開による2次元スペクトル解析法である。球面調和関数を  $Y_l^n(\theta, \lambda)$  とすると、それは経度 ( $\lambda$ ) 方向には三角関数、緯度 ( $\theta$ ) 方向にはルジャンドル陪関数  $P_l^n(\theta)$  を用いた球面上の2次元関数であり、以下のように定義される。

$$Y_l^n(\theta, \lambda) = P_l^n(\theta) e^{in\lambda} \quad (5.4.13)$$

ここで、 $n$  は東西波数、 $l$  は全波数である。この球面調和関数は球面上でのラプラシアン微分演算子の固有関数であり、以下の式を解いて得られる。

$$\nabla^2 Y_l^n(\theta, \lambda) = -l(l+1) Y_l^n(\theta, \lambda) \quad (5.4.14)$$

ここで、 $-l(l+1)$  はラプラシアン微分演算子に属する固有値であり、 $l$  は0を下限として  $l=0, 1, 2, 3, \dots$  のように単調に増加する。もし、領域が球面ではなく東西にも南北にも周期性を仮定した長方形ならば、東西波数を  $n$ 、南北波数を  $m$  とする2重フーリエ級数展開が可能となり、 $-(n^2+m^2)$  がラプラシアン微分演算子に属する固有値となる。そして、 $l = \sqrt{n^2+m^2}$  が2重フーリエ関数の全波数を意味する。

しかし、球面を領域とする場合には、2重フーリエ関数はラプラシアン微分演算子の固有解にはならないことから、南北両極の気象要素が一致する場合

以外は完全系にならない。この理由により球面調和関数が展開基底に選ばれる。三角関数において、波数  $\sqrt{n^2+m^2}$  を増加させると、それに伴って三角関数の節の数が増加し、スケールが単調に小さくなるように、球面調和関数も全波数  $l$  が増加するにつれて、 $Y_l^n$  の構造は多くの節をもつようになり、スケールが単調に小さくなる。したがって、 $l$  は2重フーリエ関数における全波数同様に、2次元球面上の  $Y_l^n$  のスケールを表すパラメータとなる。

球面調和関数のもう1つの重要な特徴は、関数がおたがいに直交するという点である。これは適当な内積のもとで、以下の直交条件を満足することである。

$$\langle Y_l^n(\theta, \lambda), Y_{l'}^{n'}(\theta, \lambda) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Y_l^n(\theta, \lambda) Y_{l'}^{n'*}(\theta, \lambda) \cos \theta \, d\lambda d\theta \quad (5.4.15)$$

$$= \delta_{nn'} \delta_{ll'} \|P_l^n\|^2 \quad (5.4.16)$$

ここで、アスタリスク\*は共役複素数を、 $\|P_l^n\|^2 = \langle P_l^n, P_l^n \rangle$  は  $P_l^n$  のノルムを表す。したがって、任意の気象要素、例えば風の東西成分  $u$  は以下のように球面調和関数に展開できる。そして、その複素展開係数  $U_l^n$  は上記の直交条件によりただちに以下の内積で求められる。

$$u(\theta, \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=|n|}^{\infty} U_l^n Y_l^n(\theta, \lambda) \quad (5.4.17)$$

$$U_l^n = \frac{\langle u(\theta, \lambda), Y_l^n(\theta, \lambda) \rangle}{\|P_l^n\|^2} \quad (5.4.18)$$

この2式が、球面調和関数展開のペアを構成する。ここで、全波数  $l$  は東西波数  $n$  から始まることに注意する必要がある、あえて南北波数という概念を与えるならば、 $l=|n|$  がそれに相当する。異なる東西波数に対して、全波数  $l$  が等しければ、それらの空間スケールは同一であると考えられる。例えば、東西波数0の球面調和関数は  $l=0, 1, 2, \dots, 10, \dots$  のように全波数が変化するが、東西波数10のそれは  $l=10, 11, 12, \dots$  のように変化する。東西波数0、全波数10の構造は、東西には一様であるが南北に10の節がある。

一方、東西波数10、全波数10の構造は東西に波数が10あり、南北に節はない。この両者は同一の全波数を持ち、同一のスケールであると考えられる。また、 $u$  が球面調和関数に展開できるためにはこれらの展開関数が完全系をなす必要がある。これはルジャンドル陪関数を生成するルジャンドルの陪微分方程式がステュルム-リウヴィルタイプと呼ばれる境界値問題に属することから証明されてい

る。三角関数も基本的にこのタイプに属し、周期性をもつ領域に対して完全系であることが証明されている。

次に、球面上で平均した運動エネルギーを球面調和関数に展開すると、以下の式が得られる。

$$\bar{K} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \cos \theta \, d\lambda d\theta \quad (5.4.19)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|P_l^n|^2}{4} (|U_l^0|^2 + |V_l^0|^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \frac{|P_l^n|^2}{2} (|U_l^n|^2 + |V_l^n|^2) \quad (5.4.20)$$

ここで、バーは面平均であり、 $U_l^n, V_l^n$  はそれぞれ  $u(\theta, \lambda), v(\theta, \lambda)$  の複素展開係数である。この式で、すべての  $l$  についての合計を求めれば、それは前項で扱ったエネルギーの東西波数スペクトルに帰着する。一方、同一の全波数  $l$  をもつすべての  $n$  についての合計をとることで、全波数  $l$  の関数としてエネルギースペクトルを解析することができる。

図 5.42 は東西波数  $n$  と全波数  $l$  の 2 次元波数空間でのエネルギーの分布を表す<sup>6)</sup>。縦軸が全波数  $l$ 、横軸が東西波数  $n$  であるが、 $l$  が  $n$  から始まることから三角形の波数空間になっている。これは全波数 18 までの三角波数切断で T18 と呼ばれるものである。全波数  $l$  が 5~10 付近にエネルギーのピークがあり、東西波数  $n=2\sim3$  のプラネタリー波と、 $n=5\sim10$  付近の総観規模擾乱にエネルギーピークが

みられる。

全波数  $l$  が 13 を超えるあたりではエネルギーレベルはほぼ、 $l$  のみの関数になっているという特徴がみられる。図 5.43 はこのエネルギーを全波数  $l$  の関数として表した分布図で、風の東西成分  $u$  も南北成分  $v$  も全波数  $l=10$  を超えたあたりから波数の -3 乗則に従うレッドノイズになっている。

プラネタリー波領域では、 $u$  の定常成分に大きなエネルギーがみられる一方、非定常成分は  $u$  も  $v$

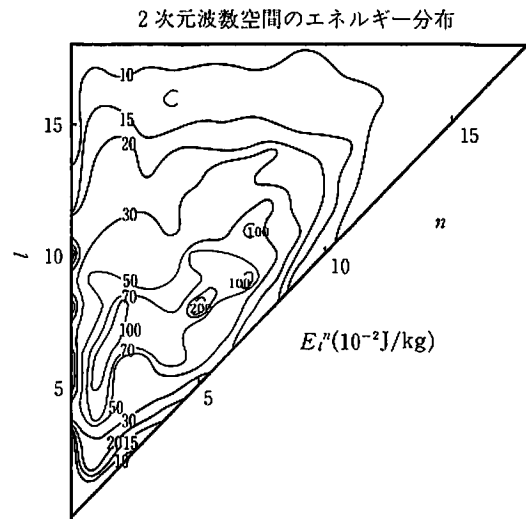


図 5.42 東西波数  $n$  と全波数  $l$  の 2 次元波数空間における非定常エネルギー ( $10^{-2}$  J/kg) の分布<sup>6)</sup>

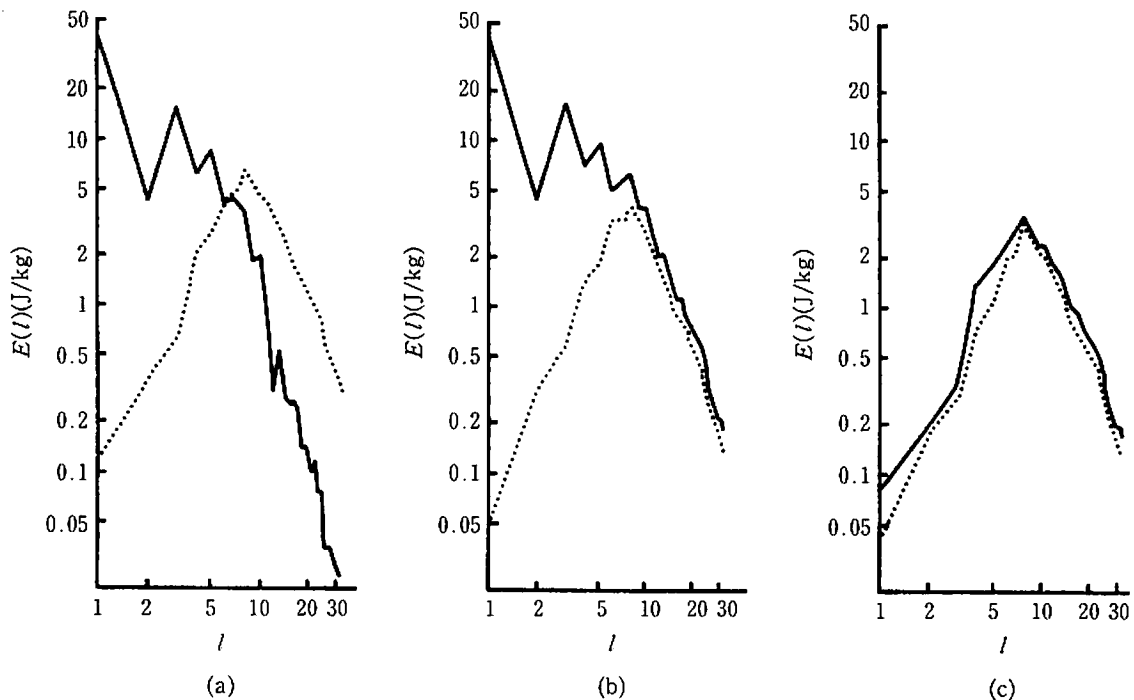


図 5.43 全波数空間における (a) 定常エネルギー (実線) と非定常エネルギー (点線) の分布, (b) 東西流エネルギー (実線) と南北流エネルギー (点線) の分布, (c) 非定常東西流エネルギー (実線) と非定常南北流エネルギー (点線) の分布<sup>6)</sup>

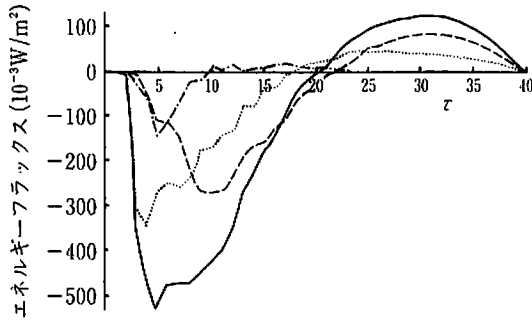


図 5.44 全波数空間におけるエネルギー輸送の分布  
( $10^{-3} \text{ W/m}^2$ )<sup>6)</sup>  
一点鎖線は定常成分, 破線は非定常成分, 点線は混合成分, 実線はそれらの合計を示す.

も全波数が小さくなるにつれてエネルギーレベルも減少する。これは、山岳などの力学効果で励起される定常波はプラネタリー波にエネルギーが集中しているのに対し、傾圧不安定などの力学的不安定で励起する温帯低気圧などは全波数  $l=5\sim 10$  に特徴的なピークをもつことを明らかにするものである。

前項同様に、運動エネルギーの定義式を時間微分することで、エネルギー方程式を導くことができる。ここでは、その詳細を省略し、結果のみを紹介する。図 5.44 (実線) は全波数空間上でみた運動エネルギーの輸送量であり、正の値は波数の大きな領域に向かって運動エネルギーが波数空間で輸送されていること(カスケード)を示し、逆に負の値は波数の小さな領域に向かって運動エネルギーが輸送されていること(逆カスケード)を示す。輸送量が図示されているので、その傾き(収束・発散)がエネルギーの変換量(図 5.41 の  $M_n$  と  $L_n$  の和)と対応する。全波数 20 付近にエネルギーの生成域があり、そこから一部が全波数 30 以上のメソスケールにカスケードし、別の一部が全波数 1~5 のマクロスケールに向かって逆カスケードしている。このように、球面調和関数展開を用いた大気の 2 次元スペクトル解析は大気の乱流的なスペクトル構造や、卓越する現象のスケールについて新たな知見をもたらしてくれる。また、球面調和関数展開は計算精度が高い割には計算が容易なため、現在でも気象要素を球面調和関数展開したスペクトルモデルが気象の数値予報モデルの主流である。

### 5.4.3 3次元ノーマルモード展開

球面調和関数は球座標で表したラプラス方程式や拡散方程式、波動方程式の固有解として登場する特種関数であるが、気象力学の分野では、球座標で表した渦度方程式の固有解としてそれが現れる。一

方、大気大循環を記述する方程式はプリミティブ方程式系と呼ばれるベクトル方程式であり、渦度方程式はその簡略近似式にすぎない。したがって、気象要素のスペクトル解析を行う際には、渦度方程式の固有解で展開するのではなく、大気固有の物理法則に即したプリミティブ方程式系の固有解で展開する方が望ましい場合がある。

プリミティブ方程式系は波動方程式、拡散方程式、ラプラスの式をその一部に取り込んだ複雑系であるが、線形化したその方程式系の解はハフ関数という特種関数の名前でも知られている。数値予報において、初期値に含まれる観測誤差が重力波として異常発達しないように、初期値から重力波を除去し発達を抑えるためにノーマルモードイニシャリゼーションと呼ばれる前処理を行うことがあるが、その際にこのハフ関数展開が用いられる。以下にそのハフ関数の導出と、大気の 3 次元スペクトル解析への応用について述べる。

はじめに、Tanaka<sup>7)</sup>に基づき、大気の 3 次元ノーマルモード関数について述べる。基本状態として静止大気を考え、摩擦・非断熱加熱がないとすると、微小擾乱に対する線形化されたプリミティブ方程式系は、以下のように表せる。

$$M \frac{\partial U}{\partial t} + LU = 0 \tag{5.4.21}$$

ここで、

$$U = (u, v, \phi)^T \tag{5.4.22}$$

$$M = \text{diag} \left( 1, 1, -\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \right) \tag{5.4.23}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -2\Omega \sin \theta & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ 2\Omega \sin \theta & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.4.24}$$

である。大気の状態を表す変数は、水平風  $u, v$ 、ジオポテンシャル偏差  $\phi$  の 3 つで、初めの 2 式は運動量保存則、3 番目の式は熱力学の第 1 法則である。それぞれが気圧 ( $p$ ) 座標系で書かれた 3 本の独立な方程式である。式に含まれるパラメータとして、 $a$  は地球の平均半径、 $\Omega$  は自転の角速度、 $R$  は気体定数、 $\gamma$  は静的安定度のパラメータで  $p$  のみの関数である。右肩の  $T$  は行列の転置を表し、 $\text{diag}$  は対角行列を表している。線形微分演算子  $L$  の  $\Omega$  を含む項はコリオリ力、それ以外は気圧傾度力と風の発散に関する項である。

この方程式で、従属変数  $U$  を水平方向と鉛直方



向に変数分離し、鉛直構造方程式と水平構造方程式を導くと次のような関係式を得る。

$$-\frac{d}{dp} \left( \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m}{dp} \right) = \frac{1}{gh_m} G_m \quad (5.4.25)$$

$$(Y_m^{-1} L X_m) \mathbf{H}_{nlm} = i \sigma_{nlm} \mathbf{H}_{nlm} \quad (5.4.26)$$

ここで、 $G_m$  は鉛直構造関数、 $\mathbf{H}_{nlm}$  は水平構造関数（ハフ関数）と呼ばれ、適当な境界条件のもとで解くことができる。添え字の  $nlm$  はそれぞれ東西波数、南北モード番号、鉛直モード番号を表す。鉛直モード  $m=0$  は、順圧モード、または外部モードと呼ばれ、鉛直方向に節をもたず、ほとんど全層で値が変化しないので、鉛直波数 0 に対応する。

これに対し、鉛直モード  $m>0$  は傾圧モード、または内部モードと呼ばれる。数値解としては、 $m$  番目のモードは鉛直方向に  $m$  個の節をもつ。両式の変数  $h_m$  は等価深度と呼ばれ、鉛直構造方程式の固有値から求まる量である。従属変数  $U$  と方程式全体に次元をもたせるためのスケール行列  $X_m$  と  $Y_m$  は重力  $g$  と等価深度  $h_m$  を用いて次のように定義される。

$$X_m = \text{diag}(\sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, gh_m) \quad (5.4.27)$$

$$Y_m = 2\Omega \text{diag}(\sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, 1) \quad (5.4.28)$$

上の水平構造方程式はラプラスの潮汐方程式とも呼ばれ、ハフ関数  $\mathbf{H}_{nlm}$  と固有振動数  $\sigma_{nlm}$  はこの式の固有解として得られる。この解の構造は Longuet-Higgins<sup>1)</sup> や Kasahara<sup>2)</sup> により詳しく調べられている。ハフ関数は以下のハフベクトル関数  $\Theta_{nlm}(\theta)$  と三角関数  $\exp(in\lambda)$  とのテンソル積として表されるベクトルである。

$$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) = \Theta_{nlm}(\theta) \exp(in\lambda) \quad (5.4.29)$$

$$\Theta_{nlm}(\theta) = (U, -iV, Z)_{nlm}^T(\theta) \quad (5.4.30)$$

ここで、 $(U_{nlm}, -iV_{nlm}, Z_{nlm})^T$  の 3 成分がベクトルの南北構造を表現し、南北風成分には位相を  $\pi/2$  回すために虚数単位  $i$  がかけてある。南北モードは 3 種の異なったモードから構成される。1 つは低周波の西進するロスビーモードで、 $l_R$  で区別する。残りの 2 つは高周波の西進と東進の重力波モードで、それぞれ  $l_W$  と  $l_E$  で区別する。簡単のために、これらをまとめて  $l$  で表記する。

3 次元ノーマルモード関数を  $\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p)$  と表すと、それは鉛直構造関数  $G_m(p)$  と水平構造関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  のテンソル積として定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) &= G_m(p) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \\ &= G_m(p) \Theta_{nlm}(\theta) \exp(in\lambda) \end{aligned} \quad (5.4.31)$$

この 3 次元ノーマルモード関数は、以下で定義される内積のもとで正規直交関係を満たし、完全系をなすことが知られている。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{\Pi}_{nlm}, \mathbf{\Pi}_{n'l'm'} \rangle &= \frac{1}{2\pi p_s} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{p_s} \mathbf{\Pi}_{nlm} \\ &\quad \cdot \mathbf{\Pi}_{n'l'm'}^* \cos \theta \, dp d\lambda d\theta \\ &= \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (5.4.32)$$

ここで、 $p_s$  は基準となる海面気圧である。この 3 次元ノーマルモード関数の正規直交性により、従属変数  $U$  は次のように展開可能となる。そして、その複素展開係数  $w_{nlm}$  は以下の内積を計算することにより求まる。

$$U(\lambda, \theta, p, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} w_{nlm}(t) X_m \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (5.4.33)$$

$$w_{nlm}(t) = \langle U, X_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm} \rangle \quad (5.4.34)$$

この 2 式が、3 次元ノーマルモード関数展開のペアを構成する。考え方としては、1 次元の東西波数展開、2 次元の球面調和関数展開と同じであり、プリミティブ方程式系から求まる 3 次元ノーマルモード関数の正規直交完全系の性質を利用したものである。2 次元球面上でスケールに序列を与えるために、前項ではラプラスの微分方程式の固有解を求め、その固有値がモードのスケールを代表することを利用した。3 次元大気についても、3 次元スケールに序列を与えるための最適な方法は、適当な微分方程式の固有解の特徴を用いて 3 次元スケールを定量的に評価することである。東西波数  $n$ 、南北モード  $l$ 、鉛直モード  $m$  はそれぞれの方向のモードのスケールパラメータであるが、3 次元スケールパラメータとしてはハフ関数と対になって得られる固有振動数  $\sigma_{nlm}$  が上記の条件を満たしている。例えば、西進するロスビーモードについていえば、プラネタリー波のようにスケールが大きいモードほど西進速度が増大するので、 $\sigma_{nlm}$  の大きさは増大する。（ただし一部に例外がある。）最も大きいロスビーモードは  $l_R=0$  の混合ロスビー重力波と呼ばれ、東西波数  $n=1$  の順圧モード  $m=0$  で約 1.2 日の周期をもつ。 $l_R$  が大きくなると西進速度は遅くなり、 $\sigma_{nlm}$  の大きさは減少する。一方、最も大きい重力波は  $l_E=0$  のケルビン波と呼ばれ、東西波数  $n=1$  の順圧モード  $m=0$  で約 1.4 日の周期をもつ。重力波は水平スケールが大きいほど振動数は小さくなるが、鉛直スケールが大きくなるほど振動数は大きくなるという特徴がある。東西波数 0 のロスビー波というものは存在しないが、重力波は存在し、最もスケールの大きなもので約 0.8 日の周期をもつ。

次に、全球大気で質量積分した大気大循環の全エネルギー  $K+A$  を、3 次元ノーマルモード関数に展開し、エネルギーの 3 次元スペクトルを解析する

手法について紹介する。これは前項の Saltzman<sup>9)</sup> によるスペクトルエネルギー論を3次元に拡張したものであり、以下ではノーマルモードエネルギー論と呼ぶ。大気の運動を支配するプリミティブ方程式系を行列を用いて形式的に書くと次のようになる。

$$M \frac{\partial U}{\partial t} + LU = N + F \quad (5.4.35)$$

ここで、 $N$ は移流項や曲率項を含むすべての非線形項であるが、たかだか変数の2次の積となっている。 $F$ は運動方程式における粘性摩擦と熱力学第1法則における非断熱加熱率を含む外力項である。右辺を0とおいて線形方程式を解いたものが、3次元ノーマルモード関数であった。したがって、このプリミティブ方程式を3次元ノーマルモード展開によりスペクトル表示すると、途中計算は複雑であるが形の上では簡単な次のようなスペクトルモデルになる。

$$\frac{dw_i}{dt} + i\sigma_i w_i = -i \sum_{jk} r_{ijk} w_j w_k + f_i \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (5.4.36)$$

ここで、 $w_i$ と $f_i$ は従属変数 $U$ と外力項 $F$ の複素展開係数、 $\sigma_i$ はラプラスの潮汐方程式を解いて得られる固有振動数、 $\tau$ は $2\Omega$ で無次元化した時間、 $i$ は虚数単位、 $r_{ijk}$ は非線形相互作用にかかる相互作用係数(実数)である。添え字の $i$ は3つの添え字 $nlm$ を簡単のために1文字で置き換えたもので、 $j$ や $k$ も同じ意味で用いてある。初期値として $w_i(\tau_0)$ を与え、外力項が計算できれば、このスペクトルモデルは簡単に時間積分することができ、将来の $w_i(\tau)$ の値をスペクトル空間から物理空間に変換すれば、将来の大気の3次元構造が得られる。これは気象の数値予報そのものであり、この方程式を時間積分することで大気大循環モデルとして多くの研究に応用することができる。

次に、大気的全エネルギーを $E=K+A$ とすると、その全球質量積分(バーで表す)は3次元ノーマルモード展開係数 $w_i$ を用いて以下のように展開できる。

$$\bar{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} E_{nlm} \quad (5.4.37)$$

$$E_{0lm} = \frac{1}{4} \rho_s h_m |w_{0lm}|^2 \quad (n=0) \quad (5.4.38)$$

$$E_{nlm} = \frac{1}{2} \rho_s h_m |w_{nlm}|^2 \quad (n \neq 0) \quad (5.4.39)$$

東西波数 $n$ 、南北モード $l$ 、鉛直モード $m$ の3つの指標で表される3次元エネルギースペクトルをおのこの指標に沿って調べることで、全エネルギーの東西波数スペクトル、南北スペクトル、鉛直スペ

クトルを別々に解析することができる。さらに、このエネルギーの定義式を時間で微分し、 $w_{nlm}$ の時間変化項に上記スペクトルモデルの時間発展を代入することで、3次元スペクトル空間における以下のエネルギー方程式を導くことができる。

$$\frac{dE_{nlm}}{dt} = N_{nlm} + F_{nlm} \quad (5.4.40)$$

ここで、 $F_{nlm}$ は外力項によるエネルギーの生成消散を表し、 $N_{nlm}$ は非線形項によるモード間の相互作用を表す。 $N_{nlm}$ は全波数で合計すると0になる量である。これらの項をデータに基づき計算することで、3次元スペクトル空間のどのスケールでエネルギーが生成され、それが非線形相互作用により、どのスケールに輸送されて散逸するかを定量的に調べることができる。

図5.45は $E_{nlm}$ に対しすべての鉛直モードと南北モードを合計することで得られる全エネルギーの東西波数スペクトルである。ただし、ここではロスビーモードと東進・西進する重力波モードを分離して表示してある。全エネルギーのほとんどがロスビーモードに含まれ、重力波モードに含まれるのはわずか1%程度にすぎないことがわかる。ロスビーモードのエネルギースペクトルは東西波数展開による結果( $E_n = K_n + A_n$ )とほぼ一致する。図は省略するが、東西波数4~10付近に傾圧不安定に伴う帯状傾圧成分からのエネルギーの供給があり、それがメソ擾乱にカスケードする一方でプラネタリー波に逆カスケードしている。このエネルギーの逆カ

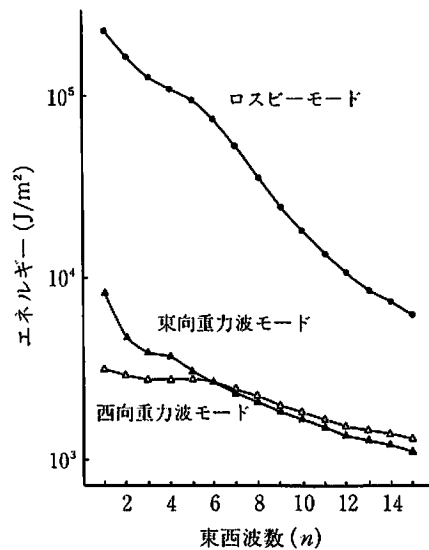


図5.45 東西波数空間における全エネルギー $E_n$  ( $J/m^2$ )の分布<sup>9)</sup> ロスビーモードと東進・西進する重力波モードに分離した結果を示す。

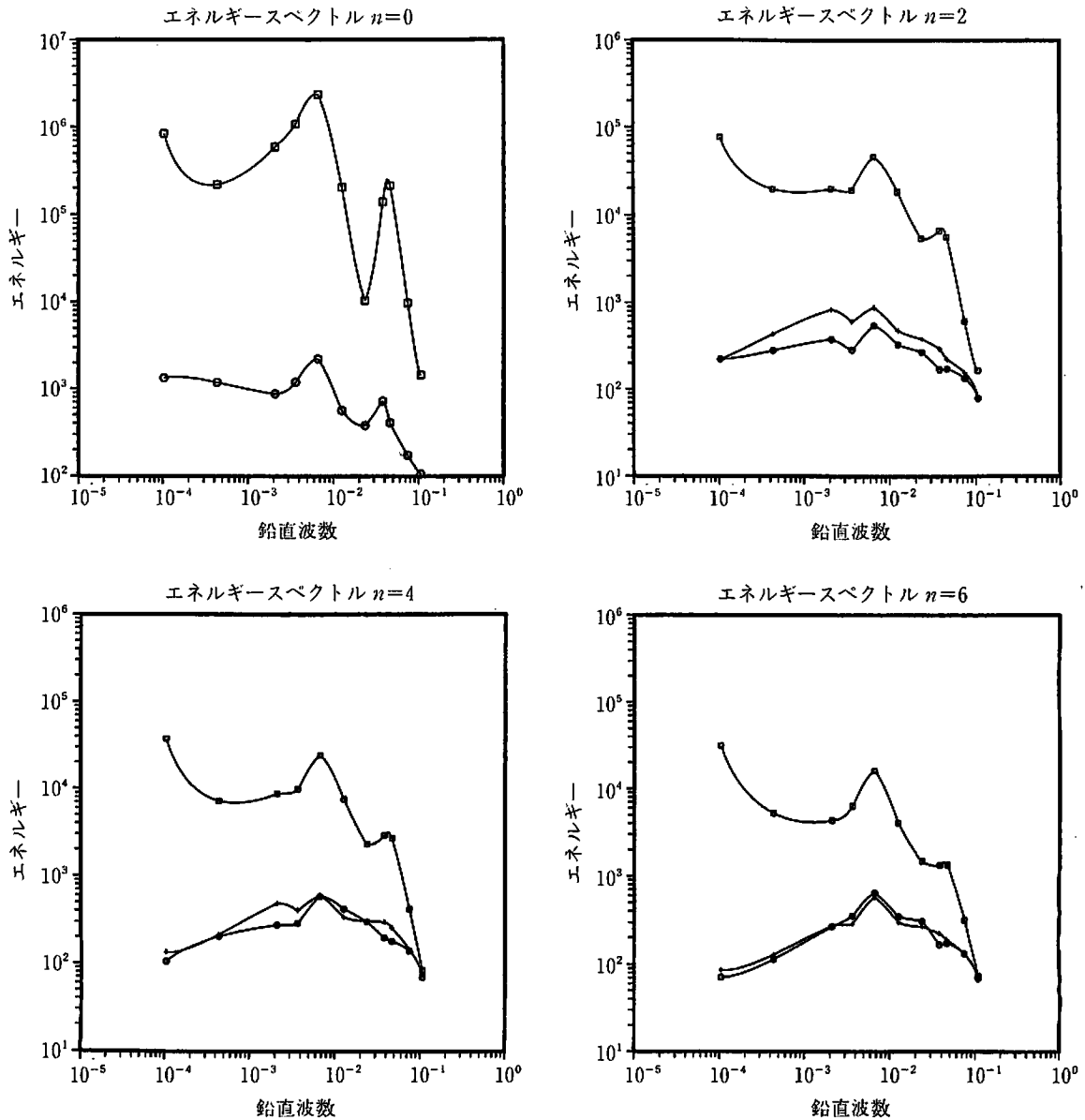


図 5.46 東西波数  $n=0, 2, 4, 6$  についての鉛直波数空間における全エネルギー  $E_m$  (J/m<sup>2</sup>) の分布<sup>9)</sup>  
3本の線は、ロスビーモードと東進・西進する重力波モードについての結果を示す。

スケードは、2次元乱流の特徴として大気の高圧成分で生じている。

図 5.46 はエネルギーの鉛直スペクトルを東西波数  $n=0, 2, 4, 6$  について示している。三角関数における東西波数  $n$  や球面調和関数における全波数  $l$  はそれぞれの構造方程式の固有値 (の平方根) と直接関係しているが、鉛直モード  $m$  はモードの順番を表すだけで、固有値と直接関係はない。鉛直スケールを定量的に表す固有値は等価深度  $h_m$  であるから、その逆数を鉛直波数として採用してある。図中の3本の線は、ロスビーモードと東進および西進する重力波モードについての結果である。

この結果からわかることは、帯状成分  $n=0$  の  $h_m=200$  m 付近にエネルギーの最大のピークがあ

り、大気の高圧性の特徴的なスケールが定量化されている。 $n=2, 4, 6$  では  $h_m=200$  m 付近のピークよりも、 $h_m=10000$  m 付近の大気の高圧成分により多くのエネルギーが集まっている。モード間のエネルギー流の解析結果によると、大気の高圧性は  $h_m=200$  m 付近の高圧成分からこの  $h_m=10000$  m 付近の高圧成分へと流れており、高圧成分に蓄えられたエネルギーがブロッキング現象や大気の高周期変動の重要なエネルギー源になっていることが示唆されている。エネルギーのほとんどはロスビーモードに含まれ、重力波モードに含まれるものは量的にはわずかである。しかし、鉛直モードの大きいところでは、ロスビーモードと同程度のエネルギーが重力波モードにも含まれているようであるが、これが

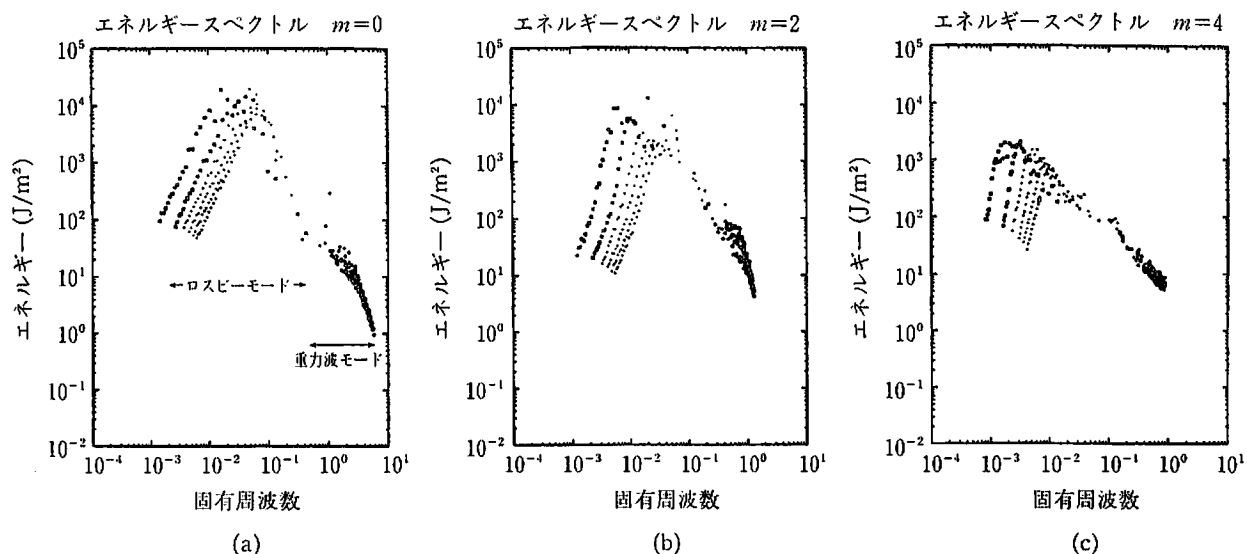


図5.47 3次元スケールパラメータ  $\sigma_{nlm}$  の関数として表した全エネルギー  $E_{nlm}(\text{J m}^{-2})$  の分布<sup>10)</sup>  
鉛直モード  $m=0, 2, 4$  について、それぞれ東西波数  $n=1\sim 6$  までの  $l_R < 26, l_W < 12, l_E < 12$  の結果を1枚の図に載せている。

大気の実態を表すのか、観測誤差によるものなのかは定かでない。

図5.47はエネルギースペクトル  $E_{nlm}$  を3次元スケールパラメータである固有振動数  $\sigma_{nlm}$  の関数として表現した3次元エネルギースペクトルであり、鉛直モード  $m=0, 2, 4$  についてそれぞれ東西波数  $n=1\sim 6$  の  $l_R < 26, l_W < 12, l_E < 12$  の結果を1枚の図に載せている。順圧成分 ( $m=0$ ) に注目すると、低周波数のロスビーモードは  $\sigma_{nlm}$  の3乗のラインに乗るようなスペクトル分布になっている。 $\sigma_{nlm}$  の代わりに  $c_{nlm} = \sigma_{nlm}/n$  で表される位相速度の関数としてこのスペクトル分布を表示すると、東西波数ごとに分れているすべてのエネルギースペクトルが1本の線上に乗るといふ特徴がみられる。つまり、低周波数のロスビーモードのエネルギースペクトルは、 $c_{nlm}$  のみの関数になっている。エネルギーピークは  $\sigma_{nlm} = 0.1$  付近に存在し、それよりも周波数が大きい(つまりスケールの大きい)ロスビーモードのエネルギーレベルは減少し始める。低周波数帯は指数法則に乗るスペクトルの特徴からして乱流化しているが、ピーク周波数を越える領域のモードは独立した波としての特徴を示しているようである。 $l_R = 0$  の混合ロスビー重力波のエネルギーはピークの1/100程度であり、その先の  $\sigma_{nlm} = 1.0$  を越える高周波数帯には重力波モードのエネルギースペクトルが  $\sigma_{nlm}$  の  $-5/3$  乗のラインに乗るように分布している。ただし、重力波モードのエネルギーレベルはピークの1/1000程度である。傾圧モード ( $m \neq 0$ ) においても全体的な特徴は似通っており、エネルギーピークはより低周波数帯に移動している。それ

に伴い低周波側のスペクトルこう配は急になり、逆に高周波側のこう配は緩くなる。

ランダムに変動しているかのようにみえる大気大循環の波や渦が、実はこのように制御されたエネルギースペクトルの束縛条件のもとで変動していることが、この3次元エネルギースペクトルの解析結果から明らかになった。ノーマルモードエネルギー論では、ここで紹介されたエネルギースペクトルがどのようにして変化し、平衡状態が維持されるかというエネルギー収支についても詳細に解析することができる。東西波数間の相互作用、鉛直モード間のエネルギー流の他にロスビーモードと重力波モードの間のエネルギー流などの興味深い解析結果も示すことができる。

[田中 博]

#### 参考文献

- 1) 小笠原範光: 気象庁, NMC および ECMWF 客観解析データを用いた全球大気のスベクトルエネルギー収支の比較研究. 筑波大学第一学群自然科学類卒業論文, p. 54, 1995.
- 2) Kasahara, A.: Normal modes of ultralong waves in the atmosphere, *Mon. Wea. Rev.*, **104**, 669-690, 1976.
- 3) Kung, E. C.: Spectral energetics of the general circulation and time spectra of transient waves during the FGGE year, *J. Climate*, **1**, 5-19, 1988.
- 4) Longuet-Higgins, M. S.: The eigenfunction of Laplace's tidal Equation over a sphere, *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, **A262**, 511-607, 1968.
- 5) Saltzman, B.: Equations Governing the Energetics of the Larger Scales of Atmospheric Turbulence in the Domain of Wave Number, *J. Meteor.*, **14**, 513-523, 1957.