# オイラー表示とラグランジュ表示

201510770 木下賢

# オイラー表示

- 空間に固定された点から見た運動の表示を言う
- $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$

# オイラー微分

- 空間に固定された点における物理量の時間変化
- 局所変化

# オイラー微分

- $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$
- $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(x,y,z,t+\Delta t) - \varphi(x,y,z,t)}{\Delta t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$
- $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \Rightarrow$定常的

# ラグランジュ表示

- 各粒子とともに移動する観察者から見た運動の表示を言う
- 物体の位置$(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$⇒
  物理量$\varphi = \varphi(t)$とも考えられる？

# ラグランジュ微分

- 移動する粒子に沿った物理量の変化
- 物質微分

# ラグランジュ微分

- $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$
- 時刻$t$に位置$(x, y, z)$に存在する粒子が速度$(u, v, w)$を持つとする
- $\Delta\varphi = \varphi(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - \varphi(x, y, z, t)$

$$= u\Delta t\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\Delta t\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\Delta t\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \Delta t\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

- $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}$

# ラグランジュ微分

- $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\varphi$
- $\frac{d\varphi}{dt} = 0 \Rightarrow \varphi = C$(定数)

# 連続の式 (オイラー的)

- $\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV = -\iint_S \rho\,\vec{v} \cdot \vec{n}\mathrm{dS} = -\iiint_V \nabla \cdot (\rho\,\vec{v})\mathrm{dV}$
- $\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{dV}$
- $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho\vec{v})$

# 連続の式（ラグランジュ的）

- $\frac{dm}{dt} = \frac{d\rho V}{dt} = \rho\frac{dV}{dt} + V\frac{d\rho}{dt}$
- $\frac{dV}{dt} = V\nabla \cdot \vec{v}$
- $\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla \cdot \vec{v}$
- $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\rho$
- $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\rho\nabla \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \nabla\rho = -\nabla \cdot (\rho\vec{v})$
- $\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \rho = C$(定数)(非圧縮流体) $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$