2009/4/13 大循環ゼミ 用語解説

Wavelet

生命環境科学研究科
地球科学専攻 2年
大橋 正宏

はじめに

- フーリエ解析(200年前に発見)

…信号を正弦波の重ね合わせに分解
→正弦波は場所に依らず一定の振幅を持っているため，周波数が場所ごとに異なる状況は記述不可能

- ウェーブレット解析(20年前に発見)

…信号を位置とスケールの2つで指定させる「ウェーブレット」と呼ぶ波形の重ね合わせに分解
→各成分の振幅が場所ごとに変化

階層的近似

$$f^{(0)}(x) = \begin{cases} c_0 & 0 \le x < 1 \\ c_1 & 1 \le x < 2 \\ \vdots & \vdots \\ c_{N-1} & N-1 \le x < N \end{cases}$$

$$f^{(1)}(x) = \begin{cases} c_0^{(1)} & (= (c_0 + c_1)/2) & 0 \le x < 2 \\ c_1^{(1)} & (= (c_2 + c_3)/2) & 2 \le x < 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{N/2-1}^{(1)} & (= (c_{N-2} + c_{N-1})/2) & N-2 \le x < N \end{cases}$$

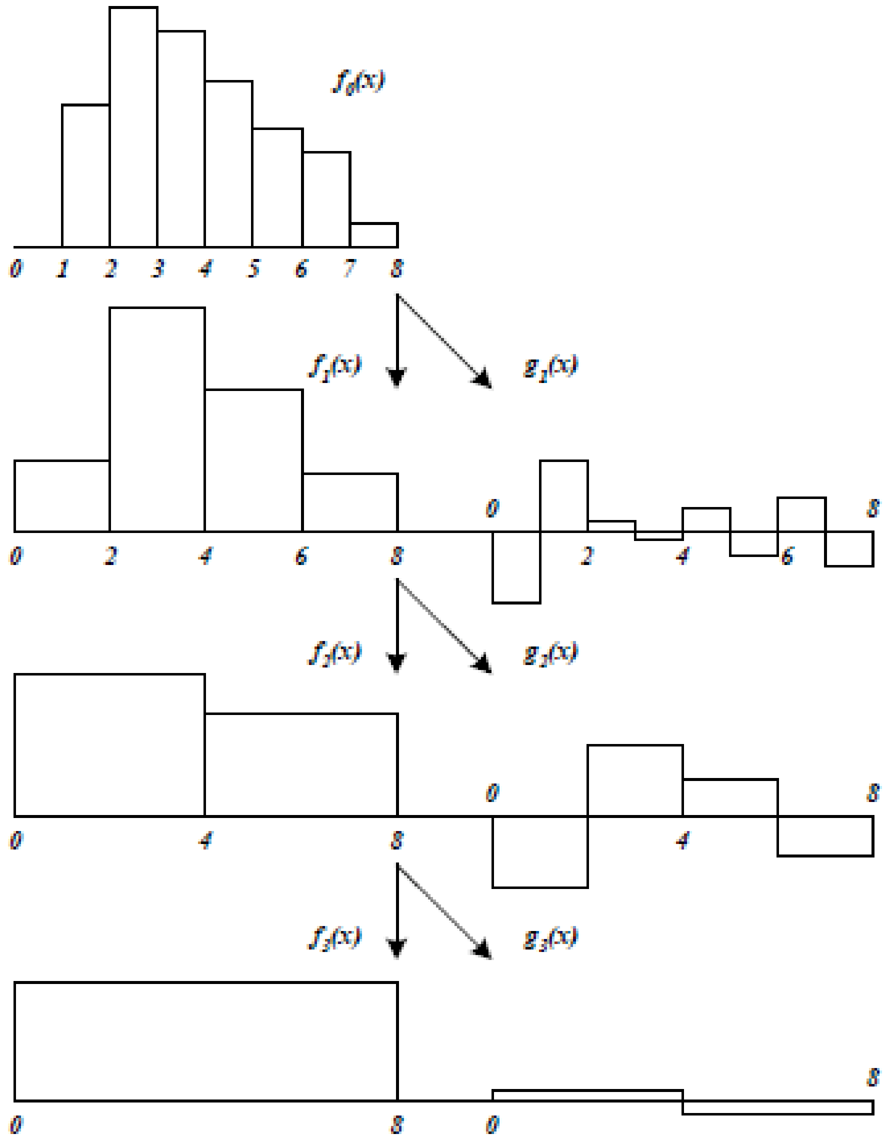
$$f^{(2)}(x) = \begin{cases} c_0^{(2)} & (= (c_0^{(1)} + c_1^{(1)})/2) & 0 \le x < 4 \\ c_1^{(2)} & (= (c_2^{(1)} + c_3^{(1)} / 2)) & 4 \le x < 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{N/4-1}^{(2)} & (= (c_{N/2-2}^{(1)} + c_{N/2-1}^{(1)})/2) & N-4 \le x < N \end{cases}$$

平滑化

$$f^{(n)}(x) = c_0^{(n)} (= \frac{c_0^{(n-1)} + c_1^{(n-1)}}{2}), \quad 0 \le x < N$$

遂次的に様々な解像度の信号を作成

多重解像度分解



$$f^{(0)}(x) = g^{(1)}(x) + f^{(1)}(x)$$

スケール2の変動(フーリエ解析の波長2)

$$f^{(1)}(x) = g^{(2)}(x) + f^{(2)}(x)$$

スケール4の変動(フーリエ解析の波長4)

$$f^{(2)}(x) = g^{(3)}(x) + f^{(3)}(x)$$

スケール8の変動(フーリエ解析の波長8)

⋮

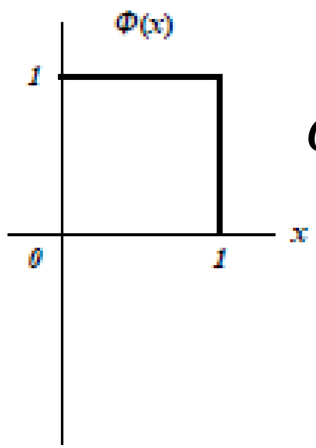
$$f^{(n-1)}(x) = g^{(n)}(x) + f^{(n)}(x)$$

スケールNの変動(フーリエ解析の波長N)

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= g^{(1)}(x) + f^{(1)}(x) \\ &= g^{(1)}(x) + g^{(2)}(x) + f^{(2)}(x) \\ &= g^{(1)}(x) + g^{(2)}(x) + g^{(3)}(x) + f^{(3)}(x) \\ &\vdots \\ &= g^{(1)}(x) + g^{(2)}(x) + g^{(3)}(x) + g^{(4)}(x) + \cdots + g^{(n)}(x) + f^{(n)}(x) \end{aligned}$$

信号を異なるスケールの成分へ分解

スケーリング関数



$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$f^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(0)} \phi(x-k), \quad c_k^{(0)} = c_k$$

$$f^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{N/2-1} c_k^{(1)} \phi(\frac{x}{2}-k), \quad c_k^{(1)} = \frac{c_{2k}^{(0)} + c_{2k+1}^{(0)}}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = \sum_{k=0}^{N/4-1} c_k^{(2)} \phi(\frac{x}{4}-k), \quad c_k^{(2)} = \frac{c_{2k}^{(1)} + c_{2k+1}^{(1)}}{2}$$

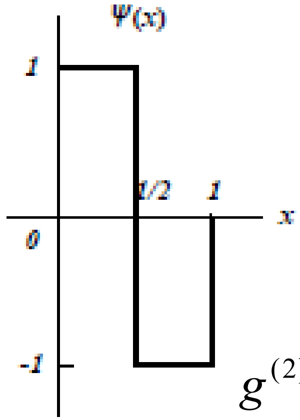
$$\vdots$$

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{N/2^j-1} c_k^{(j)} \phi(\frac{x}{2^j}-k), \quad c_k^{(j)} = \frac{c_{2k}^{(j-1)} + c_{2k+1}^{(j-1)}}{2}$$

信号をあるスケールで近似
→そのスケールのスケーリング関数を次々と平行移動し，信号をそれらの線形結合で表す

近似を次第に粗くする
→そのスケーリング関数幅を次第に広げる

ウェーブレット



$$\psi(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1/2\\ -1 & 1/2\le x<1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$g^{(1)}(x)=f^{(0)}(x)-f^{(1)}(x)$$

$$=\begin{cases}(c_0^{(0)}-c_1^{(0)})/2 & 0\le x<1\\ -(c_0^{(0)}-c_1^{(0)})/2) & 1\le x<2\\ (c_2^{(0)}-c_3^{(0)})/2 & 2\le x<3\\ -(c_2^{(0)}-c_3^{(0)})/2 & 3\le x<4\\ \vdots & \vdots\\ (c_{N-1}^{(0)}-c_{N-2}^{(0)})/2 & N-2\le x<N-1\\ -(c_{N-1}^{(0)}-c_{N-2}^{(0)})/2 & N-1\le x<N\end{cases}$$

$$=\sum_{k=0}^{N/2-1}d_k^{(1)}\psi(\frac{x}{2}-k)$$

$$d_k^{(1)}=\frac{c_{2k}^{(0)}-c_{2k+1}^{(0)}}{2}$$

$$g^{(2)}(x)=f^{(1)}(x)-f^{(2)}(x)$$

$$=\begin{cases}(c_0^{(1)}-c_1^{(1)})/2 & 0\le x<2\\ -(c_0^{(1)}-c_1^{(1)})/2) & 2\le x<4\\ \vdots & \vdots\\ (c_{N-1}^{(1)}-c_{N-2}^{(1)})/2 & N-4\le x<N-2\\ -(c_{N-1}^{(1)}-c_{N-2}^{(1)})/2 & N-2\le x<N\end{cases}$$

$$=\sum_{k=0}^{N/4-1}d_k^{(2)}\psi(\frac{x}{4}-k)$$

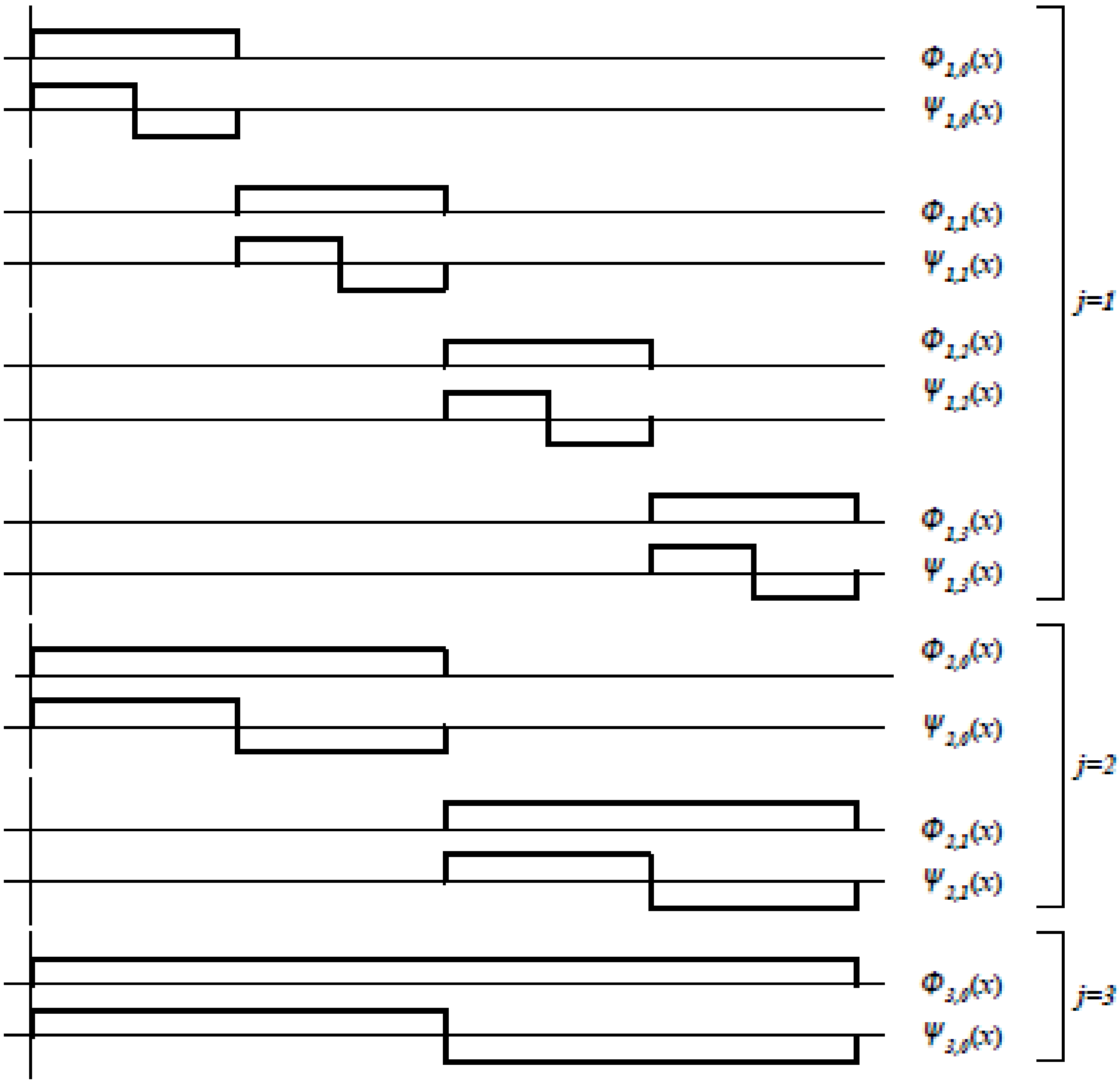
$$d_k^{(2)}=\frac{c_{2k}^{(1)}-c_{2k+1}^{(1)}}{2}$$

$$g^{(j)}(x)=\sum_{k=0}^{N/2^j-1}d_k^{(j)}\psi(\frac{x}{2^j}-k),\quad j=1,\dots,n$$

$$d_k^{(j)}=\frac{c_{2k}^{(j-1)}-c_{2k+1}^{(j-1)}}{2}$$

ウェーブレット母関数を次々と平行移動

スケールを大きくするにつれて横に拡大



$\Phi_{1,0}(x)$
$\Psi_{1,0}(x)$
$\Phi_{1,1}(x)$
$\Psi_{1,1}(x)$
$\Phi_{1,2}(x)$
$\Psi_{1,2}(x)$
$\Phi_{1,3}(x)$
$\Psi_{1,3}(x)$
$j=1$
$\Phi_{2,0}(x)$
$\Psi_{2,0}(x)$
$\Phi_{2,1}(x)$
$\Psi_{2,1}(x)$
$j=2$
$\Phi_{3,0}(x)$
$\Psi_{3,0}(x)$
$j=3$

ウェーブレット変換

$$\left\|\psi_k^{(j)}\right\| = 2^{j-1}, \quad \left\|\phi_0^{(n)}\right\| = \sqrt{N}$$ ノルム

$$\left\{\psi_k^{(j)}(x)/2^{j-1}\right\}, \quad \phi_0^{(n)}(x)/\sqrt{N}$$ 正規直交基底

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} g^{(j)}(x) + f^{(n)}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{N/2^j-1} d_k^{(j)} \psi_k^{(j)}(x) + c_0^{(n)}$$

$$d_k^{(j)} = \frac{1}{2^j}\int_0^N f(x)\psi_k^{(j)}(x)dx, \quad c_0^{(n)} = \frac{1}{N}\int_0^N f(x)dx$$ 展開係数

与えられた関数f(x)から展開係数を計算，およびその展開係数からf(x)の値を計算

下降サンプリングと上昇サンプリング

$$c_k^{(1)} = \frac{c_{2k}^{(0)} + c_{2k+1}^{(0)}}{2}, \quad d_k^{(1)} = \frac{c_{2k}^{(0)} - c_{2k+1}^{(0)}}{2}, \quad k = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

$$c_k^{(2)} = \frac{c_{2k}^{(1)} + c_{2k+1}^{(1)}}{2}, \quad d_k^{(2)} = \frac{c_{2k}^{(1)} - c_{2k+1}^{(1)}}{2}, \quad k = 0, \ldots, \frac{N}{4} - 1$$

$$c_k^{(3)} = \frac{c_{2k}^{(2)} + c_{2k+1}^{(2)}}{2}, \quad d_k^{(3)} = \frac{c_{2k}^{(2)} - c_{2k+1}^{(2)}}{2}, \quad k = 0, \ldots, \frac{N}{8} - 1$$

$$\vdots$$

$$c_k^{(n)} = \frac{c_{2k}^{(n-1)} + c_{2k+1}^{(n-1)}}{2}, \quad d_k^{(n)} = \frac{c_{2k}^{(n-1)} - c_{2k+1}^{(n-1)}}{2}, \quad k = 0$$

- 下降サンプリング

サンプル値から展開係数を計算

演算は4(N-1)回

$$c_{2k}^{(n-1)} = c_k^{(n)} + d_k^{(n)}, \quad c_{2k+1}^{(n-1)} = c_k^{(n)} - d_k^{(n)}, \quad k = 0$$

$$c_{2k}^{(n-2)} = c_k^{(n-1)} + d_k^{(n-1)}, \quad c_{2k+1}^{(n-2)} = c_k^{(n-1)} - d_k^{(n-1)}, \quad k = 0,1$$

$$c_{2k}^{(n-3)} = c_k^{(n-2)} + d_k^{(n-2)}, \quad c_{2k+1}^{(n-3)} = c_k^{(n-2)} - d_k^{(n-2)}, \quad k = 0,1,2,3$$

$$\vdots$$

$$c_{2k}^{(0)} = c_k^{(1)} + d_k^{(1)}, \quad c_{2k+1}^{(0)} = c_k^{(1)} - d_k^{(1)}, \quad k = 0,1,2, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

- 上昇サンプリング

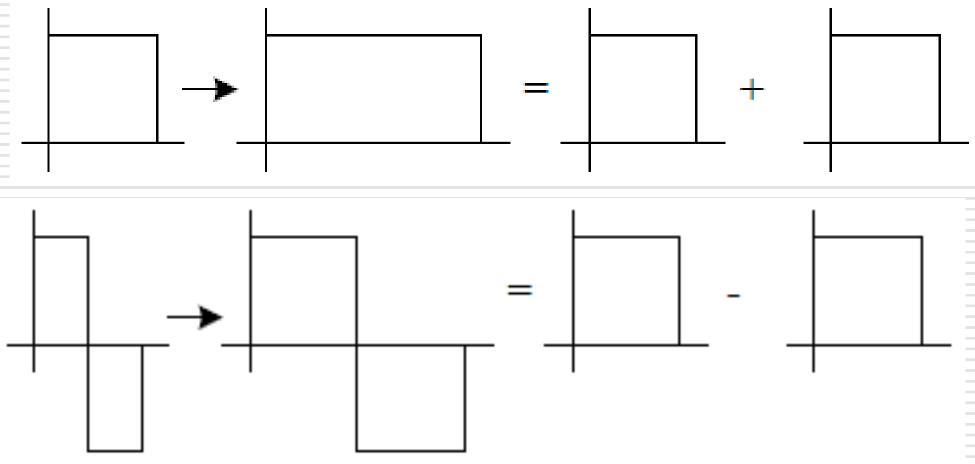
展開係数からサンプル値を計算

演算は2(N-1)回

一般のウェーブレット

$$\phi(\frac{x}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \phi(x-k)$$

$$\psi(\frac{x}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \phi(x-k)$$



$$c_k^{j+1} = \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{\infty} g_{2k-l} c_l^{(j)}, \quad d_k^{j+1} = \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{2k-l} c_l^{(j)}, \quad j = 0,1,2,\ldots$$

下降サンプリングのアルゴリズム

$$c_k^{(j)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (p_{k-2l} c_l^{(j+1)} + q_{k-2l} d_l^{(j+1)}), \quad j = \ldots,3,2,1,0$$

上昇サンプリングのアルゴリズム

まとめ

- ウェーブレット解析は，ウェーブレット母関数を平行移動したり拡大縮小したりして作られるウェーブレットからなる直交基底(フーリエ解析とは全く異なる基底)を用い，時間の変化と変動のスケールの変化の両方を表現
- この基底に展開することは，スケーリング関数を用いて次々と近似を粗くする過程で，近似する前と後の差を取り出すことに相当
- ウェーブレットによる展開は異なるスケールの成分を順番に取り出すことになり，多重解像度分解と呼ばれる
- 展開係数を計算するウェーブレット変換は下降サンプリングおよび上昇サンプリングによって簡単に計算可能

参考文献

- 金谷健一, 2003: これなら分かる 応用数学教室 最小二乗法からウェーブレットまで. 共立出版, 270pp.