4月22日　大循環ゼミ

用語解説
～ロスビー・ハウルビッツ波～
（ルジャンドル陪方程式）

渋谷　亮治

１．はじめに

- 回転する力学系の浅水方程式を２次元非圧縮流体の条件で解いた波動解がロスビー波である。

- 惑星全体規模の波（緯度方向に周期解、両極で経度方向の境界条件）を渦度方程式を用いて球面座標系で解いた波動解をその発見者にちなんでロスビー・ハウルビッツ波と呼ぶ。解は球面調和関数で表す。

２．支配方程式と解の仮定

- 回転球面上の2次元非圧縮の渦度方程式
- 流線関数を従属変数とする

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 y + \frac{1}{a^2}\frac{\partial\left(y, \nabla^2 y\right)}{\partial(l, m)} + \frac{2\Omega}{a^2}\frac{\partial y}{\partial l} = 0$$

- 基本場をとして静止解 $\bar{u} = \bar{v} = 0$ 与える
- $y = \bar{y} + y'$ として線形化

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 y' + \frac{2\Omega}{a^2}\frac{\partial y'}{\partial l} = 0$$

- 波動解を与える

$$y'(l, m, t) = \mathrm{Re}\left[\Psi(m)\exp^{i(ml - wt)}\right] \quad ①$$

- これを代入する

y ：流線関数

a ：地球の半径

Ω ：地球自転角速度

l ：経度

q ：緯度； $m = \sin q$

m ：東西波数（無次元）

w ：振動数

x,yがu,vに関して微分可能であるときヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

２．支配方程式と解の仮定

- 代入すると

$$\frac{d}{dm}\left\{\left(1-m^2\right)\frac{d}{dm}\right\}\Psi(m)-\left(\frac{m^2}{1-m^2}-\frac{2\Omega m}{w}\right)\Psi(m)=0$$

- この式は以下のルジャンドルの陪微分方程式に帰着できる

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]+\left(-l-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0 \qquad ②$$

- 以下、この解について考える

３．ルジャンドル陪微分方程式の解の導出

- ルジャンドルの陪微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]+\left(-l-\frac{m^2}{\underline{1-x^2}}\right)y=0 \qquad ③$$

- x=1,-1で特異点にならないように以下の置換を用いる。

$$1)\ z=1-x$$

$$2)\ z=1+x$$

- 1) の場合、微分方程式は

$$z(2-z)\frac{d^2y}{dz^2}+2(1-z)\frac{dy}{dz}+\left\{-l-\frac{m^2}{z(2-z)}\right\}y=0 \qquad ④$$

- z =0でも特異化しないような解として以下の解を仮定

$$y(z)=z^s f(z) \qquad ⑤$$

３．ルジャンドル陪微分方程式の解の導出

- 解の導関数は

$$\frac{dy}{dz} = sz^{s-1} f(z) + z^s f'(z)$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = sz^{s-1} f'(z) + s(s-1)z^{s-2} f(z) + sz^{s-1} f'(z) + z^s f''(z)$$

- これらを⑤に代入して Z^sで割ると

$$(z(2-z))f''(z) + [s(s-1) + 2(1-z)]f'(z) + f(z)\left[\frac{s(s-1)(2-z) + 2s(1-z) - m^2/(2-z)}{z} - l\right] = 0$$

- z=0 で特異化しないためには、第3項の分子も０になればよい。その条件は

$$s = \pm\frac{m}{2}$$

- 正の東西波数のみ考えるので

$$s = \frac{m}{2}$$

- よって解は

$$y(x) = (1-x)^{m/2} g(x) \qquad ⑥$$

３．ルジャンドル陪微分方程式の解の導出

- 2) の場合 $z=1+x$ でも同様にすると、解は

$$y(x)=(1+x)^{m/2}g(x) \qquad ⑦$$

- 二つの解を同時に満たすような解は

$$y(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}h(x) \qquad ⑧$$

- これを③に代入する。

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2h}{dx^2}-2(m+1)x\frac{dh}{dx}-\left(l+m+m^2\right)h=0 \qquad ⑨$$

- $h(x)$ にべき級数を仮定し、

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0x^0+a_1x^1+\mathbf{L}\,a_kx^k+\mathbf{L} \qquad ⑩$$

- kは南北波数と考える

３．ルジャンドル陪微分方程式の解の導出

・導関数は

$$h'(x) = a_1 x^0 + 2a_2 x^1 + \cdots ka_k x^{k-1} + \cdots$$

$$h''(x) = 2a_2 x^0 + 3 \cdot 2a_3 x^1 + \cdots k(k-1)a_k x^{k-2} + \cdots$$

・これを⑨に代入して、xのべきで整理すると、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)(k+2)a_{k+2} - \left\{ l + k(k+1) + 2k(m+1) + m + m^2 \right\} a_k \right] x^k = 0$$

・任意のxで成立するための条件として以下の漸化式を得る

$$a_{k+2} = \frac{l + (m+k)(m+k+1)}{(k+1)(k+2)} a_k \qquad ⑪$$

３．ルジャンドル陪微分方程式の解の導出

- $k \Rightarrow \infty$ にすると a_k は１に収束し、$h(x)$ は無限大になってしまう。
- ある k で a_k が０になるような以下の条件を与える

$$l = -(m+k)(m+k+1) \equiv -l(l+1) \quad ⑫$$

- よって

$$(1-x^2)\frac{d^2h}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{dh}{dx} + (l(l+1)-m-m^2)h = 0 \quad ⑬$$

- l は m より大きい
- $h(x)$ は有限の多項式になる。

３．ルジャンドル陪微分方程式の解の導出

- ここでルジャンドル微分方程式 を考える

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+l(l+1)y=0 \qquad ⑭$$

- この解のひとつにルジャンドル多項式 $P_n(x)$があり、ロドリゲスの公式より

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l \qquad ⑮$$

- ⑮を代入し⑭をm回微分すると

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^{m+2}P_l}{dx^{m+2}}-2(m+1)x\frac{d^{m+1}P_l}{dx^{m+1}}+\left(l(l+1)-m-m^2\right)\frac{d^m P_l}{dx^m}=0 \qquad ⑯$$

- これは $P_l^{(m)}=h(x)$とすると、⑬と一致する。$h(x)$ はルジャンドル多項式のm回微分で表せ、

$$h(x)=C\frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \quad \text{（Cは定数）} \qquad ⑰$$

３．ルジャンドル陪微分方程式の解の導出

- 最終的にルジャンドル陪方程式の解は

$$P_l^m = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \qquad ⑱$$

- ①の流線関数の解は球面調和関数で与えられ $C=\Psi_0$ として

$$y'(l,m,t) = \Psi_0 P_l^m(m) \exp^{i(ml-wt)} \qquad ⑲$$

- この波動解をロスビー・ハウルビッツ波と呼ぶ

ちなみに

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

４．波動解の特性

- 振動数は

$$w = -\frac{2\Omega m}{l\left(l+1\right)}$$

- 位相速度は有次元の東西波数 $k = m/a$ を用いて

$$c = \frac{w}{k} = \frac{aw}{m} = -\frac{2\Omega a}{l\left(l+1\right)}$$

- 位相速度は波数によらず負（西進）、全波数が小さいほど大きい

４．波動解の特性

- 以下のような流線関数の波の構造を示す

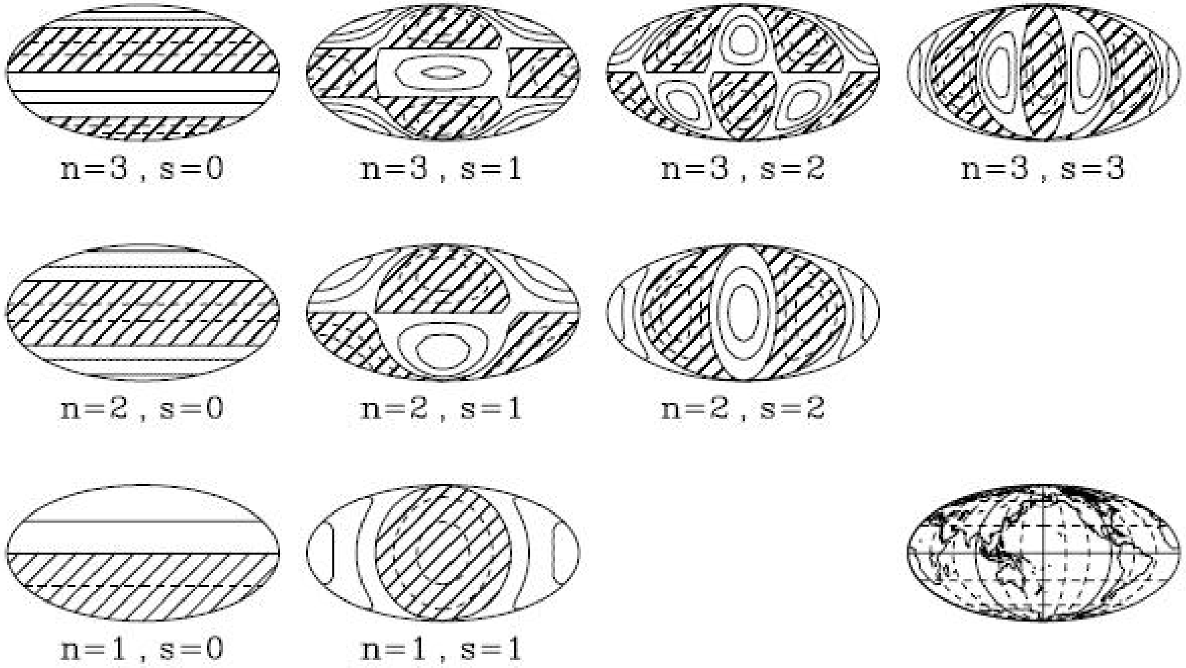

図 9.2: ロスビー・ハウルビッツ波 (球面調和関数 Y_n^s) の空間構造. $n = 1 \sim 3, s = 0 \sim n$. 負領域に陰影をつける. 地図投影はモルワイデ (Mollweide) 図法.

- （全波数－東西波数）が南北の節の数になる。

4．波動解の特性

- 流線関数は球面調和関数を用いて $Y_n^s = P_n^s e^{i(sl-wt)}$ と書け、以下の性質がある

$$\nabla^2 Y_n^s = -l(l+1)Y_n^s$$

- つまり、渦度場は流線関数と同じ構造を持ち、符号は逆

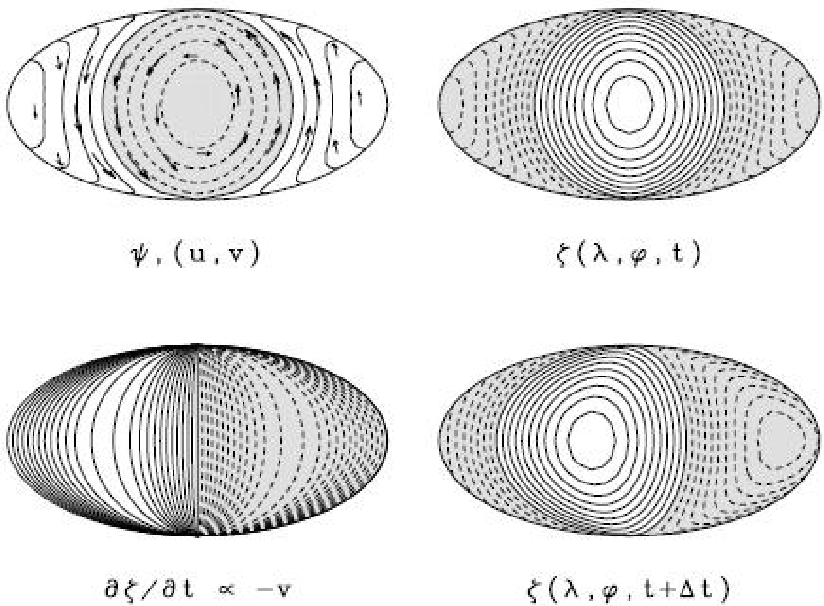

図 9.3: ロスビー・ハウルビッツ波の空間構造と伝播のしくみ. $n=1, s=1$ の場合. (左上) 流線関数 (負領域に陰影) と速度場, (右上) 相対渦度場, (左下) 相対渦度場の時間変化項, (右下) 相対渦度場の時間発展. 地図投影はモルワイデ図法.

非圧縮なので

$$u = -\frac{\partial y}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial y}{\partial x}$$

よって、流線関数のラプラシアンは渦度になる

References

- MATHEMATICAL PHYSICS ；Eugene Butkov
- 抗体科学研究所HP　水素原子(3) http://www.h5.dion.ne.jp/~antibody/harmonics.htm#hon-3b
- 気象学Ｉ；余田　成男
- 気象力学通論；小倉　義光

補足

〇ルジャンドル多項式はルジャンドル方程式の解のひとつ

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+l\left(l+1\right)y=0$$

＜証明＞

- ルジャンドル多項式を以下のように表記できる。

$$P_n\left(x\right)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l$$

- これはロドリゲスの公式である。そこで以下の関数を用いる。

$$f\left(x\right)=C\left(x^2-1\right)^l$$

- これをl回微分して適正な係数をつけたら方程式を満たすことを示す。

- 一回微分して $\left(1-x^2\right)$ をかける

$$\left(1-x^2\right)f'(x)+2xlf(x)=0$$

- k+1階まで微分

$$\left(1-x^2\right)f^{(k+1)}(x)+2(l-k)xf^{(k)}(x)+2\{kl-k(k-1)/2\}f^{(k-1)}(x)=0$$

- ここで k=l+1 とおくと

$$\left(1-x^2\right)f^{(l+2)}(x)+2xf^{(l+1)}(x)+l(l+1)f^{(l)}(x)=0$$

- これは、$F(x)=f^{(l)}(x)$ とおくと元のルジャンドル方程式と一致する

- よって $\left(x^2-1\right)^l$ をl回微分した項を持つルジャンドル多項式はルジャンドル方程式を満たす（証明終了）