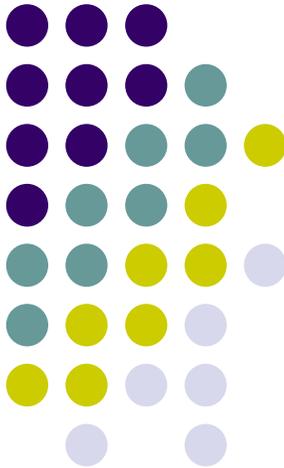


# レイノルズ数

学群4年 片庭 沙基



# レイノルズ数 (Reynolds number)



レイノルズ数 (Reynolds number) とは

与えられた流れにおける慣性力と粘性力の相対的な重要性を示す無次元数。

円管内の粘性のある流れの安定性の先駆的研究を行った、イギリスの物理学者・技術者オズボーン・レイノルズ (Osborne Reynolds) にちなんで名づけられた値。



# 非圧縮性流体のナビエ・ストークス式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

無次元化

$$x^* = \frac{1}{L} x$$

$$t^* = \frac{U}{L} t$$

$$u^* = \frac{1}{U} u$$

$$p^* = \frac{1}{\rho_0 U^2} p$$

$L$  : 流れの代表的な  
長さのスケール (m)

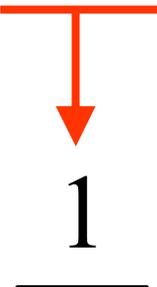
$U$  : 代表的な流速 (m/s)

# 無次元化したナビエ・ストークス式①



代入して整理すると

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\nu}{UL} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^{*2}}$$

  
 $\frac{1}{\text{Re}}$

$$\text{Re} \equiv UL / \nu$$



$\text{Re}$  :レイノルズ数(無次元)

$L$  :流れの代表的な長さのスケール(m)

$U$  :代表的な流速(m/s)

$\nu = \eta / \rho$  :動粘性係数( $\text{m}^2/\text{s}$ )

$\eta$  :流体の粘性係数( $\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} U^2/L : \text{慣性力} \\ \nu U/L^2 : \text{粘性力} \end{array} \right.$$

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} = \frac{U^2/L}{\nu U/L^2}$$

= 慣性力/粘性力



現象が慣性と粘性のみで支配される場合は、**流れ**の性質はレイノルズ数のみに依存し、Reが小さいときは**層流**、大きくなると流れは複雑さを増し、**乱流**になる。その境界のReの値を**臨界(限界)レイノルズ数**という。

円管内の流れ(ポアズイユ流)の場合、Reが**2000**を超えると**乱流**になる。



# 相似則(相似律)①

模型実験において、原型と模型との対応関係を示す規則。

ある与えられた流れは、時間  $t$  , 空間座標  $x, y, z$  だけでなく、流体の物質定数、外力、境界条件などの外部パラメーターに依存する。

→外部パラメーターの組み合わせが異なれば、ある物質質量  $V(x, y, z, t)$  の分布も異なる。

→外部パラメーターの数が多い場合には、その組み合わせに対する解  $V(x, y, z, t)$  を求めるには大変な労力を必要とする。



## 相似則(相似律)②

ところが、ある場合には、特定の物質質量  $V$  が

$$V = V^* \cdot f\left(\frac{x}{x^*}, \frac{y}{y^*}, \frac{z}{z^*}, \frac{t}{t^*}\right)$$

$V^*, x^*, y^*, z^*, t^*$   
:外部パラメーターから決まる速度、  
x座標、y座標、z座標、時間のスケール

のように与えられることがある。

この場合には様々な外部パラメーターの組み合わせに対する解は  $V \rightarrow V^*, x \rightarrow x^*, y \rightarrow y^*, z \rightarrow z^*, t \rightarrow t^*$  で無次元化された1通りの解を求めておくことにより、これらから再構築することができる。



## 相似則(相似律)③

このような解が存在するとき、相似則(相似律)が成り立つといい、このような解を相似解という。相似則に気づくことは、解法を容易にするだけでなく、問題に対する見通しをつける上でも容易である。



# レイノルズの相似則(相似律)①

無次元化されたナビエ・ストークス式

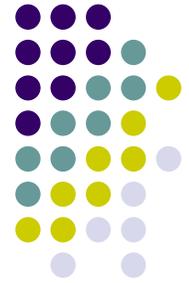
$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^{*2}}$$

現象が慣性と粘性のみに支配されているとき、無次元の流速や圧力はレイノルズ数だけによる。



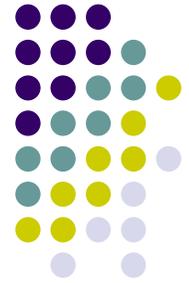
流体が異なり、密度や動粘性係数の値が違ったり、一様流の流速が違ってても、レイノルズ数が等しければ、2つの流れの形態は相似である。

## レイノルズの相似則(相似律)②



様々なレイノルズ数に対する流速さえ求めておけば、  
どんな  $U, L, \nu$  の組み合わせに対する有次元の流速  
場も求められる。これをレイノルズの相似則(相似律)  
という。

# (roughness Reynolds number)



なめらかな地表面にごく近い厚さ数mmの大気は層流であると考えられている(層流底層)。しかし、**地表面に凹凸が存在すると、強風下で境界層が剥離し、乱流になることがある。**その条件は**粗度レイノルズ数**に依存する。粗度レイノルズ数の値が**10以上**で地表面は乱流になる。

$$u_* h / \nu \quad : \text{粗度レイノルズ数}$$

$u_*$  : 摩擦速度 (m/s)

$h$  : 地表面の凹凸の代表値 (m)

$\nu$  : 空気の動粘性係数 ( $\text{m}^2/\text{s}$ )

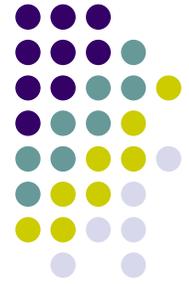


# フルード数 (Froude number)

流体工学で使われる**無次元数**。迂回流が卓越するか、山越え気流が卓越するかの指標。自由表面のある流体の表面近くを物体が速度 $U$ で運動する際、物体の代表的な大きさを $L$ 、重力加速度を $g$ とすると、

$Fr = U / \sqrt{gL}$  の値が等しい場合に流れが相似になる。

- 臨界状態・・・フルード数が1になる状態
- 超臨界流・・・ $Fr$ が1より大きい流れ
- 亜臨界流・・・ $Fr$ が1より小さい流れ



# 内部フルード数

大気内部には自由表面がないが、地面近くに冷気流がある場合にフルード数が定義できる。

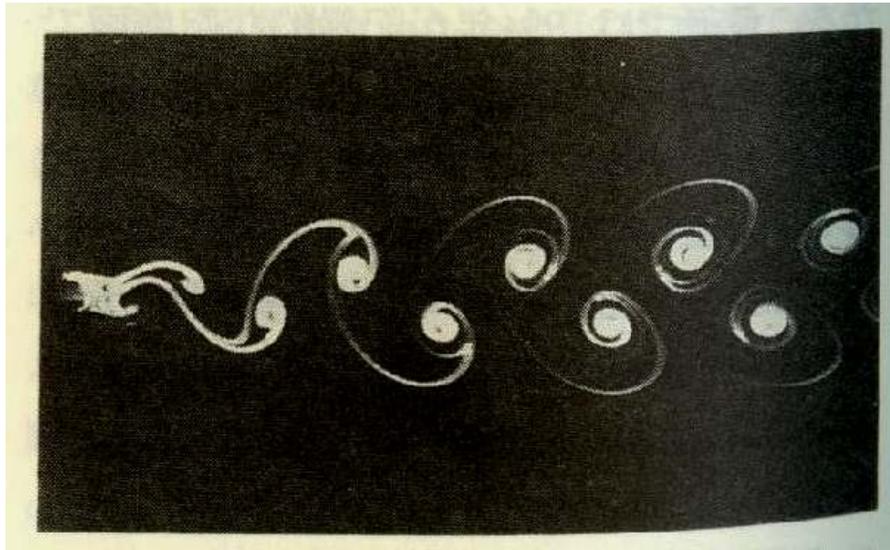
内部フルード数

$$U / \sqrt{(\Delta \rho / \rho) g H}$$

- $\Delta \rho$  : 冷気流とその直上の大気層の密度の差
- $\rho$  : 冷気流の代表的な密度
- $H$  : 冷気流の厚さ

山越え気流の状態は、フルード数または内部フルード数の大きさを分類できる。

# カルマンの渦列①



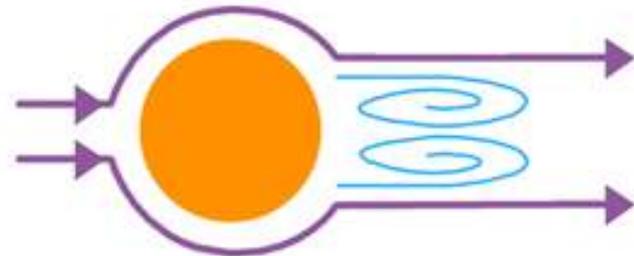
室内実験で円柱の後ろに見られるカルマンの渦列

Re=105

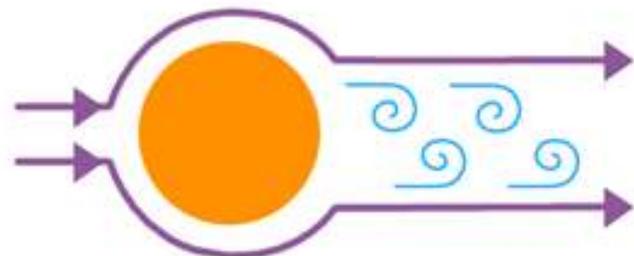
密度が一様で圧縮性のない一様な流れの中に長い円柱を置いたとき、円柱の下流の様子は流れのレイノルズ数のみによって決まる。 $40 < Re < 300$ の時には、円柱の下流に向かって右側からは反時計回りの渦、左側からは時計回りの渦が規則正しく交互に現れては下流に流され、左右2列の渦列が生じる。



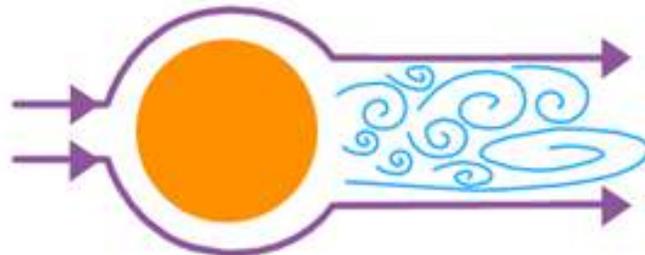
## カルマンの渦列②



(a) 双子渦 レイノルズ数約 50 以下



(b) カルマン渦 レイノルズ数約 60 以上



(c) 乱流 レイノルズ数 1500

図 2 レイノルズ数 ( $Re=Ud/\nu$ ) と円柱回りの流れの関係  
(流れの速さ  $U$ 、円柱の直径  $d$ 、粘性係数  $\nu$ )

流れが遅いうちは、双子渦が形成され、レイノルズ数 50～60 を境にしてカルマン渦へと変化、そしてさらに流れが速くなると乱流へと変化。

また、カルマン渦が発生する周期は、流体の流れが速いほど短くなり、渦と渦の間隔は速さによらず、円柱の直径の約 5～6 倍になる。



# 雨滴の終末速度①

## 終末速度 (terminal velocity)

空気中で静止していた物体を落下させると、地球引力のため絶えず加速されているので、はじめは落下速度は次第に増す。しかし、物体が受ける抵抗力は速度が増すにつれて増す。

⇒ある速度に達したところで、その物体に働く重力と逆方向に働く抵抗力が釣り合い、以後落下速度は一定となる。このときの速度を落下の**終末速度 (terminal velocity)**という。



## 雨滴の終末速度②

空気は粘性をもっているために、水滴が空気中を落下する速度は水滴の大きさによって違う。

一般に、半径 $r$ をもつ球形の物体が粘性をもつ流体の中を速さ $w$ で運動しているとき、 $r$  または $w$ が小さいときには、流体の粘性のためにその物体が受ける抵抗力の大きさは、 $r$ と $w$ に比例する。

$$\text{物体が受ける抵抗力} = 6\pi\eta rw$$

$\eta$ : 流体の粘性係数 (kg/m·s)

## 雨滴の終末速度③



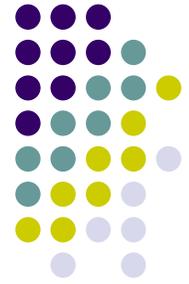
$$\text{Re} = wr / \nu$$

$$\nu = \eta / \rho$$

$\nu$  : 動粘性係数  
 $\eta$  : 流体の粘性係数

$\text{Re} \rightarrow \infty$       粘性の影響が無限小

$\text{Re}$ が小さい       $w$ または $r$ が小さいか、 $\nu$ が大きい場合



## 雨滴の終末速度④

ここで考えているように球形の物体が粘性をもつ流体の中を一定の速度 $w$ で動いている場合、かりに $w$ が大きくても $r$ が小さいか $\nu$ が大きいかして $Re$ が小さい(約0.1以下)場合には、その物体が受ける抵抗力は

$$6\pi\eta rw$$

で表される、ということが流体力学で知られている。



## 雨滴の終末速度⑤

{	物体の質量	$m$
	重力加速度	$g$
	この物体に働く重力	$mg$

レイノルズ数が小さい場合

終末速度 $V$ を決める式

$$mg = 6\pi r \eta V$$



## 雨滴の終末速度⑥

水滴が球形の場合には  $m = (4/3)\pi\rho_w r^3$  ( $\rho_w$  = 水の密度)  
したがって

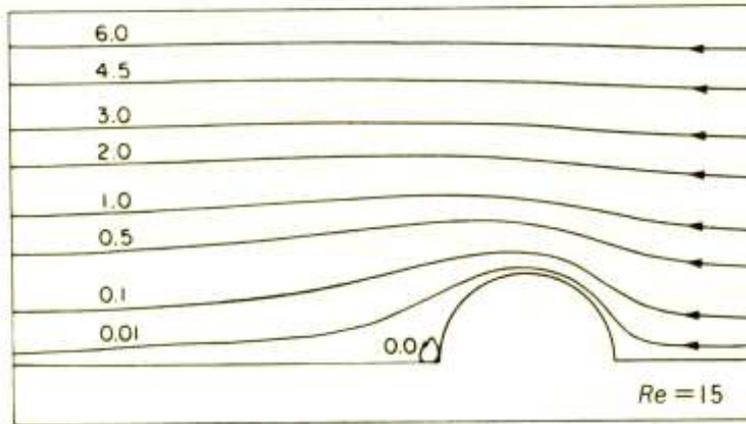
$$V = \frac{2\rho_w r^2 g}{9\eta}$$

となる。 $g = 9.8ms^{-2}$  であるから、半径  $r = 10\mu m$  の水滴が空気中を落下する時の終末速度は  $1.2cms^{-1}$  である。

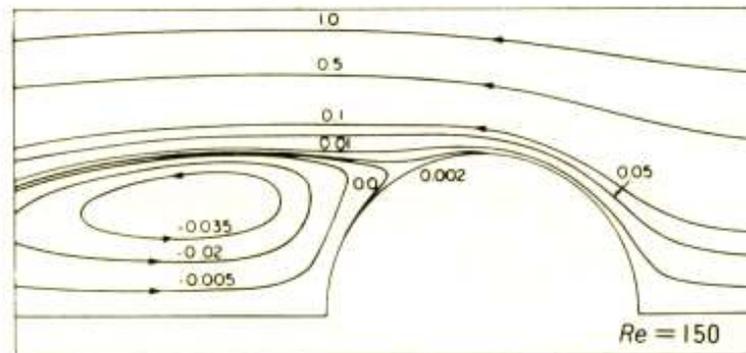
火山噴火によって半径が  $1\mu m$  やそれ以下の灰が成層圏に散布されると、なかなか地上まで落下してこない。



## 雨滴の終末速度⑦



(a)



(c)

レイノルズ数が0.1より大きくなると、粘性による抵抗力は、 $6\pi\eta rw$  では表現できない。



物体のうしろに渦ができるなど、物体のまわりの流れがレイノルズ数の小さい場合と違うため。



**END**

# プラントル数 (Prandtl number)



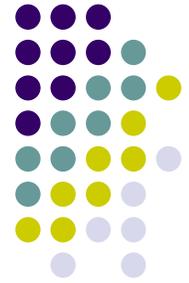
熱力学で使う無次元量。

$$\text{Pr} \equiv \nu / \kappa$$

{	$\nu$	: 流体の動粘性係数
	$\kappa$	: 温度伝導率

{	$\nu$	: 乱流による渦動粘性係数
	$\kappa$	: 熱の渦拡散係数

# シュミット数 (Schmidt number)



$$Sc \equiv \nu / \sigma$$

$\nu$  : 流体の動粘性係数  
 $\sigma$  : 流体中における物質の分子拡散係数

乱流シュミット数

$\nu$  : 乱流による渦動粘性係数  
 $\sigma$  : 渦拡散係数



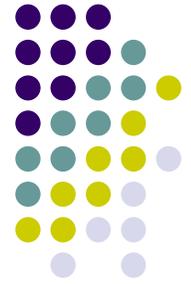
# マッハ数 (Mach number)

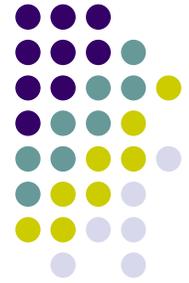
圧縮性を考慮する際の指標で、マッハ数が等しければ圧縮性の影響が力学的に相似となる。マッハ数がある程度(概ね0.5)より大きい流れでは、圧縮性の影響が無視できなくなる。

$$Ma \equiv U/c$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U : \text{流体の相対速度} \\ c : \text{音速} \end{array} \right.$$

# グラフホフ数





# レイリー数

グラフホフ数とプラントル数の積で表され熱対流の不安定度を表す**無次元数**。レイリー数が10の8乗よりも小さい場合は流れは層流、大きい場合は乱流。