準地衡風近似

自然学類4年　光吉育実

１．はじめに

準地衡風近似とは、

中緯度総観規模擾乱に対する数値予報において、
1950-1960年代にさかんに用いられた近似で、
近代における数値予報の成功の基礎となった手法
である。

まず、近似を行う前の予報の基礎方程式系（プリミティブ方程式系）について説明すると、、、

プリミティブ方程式系(p系)

(水平方向の運動方程式) $$\frac{D\vec{V}}{Dt} + \mathrm{f}\,\vec{k}\times\vec{V} = -\nabla\Phi \qquad (1)$$

(静力学平衡の式) $$\frac{\partial\Phi}{\partial p} = -\alpha = -\frac{RT}{p} \qquad (2)$$

(連続の式) $$\nabla\cdot\vec{V} + \frac{\partial\omega}{\partial p} = 0 \qquad (3)$$

(熱力学方程式) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\right)T - S_p\omega = \frac{J}{c_p} \qquad (4)$$

ここで、

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p + (\vec{V}\cdot\nabla)_p + \omega\frac{\partial}{\partial p} \qquad (5)$$

$\vec{V}$: 水平風ベクトル、f: コリオリパラメータ、Φ: ジオポテンシャル高度
ω: 鉛直p速度、S_p: 静的安定度パラメータ、J: 非断熱加熱、C_p: 定圧比熱

2. 地衡風近似

(水平方向の運動方程式)
$$\frac{D\vec{V}}{Dt} + f\,\vec{k}\times\vec{V} = -\nabla\Phi \qquad (1)$$

総観規模擾乱におけるオーダー(m/s^2)　10^{-4}　10^{-3}　10^{-3}

$\frac{D\vec{V}}{Dt}$ を省略して、

$$f\,\vec{k}\times\vec{V} \approx -\nabla\Phi \qquad (6)$$

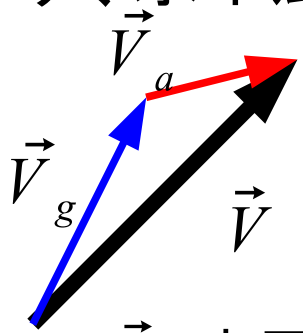
地衡風 ： $\vec{V}_g \equiv \frac{1}{f}\vec{k}\times\nabla\Phi \qquad (7)$

この関係式(7)は時間変化項を含まないため、常に成り立つが、
逆にこの近似を行うことによって、$\vec{V}$ の時間変化を
見積もることはできなくなってしまう。

そこで…

３. 準地衡風近似

まず、水平風ベクトルを地衡風成分と非地衡風成分に分ける。



$$\vec{V} = \vec{V}_g + \vec{V}_a \qquad (8)$$

$\vec{V}$: 水平風ベクトル 、$\vec{V}_g$: 地衡風成分 、 $\vec{V}_a$: 非地衡風成分

ここで、コリオリパラメータ$f = f_0$(一定)とすると、地衡風成分は、

$$\vec{V}_g \equiv \frac{1}{f_0}\vec{k} \times \nabla \Phi \qquad (9)$$

と定義され、非地衡風成分は、

$$\vec{V}_a = \vec{V} - \vec{V}_g$$

と、水平風ベクトルと地衡風成分の残差として求められる。

次に、水平方向の運動方程式(1)を変形すると

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -f\,\vec{k}\times\vec{V} - \nabla\Phi \qquad (1)'$$

この左辺$\frac{D\vec{V}}{Dt}$ は、$\vec{V}_g \gg \vec{V}_a$ であり、風の水平移流>>鉛直移流であるので、

$$\begin{aligned}\frac{D\vec{V}}{Dt} &= \frac{D(\vec{V}_g+\vec{V}_a)}{Dt}\\ &= \frac{\partial(\vec{V}_g+\cancel{\vec{V}_a})}{\partial t} + \{(\vec{V}_g+\cancel{\vec{V}_a})\cdot\nabla\}(\vec{V}_g+\cancel{\vec{V}_a}) + \cancel{\omega\frac{\partial}{\partial p}}\\ &\approx \frac{\partial\vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g\cdot\nabla)\vec{V}_g\\ &= \frac{D_g\vec{V}_g}{Dt} \qquad \left(\ \frac{D_g}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_g\cdot\nabla\ \right) \qquad (10)\end{aligned}$$

次に、右辺については、地衡風$\vec{V}_g$を求める際には $f=f_0$（一定）とするのに対して、それ以外のfに対しては、

$$f = f_0 + \beta y \qquad (\beta \equiv df/dy)$$

というβ平面近似を用いる。このとき、$f_0 \gg \beta y$ 。

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= -f\vec{k}\times\vec{V} - \nabla\Phi \\
&= -(f_0+\beta y)\vec{k}\times(\vec{V}_g+\vec{V}_a) + f_0\vec{k}\times\vec{V}_g \\
&= -\cancel{f_0\vec{k}\times\vec{V}_g} - f_0\vec{k}\times\vec{V}_a - \beta y\vec{k}\times\vec{V}_g - \cancel{\beta y\vec{k}\times\vec{V}_a} + \cancel{f_0\vec{k}\times\vec{V}_g} \\
&\approx -f_0\vec{k}\times\vec{V}_a - \beta y\vec{k}\times\vec{V}_g \qquad (11)
\end{aligned}
$$

よって、準地衡風近似を行った水平方向の運動方程式は、

$$\frac{D_g\vec{V}_g}{Dt} = -f_0\vec{k}\times\vec{V}_a - \beta y\vec{k}\times\vec{V}_g \qquad (12)$$

となる。

次に、連続の式(3)については、$\vec{V}_g$が非発散なので、

$$\nabla\cdot\vec{V}+\frac{\partial\omega}{\partial p}=\nabla\cdot(\vec{V}_g+\vec{V}_a)+\frac{\partial\omega}{\partial p}$$

$$=\nabla\cdot\vec{V}_a+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \qquad (13)$$

となる。

　また、熱力学方程式(4)については、

$$S_p=-T\frac{\partial\ln\theta}{\partial p}$$

において、$T=T_0(p)+T'(x,y,p,t)$とすると $T_0(p)\gg T'(x,y,p,t)$ であるので、

$$S_p=-(T_0+T')\frac{\partial\ln(\theta_0+\theta')}{\partial p}$$

$$=-T_0\frac{d\ln\theta_0}{dp}-T_0\cancel{\frac{\partial\ln\theta'}{\partial p}}-T'\cancel{\frac{d\ln\theta_0}{dp}}-T'\cancel{\frac{\partial\ln\theta'}{\partial p}}$$

$$=-T_0\frac{d\ln\theta_0}{dp}$$

また、$\vec{V}_g \gg \vec{V}_a$ なので、非地衡風成分$\vec{V}_a$による移流は無視できて、 熱力学方程式(4)は、

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\right)T-S_p\omega &= \left\{\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{V}_g+\vec{V}_a)\cdot\nabla\right\}T-S_p\omega \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}_g\cdot\nabla\right)T-T_0\frac{d\ln\theta_0}{dp}\omega \\
&= \frac{J}{C_p} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

となる。

以上、

（静力学平衡の式）
$$\frac{\partial \Phi}{\partial p}=-\alpha=-\frac{RT}{p} \qquad (2)$$

（地衡風）
$$\vec{V}_g \equiv \frac{1}{f_0}\vec{k}\times\nabla\Phi \qquad (7)$$

（水平方向の運動方程式）
$$\frac{D_g\vec{V}_g}{Dt}=-f_0\vec{k}\times\vec{V}_a-\beta y\vec{k}\times\vec{V}_g \qquad (12)$$

（連続の式）
$$\nabla\cdot\vec{V}_a+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \qquad (13)$$

（熱力学方程式）
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}_g\cdot\nabla\right)T-T_0\frac{d\ln\theta_0}{dp}\omega=\frac{J}{C_p} \qquad (14)$$

が準地衡風近似予報方程式系である。
（独立変数: $\Phi, T, \vec{V}_g, \vec{V}_a, \omega$ ）

さらに、準地衡風近似された水平方向の運動方程式

$$\frac{D_g \vec{V}_g}{Dt} = -f_0 \vec{k} \times \vec{V}_a - \beta y \vec{k} \times \vec{V}_g \qquad (12)$$

を成分で表すと、

$$\frac{D_g u_g}{Dt} - f_0 v_a - \beta y v_g = 0 \qquad (15)$$

$$\frac{D_g v_g}{Dt} + f_0 u_a + \beta y u_g = 0 \qquad (16)$$

(16)をxで偏微分したものから(15)をyで偏微分したものを引くと、

$$\frac{D_g}{Dt}\left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y}\right) + f_0\left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y}\right) + \beta v_g + \beta y \left(\cancel{\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}}\right) = 0$$

$$\frac{D_g \zeta_g}{Dt} = -f_0\left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y}\right) - \beta v_g$$

さらに、(13)式と $\vec{V}_g \cdot \nabla f = \beta v_g$ であることから、

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla (\zeta_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} \tag{17}$$

と表され、これが準地衡風渦度方程式である。

(17)式と準地衡風熱力学方程式(14)の２式で、ジオポテンシャルΦと鉛直p速度ωを独立変数にもつ閉じた方程式系を成す。