

客観解析について

近藤 圭一



客観解析とは

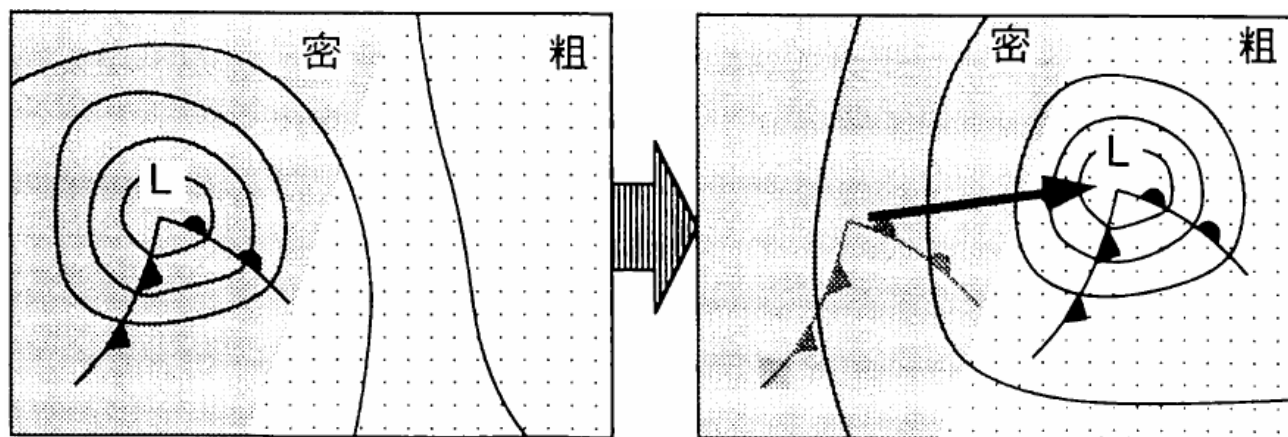
- 目的
 - 解析値を得る。
 - 数値予報モデルの初期値を得る。
- なぜ？
 - 数値モデルは完璧ではないため、将来であればあるほど、天気予報は現実からはずれる。

客観解析とは

- モデルの予報値と実際の観測値をある適当な比率でミックス。
- 別の見方をすれば、数値予報モデルに観測の情報を取り入れてやることで、モデルが現実大気から離れていかないようにする。
- 予報値を観測値で修正。

客観解析とは

- 4次元同化とも呼ばれる。



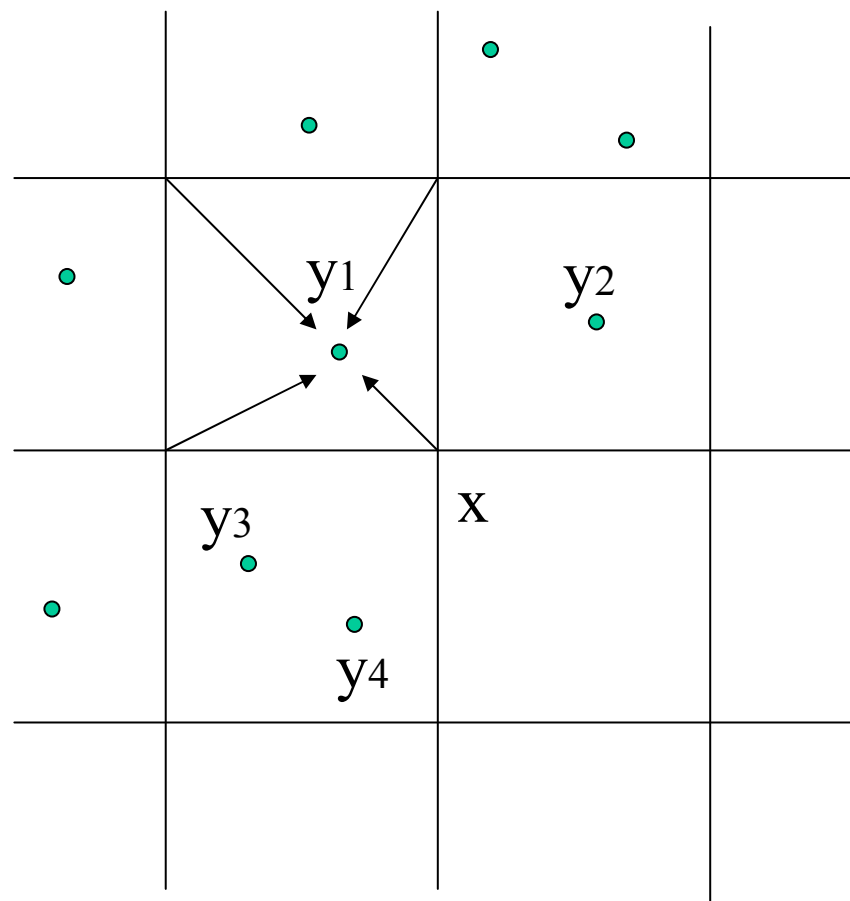
- 観測の密な領域の情報が、予報モデルを通して観測の疎な領域に引き継がれていく。

客観解析の仕組み(品質管理)

- まず解析の前処理として行われるのが、観測データの品質管理(QC: Quality Control)。
 - 観測値が観測値として使えるかどうかの判断。
 - 第一推定値と大きく異なるものは除去。
 - 測器の誤差
 - 人為的誤差
 - 伝達誤差

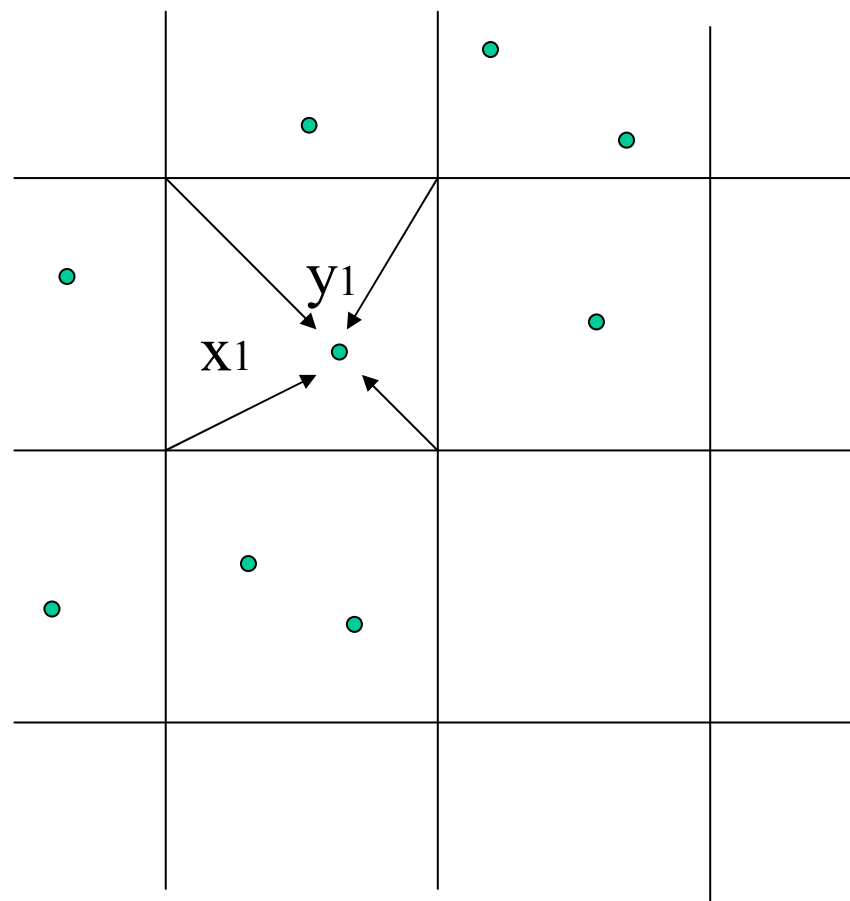
客観解析の仕組み（解析）

- モデルの予報値を第一推定値 x とする。
- 観測点はバラバラに分布。
- 格子点上の値を観測点上に内挿する。
- 内挿値を x_1



客観解析の仕組み（解析）

- 観測値と内挿された予報値の差 $y_1 - x_1$ が修正量。
- 第一推定値を周辺の予報誤差で修正
- この修正量をどのように扱うかによって、様々な方法がある。



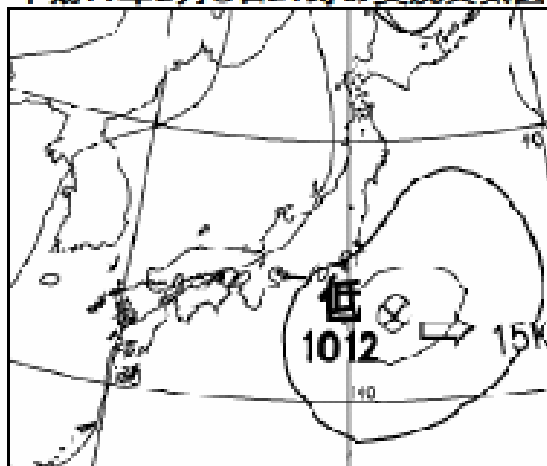
種類

- 修正法
- 最適内挿法 (OI: Optimum Interpolation)
- 3次元変分法 (3D-VAR: 3 Dimensional variation method)
- 4次元変分法 (4D-VAR)
- カルマンフィルタ (KF: Kalman Filter)
- アンサンブル・カルマンフィルタ (EnKF : Ensemble Kalman Filter)

予報に与える影響

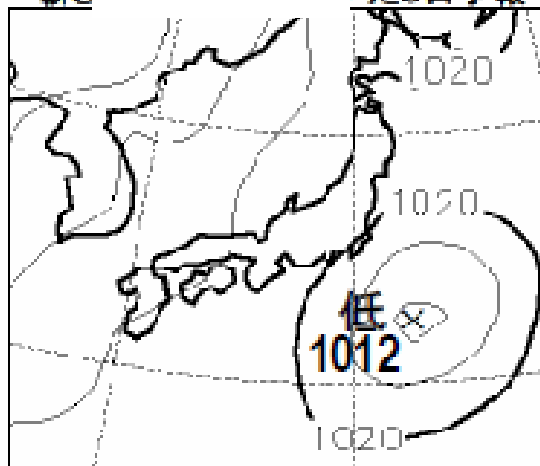
- 種類が違えば、初期値も異なる。
- 初期値に敏感な大気モデルでは、予報に大きな影響を与える。

平成17年2月8日21時の実況天気図

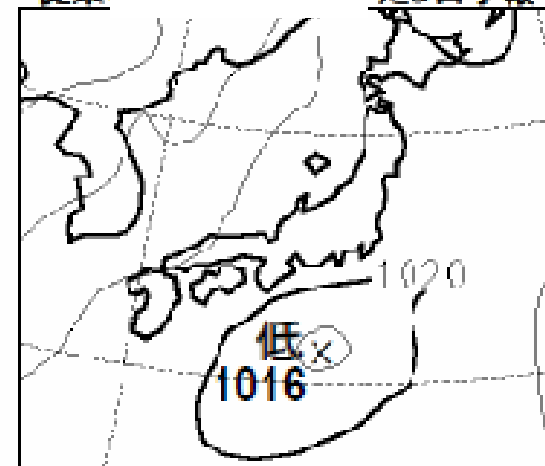


気象庁, 2005: 報道発表資料

新し 4DVAR 1-3日予報



従来 3DVAR 1-3日予報



低気圧の位置に大きな違い

予報に与える影響

○台風進路予報の改善 気象庁, 2005: 報道発表資料

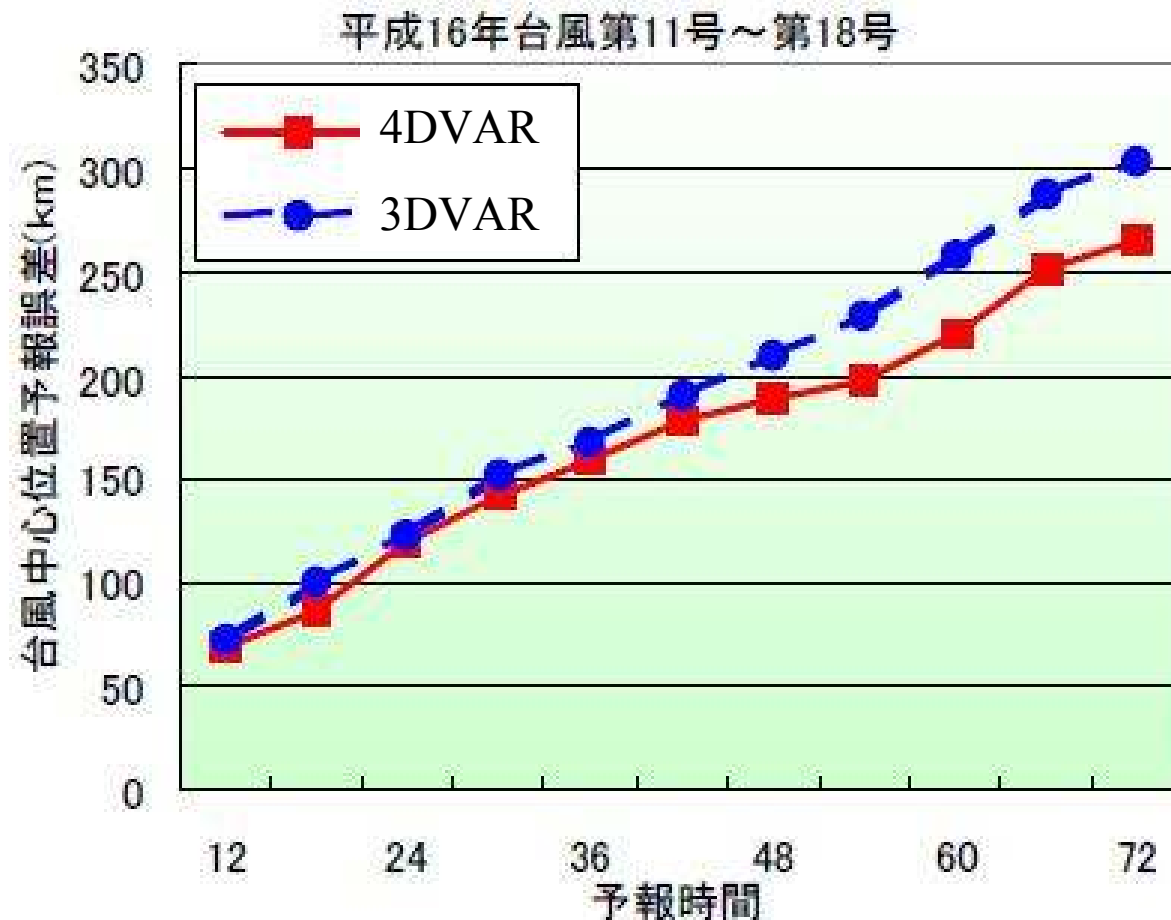


図2 平成16年台風第11号から第18号について、全球数値予報モデルによる台風中心位置の予報誤差を予報時間毎に示したものの。四角の実線が新手法、丸印の破線が従来手法を表す。

客観解析データ

- GPVJMAの初期値
- NCEP/NCAR再解析データ、JRA25、ERA40などのデータは、昔の観測データを現在の精度の高いモデルに取り込んで、大気の”もっともらしい確からしい”状態を再現したもの。

観測のない領域は、モデルの出力

客観解析データ (GPVJMA)

全球解析 (GSM)	4次元変分法 H17年2月～	解析時刻の3時間前を初期値とする予報
メソ解析 (MSM)	非静力学4次元 変分法 H14年3月～	解析時刻の6時間前を初期値とする予報
全球積雪深解析	最適内挿法	

客観解析データ

JRA25	3次元変分法
NCEP/NCAR Reanalysis	3次元変分法
NCEP/NCAR Final analysis	
ERA40	3次元変分法

修正法

- 解析値 = 第一推定値 + 修正量

$$x_a = x_b + w_1(y_1^o - x_1^o) + w_2(y_2^o - x_2^o) + \dots$$

w は格子点と観測点の距離だけから求まる重み係数。

修正法

- 解析値 = 第一推定値 + 修正量

$$x_a = x_b + w_1(y_1^o - x_1^o) + w_2(y_2^o - x_2^o) + \dots$$

➤ 問題点

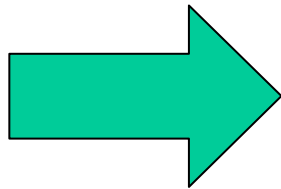
w は第一推定値の誤差と観測誤差が同程度の場合、修正係数を上手に決めなければ、観測から意味のある情報を取り込めない。

最適内挿法

- 解析値 = 第一推定値 + 修正量

$$x_a = x_b + w_1(y_1^o - x_1^o) + w_2(y_2^o - x_2^o) + \dots$$

w を最適に求める。



最小分散推定を用いる。

最小分散推定

- つくばの最高気温の気候値を x^c 、最高気温の観測値を x^o として、真の最高気温 x^a を求めたい。
- 最高気温は、気候値の周辺に存在し、なおかつ、観測の周辺に存在する。
- 最高気温 x^a は、

$$x^a = w_c x^c + w_o x^o \quad (w_c + w_o = 1)$$

で与えられる。

最小分散推定

$$x^a = w_c x^c + w_o x^o \quad (w_c + w_o = 1)$$

- 気候値 x^c の分布の確率密度関数はあらかじめわかっているとし、それを背景分布と呼ぶ。
- 背景誤差と観測誤差に相関はなく、それぞれの誤差の分布は正規分布であるとする。
- この背景情報に、観測で得られた情報を加えて、より誤差の小さい情報を得る。

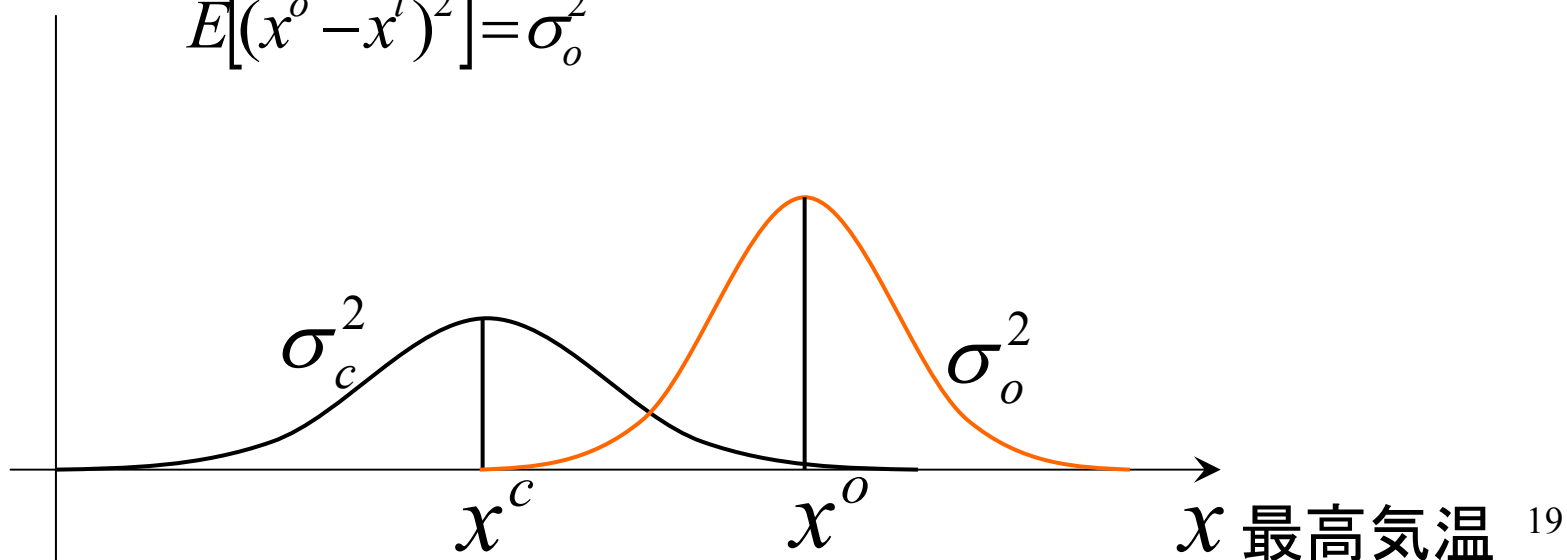
最小分散推定

- 背景情報の分散を σ_c^2 、観測の分散を σ_o^2

$$E[(x^c - x^t)(x^o - x^t)] = 0$$

$$E[(x^c - x^t)^2] = \sigma_c^2$$

$$E[(x^o - x^t)^2] = \sigma_o^2$$



最小分散推定

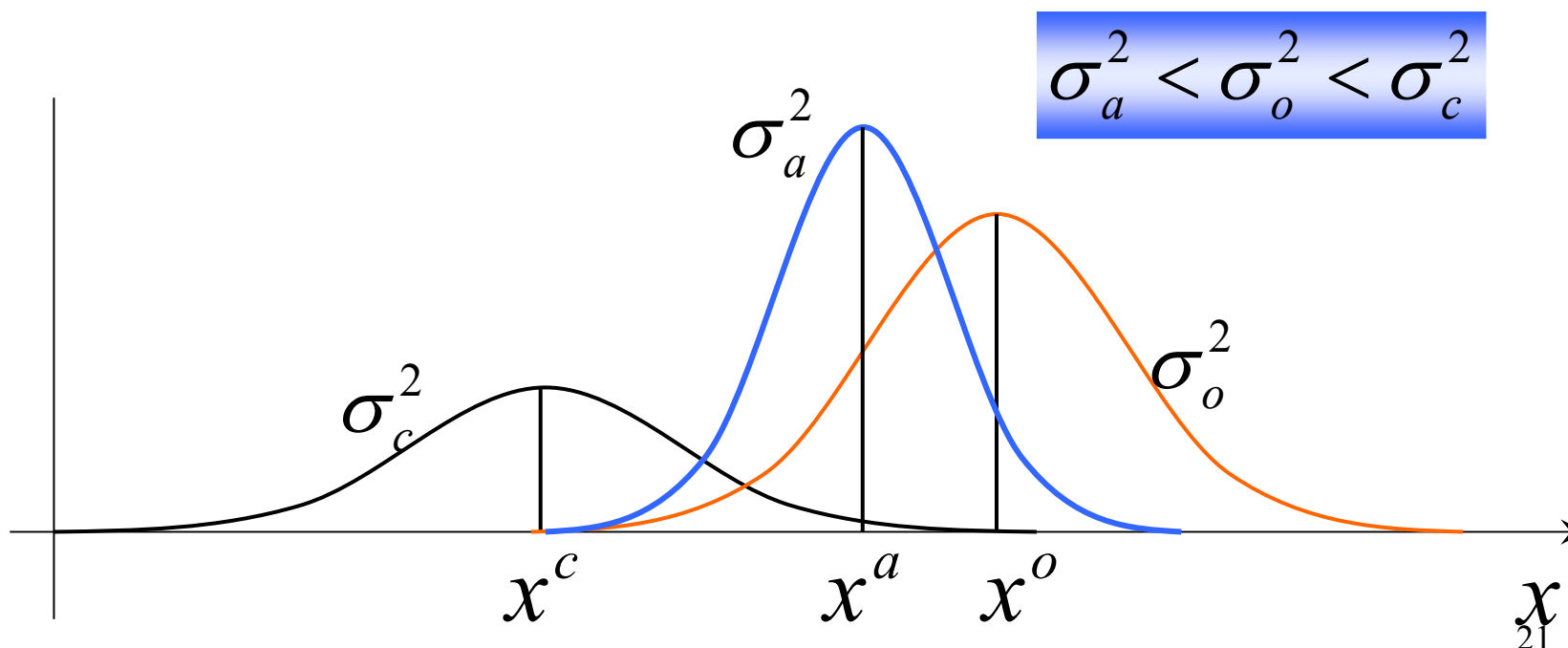
- 普遍推定量 x^a は、 $x^a = (1 - w_o)x^c + w_o x^o$
- 推定誤差分散は、 $\sigma_a^2 = (1 - w_o)^2 \sigma_c^2 + w_o^2 \sigma_o^2$
- σ_a^2 を最小にするような w_o を求める。

$$\frac{\partial}{\partial w_o} \sigma_a^2 = 0$$

- を解くと、 $w_o = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_c^2 + \sigma_o^2}$ が求まる。

最小分散推定

- 2つの独立した情報を用いることで、もっとも確からしい推定値 x^a が得られる。

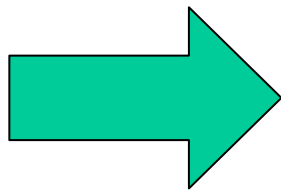


最適内挿法

- 解析値 = 第一推定値 + 修正量

$$x_a = x_b + w_1(y_1^o - x_1^o) + w_2(y_2^o - x_2^o) + \dots$$

w を最適に求める。

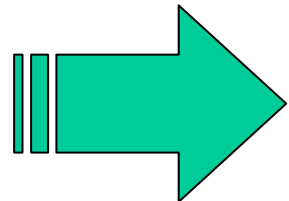


$$w_o = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_c^2 + \sigma_o^2}$$

解析値は、第一推定値と観測値の線形結合で表される。

最適内挿法と変分法

- 最適内挿法は、一般的には線形推定の範囲内で最適であるにすぎない。
- つまり、解析値と線形関係にある観測データしか同化できない。
- 線形結合という制約をはずし、解析値を求めることができれば、最適内挿法より優れていると考えられる。



変分法

変分法

- 数値モデルから提供される第一推定値 \mathbf{x}^b と、すべての観測 y^o の両方に最も近い大気の状態を求めるために、近さの物差しとして評価関数 $J(\mathbf{x})$ を導入する。
- $J(\mathbf{x})$ が最小となる \mathbf{x} を数値的に求め、それを解析値 \mathbf{x}^a とする。

\mathbf{x} は、大気の状態を表すベクトルで、変数の数 \times グリッド数である。

変分法

- 背景場を第一推定値(モデルの予報値)からなる \mathbf{x}^b 、同時刻の観測を \mathbf{y}^o とする。

背景誤差共分散行列 $\mathbf{B} = \langle \Delta \mathbf{x}^b \cdot \Delta \mathbf{x}^b \rangle$
観測誤差共分散行列 $\mathbf{R} = \langle \Delta \mathbf{y}^o \cdot \Delta \mathbf{y}^o \rangle$ $\langle \bullet \rangle$ は期待値

- 第一推定値の誤差と観測誤差は相関がなく、バイアスもない。

変分法

- 誤差分布はガウス分布に従うと仮定する。
- 第一推定値と観測値の確率密度関数は、

$$P_b(\mathbf{x}^b) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{B}|^{1/2}} \times \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x}^b - \mathbf{x})^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x}^b - \mathbf{x}) \right]$$

$$P_o(\mathbf{y}^o) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \times \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - H(\mathbf{x})) \right]$$

- と表せる。

変分法

- 変分法では、解析値を最尤推定量として求める。
- 尤度関数Lは、 $P_b(\mathbf{x}^b)$ 、 $P_o(\mathbf{y}^o)$ の積

$$P_b(\mathbf{x}^b)P_o(\mathbf{y}^o) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{B}|^{1/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \times \exp \left[- \left(\frac{1}{2} (\mathbf{x}^b - \mathbf{x})^\top \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x}^b - \mathbf{x}) + \frac{1}{2} (\mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}))^\top \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - H(\mathbf{x})) \right) \right]$$

評価関数 $J(\mathbf{x})$

尤度関数を最大にする \mathbf{x} が解析値 \mathbf{x}^a である。

変分法

- 評価関数 $J(\mathbf{x})$ を最小にする \mathbf{x} が解析値 \mathbf{x}^a である。

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}^b - \mathbf{x})^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x}^b - \mathbf{x}) + \frac{1}{2} (\mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}))$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} J(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x}^b - \mathbf{x}) + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - H(\mathbf{x})) = 0$$

- となる \mathbf{x} を探す。

3次元変分法 (3D-VAR)

- 解析時刻付近での観測値を使用する。

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}^b - \mathbf{x})^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x}^b - \mathbf{x})$$

$$+ \frac{1}{2} (\mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}))$$

アジョイント
方程式

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} J(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x}^b - \mathbf{x}) + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}))$$

- \mathbf{x} を第一推定値、観測演算子 $H(\mathbf{x})$ を拘束条件として、 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} J(\mathbf{x})$, $J(\mathbf{x})$ を求める。

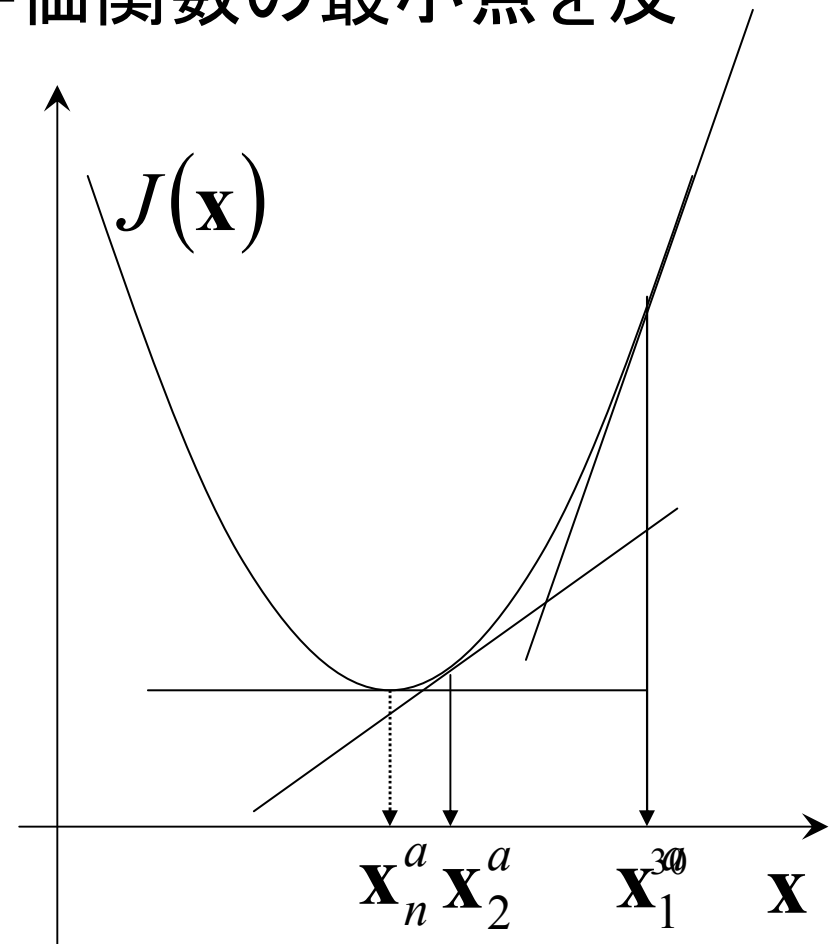
3次元変分法(3D-VAR)

- 準ニュートン法を使って、評価関数の最小点を反復法によって求める。

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t - \alpha_t \mathbf{G}_t \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_t} J(\mathbf{x}_t)$$

\mathbf{G} 逆ヘッセ行列

α 正の実数



3次元変分法(3D-VAR)

- 原理的に考えれば、変分法は最適内挿法の一般化と考えることができる。
 - 解析値が観測の線形結合であるという制限をはずしたのも。
 - 拘束条件が、地衡風平衡など単純な場合には、最適内挿法に帰着できる。

3D-VAR から 4D-VAR

- 3D-VARは間欠的にしか観測を同化できない。
- つまり、解析時刻のデータしか扱えない。
- 衛星データなど、非定時の観測データを取り込む。
- 4D-VARは、拘束条件に予報方程式を採用。

4次元変分法 (4D-VAR)

- 基本的には、3次元変分法と同じ。
 - 3次元変分法の時間方向への拡張。
 - 非定時の観測もタイムウィンドウの範囲内(3～24時間程度)で自在に取り込むことができる。
- 衛星データなどの非定時の観測を扱える。

4次元変分法(4D-VAR)

1. 初期時刻 t_0 から t_1 まで第一推定値を数値モデルを積分。
 - ✓ すべての予報値をすべての時間ステップで保存しておく。
2. アジョイント方程式を使って時刻 t_1 から t_0 まで逆向きに積分。
 - ✓ このときに、さっきとっておいた予報値と観測値をもとに観測値を同化。
3. 評価関数を小さくするように推定値を修正する。

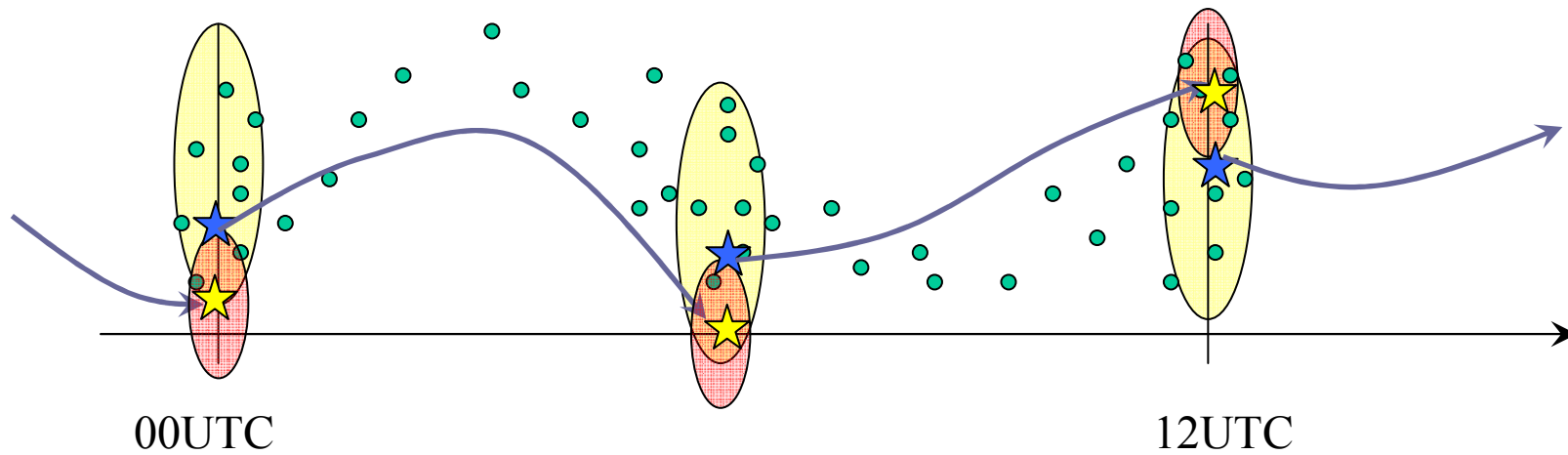
4次元変分法 (4D-VAR)

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}^b - \mathbf{x})^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x}^b - \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left\{ [\mathbf{y}_l^o - H(M(\mathbf{x}))]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{y}_l^o - H(M(\mathbf{x}))] \right\}$$

- 拘束条件として、非線形予報モデル M を使うことで、非定時の観測もモデルに同化できる。
- 非線形モデル M のアジョイント方程式 \mathbf{M}^T を必要とする。

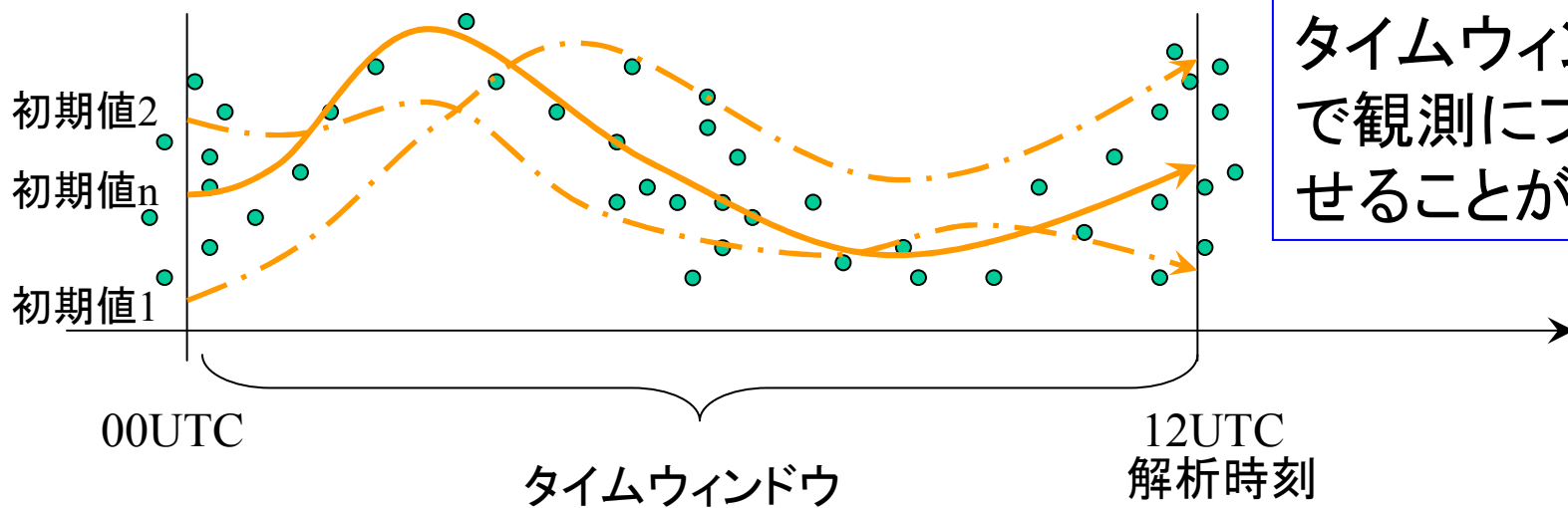
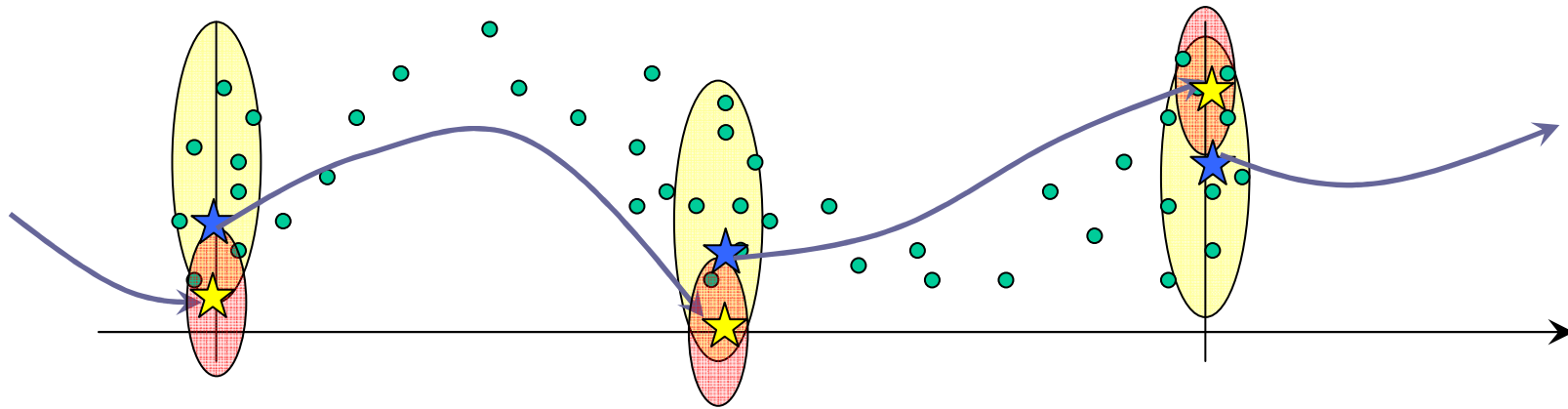
とても高価

4次元データ同化サイクル



非定時の観測を扱えない。

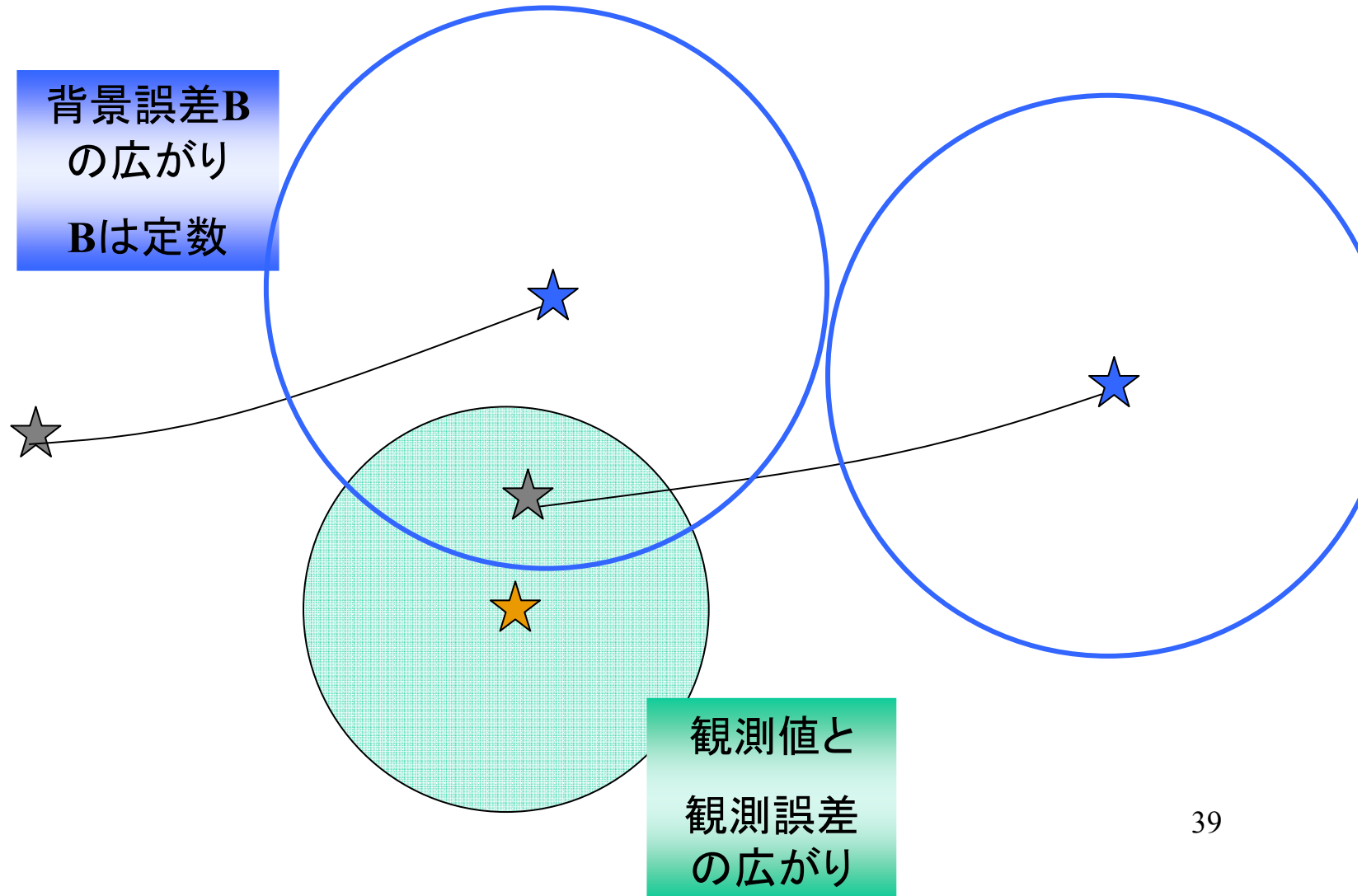
4次元データ同化サイクル



カルマンフィルター(KF)

- 4次元変分法は、3次元変分法を4次元に拡張したもので、系の時間発展を取り込んだ。
- もう一つの方法に、系の時間発展を確率論的に捉えたカルマンフィルターがある。
- 背景誤差分布をモデルに従って更新しながら最適内挿法を実行。

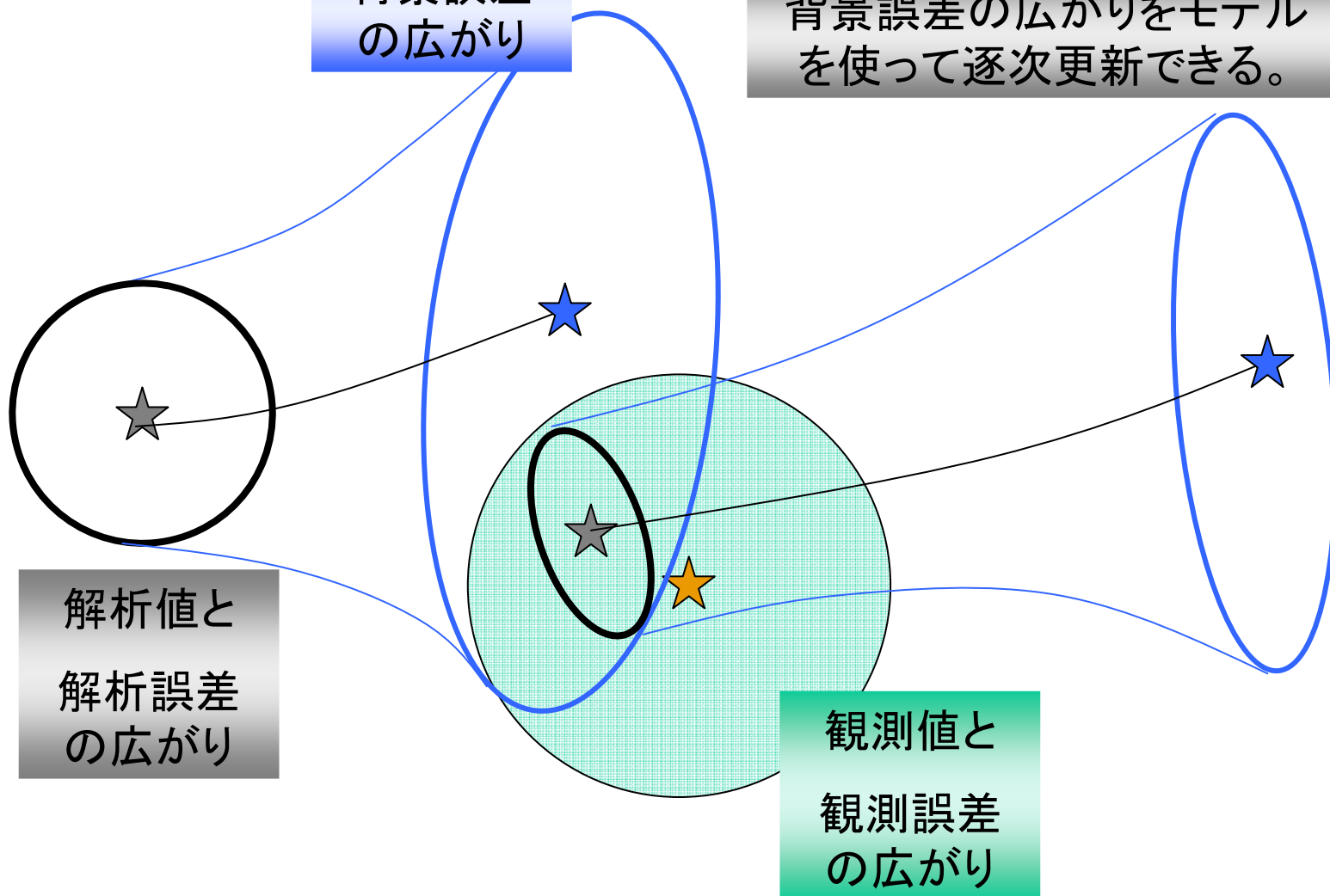
IO, 3D-VAR, (4D-VAR)



Kalman Filter

背景誤差
の広がり

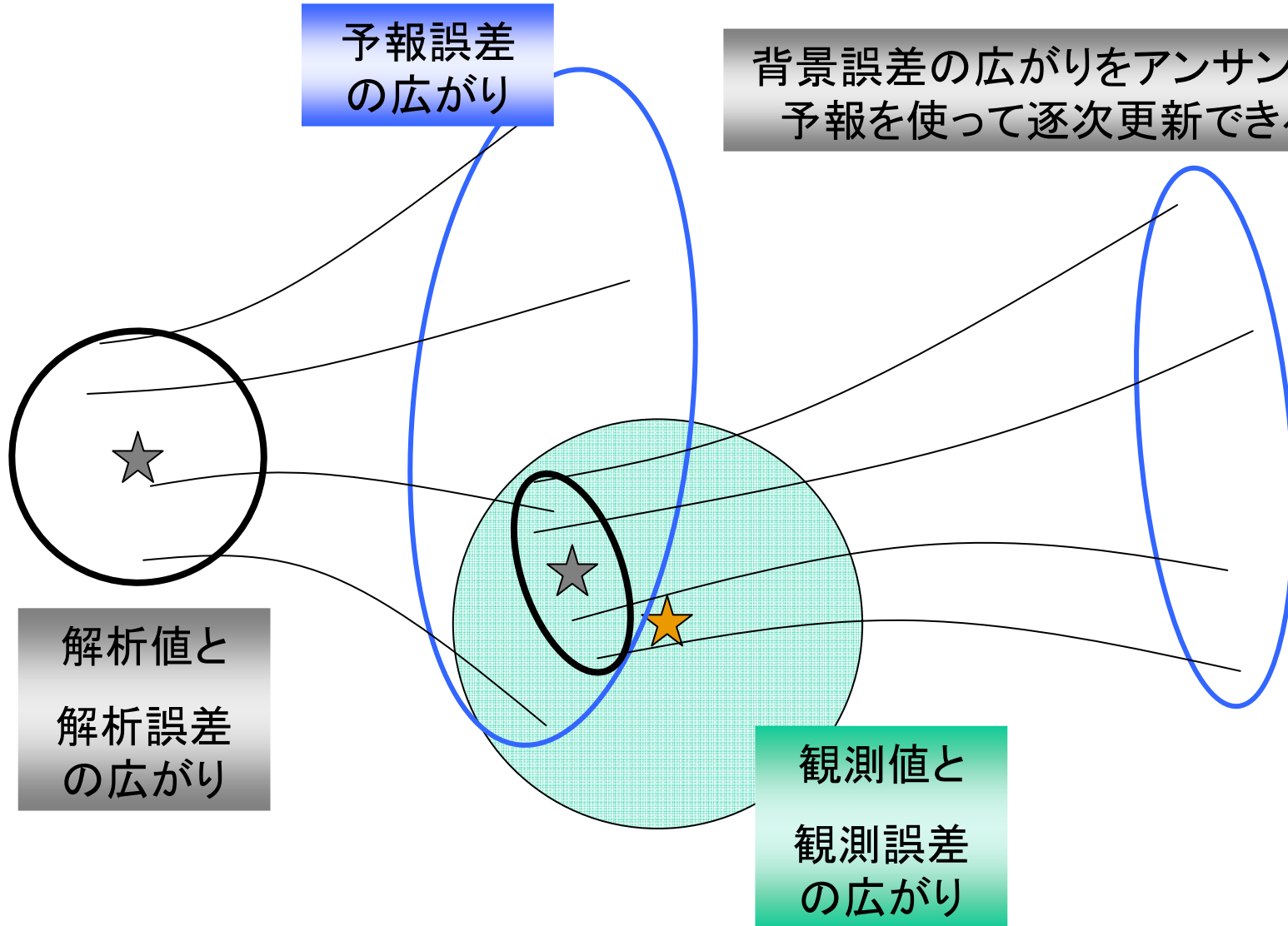
背景誤差の広がりをモデル
を使って逐次更新できる。



Ensemble Kalman Filter

予報誤差
の広がり

背景誤差の広がりをアンサンブル
予報を使って逐次更新できる。



解析値と
解析誤差
の広がり

観測値と
観測誤差
の広がり

KFと4D-VAR

- 4D-VARのタイムウィンドウを長く取れば、理論的にはKFと同等の解を得られる(露木 2007)。
- 現実的には、タイムウィンドウは24時間以内。
- 大気が過去の情報を忘れると言っても、24時間程度では、統計的な背景誤差共分散**B**の情報は残ってしまう。
- KFは背景誤差共分散**B**を毎回計算し、数値モデルの不確実性を考慮できる点で優れている。

KFと4D-VAR

- しかし、モデルが不完全な場合・・・、
- KFは不完全な予報誤差の情報を延々と引き継いでいく。
- 4D-VARはモデルの誤差をタイムウィンドウを越えて引き継ぐことはない。この点で4D-VARは優れている。

参考文献

- 小出 寛, JRA-25 長期再解析正式版とJCDAS の提供開始について. 気象庁気候情報課
- 気象庁, 数値予報の基礎知識
気象庁, 1997: データ同化の現状と展望・第一章データ同化概論. 数値予報課報告・別冊第43号
- 気象庁, 2005: 全球数値予報モデルの改善について
- ～高度な初期値解析手法「4次元変分法」の導入～. 報道発表資料
- 気象庁, 2006: アンサンブル技術の短期・中期予報への利用 ～激しい気象現象の予測向上を目指して～. 数値予報課報告・別冊第52号