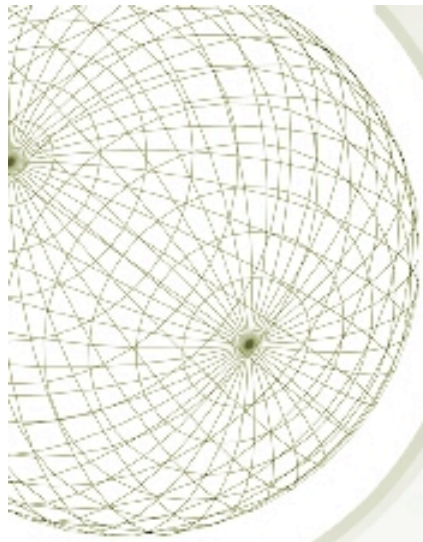


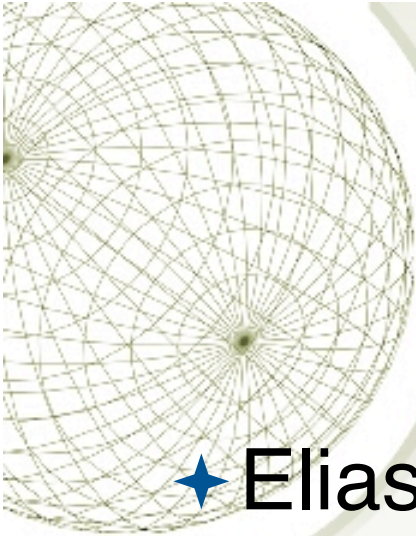
2009/4/13(月) 大循環ゼミ



用語解説：E-P フラックス

地球科学専攻 M2

藤原冬樹



E - P フラックスとは

- ★ Eliassen and Palm (1961)により定義
- ★ 渦による運動量フラックスと熱フラックスをあわせて一つの物理量で表せる.
- ★ 収束・発散により、平均帯状流の加速・減速を定量的に表現できる.

基礎方程式系(球面座標系)

静力を仮定: $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = RT$

★ 運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u \cos \theta) + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = F_{\lambda}^* \dots (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} - f u + \frac{v^2 \tan \theta}{a} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = F_{\theta}^* \dots (2)$$

★ 熱力学の式

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta} + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \kappa T \right) = \frac{J}{C_p} \dots (3)$$

★ 連続の式

$$\frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) + \frac{\partial w}{\partial z} - w = 0 \dots (4)$$

(4)を用いて
(1),(2),(3)を変形

連続の式を用いて(1),(2),(3)を変形

$$dx = a \cos \theta d\lambda$$

$$dy = a d\theta \text{ として}$$

★ 運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u)^2 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial y}(uv \cos^2 \theta) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 u w) - f v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_x^* \dots (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial y}(v^2 \cos^2 \theta) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 v w) + (f + \frac{u \tan \theta}{a}) u + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_y^* \dots (6)$$

★ 熱力学の式

$$\frac{\partial \Phi_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u \Phi_z) + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial y}(v \Phi_z \cos \theta) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w \Phi_z) + \kappa w \Phi_z = \kappa J \dots (7)$$

$$\kappa = \frac{R}{C_p}$$

$$\Phi_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

各変数を帯状平均流とその偏差に分けて、 $(u = \bar{u} + u')$
(5)(6)(7)を帯状平均する

帯状平均した方程式系 (右辺に微小擾乱と摩擦項を組み込む)

★ 運動方程式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} \bar{v} \cos^2 \theta) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \bar{u} \bar{w}) - f \bar{v} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\bar{F}_x \dots (8)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}^2 \cos^2 \theta) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \bar{v} \bar{w}) + (f + \frac{\bar{u} \tan \theta}{a}) \bar{u} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\bar{F}_y \dots (9)$$

★ 熱力学の式

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_z}{\partial t} + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} \bar{\Phi}_z \cos \theta) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \bar{w} \bar{\Phi}_z) + \kappa \bar{w} \bar{\Phi}_z = \kappa \bar{J} - \bar{G} \dots (10)$$

★ 連続の式

$$\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} \cos \theta) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \bar{w}) = 0 \dots (11)$$

(11)を用いて
(8)(9)(10)を変形



連続の式を用いて式を変形

★ 運動方程式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \left(f + \frac{\bar{u} \tan \theta}{a}\right) \bar{v} = -\bar{F}_x \cdots (12)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \left(f + \frac{\bar{u} \tan \theta}{a}\right) \bar{u} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = -\bar{F}_y \cdots (13)$$

★ 熱力学の式

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_z}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\Phi}_z}{\partial y} + \bar{w} \bar{S} = \kappa \bar{J} - \bar{G} \cdots (14)$$

基礎方程式系(5)~(7)から
(12)~(14)を差し引き
渦動成分の方程式系を導く

渦動成分の方程式系 (非線形項は右辺に組み込む)

★ 運動方程式

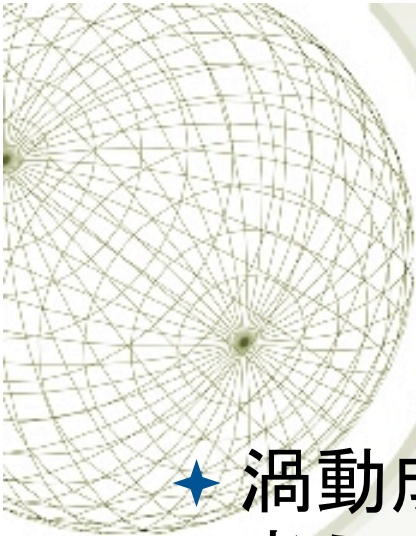
$$\frac{\bar{D}u'}{Dt} - \left(f + \frac{\bar{u}\tan\theta}{a}\right)v' + \frac{u'\bar{v}\tan\theta}{a} + v'\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + w'\frac{\partial\bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial\Phi'}{\partial x} = -\bar{F}_x \cdots (15)$$

$$\frac{\bar{D}v'}{Dt} + \left(f + \frac{\bar{u}\tan\theta}{a}\right)\bar{u} = \frac{u'\bar{u}\tan\theta}{a} + v'\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + w'\frac{\partial\bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial\Phi'}{\partial y} = -\bar{F}_y \cdots (16)$$

★ 熱力学の式

$$\frac{\bar{D}\Phi'_z}{Dt} + v'\frac{\partial\bar{\Phi}_z}{\partial y} + w'\frac{\partial\bar{\Phi}_z}{\partial z} + w'S' = \kappa J' - G' \cdots (17)$$

$$\left(\frac{\bar{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$



★ 渦動成分の方程式系に関して、一様な正弦波を考えて、波の位相速度を c とすると、波の移流方程式の関係から、 $\frac{\partial}{\partial t}$ は $-c \frac{\partial}{\partial x}$ とかける.

★ 右辺の非線形項は無視できると仮定し、またスケールアナリシスにより $\bar{v}$ および $\bar{w}$ も無視できるとする.

渦動の方程式系
(15)~(17)を書き換える

渦動成分の方程式系

★ 運動方程式

$$(\bar{u} - c) \frac{\partial u'}{\partial x} - \hat{f}v' + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi'}{\partial x} = 0 \dots (18)$$

$$\hat{f} = f + \frac{\bar{u} \tan \theta}{a} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

$$(\bar{u} - c) \frac{\partial v'}{\partial x} + \tilde{f}u' + \frac{\partial \Phi'}{\partial y} = 0 \dots (19)$$

$$\tilde{f} = f + \frac{2\bar{u} \tan \theta}{a}$$

★ 熱力学の式

$$(\bar{u} - c) \frac{\partial \Phi'_z}{\partial x} - \tilde{f}v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + Sw' = 0 \dots (20)$$

(18)~(21)を組み合わせて
変形し、運動エネルギーと
有効位置エネルギーにつ
いての関係式を導く

★ 連続の式

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (v' \cos \theta) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 w') = 0 \dots (21)$$

エネルギー関係式

- ★ 渦動成分の方程式系(18)~(21)から

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} [(\bar{u} - c)E + \rho_0 u' \Phi'] + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (\rho_0 v' \Phi' \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 w' \Phi') \\ &= -\rho_0 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\bar{u} \tan \theta}{a} \right) u' v' - \rho_0 u' w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\tilde{f} \rho_0}{S} v' \Phi'_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \dots (22) \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2} \rho_0 (u'^2 + v'^2 + \frac{\Phi_z'^2}{S})$$

- ★ これを帯状平均する

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (\rho_0 \overline{v' \Phi' \cos \theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \overline{w' \Phi'}) \\ &= -\rho_0 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\bar{u} \tan \theta}{a} \right) \overline{u' v'} - \rho_0 \overline{u' w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\tilde{f} \rho_0}{S} \overline{v' \Phi'_z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \dots (23) \end{aligned}$$

次に、運動量及び熱フラックスについての関係を導き出す

渦動成分の方程式系

★ 運動方程式

$$(\bar{u} - c) \frac{\partial u'}{\partial x} - \hat{f}v' + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi'}{\partial x} = 0 \dots (18)$$

$$(\bar{u} - c) \frac{\partial v'}{\partial x} + \tilde{f}u' + \frac{\partial \Phi'}{\partial y} = 0 \dots (19)$$

$$\hat{f} = f + \frac{\bar{u} \tan \theta}{a} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

$$\tilde{f} = f + \frac{2\bar{u} \tan \theta}{a}$$

★ 熱力学の式

$$(\bar{u} - c) \frac{\partial \Phi'_z}{\partial x} - \tilde{f}v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + S w' = 0 \dots (20)$$

★ 連続の式

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (v' \cos \theta) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 w') = 0 \dots (21)$$

この式から、運動量及び熱フラックスについての関係を導き出す

渦動成分の方程式から

- ★ (18),(20)式を変形し、x方向で平均を取ると、次のようにできる

$$\overline{\Phi'v'} = -(\bar{u} - c)\overline{u'v'} + \frac{(\bar{u} - c)}{S} \overline{v'\Phi'_z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \dots (24)$$

- ★ また、(18),(20),(24)式から、同様にすると、

$$\overline{w'\Phi'} = -(\bar{u} - c)\overline{u'w'} + \hat{f} \frac{(\bar{u} - c)}{S} \overline{v'\Phi'_z} \dots (25)$$

これを、エネルギー関係式(23)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (\rho_0 \overline{v'\Phi'} \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \overline{w'\Phi'}) \\ &= -\rho_0 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\bar{u} \tan \theta}{a} \right) \overline{u'v'} - \rho_0 \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\tilde{f} \rho_0}{S} \overline{v'\Phi'_z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \dots (23) \end{aligned}$$

に代入し変形する

E-Pフラックス

- ★ (23),(24),(25)式から、

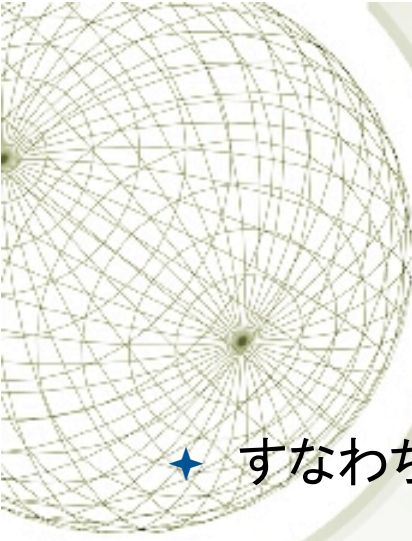
$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial y} \left[\cos^2 \theta (-\overline{u'v'}) + \frac{1}{S} \overline{v'\Phi'_z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right] + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho_0 (-\overline{u'w'}) + \frac{\hat{f}}{S} \overline{v'\Phi'_z} \right] = 0 \dots (26)$$

- ★ また、帯状平均した方程式系の連続の式(11)は以下だった

$$\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} \cos \theta) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \bar{w}) = 0 \dots (11)$$

- ★ この式から、 $\vec{F} = (F_y, F_z)$ を以下のようにできる

$$\begin{cases} F_y = a \cos \theta (-\overline{u'v'}) + \frac{1}{S} \overline{v'\Phi'_z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \sim a \cos \theta (-\overline{u'v'}) \\ F_z = a \cos \theta (-\overline{u'w'}) + \frac{\hat{f}}{S} \overline{v'\Phi'_z} \sim a \cos \theta (\hat{f} \frac{\overline{v'\Phi'_z}}{S}) \end{cases}$$



E - P フラックスと収束・発散

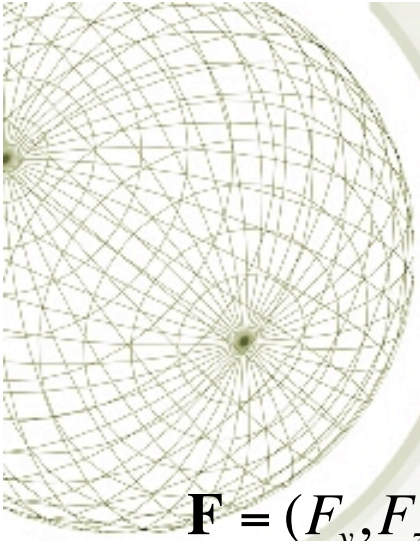
- ★ すなわち、 E - P フラックス $\mathbf{F}$ を以下のように定義できる

$$\mathbf{F} = (F_y, F_z) = (-\overline{u'v'}, \hat{f} \frac{\overline{v'\Phi'_z}}{S})$$

$$= (-\overline{u'v'}, \hat{f} R \frac{\overline{v'T'}}{S})$$

- ★ また、 E - P フラックスの発散は次のようになる

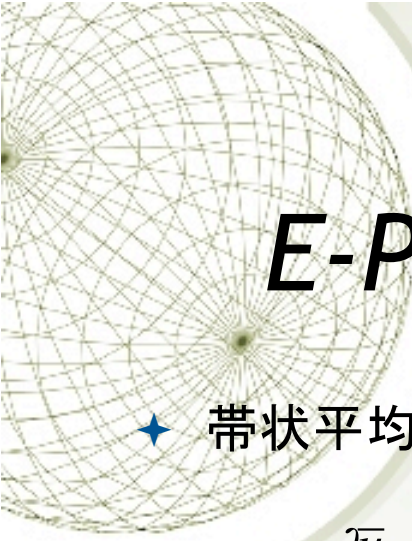
$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (\cos \theta F_y) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 F_z)$$



E-Pフラックスの意味

$$\mathbf{F} = (F_y, F_z) = (-\overline{u'v'}, \hat{f}R \frac{\overline{v'T'}}{S})$$

- ★ 南北成分 F_y は西風運動量の南北フラックス、鉛直成分 F_z は熱の南北フラックスを表す.
- ★ F_y には負符号がついているので、西風偏差 ($u' > 0$) が北向きに輸送 ($v' > 0$) されるとき、 $F_y < 0$ (南向き).
- ★ F_z については、正の温位偏差 ($T' > 0$) が北向きに輸送されるとき、 $F_z > 0$ (鉛直上向き).



E - P フラックスの収束・発散の意味

- ★ 帯状平均した運動方程式の東西成分を $\nabla \cdot \mathbf{F}$ で表すと次のようになる.

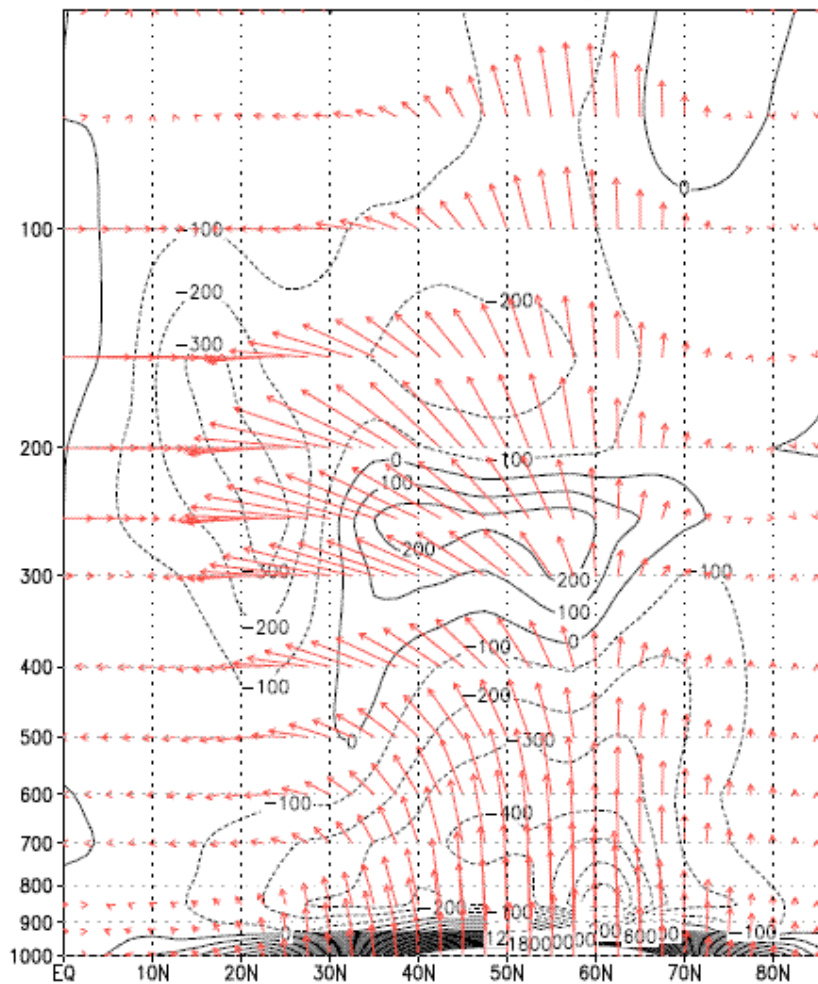
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \hat{f} \bar{v}^* + \bar{w}^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{1}{a \cos \theta} \nabla \cdot \mathbf{F} + F^*$$

- ★ この式は、 $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$ つまり発散する時に東西風が加速され、収束する時に減速するような力が働くことを示している.
- ★ これを含む方程式系をTEM方程式系(Transformed Eulerian-Mean equation)という.

- ★ $\bar{v}^*, \bar{w}^*$ は残差循環と呼ばれる.
$$\bar{v}^* = \bar{v} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \frac{\overline{v' \Phi'_z}}{S})$$
$$\bar{w}^* = \bar{w} + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\overline{v' \Phi'_z}}{S} \cos \theta)$$

光吉 2006 卒業論文より

Composite of EP flux Divergence
(SJ:weak,PJ:strong)



Composite of EP flux Divergence
(SJ:weak,PJ:weak)

