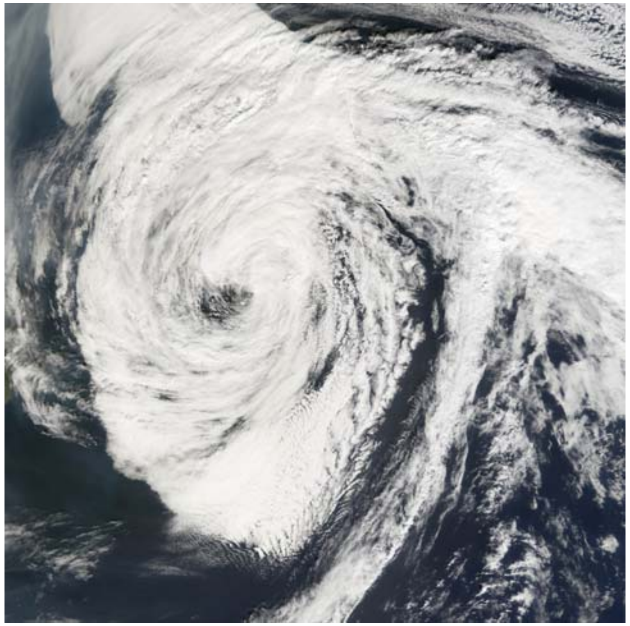
順圧不安定（Barotropic Instability）について

生命環境科学研究科2年
井尾　展悠

傾圧不安定と順圧不安定について

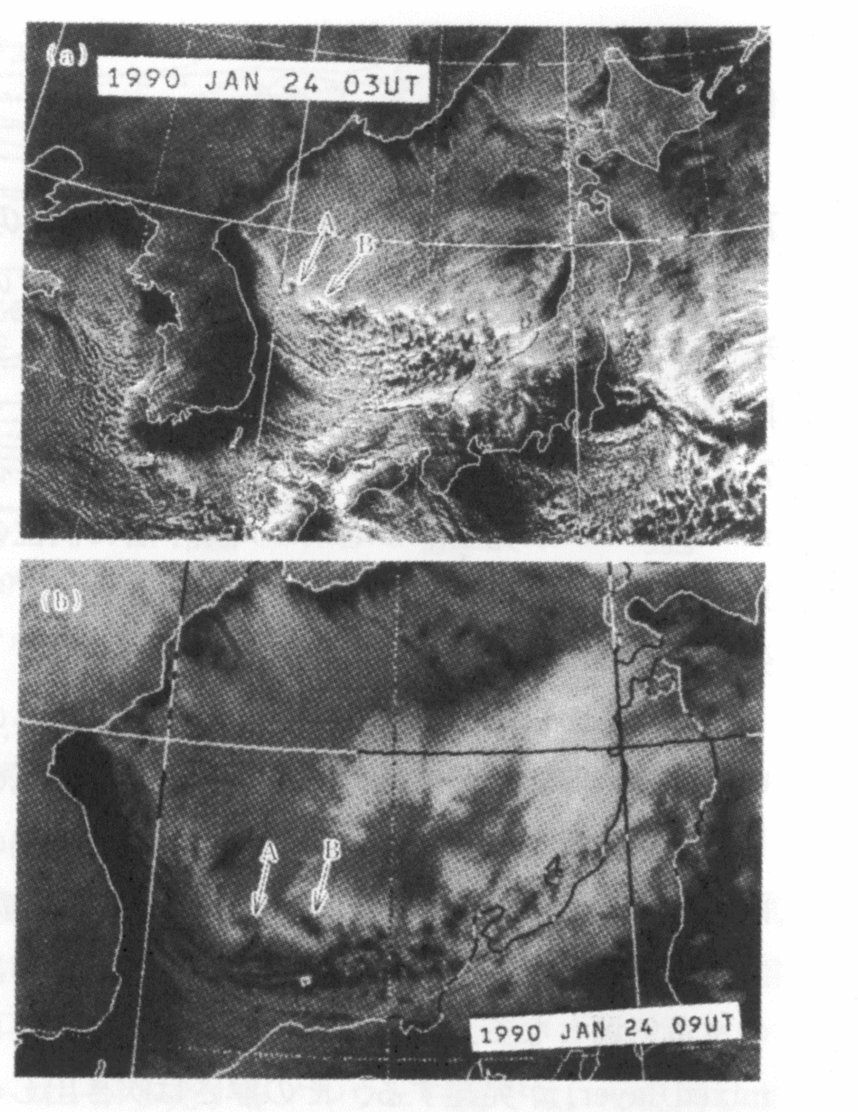
- 傾圧不安定→鉛直方向に風速のシアが存在する場合に、擾乱が発生する不安定. 有効位置エネルギーがsource energy となる.

- 順圧不安定→南北方向に風速のシアが存在する場合に、擾乱が発達する不安定. 一般場からの運動エネルギーがsource energy となる.



温帯低気圧は、傾圧不安定によって成長する

順圧不安定に関する過去の事例



- 渦は小さくとも、強風を伴ったことが報告されている(7000トン級の船舶の海難事故).
- 冬季の北西季節風が、朝鮮半島のペクト山にぶつかり、2つに分流し、シアーラインを作っている.
- この事例において、渦の発達のさいのエネルギー変換を調べたところ、渦エネルギーは一般場の運動エネルギーから変換された量のほうが、有効位置エネルギーから変換された量より大きいことがわかっている.

日本海南西部における温帯低気圧(a)1990年1月24日03UTC,(b) 09UTC(黒田、1992)

順圧不安定の数式的扱い(1) — Rossby 波 —

出発は、β 面におけるBarotoropic Vorticity equation

$$\boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla(\zeta + \beta y) = 0} \tag{4-1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{4-2}$$

（この式の導出は、Holton などを参照）

(4-1) 式を線形化し、帯状流成分と擾乱成分に分ける.

$$\zeta = \bar{\zeta}, u = U + u', v = v'$$

これによって、線形化された(4-3)式を得る.

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + U\left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} + \beta\right) = 0 \tag{4-3}$$

順圧不安定の数式的扱い(2) — Rossby 波 —

さらに、流線関数を導入して、(4-3) 式に導入すれば、

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi + U\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi + \left(\beta - \frac{d^2U}{d^2y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \qquad \text{(4-4)}$$

$$u' = -\partial\psi/\partial y, v' = \partial\psi/\partial x$$

今、(4ー4) 式の解として、x 方向に伝播する次のようなノーマルモードを考える.

$$\psi = \Psi(y)e^{i\mu(x-ct)}(\mu\text{は東西波数})$$

これを代入すれば、(4ー4) 式は、

$$\boxed{(U-c)\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2} - \mu^2\Psi\right) - \left(\frac{d^2U}{dy^2} - \beta\right)\Psi = 0} \qquad \text{(4-5)}$$

順圧不安定の数式的扱い(3) — Rossby 波 —

前述のノーマルモードで、y=±d で次のような境界を定義する.

$$\nu(\pm d) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(\pm d) = -i\mu\Psi(\pm d)e^{i\mu(x-ct)} = 0$$

（南北風の風速がが境界において0である）

上式より、以下のような境界条件を定義することができる.

$$\boxed{\Psi(d) = \Psi(-d) = 0}$$

順圧不安定の数式的扱い(4) — Rossby 波 —

(4-5)式において、U（y）はyの関数であるため、一般解を特定することができない.
しかし、簡単のため、U=U(y)=const とすれば(4-7) 式のようになる.

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} - \left(\mu^2 - \frac{\beta}{U-c}\right)\Psi = 0 \qquad (4\text{-}7)$$

(4-7)式ならば、一般解

$$\Psi_n = A\cos\left[\frac{(2n-1)\pi y}{2d}\right]$$

を得る.

ここで、分散関係式より、位相速度は

$$c = U - \beta/\mu^2 + [(2n-1)\pi/2d]^2$$

と求められ、特にn=1, d→∞ とすれば、

$$c = U - \beta/\mu^2$$

を得る(ロスビー波の位相関係式)

順圧不安定の数式的扱い(5) – 順圧不安定の条件 -

順圧不安定の条件を、エネルギー方程式から導出する.
(4－5)式に、複素共役をかけると、次式(4－11)を得る.

$$(U-c)\left(\Psi^*\frac{d^2\Psi}{dy^2}-\mu^2\Psi^*\Psi\right)-\left(\frac{d^2U}{dy^2}-\beta\right)\Psi^*\Psi=0$$

ここで、第一項は、

$$\Psi^*\frac{d^2\Psi}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\Psi^*\frac{d\Psi}{dy}\right)-\frac{d\Psi^*}{dy}\frac{d\Psi}{dy}$$

と変化できる.
これを代入して、(4－11)に(-d, d)で領域積分をすると、

$$\boxed{\int_{-d}^{d}\left[\frac{d}{dy}\left(\Psi^*\frac{d\Psi}{dy}\right)-\mu^2|\Psi|^2-\left|\frac{d\Psi}{dy}\right|^2\right]dy=\int_{-d}^{d}\frac{(d^2U/dy^2-\beta)|\Psi|^2}{(U-c)}dy}$$

となり、(4－12)式を得る.

順圧不安定の数式的扱い(6) – 順圧不安定の条件 -

左辺第一項は、境界条件を用いて部分積分を実行すれば0となり、結局

$$\int_{-d}^{d}\left(\mu^2|\Psi|^2+\left|\frac{d\Psi}{dy}\right|^2\right)dy=\int_{-d}^{d}\frac{(d^2U/dy^2-\beta)(U-c)^*|\Psi|^2}{|U-c|^2}dy$$

となる. ここで、ノーマルモードで定義した位相速度cを実数部crと虚数部ciに分ける(crが位相速度となり、ciが増幅率となる).

$$\boxed{\int_{-d}^{d}\left(\mu^2|\Psi|^2+\left|\frac{d\Psi}{dy}\right|^2\right)dy=\int_{-d}^{d}\frac{(d^2U/dy^2-\beta)(U-c_r)|\Psi|^2}{|U-c|^2}dy-ic_i\int_{-d}^{d}\frac{(d^2U/dy^2-\beta)|\Psi|^2}{|U-c|^2}dy}$$

順圧不安定の数式的扱い(7) – 順圧不安定の条件 -

前式では、エネルギーを表現しているので、虚数部を消去する必要がある.
そのため、右辺第二項は

$$ic_i\int_{-d}^{d}\frac{(d^2U/dy^2-\beta)|\Psi|^2}{|U-c|^2}dy \quad =0$$

となる. もし、増幅波が存在しているならば、ci ≠ 0 である.この理由から、

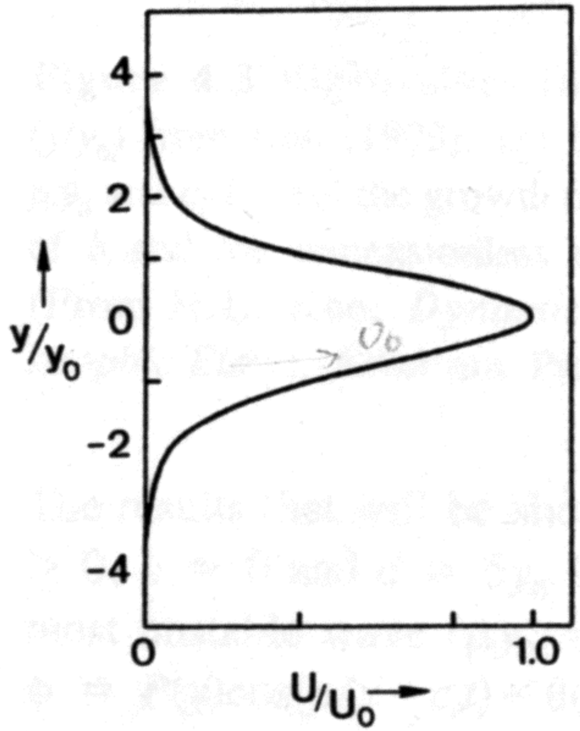
$$\boxed{\left(\frac{d^2U}{dy^2}-\beta\right)_{yk}=0}$$

となる。
つまり、領域のどこかで絶対渦度のy微分が0になることが、順圧不安定が起こるための必要条件であるといえる.

Bickley Jet を初期値とした順圧不安定

$$U = U_0 \, \mathrm{sech}^2(y/y_0)$$

南北方向



風速

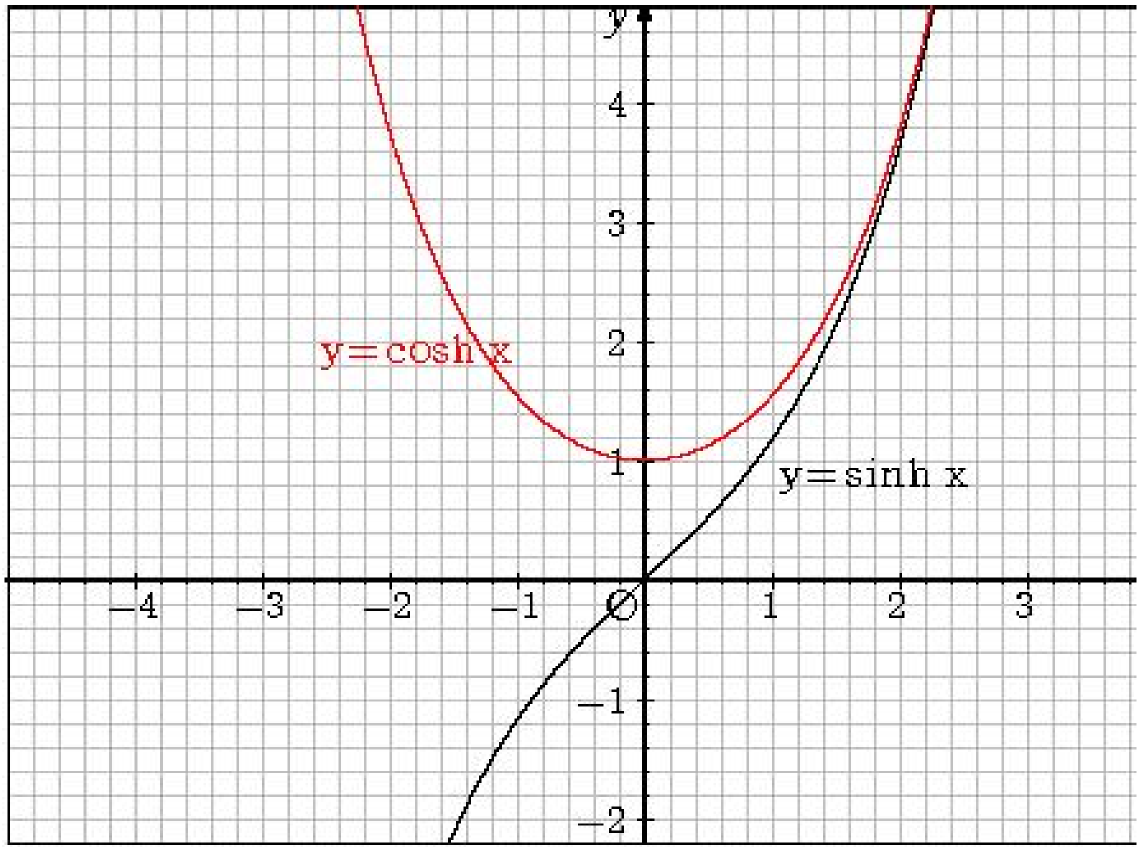
- $U_0 > 0$ (西風)、$U_0 < 0$ (東風)として示している.

- この式を初期値として、(4-14)式の不安定条件、(4−5)式の固有値問題を解く.

$$(\tanh x)' = 1/\cosh^2 x = \mathrm{sech}^2\, x$$

双曲線関数

$(\tanh x)' = 1/\cosh^2 x = \mathrm{sech}^2\, x$



$\boxed{\cosh x = (e^x + e^{-x})/2}$

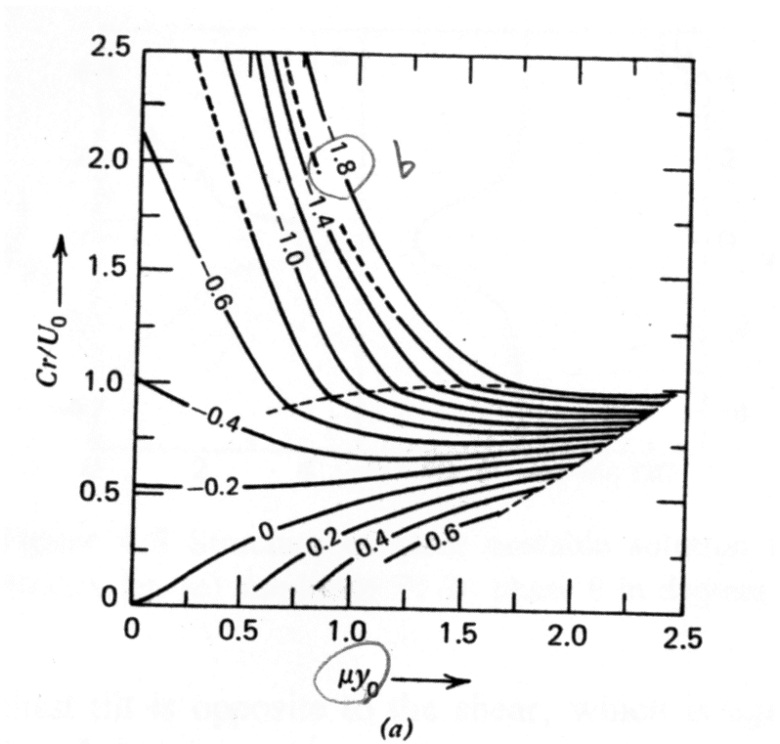
$\boxed{\sinh x = (e^x - e^{-x})/2}$

$\tanh x = \sinh x / \cosh x$

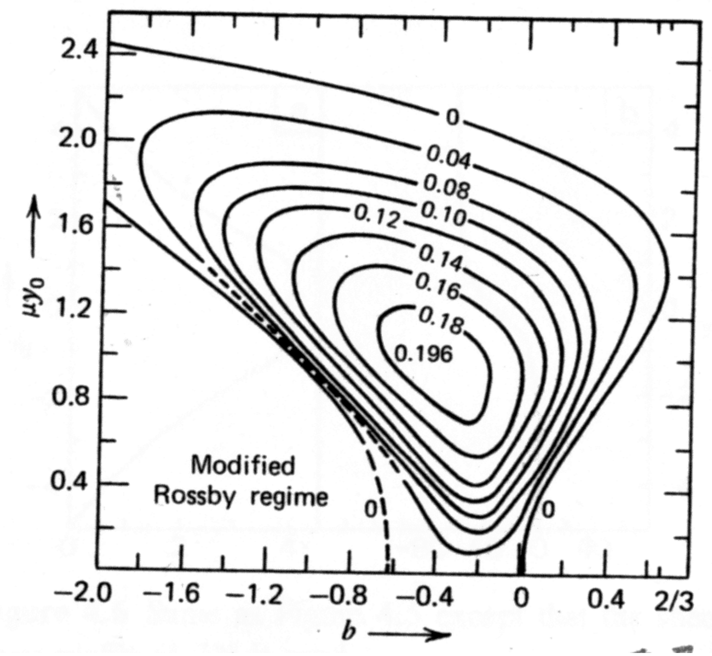
$(\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad)$

固有値問題を解く

（4－12）式を（4－5）式に代入して、固有値問題を解く

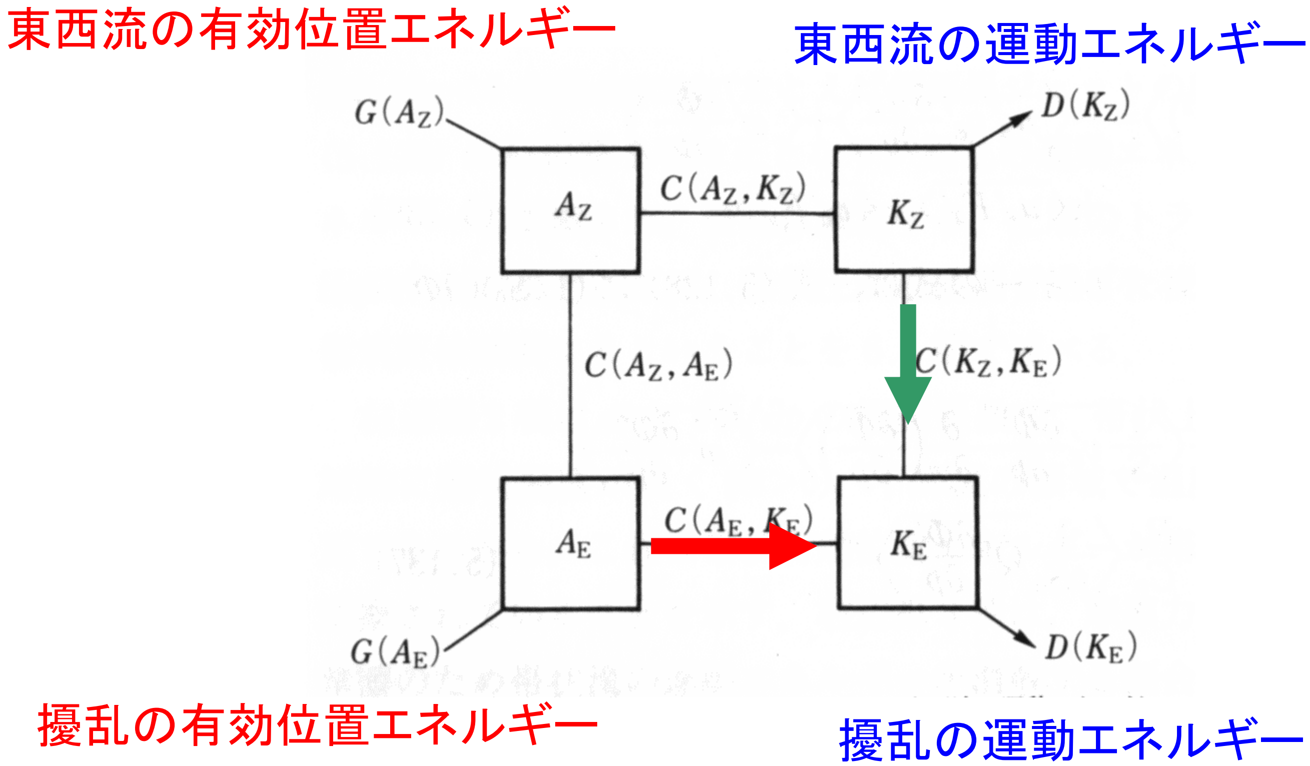


(a)



東風　　西風

ローレンツの4 Box 図にみるエネルギー



順圧不安定では、東西流の運動エネルギーから、擾乱の運動エネルギーへと変換される

順圧不安定の特徴

- 順圧大気を考えているから、順圧不安定性によって成長する波の運動エネルギーの源は、帯状流Uの運動エネルギーしかない. よって、順圧不安定性は、水平面の2次元的問題である.

- シアの強さや方向に依存し、不安定性が異なる. これまでの研究により、様々な流れの固有値問題を解いたが、

  基本場の絶対渦度の南北微分が符号を変える

  ことが、順圧不安定の発生するための必要十分条件であることがわかっている.

参考文献

- Numerical Prediction and Dynamic Meteorology; George J. Haltiner
- 総観気象学入門; 小倉義光
- 気象力学通論;　小倉義光
- 気象がわかる数と式