

北極振動方程式を用いた  
北極振動の解析的研究

2011年2月

下 悠 子

北極振動方程式を用いた  
北極振動の解析的研究

筑波大学大学院

生命環境科学研究科

地球科学専攻

修士(理学) 学位論文

下 悠 子

# Diagnostic Analysis of the Arctic Oscillation using the AO Index Equation

Yuko SHIMO

## Abstract

The Arctic Oscillation (AO) is well known as dominant sea-level pressure (SLP) anomaly pattern in Northern Hemisphere. The AO influences on climate in the Northern Hemisphere including Japan. It is important to understand the mechanism of the AO.

In this study, we investigated the abnormal weather using the AO Index equation. The AO is defined as the EOF-1 of SLP variation, which is dynamically connected to the variation of the barotropic height. Based on this concept, a barotropic general circulation model called a Barotropic S-model has been developed at the University of Tsukuba. Long-term integration of the S-model confirms the AO as the EOF-1 of the barotropic atmosphere. Therefore, the AO Index (AOI) is simply an inner product of the AO mode and the state variable of the S-model. We can thus derive the AOI equation which provides the budget of the AOI by differentiating the AOI with respect to time and substituting the S-model. Using this method, the abnormal weather is analyzed diagnostically.

As a result, we speculated the mechanism of AO as follows. The trend of AOI time series comfort to almost the linear term, and the forcing term is the opposite trend. So, AO is contributory the linear term, conversely the forcing term acted to restrain the AO. As AO negative, the nonlinear term is triggering, and the linear term accelerated the AOI negative.

It was suggested that time series of the AOI is contributory the linear term, and the forcing term acted to restrain the AOI. The nonlinear term is very chaotic, so it is not always true that the nonlinear term act positive or negative feedback for the AO.

**Key Words:** Arctic Oscillation, AOI equation

# 目次

Abstract	i
表目次	iv
図目次	v
1 はじめに	1
2 目的	3
3 使用データ	4
4 解析手法	5
4.1 順圧大気大循環モデル	5
4.2 スペクトル表記プリミティブ方程式の導出	9
4.2.1 鉛直構造関数	9
4.2.2 水平構造関数	10
4.2.3 3次元ノーマルモード関数展開	13
4.3 順圧S-モデル	16
4.3.1 外力の推定	16
4.3.2 物理過程	19
4.4 特異固有解理論	22
4.5 AOI方程式の構築手法	23
5 結果	24
5.1 1950年から2010年までのAOIと各項の関係	24
5.2 北極振動指数が $\pm 1.5\sigma$ 以上以下でのAOIと各項の時系列	25
5.2.1 AOIが $+1.5\sigma$ 以上の年を平均したAOIと各項の関係	25
5.2.2 AOIが $-1.5\sigma$ 以下の年を平均したAOIと各項の関係	25
5.2.3 AOIが $+1.5\sigma$ 以上の年, 1971年, 1988年, 1992年の時系列	26
5.2.4 AOIが $-1.5\sigma$ 以下の年, 1969年, 1976年, 2009年の時系列	26
5.3 北極振動指数が $\pm 1.5\sigma$ 以上以下での各項の空間分布	27
5.3.1 $+1.5\sigma$ から $-1.5\sigma$ を差引いた各項の空間分布	27

6	まとめと考察	28
7	結論	30
	謝辞	31
	参考文献	32
	付録	34
	EOF 解析 . . . . .	34
	EOF 解析とは . . . . .	34
	EOF 解析における固有ベクトルの計算方法 . . . . .	36
	ラグランジュの未定乗数法 . . . . .	39

## 表目次

表1	期間平均別にみたAOIと各項の数値 . . . . .	40
表2	AOIと各項の相関係数 . . . . .	40

## 目 次

図 1	1950 年から 2010 年までの AOI の時系列 (365 日移動平均) . . . . .	41
図 2	1950 年から 2010 年までの AOI と線形項の時系列 (365 日移動平均) .	42
図 3	1950 年から 2010 年までの AOI と外力項の時系列 (365 日移動平均) .	43
図 4	1950 年から 2010 年までの AOI と非線形項の時系列 (365 日移動平均)	44
図 5	AOI が $+1.5\sigma$ 以上の時の AOI と各項 . . . . .	45
図 6	AOI が $-1.5\sigma$ 以下の時の AOI と各項 . . . . .	45
図 7	1971 年 11 月 1 から 1972 年 2 月 28 日までの時の AOI と各項 . . . . .	46
図 8	1988 年 11 月 1 から 1989 年 2 月 28 日までの時の AOI と各項 . . . . .	46
図 9	1992 年 11 月 1 から 1993 年 2 月 28 日までの時の AOI と各項 . . . . .	47
図 10	1969 年 11 月 1 から 1970 年 2 月 28 日までの時の AOI と各項 . . . . .	47
図 11	1976 年 11 月 1 から 1977 年 2 月 28 日までの時の AOI と各項 . . . . .	48
図 12	2009 年 11 月 1 から 2010 年 2 月 28 日までの時の AOI と各項 . . . . .	48
図 13	$+1.5\sigma$ 以上の時の各項における順圧高度場 . . . . .	49
図 14	$-1.5\sigma$ 以上の時の各項における順圧高度場 . . . . .	50
図 15	$+1.5\sigma$ から $-1.5\sigma$ を差引いた時の各項における順圧高度場 . . . . .	51

# 1 はじめに

北極振動 (Arctic Oscillation: AO) とは, Thompson and Wallace (1998) で提唱された冬季北半球の循環で卓越する変動パターンである. 北緯 20 度以北の北半球域で冬季の月平均海面更正気圧偏差場の主成分分析を行い最も卓越するモードを抽出し, それを AO と名付けた. AO は北極域の気圧が負偏差の時, 中緯度の海上を中心に正偏差となり, 北極域と中緯度の気圧がシーソーのようになる変動である. 中緯度帯の気圧が正 (負) 偏差となるパターンを AO プラス (マイナス) と定義し, その指標を AO インデックス (AOI) で表す. また, AO は北半球の中高緯度の天候に影響を与える事が知られている. 例えば日本では, AOI がプラスの時に暖冬, マイナスの時に寒冬となりやすい (山崎 2003). しかし, AO は NAO や PNA などのパターンがもたらす統計的な虚像であると主張する意見もある (Itoh 2002). これに対し Wallace and Thompson (2002) では AO は物理的に存在すると主張しており, AO が物理的な実体を持つかどうかは未だ論争となっている.

AO は北半球規模での循環変動であるため, 様々な現象と密接に関係している. 成層圏・対流圏相互作用の観点では, 成層圏極夜西風ジェットが強弱を繰り返す現象 (成層圏極夜ジェット振動) がしばしば対流圏に伝播し AO が形成され, この時成層圏下部の AOI と対流圏の AOI が同符号をとることが知られている (Kodera et al., 1999; Baldwin and Dunkerton 1999; Baldwin and Dunkerton 2001). ブロッキング高気圧と AO の関係について池田 (2010) では, ブロッキング高気圧の発生や移動に伴って AOI が急激に変化するのではなく, カオス的に発生するブロッキング高気圧の位置が AO の位相によって支配されていると主張している. Tanaka and Tokinaga (2002) は, 傾圧不安定理論により AO が正の時には寒帯前線ジェットの傾圧性により励起される Polar mode が, AO が負の時には亜熱帯ジェットの傾圧性による Charney mode が, それぞれ正のフィードバックとして働き AO を維持していることを示した. さらに 藤原 (2010) によると, 傾圧不安定モードが極渦と相互作用するにあたって, それまで存在した不安定モードが変形して極渦への作用に影響を及ぼし, AO の維持に寄与していると示唆している. また, AO により近年の温暖化の空間パターンを説明することができるが, IPCC-AR4 のモデル群は 20 世紀の AOI を再現することができないため, AO は非線形内部力学によりカオス的に変動する自然変動と考えられている (大橋・田中 2009; Ohashi and Tanaka 2010). 北極振動の変動は様々な現象の理解において重要であり, そのメカニズムの解明は重要な課題であるといえる.



力学的なモードとしての AO の研究もたくさん存在する。例えば、Kimoto et al. (2001) では帯状 - 波相互作用をパラメタライズしたモデルを用いて定常強制問題について解析した結果、第一特異モード (中立モード) での東西平均風偏差は観測と同様に順圧的な南北のダイポール構造を持つと示し、AO は最も減衰の少ない力学的モードであるとした。同様の立場から Watanabe and Jin (2004) では 3 次元に拡張し、波 - 波相互作用を考慮したモデルを用いて中立モードを求めた。その結果特異モードの高度場は観測と高い空間相関 (0.68) を示した。さらに Kimoto et al. (2001) では中立モードに対する正のフィードバックプロセスとして tilted-trough メカニズムを示しており、これは東西風偏差の南北ダイポールが元の東西風偏差を強化するというプロセスである。これに対し田中 (2007) ではその過程に必要な渦の形状が何によって決まるのか明らかでない主張している。Tanaka (2003) では AO が順圧的な構造であることに着目し、順圧大気大循環モデルを用いた AO のシミュレーションを行ったところ、50 年積分から得られた順圧高度場の EOF1 は観測で見られるような AO の構造を再現した。また、Tanaka and Matsueda (2005) では、同モデルを冬季気候値で線形化した時の固有モードおよび中立モードを求め、固有値が 0 になる特異解が AO であるとした。しかし、現実的な摩擦を導入すると固有値は 0 にならないため、渋谷 (2010) では線形化で無視された非線形の 2 次の項を考慮し解析した。その結果、実数固有値がほぼ 0 となり、レイリー摩擦と非線形項によって AO が力学的に励起されることを定量的に示した。

以上のように北極振動の励起メカニズムは力学的に解明されつつあるが、AOI 方程式という観点から AO を解析した研究はなく、統一的な AO のメカニズムに対しさらなる研究が求められている。

## 2 目的

本研究では, Tanaka(2003) を参考に順圧大気大循環モデル (順圧 S-モデル) を用い, 北極振動方程式 (AOI 方程式) を構築し, 線形項, 非線形項, 外力項に分けることで, 各項が北極振動指数の変動にどのように寄与しているかを調べる. そして, 北極振動のメカニズムを力学的な観点から探る.

### 3 使用データ

順圧 S モデルにおける解析およびモデルの初期値や外力を求めるために使用するデータは、アメリカ環境予報センター (National Centers for Environmental Prediction; NCEP)/アメリカ大気研究センター (National Center for Atmospheric Research; NCAR) による再解析データである。その詳細は以下のとおりである。

使用期間	1950 年 1 月 – 2000 年 12 月
時間間隔	00, 06, 12, 18Z
気象要素	$u$ (m/s), $v$ (m/s), $Z$ (gpm)
水平グリッド間隔	$2.5^\circ \times 2.5^\circ$
鉛直グリッド間隔	1000, 925, 850, 700, 600, 500, 400, 300, 200, 150, 100, 70, 50, 30, 20, 10 hPa の 17 層
解析範囲	北半球

再解析データとは、同一の数値予報モデルとデータ同化手法を用いて過去数十年間にわたりデータ同化を行い、長期間にわたって出来る限り均質になるように作成したデータセットのことである。このような均質な大気解析データセットは、きわめて信頼度の高い基礎資料になりうる。特に気候変動の解明、大気大循環の解析と全球のエネルギー循環の研究の際には有用である。

NCEP/NCAR では 1949 年 1 月から 50 年以上という長期にわたって同一のデータ同化手法により再解析が行われており、このデータは解析に用いることが出来る。ただし、1979 年に初めて人工衛星 TIROS が打ち上げられ、客観解析に初めて衛星データが導入されたことにより、1979 年を境にデータの不連続的な変動が残っていることに留意しなくてはならない。モデルや解析スキーム等による見かけの気候変動は取り除かれているが、入力データの質の不連続は明瞭に残っている。また、 $2.5^\circ \times 2.5^\circ$  の等圧面データには、すべての変数に対して T30 の波数切断で平滑化施されているため、高緯度地方では波動状の誤差が顕著に現れる。しかし長周期の変動の研究では、長期間にわたる均質なデータである再解析データは貴重である。

NCEP/NCAR 再解析データに用いられている予報モデルの水平分解能は T62, 鉛直分解能は 30 層, データ同化手法は 3 次元変分法で、その解析レベルはモデル面である。ただし、先に述べたように等圧面データには平滑化のために T30 の波数切断が行われている。

## 4 解析手法

### 4.1 順圧大気大循環モデル

本研究では Tanaka (2003) で開発された順圧大気大循環モデル (順圧 S-モデル) を用いた。

このモデルの基礎方程式系は, 球面座標系 (緯度  $\theta$ , 経度  $\lambda$ , 気圧  $p$ ) で表された水平方向の運動方程式, 熱力学第一法則の式, 質量保存則, 状態方程式, 静力学平衡の式から成り立つ (小倉 1978).

- 水平方向の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv + F_u \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv + F_v \quad (2)$$

- 熱力学第一法則の式

$$\frac{\partial c_p T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla c_p T + \omega \frac{\partial c_p T}{\partial p} = \omega \alpha + Q \quad (3)$$

- 質量保存則

$$\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (4)$$

- 状態方程式

$$p\alpha = RT \quad (5)$$

- 静力学平衡の式

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha \quad (6)$$

これらの方程式で用いられている記号は次の通りである.

$\theta$ : 緯度	$\alpha$ : 比容
$\lambda$ : 経度	$\omega$ : 鉛直 $p$ 速度
$u$ : 東西方向の風速	$F_u$ : 東西方向の摩擦
$v$ : 南北方向の風速	$F_v$ : 南北方向の摩擦
$V$ : 水平方向の風速	$Q$ : 非断熱加熱率
$\phi$ : ジオポテンシャル	$\Omega$ : 地球の自転角速度 ( $7.29 \times 10^{-5}[\text{rad}/\text{s}]$ )
$p$ : 気圧	$a$ : 地球の半径 ( $6.371 \times 10^6[\text{m}]$ )
$t$ : 時間	$c_p$ : 定圧比熱 ( $1004[\text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}]$ )
$T$ : 気温	$R$ : 乾燥気体の気体定数 ( $287.04[\text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}]$ )

そして上記の方程式の中で熱力学第一法則の式に質量保存則, 状態方程式, 静力学平衡の式を代入することによって, これらの基礎方程式系を3つの従属変数 ( $u, v, \phi$ ) のそれぞれの予報方程式で表すことができる (Tanaka 1991).

まず始めに気温  $T$  と比容  $\alpha$ , ジオポテンシャル  $\phi$  について以下のような摂動を与える.

$$T = T_0 + T' \quad (7)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha' \quad (8)$$

$$\phi = \phi_0 + \phi' \quad (9)$$

ここで  $T_0, \alpha_0, \phi_0$  はそれぞれ全球平均量であり,  $T', \alpha', \phi'$  は全球平均量からの偏差である. (7) から (9) 式を状態方程式と静力学平衡の式に適用すると,

$$p\alpha_0 = RT_0 \quad (10)$$

$$p\alpha' = RT' \quad (11)$$

$$\frac{d\phi_0}{dp} = -\alpha_0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial p} = -\alpha' \quad (13)$$

これら (7) ~ (13) 式を用いて熱力学第一法則の式を変形すると,

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T' + \omega \left( \frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{RT'}{pc_p} \right) + \omega \left( \frac{dT_0}{dp} - \frac{RT_0}{pc_p} \right) = \frac{Q}{c_p} \quad (14)$$

となる. ここで  $T_0 \gg T'$  が成り立つので, (14) 式の左辺の第3項において, 気温の摂動の断熱変化項は無視することができる. つまり,

$$\omega \frac{RT_0}{pc_p} \gg \omega \frac{RT'}{pc_p} \quad (15)$$

である。また左辺の第4項において、全球平均気温  $T_0$  を用いることで、以下のような大気の静的安定度パラメータ  $\gamma$  を導入することができる (Tanaka 1985)。

$$\gamma = \frac{RT_0}{c_p} - p \frac{dT_0}{dp} \quad (16)$$

よってこの関係式を用いて (14) 式を変形すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{p^2}{\gamma R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} - \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \omega = \frac{Qp}{c_p \gamma} \quad (17)$$

さらに (17) 式の両辺を  $p$  で微分し、質量保存則を適用すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\gamma R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} \\ & = \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{p^2}{\gamma R} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{Qp}{c_p \gamma} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

となる。以上より熱力学第一法則の式 (3) から気温  $T$  と比容  $\alpha$  を消去し、摂動ジオポテンシャル  $\phi'$  の予報方程式を導くことができた。これによって3つの従属変数 ( $u, v, \phi'$ ) に対して、3つの予報方程式 (1), (2), (18) が存在するので解を一意的に求めることができる。

これらの3つの式をまとめて行列表示すると次式のようなになる (Tanaka 1991)。

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{N} + \mathbf{F} \quad (19)$$

$\tau$  は無次元化された時間であり、 $\tau = 2\Omega t$  である。式 (19) の各記号は以下の通りである。

$\mathbf{U}$  : 従属変数ベクトル

$$\mathbf{U} = (u, v, \phi')^T \quad (20)$$

$\mathbf{M}, \mathbf{L}$  : 線形演算子

$$\mathbf{M} = 2\Omega \text{diag} \left( 1, 1, -\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \right) \quad (21)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \sin \theta & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ 2\Omega \sin \theta & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial(\cdot) \cos \theta}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

N : 非線形項ベクトル

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv \\ -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + \omega p \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (23)$$

F : 外部強制項からなるベクトル

$$\mathbf{F} = \left( F_u, F_v, \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{pQ}{c_p \gamma} \right) \right)^T \quad (24)$$

ただし,

$diag()$  : 対角行列

$()^T$  : 転置行列

とする.

式(19)の基礎方程式系の基本状態として、断熱かつ摩擦なし、つまり ( $F = 0$ ) の静止大気 ( $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi}$ ) = 0 を考え、そこに微小擾乱 ( $u', v', \phi'$ ) を与える. このとき式(19)の非線形演算子 N は,

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\left( \frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u' - \omega' \frac{\partial}{\partial p} u' + \frac{\tan \theta}{a} u' v' \\ -\left( \frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) v' - \omega' \frac{\partial}{\partial p} v' - \frac{\tan \theta}{a} u' u' \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{p^2}{R\gamma} \left( \frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \omega' p \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] \end{pmatrix}$$

2次以上の摂動項を無視すると、結局  $\mathbf{N} = 0$  となり、式(19)を線形化した基本状態は以下のように表せる.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial \tau} + \mathbf{L} \mathbf{U}' &= 0 \\ \mathbf{U}' &= (u', v', \phi')^T \end{aligned} \quad (25)$$

これ以降は簡単のため、 $\mathbf{U}' = (u', v', \phi')^T$  を  $\mathbf{U} = (u, v, \phi)^T$  と略記する.

## 4.2 スペクトル表記プリミティブ方程式の導出

### 4.2.1 鉛直構造関数

このベクトル方程式 (25) において, 鉛直構造関数  $G_m(p)$  を導入して, 鉛直方向と水平方向に変数分離を行う.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\lambda, \theta, p, \tau) &= (u, v, \phi)^T \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (u_m, v_m, \phi_m)^T G_m(p) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} U_m(\lambda, \theta, \tau) G_m(p) \end{aligned} \quad (26)$$

ここで添字の  $m$  は鉛直モード番号 (vertical mode number) を意味する. これを式 (27) に代入し, 分離された各変数に関する方程式を導く.

$$\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m}{dp} + \frac{1}{gh_m} G_m = 0 \quad (27)$$

$$\frac{1}{gh_m} \frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (28)$$

常微分方程式 (27) を鉛直構造方程式 (vertical structure equation) と呼ぶ. また水平風成分についても同様に鉛直構造関数を導入して,

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v_m + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi_m}{\partial \lambda} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u_m + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi_m}{\partial \theta} = 0 \quad (30)$$

と導ける. 式 (28), (29), (30) をまとめて水平構造方程式 (horizontal structure equation) と呼ぶ. ここで分離定数中の  $h_m$  は長さの次元 ( $L$ ) をもち, 鉛直構造方程式 (27) の固有関数である鉛直構造関数  $G_m(p)$  に対する固有値として求まる. また, 水平構造方程式 (28) は流体層の厚さ  $h_m$  の線形浅水方程式系と同じ形であることから,  $h_m$  は等価深度 (equivalent height) の意味を持つ.

鉛直構造関数  $G_m(p)$  の正規直交性により, 気圧  $p$  の任意の関数  $f(p)$  について, 次の鉛直変換を導くことができる.

$$f(p) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m G_m(p) \quad (31)$$

$$f_m = \frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} f(p) G_m(p) dp \quad (32)$$



ここで  $f_m$  は第  $m$  鉛直モードの鉛直変換係数である.

鉛直モード  $m = 0$  は順圧 (barotropic) モード, または外部 (external) モードといい, 鉛直方向に節を持たず, ほとんど全層で一定のまま変化しないモードである. これに対して鉛直モード  $m \geq 1$  は傾圧 (baroclinic) モード, または内部 (internal) モードといい,  $m$  番目のモードに関しては鉛直方向に  $m$  個の節を持つ. 本研究で用いた順圧スペクトルモデルは, 鉛直モード  $m = 0$  の順圧モードだけを考慮したモデルであり, 鉛直方向に平均した大気の特性を考慮するのに適したモデルであるといえる. 順圧モード  $m = 0$  における等価深度  $h_0$  は 9728.4m である.

#### 4.2.2 水平構造関数

前節で, 第  $m$  鉛直モードの鉛直構造関数の固有値として得た等価深度を用いて, 水平構造方程式 (28), (29), (30) を解く. ここで式 (28), (29), (30) を

$$\mathbf{M}_m \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U}_m + \mathbf{L} \mathbf{U}_m = 0 \quad (33)$$

と行列表記する. 添字の  $m$  は第  $m$  鉛直モードを意味する. ただし

$$\mathbf{M}_m = 2\Omega \text{diag} \left( 1, 1, \frac{1}{gh_m} \right)$$

$$\mathbf{U}_m = (u_m, v_m, \phi_m)^T$$

である. ここで次のスケール行列  $\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m$  を導入する.

$$\mathbf{X}_m = \text{diag} \left( \sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, gh_m \right) \quad (34)$$

$$\mathbf{Y}_m = 2\Omega \text{diag} \left( \sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, 1 \right) \quad (35)$$

これらを式 (33) に以下のように作用させる.

$$\left( \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m \right) + \left( \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m \right) \left( \mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m \right) = 0 \quad (36)$$

ここで

$$\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m = \text{diag} (1, 1, 1) \quad (37)$$

だから式 (36) は

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) = 0 \quad (38)$$

と書ける. 尚,

$$\mathbf{L}_m = \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta & \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ \sin \theta & 0 & \alpha_m \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

である. 式 (39) 中の  $\alpha_m$  は次のように定義した笠原パラメータと呼ばれるものである.

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{gh_m}}{2\Omega a} \quad (40)$$

このことは, 浅水方程式中の 4 つの惑星パラメータ ( $g$ : 重力,  $h_m$ : 等価深度,  $\Omega$ : 地球の自転速度,  $a$ : 惑星半径) が唯一の惑星固有パラメータ  $\alpha_m$  だけであらわせることを示している (Tanaka 1985).

式 (38) は時間  $\tau$  の線形システムであるから次のように解を仮定して, 水平方向成分と時間成分とに変数分離することができる.

$$\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m (\lambda, \theta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{H}_{nlm} (\lambda, \theta) e^{-i\sigma_{nlm}\tau} \quad (41)$$

$\mathbf{H}_{nlm} (\lambda, \theta)$  は水平構造関数 (horizontal structure function), または Hough 関数と呼ばれる. Hough 関数は第  $m$  鉛直モードに相当する水平ノーマルモード, すなわち水平自由振動を意味し, 経度  $\lambda$  と緯度  $\theta$  の関数である. 添字の  $n$  は東西波数,  $l$  は南北モード番号を示している.

式 (41) を水平構造方程式 (38) に代入して,

$$-i\sigma_{nlm} \mathbf{H}_{nlm} + \mathbf{L}_m \mathbf{H}_{nlm} = 0 \quad (42)$$

この固有値問題を解くことで固有関数  $\mathbf{H}_{nlm} (\lambda, \theta)$  と対応する固有値  $\sigma_{nlm}$  を求めることができる. 式 (39) は経度方向にパラメータが一定だから, Hough ベクトル関数  $\Theta_{nlm} (\theta)$  を用いて  $\mathbf{H}_{nlm} (\lambda, \theta)$  を次のように経度依存と緯度依存とに変数分離できる.

$$\mathbf{H}_{nlm} (\lambda, \theta) = \Theta_{nlm} (\theta) e^{in\lambda} \quad (43)$$

ただし,

$$\Theta_{nlm}(\theta) = \begin{pmatrix} U_{nlm}(\theta) \\ -iV_{nlm}(\theta) \\ Z_{nlm}(\theta) \end{pmatrix} \quad (44)$$

とする. 南北風成分に関しては位相を  $\pi/2$  だけずらすために  $i = \sqrt{-1}$  がかけられている. 南北モードは3種類の異なるモードから構成される. 一つは低周波の西進するロスビーモード (Rossby mode)  $l_r$  で, 残りの二つは高周波の西進, および東進する重力波モード (gravity mode)  $l_{wg}, l_{eg}$  である.

Swartrauber and Kasahara (1985) によると, 水平構造関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  は球面調和関数展開の和として得られる. この方法で求められる水平構造関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  が正規直交性をもつならば, これを基底にして波数展開することが出来る. 水平構造関数が直交関数であることは以下のように示される.

緯度と経度に関する内積は以下のように表される.

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (U_{nlm}U_{n'l'm}^* + V_{nlm}V_{n'l'm}^* + Z_{nlm}Z_{n'l'm}^*) e^{-i(n-n')\lambda} \cos\theta d\lambda d\theta \quad (45)$$

アスタリスクは複素共役を意味し,  $nlm$  と  $n'l'm$  は東西波数と南北モード番号の異なるモードを示している. 式 (39) の線形演算子  $\mathbf{L}_m = \mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{L}\mathbf{X}_m$  は非対称のエルミート行列であるため, 次の関係 (skew-self adjoint) が成立する.

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{L}_m \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle + \langle \mathbf{L}_m \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0 \quad (46)$$

式 (46) に式 (42) を代入して,

$$(\sigma_{nlm} - \sigma_{n'l'm}^*) \langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0 \quad (47)$$

を得る. 式 (47) から以下の二つの条件が課せられる.

- $n = n'$  かつ  $l = l'$  のとき

$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle$  は線形浅水方程式系の全エネルギー量に比例する量であり, 決して0にはならない. よって式 (47) を満たすためには  $\sigma_{nlm} = \sigma_{nlm}^*$  である必要があり, 従って  $\sigma_{nlm}$  は実数でなくてはならない.

- それ以外のとき

$\sigma_{nlm} \neq \sigma_{nlm}^*$  であれば式 (47) を満たすためには  $\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0$  が成り立つ必

要がある. すなわち固有振動数  $\sigma_{nlm}$  に相当する固有関数  $\mathbf{H}_{nlm}$  が, 固有振動数  $\sigma_{n'l'm}$  に相当する固有関数  $\mathbf{H}_{n'l'm}$  と直交関係にあることを示している.

以上の二つの条件から, 任意のモード  $nlm$  について, 以下の正規直交関係が成立する.

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_{nlm} \cdot \mathbf{H}_{n'l'm}^* \cos \theta d\lambda d\theta = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \quad (48)$$

以上の水平構造関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  の直交性から, 次のフーリエ - ハフ変換が導かれる.

第  $m$  鉛直モードに相当する物理空間において,  $\lambda, \theta, \tau$  を変数とする任意のベクトル関数を  $\mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau)$  とすると,

$$\mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{nlm}(\tau) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \quad (49)$$

$$a_{nlm}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau) \cdot \mathbf{H}_{nlm}^* \cos \theta d\lambda d\theta \quad (50)$$

となる.

### 4.2.3 3次元ノーマルモード関数展開

鉛直構造関数と水平構造関数を結合させ, 3次元ノーマルモード関数  $\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p)$  を構成し, 式(19)を展開する. 3次元ノーマルモード関数  $\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p)$  は鉛直構造関数  $G_m(p)$  と水平構造関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  とのテンソル積であり, 以下のように定義される.

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) &= G_m(p) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \\ &= G_m(p) \mathbf{\Theta}_{nlm}(\theta) e^{in\lambda} \end{aligned} \quad (51)$$

この3次元ノーマルモード関数も以下に示す内積の下で, 直交関係を満たす.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{\Pi}_{nlm}, \mathbf{\Pi}_{n'l'm} \rangle &= \frac{1}{4\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{\Pi}_{nlm} \cdot \mathbf{\Pi}_{n'l'm}^* \cos \theta d\lambda d\theta dp \\ &= \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (52)$$

この関係により、3次元ノーマルモード関数展開が導かれる。式(19)中のUとNとFは3次元ノーマルモード関数によって次のように展開される。

$$\mathbf{U}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M w_{nlm}(\tau) \mathbf{X}_m \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (53)$$

$$\mathbf{N}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M n_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (54)$$

$$\mathbf{F}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M f_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (55)$$

ここで  $w_{nlm}(\tau)$ ,  $n_{nlm}(\tau)$ ,  $f_{nlm}(\tau)$  はそれぞれ、従属変数ベクトルU, 非線形項ベクトルN, 外部強制ベクトルFについての展開係数である。 $w_{nlm}(\tau)$ ,  $n_{nlm}(\tau)$ ,  $f_{nlm}(\tau)$  は展開基底の正規直交性式(52)より、以下のフーリエ変換で求められる。

$$w_{nlm}(t) = \langle U(\lambda, \theta, p, t), \mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \rangle \quad (56)$$

$$n_{nlm}(t) = \langle N(\lambda, \theta, p, t), \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \rangle \quad (57)$$

$$f_{nlm}(t) = \langle F(\lambda, \theta, p, t), \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \rangle \quad (58)$$

同様の内積を式(19)全体に施すことによって、プリミティブ方程式系の3次元スペクトルモデルが導かれる。

$$\left\langle \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} + \mathbf{L} \mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F}, \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm} \right\rangle = 0 \quad (59)$$

式(53), (54), (55)で展開した大気変数を式(58)の各項に代入し、内積の積分計算を実行すると、空間依存は消えて時間のみ関数となり、最終的に行列表記のプリミティブ方程式は以下のようなスペクトル表記のプリミティブ方程式系に書き直すことが出来る。

$$\frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i = -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w_j w_k + f_i \quad (60)$$

$$i = 1, 2, \dots, K$$

ここで、 $\tau$ は無次元時間、 $\sigma_i$ はラプラス潮汐方程式の固有振動数、 $r_{ijk}$ は非線形相互作用係数で実数となる。非線形項中の $r_{ijk}$ は非線形の波-波相互作用 (wave-wave interaction) および帯状-波相互作用 (zonal-wave interaction) に関する相互作用係数 (interaction coefficients) で実数である。 $K$ は全波数で、 $K = (2N + 1)(L + 1)(M + 1)$ である。 $N$ は東西全波数、 $L$ は南北全波数、 $M$ は鉛直全波数を示す。厳密

には  $K \rightarrow \infty$  としなくてはならないが, 通常はある波数で切断して方程式系を構成する.

以上より, 順圧成分と傾圧成分からなる鉛直構造関数, ロスビーモードと重力波モードからなる水平構造関数の両方を用いることで, プリミティブ方程式系をスペクトル表示で表すことができた.

鉛直モード  $m = 0$  だけで方程式系 (59) を閉じると

$$\left\langle \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} + \mathbf{L}\mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F}, \mathbf{Y}_0^{-1} \mathbf{\Pi}_{nl0} \right\rangle = 0 \quad (61)$$

これをスペクトル表記すると,

$$\frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i = -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w_j w_k + s_i \quad (62)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, K$$

ここで,  $K$  は式 (60) の  $K$  とは異なり, 順圧スペクトルモデルにおける全波数を意味し,  $K = (2N + 1)(L + 1)$  である.

### 4.3 順圧S-モデル

#### 4.3.1 外力の推定

本研究では東西波数は  $n = 0, 1, \dots, 20$  で、南北モードはロスビーモード  $l_r = 0, 1, \dots, 20$  の赤道対称モード (奇数モード) で波数切断している. 鉛直波数  $m = 0$  のみで方程式系を閉じたこのモデルは、式 (62) における外力の順圧成分  $s_i$  の他に順圧-傾圧相互作用の項  $g_i$  が新たに加わってくる. ここでは  $s_i = f_i + g_i$  を順圧成分の外力と呼ぶことにし、これを  $s_i = s_i(w_i, \tau)$  のように従属変数  $w_i$  と時間の関数としてパラメタライズした.

今回使用するモデルは、外力項  $s_i$  を従属変数  $w_i$  から、長期間の観測データより以下の重回帰によって統計的に求めたモデルである. 外力の式から気候値を除いた式は

$$s' = \mathbf{A}_{ij}w_j + \mathbf{B}_{ij}w_j^* + \epsilon_i \quad (63)$$

ここで、 $s'_i$  は  $s_i$  のアノマリ、アスタリスクは複素共役であり、残差  $\epsilon_i$  のノルムを最小化するように与えられる.

まず  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_R + i\mathbf{A}_I, \mathbf{B} = \mathbf{B}_R + i\mathbf{B}_I, w = w_R + iw_I, w^* = w_R - iw_I$  とすると

$$\begin{aligned} s' &= \mathbf{A}w + \mathbf{B}w^* + \epsilon \\ &= (\mathbf{A}_R + i\mathbf{A}_I)(w_R + iw_I) + (\mathbf{B}_R + i\mathbf{B}_I)(w_R - iw_I) + \epsilon_R + \epsilon_I \\ &= \mathbf{A}_Rw_R - \mathbf{A}_Iw_I + \mathbf{B}w_R + \mathbf{B}_Iw_I \\ &\quad + i\mathbf{A}_R + i\mathbf{A}_R + i\mathbf{B}_Iw_R - i\mathbf{B}_Rw_I + \epsilon_R + \epsilon_I \end{aligned} \quad (64)$$

上記を行列表記すると、

$$\begin{pmatrix} s_R \\ s_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_R + \mathbf{B}_R & -\mathbf{A}_I + \mathbf{B}_I \\ \mathbf{A}_I + \mathbf{B}_I & \mathbf{A}_R - \mathbf{B}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_I \end{pmatrix} \quad (65)$$

となる. ここで、東西波数 0 はすべて実数のため、東西波数 0 の虚部は存在しないことに注意が必要である. さらに、 $\mathbf{A}_R + \mathbf{B}_R = a$ ,  $\mathbf{A}_I = \mathbf{B}_I = b$ ,  $-\mathbf{A}_I + \mathbf{B}_I = c$ ,  $\mathbf{A}_R - \mathbf{B}_R = d$  とおくと

$$\begin{pmatrix} s_R \\ s_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_I \end{pmatrix} \quad (66)$$

両辺に右から  $(w_R, w_I)^\top$  をかけて内積をとると,

$$\overline{\begin{pmatrix} s_R \\ s_I \end{pmatrix}} \overline{\begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}}^\top = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}} \overline{\begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}}^\top + \overline{\begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_I \end{pmatrix}} \overline{\begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}}^\top \quad (67)$$

ここで  $\epsilon$  と  $w$  が直交するため, 右辺第二項は 0 となる. よって,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} s_R \\ s_I \end{pmatrix}} \overline{\begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}}^\top \left[ \overline{\begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}} \overline{\begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}}^\top \right]^{-1} \quad (68)$$

右辺を計算することで,  $a, b, c, d$  が求められ, これらから  $A_R, A_I, B_R, B_I$  を同時に求めることができる. 以上より, システム行列  $A, B$  を求めることができる. 観測データとして, 本研究では 1950 年 ~ 1999 年の 50 年間の冬季の NCEP/NCAR 再解析データを用いた. 1 日 4 回の観測データから状態変数  $w_i$  を求め, 日変化を除去してからモデルのタイムステップに時間内挿し, 式 (60) から順圧大気の外力  $s_i$  を診断的に算出する. 力学過程の計算精度は 1 % 以下の誤差の範囲で表現されていることから, 残差として得られた外力  $s_i$  の値は十分に意味のある値と考えられる. こうして得られた 50 年分の外力  $s_i$  のデータから, 気候値  $\tilde{s}_i$  とアノマリ  $s'_i$  を計算する. このアノマリ  $s'_i$  を状態変数  $w_i$  で回帰することで, 式 (63) のようにシステム行列  $A_{ij}, B_{ij}$  を順次決定することができる. このように, 観測データからモデルの最適外力を統計的 (Statistical) に求めていることから, 式 (63) で表される外力  $s_i$  を用いるモデルを順圧 S モデルと呼ぶ.

順圧 S モデルの詳細については Tanaka and Nohara (2001) に書かれているが, 現実大気の順圧成分の予報を行った結果, このモデルは月平均で約 8 日の予報能力を持つことが示され, 長周期変動の力学的解明に十分使える順圧大気大循環モデルであるということが言えた.

ところがこのモデルでは, 統計的処理のためか, 予報誤差の最大要因となる傾圧不安定波の増幅が弱いという特徴があり, このままの順圧 S モデルでは AO の再現はできなかった (岡田, 2003). そこで本研究では, 傾圧不安定, 粘性摩擦, 帯状摩擦, エクマン摩擦, を線形近似した外力を用いたモデル, 順圧 B モデルのように, 物理過程を再導入し, 以下のように外力  $s_i$  をパラメタライズした.

$$s_i = \tilde{s}_i + \mathbf{A}_{ij} w_j + \mathbf{B}_{ij} w_j^* + (BC)_{ij} w_j + (DF)_{ij} w_j + (DZ)_{ij} w_j + (DE)_{ij} w_j \quad (69)$$



上記の物理過程は次のとおりである.

$$\left\{ \begin{array}{l} (BC)_{ij}w_j : \text{傾圧不安定} \\ (DF)_{ij}w_j : \text{粘性摩擦} \\ (DZ)_{ij}w_j : \text{帯状地表摩擦} \\ (DE)_{ij}w_j : \text{エクマン摩擦} \end{array} \right.$$

以上のように, 外力  $s_i$  を状態変数  $w_i$  の関数として表現することができた. 予報の各ステップにおいて,  $w_i$  に応じて  $s_i$  が決定し, 次のステップの  $w_i$  を求めることができる. これを繰り返すことで, 初期時刻からある時間後の  $w_i$  を求めることができる.

### 4.3.2 物理過程

ここでは全項で紹介した物理過程について詳しく説明する.

#### 傾圧不安定

傾圧不安定は, 先に述べた基本場が東西一様の場合の固有モード理論に即してパラメタライズを行う. 基本場が静止大気の時には  $\overline{w_k}$  が 0 となり, 解はノーマルモードとなる. この時, 基本場にエネルギー源がないため, 解はすべて中立波となって不安定は起こらない. 基本場  $\overline{w_k}$  が 0 でない時には, 平均流と波との相互作用により, その基本場のエネルギーを引き出せる構造を持つ波が不安定波として出現する. その解を固有値問題に帰着させる. こうして, 各東西波数の最大成長モードを計算し, その構造に傾圧大気場を射影する. そして得られた射影成分に対して, 固有値で示された増幅率分だけ成長させるパラメタリゼーションである.

東西波数  $n$  の任意の状態変数  $w_i$  を不安定波の成分  $\xi_i$  に射影し, それに直交する残差成分を  $\epsilon_i$  とする.

$$w_i(\tau) = a(\tau)\xi_i + \epsilon_i(\tau) \quad (70)$$

ここで  $\xi_i$  のノルムは 1 にしておく.  $\xi_i$  と  $\epsilon_i$  が直交するという条件から

$$a(\tau) = \sum_i \xi_i^* w_i \quad (71)$$

のように簡単に振幅  $a(\tau)$  が求められるので, 射影された成分  $a(\tau)\xi_i$  が増幅率分だけ成長するということから, 傾圧不安定のパラメタリゼーション  $BC_i$  は, 各東西波数について以下となる.

$$(BC)_i = -i\nu a(\tau)\xi_i \quad (72)$$

ただし平均流による移流の効果は力学項で表現されているので, このパラメタリゼーションは振幅を増大させるだけで振動数成分は 0 としている.

#### 粘性摩擦

粘性摩擦としては変数のラプラシアン  $\Delta$  に渦粘性係数を掛けたものが一般的である. 本研究では, よりスケール依存性を持たせるために超粘性オペレータ  $\Delta^4$  による粘性摩擦を, 球面ロスビー波のスケールパラメータ  $c_i = \sigma_i/n$  との組み合わせで導入した. 回転球面上の渦度方程式を解いて得られる Haurwitz 波の位相速度は

球面調和関数に対応する固有値で表されるが、ここではこの関係式を回転球面上の浅水方程式を解いて得られる Hough 関数に拡張した。等価深度が無限となる極限では Hough 関数の球面ロスビー波は Haurwitz 波に収束することが知られている。ラプラシアンは波数空間では全波数  $\hat{l}$  で表現されるので、球面ロスビー波の位相速度との間に以下の近似が成立する。

$$c_i = \frac{-1}{\hat{l}(\hat{l} + 1)} \simeq \frac{\sigma_i}{n}$$

この関係式より、ラプラシアンの固有値をハフ関数の位相速度に置き換えると、倍調和粘性摩擦  $(DF)_i$  は最終的に以下の形となる。

$$(DF)_i = -k_D \left(\frac{n}{\sigma_i}\right)^2 w_i \quad (73)$$

となる。ここで  $k_D$  は無次元化した渦粘性係数であり、 $k_D = 2.0 \times 10^{16}$  とした。

#### 帯状地表摩擦

総観規模擾乱による北向き渦運動量輸送に対抗してジェット気流の北へのシフトを抑制している摩擦が帯状地表摩擦である。低緯度の偏東風領域では偏東風を、中高緯度の偏西風領域では偏西風を減速し、この効果が北向き渦運動量輸送の収束とバランスすることで大気の角運動量収支が成り立っている。帯状流に簡単なレイリー摩擦を導入して帯状流摩擦のパラメタリゼーションを行うと

$$(DF)_i = -K_Z(w_i - \tilde{w}_i), \quad for \quad n = 0 \quad (74)$$

ここで  $\tilde{w}_i$  は  $w_i$  の気候値、 $K_Z$  は無次元化したレイリー摩擦係数である。

#### エクマン摩擦

渦による地表摩擦の効果は Charney and Eliassen (1949) によってエクマン摩擦として定式化されている。自由大気に正の相対渦度  $\zeta$  が発生すると、地表摩擦を感じるエクマン境界層では下層収束が起こり、相対渦度に比例する鉛直流  $w_E$  が発生する。

$$w_E = h \frac{K_E}{f_0} \zeta \quad (75)$$

この鉛直流は渦度方程式における渦の伸縮を通して自由大気の渦を衰退させるというものである。この鉛直流が高低気圧場を緩和することから、地表のエクマン摩

擦  $(DE)_i$  は, 以下の式で表される.

$$(DE)_i = \left\langle \left(0, 0, \frac{w_E}{h_i}\right)^T, Y_i^{-1}\Pi_i \right\rangle \quad (76)$$

ここで  $f_0$  はは中緯度のコリオリパラメータ,  $K_E$  ははエクマン摩擦係数で, 渦度の定義に含まれる水平微分は解析的に行い,  $(DE)_i$  は波数空間で  $w_i$  の関数に帰着させる.

#### 4.4 特異固有解理論

Tanaka and Matsueda (2005) では固有値解析を行うことで、北極振動が大気のひとつの固有振動であることを理論的に突き止めた。この固有振動は固有値がゼロとなる特殊なモードであることから、特異固有解と名付けられた。ここでは簡単に特異固有解理論を説明する。詳しい説明は Tanaka and Matsueda (2005) を参照されたし。

スペクトル表記したプリミティブ方程式は

$$\frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i = -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w_j w_k + f_i \quad (77)$$

$$i = 1, 2, \dots, K$$

であり、大気鉛直平均場に相当する鉛直波数 0 の順圧成分のみで方程式を閉じると、非断熱過程に関わる物理過程は傾圧成分に含まれるため、順圧成分では外力  $f_i$  として摩擦力  $d_i$  のみを考慮すればよい。Tanaka and Matsueda (2005) では、摩擦力  $d_i$  は粘性摩擦項と地表摩擦項を考え、これらを力学項の一部に含めて解析を行っている。

$$d_i = -k_D c_i^{-4} w_i - \nu_S w_i \quad (78)$$

ここで、 $k_D$  は超粘性係数、 $c_i$  は Rossby 波の位相速度、 $\nu_S$  はレーリー摩擦係数である。

次に、式 (77) を冬季気候値の基本場で線形化し、変数  $w_i$  を実部と虚部に分けて方程式を実数の式に書き直すと

$$\frac{dx}{d\tau} = \mathbf{A}x + f \quad (79)$$

となる。ここで、 $x$  は実数ベクトルで  $\mathbf{A}$  は基本場と摩擦力から決定する実数行列、 $f$  は主に順圧傾圧相互作用による外力で、ここでは乱数と考える。

この式 (79) で外力  $f$  を無視し、時間変化項に振動数  $\nu$  を代入すると

$$\nu x = \mathbf{A}x \quad (80)$$

となり、固有値問題 (EVP) を解くと、力学系の固有解としての固有モードが得られる。特異固有解理論は、この式 (80) の固有値が 0 となるモードが北極振動であるという理論である。Tanaka and Matsueda (2005) では式 (78) でのレーリー摩擦係数  $\nu_S$  を増加させると減衰時間 52 日で共鳴しこれが特異固有モードとなると示されている。

## 4.5 AOI 方程式の構築手法

順圧 S モデルで 1950 年 1 月 1 日のデータを初期値に 51 年間の時間積分を行う。そこで得られた結果に対して EOF 解析を行い、モデル大気の EOF-1 ベクトルを AO として得る。次にこの EOF-1 ベクトルと時々刻々と変化する順圧成分との内積を計算することで、モデル大気の AOI 時系列を得る。まず、展開係数を気候値と気候値からの偏差に分け、順圧 S-モデルの各項を以下のように分類する。

$$\begin{aligned} \frac{dw_i}{d\tau} = & -i\sigma_i\bar{w}_i - i\sigma_i w'_i - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \bar{w}_j \bar{w}_k \\ & - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} (\bar{w}_j w'_k + \bar{w}_k w'_j) - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w'_j w'_k + \bar{s}_i + s'_i \end{aligned} \quad (81)$$

ここでバーは基本場、ダッシュは基本場からの偏差を表す。

さらに式 (81) を平均すると以下の式となる。

$$0 = -i\sigma_i\bar{w}_i - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \bar{w}_j \bar{w}_k - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \overline{w'_j w'_k} + \bar{s}_i \quad (82)$$

式 (81) と式 (82) から、

$$\begin{aligned} \frac{dw'_i}{d\tau} = & -i\sigma_i w'_i - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} (\bar{w}_j w'_k + \bar{w}_k w'_j) \\ & - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \overline{w'_j w'_k} - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w'_j w'_k + s'_i \end{aligned} \quad (83)$$

となる。

式 (83) と、AO として得られる EOF1 ベクトル  $w_{AO}$  との内積を施すことで AOI の時間変化を計算すると代数方程式にすることができ、以下のように表す。

$$\begin{aligned} \frac{d \langle w'_i, w_{AO} \rangle}{d\tau} = & \left\langle -i\sigma_i w'_i - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} (\bar{w}_j w'_k + \bar{w}_k w'_j), w_{AO} \right\rangle \\ & + \left\langle -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \overline{w'_j w'_k} - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w'_j w'_k, w_{AO} \right\rangle \\ & + \langle s'_i, w_{AO} \rangle \end{aligned} \quad (84)$$

ここで、左辺は AOI の時間変化項となり、右辺第一項は線形項、第二項は非線形項、第三項は外力項となる。このようにしてモデル各項による AOI への寄与を定量的に示す AOI 方程式を構築することができる。ただし、特異固有解理論により外力項の中の粘性項は線形項に含め解析した。

## 5 結果

### 5.1 1950年から2010年までのAOIと各項の関係

図1は、1950年から2010年までの北極振動指数(AOI)の365日移動平均した時系列である。横軸は年、縦軸は正規化されたAOIを示す。1969年から1975年にかけてAOIは負から正へ遷移し、1976年から1986年にかけてはAOI負を示し続け、1988年から1999年まではAOIが正から負へ遷移し、2000年から2009年にかけては負から正へと遷移している。そして、1971年、1988年、1992年に大きくAOIが正に、1969年、1976年、2009年にAOIが大きく負へと振れていることがわかる。AOIが正になると中緯度は暖冬に、負になると寒冬となる。

図2は、太線がAOI、緑線が線形項である。1969年から1975年にかけてAOIが負から正へと遷移しており、同じく線形項もAOIの遷移をうながすように正へと遷移している。そして、1976年から1986年の10年間はAOIが負を示しており、線形項も負の値を示している。1988年から1999年へとAOIは正から負へと遷移しているが、線形項も負へと遷移しており、2000年から2009年までのAOIの遷移と線形項の遷移も概ね一致する。

次に、図3は、太線がAOI、青線が外力項である。線形項と違い、AOIの長期変動と外力項はほとんど寄与していないことがわかる。1969年から1975年にかけてAOIが負から正へと遷移しているが、外力項は1965年ごろから正の値を示し続けている。さらに、1976年から1986年のAOI負の時期は、外力項は正を示し、1988年のAOIが大きく正に振れた年は外力項は負を示している。2000年から2009年までのAOIの遷移と外力項もほぼ相対する遷移となっていることがわかる。図4は、太線がAOI、赤線が非線形項である。非線形項も外力項と同じく、AOIの遷移にほとんど寄与していないことがわかる。1950年から1970年にかけて非線形項は20年間、正を示し続け、1960年前後のAOI負の寄与していなかったと思われる。そして、1969年から1975年にかけては非線形項は正から負へと遷移しており、AOIの負から正の遷移に相反するように働いていたことがわかる。1976年から1986年の10年間はAOIはほとんど負を示しているが、非線形項は1976年から1982年にかけて正から負へと遷移し、1982年から1986年にかけては負から正へ遷移する。1988年のAOI正の時は、非線形項はほぼ0付近を示しており、図3で示された外力項と似た遷移傾向にある。2000年から2009年にかけても、AOIの遷移に対してほとんど寄与していなかったことがわかる。

## 5.2 北極振動指数が $\pm 1.5\sigma$ 以上以下での AOI と各項の時系列

北極振動指数が  $+1.5\sigma$  以上だった年, 1971 年, 1988 年, 1992 年を平均した時系列と,  $-1.5\sigma$  以下だった年, 1969 年, 1976 年, 2009 年を平均した時系列を解析し, さらに各年での時系列の解析も行った.

### 5.2.1 AOI が $+1.5\sigma$ 以上の年を平均した AOI と各項の関係

図 5 は AOI が  $+1.5\sigma$  以上だった年を平均した AOI と各項であり, 太実線が AOI, 細線が線形項, 破線は外力項, 点線は非線形項である. 11 月下旬から 12 月にかけて, 線形項と外力項が AO 正へのトリガーとなっていることがわかる. 一方で非線形項は負を示しており, AOI が正に遷移することに対し抑制していることがわかる. 12 月から AOI が正となり, 1 月に最盛期を迎える頃には外力項は抑制しようとして働き, 線形項によって AOI 正が維持されていることが示されている. そして, AO が励起してからも非線形項はアノマリを弱めようとして働いていることがわかる. 表 1 は期間平均別にみた AOI と各項の数値をあらわしている. AO 発達時である 12 月平均の数値では, 線形項がトリガーとなり, 非線形項はアノマリを弱めようとして働いていることがわかる. AO 持続時, 最盛期の 1 月平均の数値は線形項によって AO 正が持続され, 非線形項はアノマリを弱めようとして働き, 外力項も AO 正の持続に寄与していることがわかる. AO 衰退時の 2 月平均では, 線形項によって AO 正を持続させようとし, 逆に非線形項, 外力項はアノマリを弱めようとして働いていることがわかる. 12 月から 2 月の平均値をみると, 線形項が一番 AOI 正に寄与しており, 非線形項と外力項は抑制しようとすることが示されている.

### 5.2.2 AOI が $-1.5\sigma$ 以下の年を平均した AOI と各項の関係

図 6 は AOI が  $-1.5\sigma$  以下だった年を平均した AOI と各項であり, 太実線が AOI, 細線が線形項, 破線は外力項, 点線は非線形項である. 11 月下旬から 12 月にかけて, 非線形項が AO 負へのトリガーとなっていることがわかる. 一方で, 12 月から AOI が負になってからは非線形項は抑制しようとして働いている. 2 月中旬まで AOI 負を維持させているのは線形項であり, 1 月には非線形項が, 2 月には外力項が, 線形項による AOI 負の維持を抑制しようとして働いていることがわかる. 表 1 の数値をみると, AO 発達時である 12 月平均値は, 非線形項が AO 負へのトリガーとなっている. AO 持続時, 最盛期の 1 月平均の数値は線形項によって AO 負が持続され, トリ



ガーとなった非線形項はアノマリを弱めようと働き、外力項も AO 負の持続に寄与していることがわかる。AO 衰退時の 2 月平均では、線形項によって AO 負を持続させようとし、逆に非線形項、外力項はアノマリを弱めようと働いていることがわかる。12 月から 2 月の平均値をみると、線形項が一番 AOI 正に寄与しており、非線形項は負のフィードバックとして働いていることがわかる。

### 5.2.3 AOI が $+1.5\sigma$ 以上の年, 1971 年, 1988 年, 1992 年の時系列

図 7 から図 9 は 1971 年, 1988 年, 1992 年の AOI と各項の時系列である。1971 年は 11 月下旬から 12 月にかけて外力項と線形項が AO 正のトリガーとなっていることがわかる。そして 12 月下旬から 1 月にかけての AO 最盛期には線形項により AOI 正が持続されていたと考えられる。1988 年は 60 年間で最も大きく AOI が正に振れた年であるが、12 月に線形項がトリガーとなり、外力項と非線形項は抑制する働きをしている。そして、1 月から 2 月上旬にかけての AO 最盛期には線形項が AO 正の維持に寄与しており、2 月からは外力項によって AO 正が維持されていることがわかる。1992 年は 12 月中旬に外力項が正を示し、これによって AO 正が引き起こされたと考えられる。そして 1 月の最盛期には非線形項が AO 正の持続に寄与し、2 月からは非線形項はアノマリを弱める働きを示し、線形項が AO 正の持続に寄与している。このように、AO 正での各年をみてみると、AO 正へのトリガーや持続に寄与していた項は年によってまちまちであったことがわかる。

### 5.2.4 AOI が $-1.5\sigma$ 以下の年, 1969 年, 1976 年, 2009 年の時系列

図 10 から図 12 は 1969 年, 1976 年, 2009 年の AOI と各項の時系列である。1969 年は 12 月に非線形項が AO 負のトリガーとなっていることがわかる。そして 12 月下旬から 1 月にかけての AO 最盛期には線形項により AOI 負が持続され、トリガーとなった非線形項はアノマリを弱める働きをしている。1976 年は大きく AOI が負に振れた年であるが、11 月に非線形項がトリガーとなり、外力項と非線形項は抑制する働きをしている。そして、12 月下旬から 2 月上旬にかけての AO 最盛期には線形項が AO 負の維持に寄与しており、外力項と非線形項はアノマリを弱める働きをしている。2009 年も過去 60 年で最も大きく負に振れた年であり、大きく 2 回 AOI が負に振れている。先ず第一波では 11 月下旬に非線形項が負になって、その後 AOI が負に振れている。そして、12 月から 1 月中旬にかけて AOI 負を持続させたのは線

形項であり、非線形項は抑制する働きをしている。そして第二波では1月下旬に非線形項が負を示し、2月中は線形項が負を示している。AO正と負での各年を比べてみると、AO負の年は非線形項がトリガーとなり、線形項が負を加速し、AOが負を維持している時は、非線形項はアノマリを弱めるように働くという共通点がある。

### 5.3 北極振動指数が $\pm 1.5\sigma$ 以上以下での各項の空間分布

図13は北極振動指数が  $+1.5\sigma$  以上だった年、1971年、1988年、1992年をDJF平均した各項における空間分布である。図14は北極振動指数が  $-1.5\sigma$  以上だった年、1969年、1976年、2009年をDJF平均した各項における空間分布である。AOが正(負)の時は、北極に正(負)偏差が、そして中緯度に負(正)偏差となり、環状構造を持つ。線形項、非線形項、外力項をみても明瞭に環状構造を持つ項はないことがわかる。そして、線形項と外力項が相対する構造を持っていることがわかる。

#### 5.3.1 $+1.5\sigma$ から $-1.5\sigma$ を差引いた各項の空間分布

図15は  $+1.5\sigma$  から  $-1.5\sigma$  を差引いた各項の空間分布であり、各項が強調された空間分布である。これをみると、線形項と外力項が明瞭に相対する構造をしていることがわかる。線形項は極域で負であるが、外力項は正を示している。そして中緯度では線形項は正であるのに対し、外力項は負である。これは外力項がAOの励起にともなって、アノマリを弱めようと働いていることがわかる。非線形項はDJF平均してみると波数3の構造をしており、AOのような環状構造はもっていないことがわかる。 $+1.5$  から  $-1.5$  を差引いたので、AOは中緯度に高気圧偏差、高緯度に低気圧偏差という構造をもつ。特異固有解理論では、AOは粘性項を含めた線形項で励起されると示されているが、各項の中では線形項が一番AOの構造に似ていることがわかった。

## 6 まとめと考察

北極振動指数 (AOI) の時間変化を与える AOI 方程式を導入し, 線形項 (粘性項を含む), 非線形項, 外力項に分けて AOI への寄与を解析した.

1969 年から 1975 年にかけて AOI は負から正へのトレンド, 1976 年から 1986 年にかけては AOI 負を示し続け, 1988 年から 1999 年までは AOI が正から負へのトレンド, 2000 年から 2009 年にかけては負から正へのトレンドを持っている. そして, 1971 年, 1988 年, 1992 年に大きく AOI が正に, 1969 年, 1976 年, 2009 年に AOI が大きく負へと振れていた. このような AOI のトレンドと線形項のトレンドがほぼ一致しており, 線形項は AOI の変動に大きく寄与していたと考えられる. 一方で, 外力項は AOI のトレンドと正反対に変動しており, 寄与していないと考えられる. つまり AOI が正または負に遷移すると, 外力項は AOI を元に戻そうとする負のフィードバックとして働いていると考えられる. そして非線形項は外力項のように AOI と正反対に遷移し, 常にアノマリを弱めようと働いているわけではないが, 線形項のように AOI のトレンドと一致するわけでもない. すなわち非線形項は AOI の変動に影響するというよりも, 独立した変動が存在し, AOI に対して何らかのフィードバックを与えるわけではないと考えられる.

北極振動指数が  $+1.5\sigma$  以上だった年を平均した時系列では, AO 発達期である 12 月に線形項と外力項がトリガーとなったと考えられる. 表 1 でもわかるように, 12 月は線形項がトリガーになっていた. そして 1 月から 2 月の最盛期, 衰退期も線形項が寄与しており, 非線形項はアノマリを弱めようと働いている. 外力項は AO が維持してからはアノマリを弱めようと働き, 線形項と外力項によって AO が励起してからは負のフィードバックとして働いていると考えられる. しかし,  $+1.5\sigma$  以上だった年での各々の時系列では, トリガーとなった項が年によってばらばらで, AO 正の維持には必ずしも線形項が寄与していたわけではなく, AO 正に対する統一的なメカニズムの診断は難しい. 一方で,  $-1.5\sigma$  以下だった年を平均した時系列では, 12 月に非線形項が AOI 負のトリガーとなったと考えられる. そして AO 負を維持したのは線形項であった. 各事例をみても, 非線形項がトリガーとなり, 線形項が AOI 負の維持に寄与していたと考えられる. AOI 負が持続すると非線形項が負のフィードバックとして働いていると考えられる.

次に  $\pm 1.5\sigma$  以上以下で DJF 平均したの各項の空間分布を解析したところ, 線形項と外力項が相対する構造を持っていることがわかった. 図 2 と図 3 からわかるように, 線形項が AO を励起, 持続させようと働いているのに対し, 外力項はアノマ

りを弱めようと働いていると考えられる。これは AO が励起してから起こったと考えられ、線形項が原因となって引き起こされた、大循環の変動である AO に対する結果として、外力項は変動していると考えられる。これは  $+1.5\sigma$  から  $-1.5\sigma$  を差引いた各項の空間分布からも顕著に見受けられる。外力項と線形項は極域と中緯度に相反する構造を持っており、線形項は AO 正の構造に似ている。これは、特異固有解理論で提唱されている、粘性項を含めた線形項によって AO は励起されるという意見と一致する。表 2 は、365 日移動平均した AOI と各項の相関係数であり、これを見ると各項ともに相関係数は低い値をしめしており、線形項は正の相関、非線形項は負の相関、外力項はほぼ無相関であることがわかる。しかし、渋谷 (2010) や池田 (2008) などの先行研究では傾圧不安定によってもたらされる非線形項が正のフィードバックを持つと考えられており、今回の解析結果と一致しない。渋谷 (2010) での解析では 1950 年 1 月 1 日を初期値とし 50 年積分した順圧 S モデルのデータを使用しているのに対し、本研究では客観解析データを使用している事の違いであると考えられる。また、池田 (2008) では zonal eddy を非線形項としているが、本研究では transient eddy(時間平均からの偏差) を非線形項とにおいて AOI 方程式を解析したためであると考えられる。

## 7 結論

本研究では、中緯度に異常気象をもたらす北極振動のメカニズムをさぐるため、力学的なモードの観点から北極振動指数 (AOI) の時間変化を与える AOI 方程式を導入し、線形項 (粘性項を含む)、非線形項、外力項に分けて AOI への寄与を解析した。

60 年間の AOI の長期変動と線形項の長期変動はほぼ一致し、AOI の変動には内部変動である線形項が大きく寄与していたことが明らかになった。これは特異固有解理論とも一致する。そして、外力項は線形項によって励起された AO のアノマリを弱めようと働き、これは線形項によって引き起こされた結果として外力項が変動していると考えられる。しかしながら、AO 正と負で分けて各項を解析すると、AO 正ではトリガーや AO の維持に対する統一的なメカニズムが見られなかったが、AO 負では非線形項がトリガーとなって線形項によって AO 負が維持されるという統一的なメカニズムがみられた。このことから AO 負の予測はある程度可能であるが、AO 正の予測は難しいことが示唆される。そして、DJF 平均した非線形項は負のフィードバックを持ち、AO の変動に対して非常にカオスな振る舞いをするのがわかった。本研究での非線形項とは zonal eddy ではなく、transient eddy (時間平均からの偏差) を非線形項としているため、先行研究とは異なる結果となった。

以上のことから、AO の力学的なメカニズムはロスビー波のような内部変動である線形項に大きく寄与しており、それに対して地形効果などの外力項は負のフィードバックとして働き、時間平均からの偏差である非線形項は AO 負時にはトリガーになり、その後負のフィードバックを与えるが、AO 正時にはカオス的な振る舞いをするという結果が示唆できる。

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、指導教員である筑波大学計算科学研究センターの田中博教授には、本研究の動機となる論文の紹介、解析手法の提案、また筆者の質問等において終始丁寧な御指導、御鞭撻を賜わり、心より感謝しております。

また、筑波大学研究員の井上知栄氏、寺崎康児氏、杉本志織氏、同大学生命環境科学研究科の釜江陽一氏、前筑波大学生命環境科学研究科の大橋正宏氏、渋谷亮治氏には、セミナーおよび様々な場において多数の御助言、御意見を頂きました。

さらに同大学生命環境科学研究科の林陽生教授、上野健一准教授、植田宏昭准教授および同大学計算科学研究センターの日下博幸准教授や、大学院生の皆様には、大気分野ゼミ、集中ゼミ、中間発表および最終発表の場で御助言を頂き誠に有難うございました。

共に修士論文作業を進めた同大学大気分野の修士2年生の皆様、共に机を並べて学んだ修士1年生の皆様および同大学地球科学専攻気候・気象学分野の4年生の皆様には時折よき相談相手となって頂きました。

最後に筆者を大学院まで進学させて頂いた家族に深く感謝の意を表します。

本論文は以上の皆様の御協力により完成させることができました。心より感謝いたします。

尚、本研究で用いた主な図は、The Generic Mapping Tools System (Wessel and Smith 1991) にて作成しました。

## 参考文献

- Baldwin, M. P. and T. J. Dunkerton, 1999: Propagation of the Arctic Oscillation from the stratosphere to the troposphere. *J. Geophys. Res.*, **104**, 30937-30946.
- Baldwin, M. P. and T. J. Dunkerton, 2001: Stratospheric harbingers of anomalous weather regimes. *Science*, **294**, 581-584.
- Itoh, H., 2002: True versus apparent arctic oscillation. *Geophys. Res. Lett.*, **29**, 8, doi:10.1029/2001GL013978.
- Kimoto, M., F-F. Jin, M. Watanabe, and N. Yasutomi, 2001: Zonal-eddy coupling and a neutral mode theory for the Arctic Oscillation. *Geophys. Res. Lett.*, **28**, 737-740.
- Kodera, K., and H. Koide, and H. Yoshimura, 1999: Northern Hemisphere winter circulation associated with the North Atlantic Oscillation and stratosphere. *Geophys. Res. Lett.*, **26**, 443-446.
- Ohashi, H., and H. L. Tanaka, 2010: Data analysis of warming pattern in the Arctic. *SOLA*, **6A**, 1-4.
- Tanaka, H. L., 2003: Analysis and modeling of the Arctic Oscillation using a simple barotropic model with baroclinic eddy forcing. *J. Atmos. Sci.*, **28**, 737-740.
- Tanaka, H. L., and M. Matsueda, 2005a: Arctic Oscillation analyzed as a singular eigenmode of the global atmosphere. *J. Meteor. Soc. Japan*, **83**, 611-619.
- Tanaka, H. L., and M. Matsueda, 2005b: Dynamical understanding of the Arctic Oscillation as a singular eigenmode of the global atmosphere. *Proc. GCCA-6*, 12-13 December 2005, Tokyo Miraikan, Japan, **25-30**.
- Tanaka, H. L., and H. Tokinaga, 2002: Baroclinic instability in high latitudes induced by polarvortex: A connection to the Arctic Oscillation. *J. Atmos. Sci.*, **59**, 62-82.

- Thompson, D. W. and J. M. Wallace, 1998: Arctic Oscillation signature in the wintertime geopotential height and temperature field. *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 1297-1300.
- Wallace, J. M, and D. W. J. Thompson, 2002: The Pacific center of action of the Northern Hemisphere annular mode: Real or artifact? *J. Climate*, **15**, 1987-1991.
- Watanabe, M. and F. F. Jin, 2004: Dynamical prototype of the Arctic Oscillation as revealed by a neutral singular vector. *J. Climate*, **17**, 2119-2138.
- 池田正樹, 2010: ブロッキング高気圧と北極振動の関係. 筑波大学生命環境科学研究科修士論文, 51pp.
- 大橋正宏, 田中博, 2009: 地球温暖化予測モデルに見られる北極振動指数の解析的研究. *天気* **56**, 743-753.
- 渋谷亮治, 2010: 北極振動の力学的な成因に関する研究. 筑波大学生命環境科学研究科修士論文, 74pp.
- 田中博, 2007: 極域循環と日本の気候. 月刊海洋特集号, **46**, 72-82.
- 藤原冬樹, 2010: 北極振動に伴う偏西風ジェット気流と傾圧不安定波動の相互作用の研究. 筑波大学生命環境科学研究科修士論文, 84pp.
- 山崎孝治, 2004: 北極振動の概要. 気象研究ノート, **206**, 1-9.



## 付録

### EOF 解析

大気科学の中でよく使われる解析手法である EOF 解析について解説する。

#### EOF 解析とは

AO は北半球における SLP を EOF 解析 (主成分解析) したものの第一主成分により定義される。

EOF 解析は、いくつかの地点における時系列データの主要な変動パターンを抽出して変動の特徴を把握するための統計的手法であり、北半球における大気の変動パターンを見るためにこれを行う。

一般に何らかの相関関係がある  $p$  個の地点でのデータ  $x_1, x_2, \dots, x_p (p \geq 2)$  で、時系列方向に  $N$  個のデータ  $x_{1\lambda}, x_{2\lambda}, \dots, x_{p\lambda} (\lambda = 1, 2, \dots, N)$  が得られたとする。これらの  $N$  個の時系列データは、それぞれ  $p$  個の地点での気象要素が相互に関連のある変動を示しているとみなせるので、この変動を説明する関数として、 $p$  個の変量の一次結合で表すことができ、これを

$$z = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_p x_p \quad (85)$$

と仮定し、 $l_1, l_2, \dots, l_p$  を変化させ、

$$\sum_{i=1}^p l_i^2 = 1 \quad (86)$$

の条件の下で、 $z$  の分散が最大になるときの  $z$  を第一主成分という。このときの係数を  $l_{1i} (i = 1, 2, \dots, p)$  で表すと、

$$z_1 = l_{11} x_1 + l_{12} x_2 + \dots + l_{1p} x_p \quad (87)$$

となる。

次に  $z_1$  とは無相関な  $z$  のうちで、式 (87) を満たす最大の分散を持つ  $z_2$  が決定できる。この  $z_2$  を第二主成分という。この時の係数を  $l_{2i} (i = 1, 2, \dots, p)$  とすると  $z_2$  は、

$$z_2 = l_{21} x_1 + l_{22} x_2 + \dots + l_{2p} x_p \quad (88)$$

と表すことができる. 以下同様にして第  $m$  成分  $z_m$  までで全変動の大部分が説明できればこれ以上を求める必要はない. ここで,  $z_m$  を,

$$z_m = l_{m1}x_1 + l_{m2}x_2 + \cdots + l_{mp}x_p \quad (89)$$

と書く. 従って各係数は,

$$l_{\alpha 1}^2 + l_{\alpha 2}^2 + \cdots + l_{\alpha p}^2 = \sum_{k=1}^p l_{\alpha k}^2 = 1 \quad (90)$$

を満たし 各主成分は 以下の条件を満たすように定まる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{第一主成分 } z_1 \text{ の分散が最大である.} \\ \text{第 } i \text{ 主成分と第 } j \text{ 主成分 } (i \neq j) \text{ は直交する (無相関である).} \end{array} \right.$$

各主成分の計算は,  $p \times p$  の分散共分散行列の固有値問題に帰着する. これについては次小節に記すこととする.

全球再解析データに対して EOF 解析をする際には注意が必要である. なぜなら, 全球再解析データはどの緯度帯でも, 経度方向には同じ数のグリッドが存在するからである. 地球は球形であるので, 全球再解析データのままで, 高緯度になるほど各グリッドあたりの面積が小さくなる. そのため, 面積荷重を考慮せずに EOF 解析を行ってしまうと, 低緯度と比較して高緯度の変動が相対的に大きく見積もられてしまい, 実際に変動を特徴付けるパターンとは異なるパターンが現れる恐れがある. このグリッドの偏りを修正するために, 緯度方向に面積荷重  $\sqrt{\cos \theta}$  をデータにかけて偏りを解消する.

## EOF 解析における固有ベクトルの計算方法

一般に,  $p$  変数データ, すなわち  $N$  個の各標本について,  $p$  種類の変数  $x_1, x_2, \dots, x_p$  が測定されたとし, そのデータに基づき, 主成分  $z_1, z_2, \dots, z_m (m \leq p)$  を求める方法について以下で述べる.

まず, 得られたデータより各変数の分散共分散  $\sigma_{ij}$  を求め, それを

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{pmatrix} \quad (91)$$

と表す. ここでの  $\sigma_{ij}$  は各変数の分散共分散の不偏推定値であり,

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{N-1} \left\{ \sum_{\lambda=1}^n (x_{i\lambda} - \bar{x}_i)(x_{j\lambda} - \bar{x}_j) \right\} \quad (92)$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{\lambda=1}^N x_{i\lambda} \quad (93)$$

とし, さらに相関行列を求め, それを

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & r_{pp} \end{pmatrix} \quad (94)$$

$$(r_{ii} = 1; i = 1, 2, \dots, p)$$

と表す.

ここで,  $p$  個の変数  $x_1, x_2, \dots, x_p$  からなるベクトル変数を

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad (95)$$

とする. ここで,  $\mathbf{X}$  のとりうる量は,

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{p1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{p2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{1N} \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{pN} \end{pmatrix}$$

また, 各主成分を式 (85) の形で求めるために各主成分の変量  $x_i$  の係数をそれぞれベクトル

$$\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} l_{11} \\ l_{21} \\ \vdots \\ l_{p1} \end{pmatrix}, \mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} l_{12} \\ l_{22} \\ \vdots \\ l_{p2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{l}_m = \begin{pmatrix} l_{1m} \\ l_{2m} \\ \vdots \\ l_{pm} \end{pmatrix}$$

で表し,  $l_\alpha$  の転置行列を  $\mathbf{l}_\alpha^T$  で表すと主成分は

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1^T \\ \mathbf{l}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{l}_m^T \end{pmatrix} \mathbf{X} \quad (96)$$

と書くことができる. ただし, 各  $\mathbf{l}_\alpha^T$  は単位ベクトル ( $\mathbf{l}_\alpha^T \cdot \mathbf{l}_\alpha = 1$ ) とする.

これより, 各成分  $z_\alpha$  が条件 (90) を満たすように係数を求めればよい. したがって,

$$V\{z_1\} = v\{\mathbf{l}_1^T \mathbf{X}\} = \mathbf{l}_1^T V\{\mathbf{X}\} \mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_1^T \mathbf{S} \mathbf{l}_1 \quad (97)$$

$z_1$  の分散  $V\{z_1\}$  が最大になるような  $\mathbf{l}_1$  を求めるために, ラグランジュの未定乗数法を用いる (次小節参照). ここで, ラグランジュ未定乗数を  $\lambda$  として,

$$v = \mathbf{l}_1^T \mathbf{S} \mathbf{l}_1 - \lambda(\mathbf{l}_1^T \mathbf{l}_1 - 1) \quad (98)$$

の両辺を  $\mathbf{l}_1^T$  で微分すると, 微分方程式

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{l}_1^T} = (\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{l}_1 \quad (99)$$

$\mathbf{I}$ :  $p$  次の単位行列

が得られ, ラグランジュの未定乗数法よりこの微分方程式が 0 になるときに  $z_1$  の分散  $V\{z_1\}$  は最大になる. すなわち, 以下の連立方程式

$$(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{l}_1 = 0 \quad (100)$$

を解けばよい. ここで, 式 (96) のベクトル  $\mathbf{l}_1$  の要素がすべて 0 以外の解を持つためには  $\lambda$  が固有方程式

$$|\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (101)$$

の解(固有値)でなければならない。また、 $z_1$  の分散  $V\{z_1\}$  を最大にするものが存在するとすれば、式(99)より

$$V\{z_1\} = \lambda \quad (102)$$

であり、式(101)の固有値に等しくなるので、 $z_1$  における係数ベクトル  $\mathbf{l}_1$  としては、式(101)の最大の固有値  $\lambda_1$  に対応する単位固有ベクトルとして第一主成分  $z_1$  を決定することができる。一方、式(101)の固有値を展開すると  $\lambda$  についての  $p$  次方程式になるので、 $p$  個の固有値(重複するものを含めて数えると)が存在し、しかも  $S$  は非負の対称行列であるから固有値はすべて非負の実数である。その中の最大のものを  $\lambda_1$  として  $\mathbf{l}_1$  を求める。さらに大きさの順に  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$  を抽出し、 $\lambda_k (1 \leq k \leq m)$  に対応する単位固有ベクトルを第  $k$  主成分  $z_k$  における係数ベクトル  $\mathbf{l}_k$  として、全部で  $m$  個の主成分を求めるとこれらは条件を満たす。

## ラグランジュの未定乗数法

関数  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$  について、条件  $h(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$  のもとで、その極大、もしくは極小を求めるために、以下の関数を導入する.

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_p) + \lambda h(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (103)$$

この仮定した関数において、 $z$  を最大にすることは、 $y$  を  $h = 0$  のもとで極大、もしくは極小にすることと同値である. したがって、

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial z}{\partial x_p} = h(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0 \quad (104)$$

を解いて、 $x_1, x_2, \dots, x_p$  を求めると、この  $x_1, x_2, \dots, x_p$  に対する  $y$  の値が極大、もしくは極小となる. さらに条件が次のように二個以上あるときにおいても、

$$h_1(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0, h_2(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0, \dots, h_p(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0 \quad (105)$$

上記の場合と同じように、次の関数について、

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_p) + \lambda_1 h_1(x_1, x_2, \dots, x_p) + \lambda_2 h_2(x_1, x_2, \dots, x_p) + \dots + \lambda_p h_p(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (106)$$

上記の場合と同じように式 (104) を解くことにより  $y$  を極大、もしくは極小にすることができる.

表 1: 北極振動指数が  $\pm 1.5\sigma$  以上以下で, AOI と各項を DJF 平均した数値.

期間	北極振動指数 (AOI)	線形項	非線形項	外力項
D 平均 ( $+1.5\sigma$ 以上)	1.59	3.15	-0.96	0.30
J 平均 ( $+1.5\sigma$ 以上)	2.55	0.65	-2.64	0.23
F 平均 ( $+1.5\sigma$ 以上)	1.43	3.27	-2.06	-1.79
DJF 平均 ( $+1.5\sigma$ 以上)	1.87	2.33	-1.88	-0.37
D 平均 ( $-1.5\sigma$ 以下)	-1.76	-1.56	-2.04	-0.95
J 平均 ( $-1.5\sigma$ 以下)	-2.19	-6.33	6.35	-0.42
F 平均 ( $-1.5\sigma$ 以下)	-2.87	0.05	1.09	1.79
DJF 平均 ( $-1.5\sigma$ 以下)	-2.30	-2.70	1.82	-0.08
DJF 平均 ( $+1.5\sigma - (-1.5\sigma)$ )	4.17	5.03	-3.07	-0.29

表 2: 365 日移動平均した AOI と各項の相関係数.

	線形項	非線形項	外力項
相関係数	0.27	-0.33	0.0025

# Arctic Oscillation Index

1950/01/01-2010/03/10

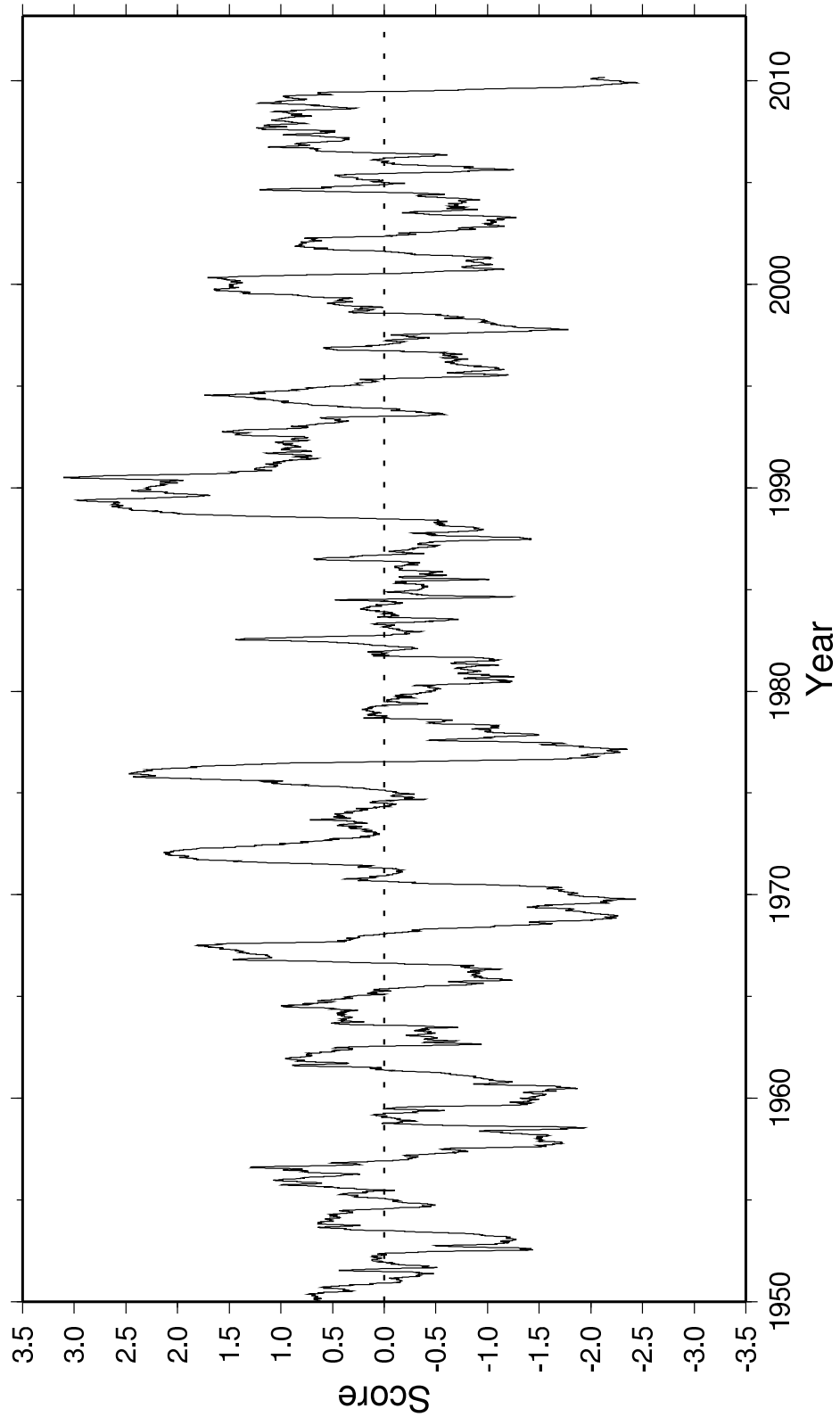


図 1: 1950 年から 2010 年までの AOI の時系列 (365 日移動平均)。横軸は年、縦軸は正規化された AOI



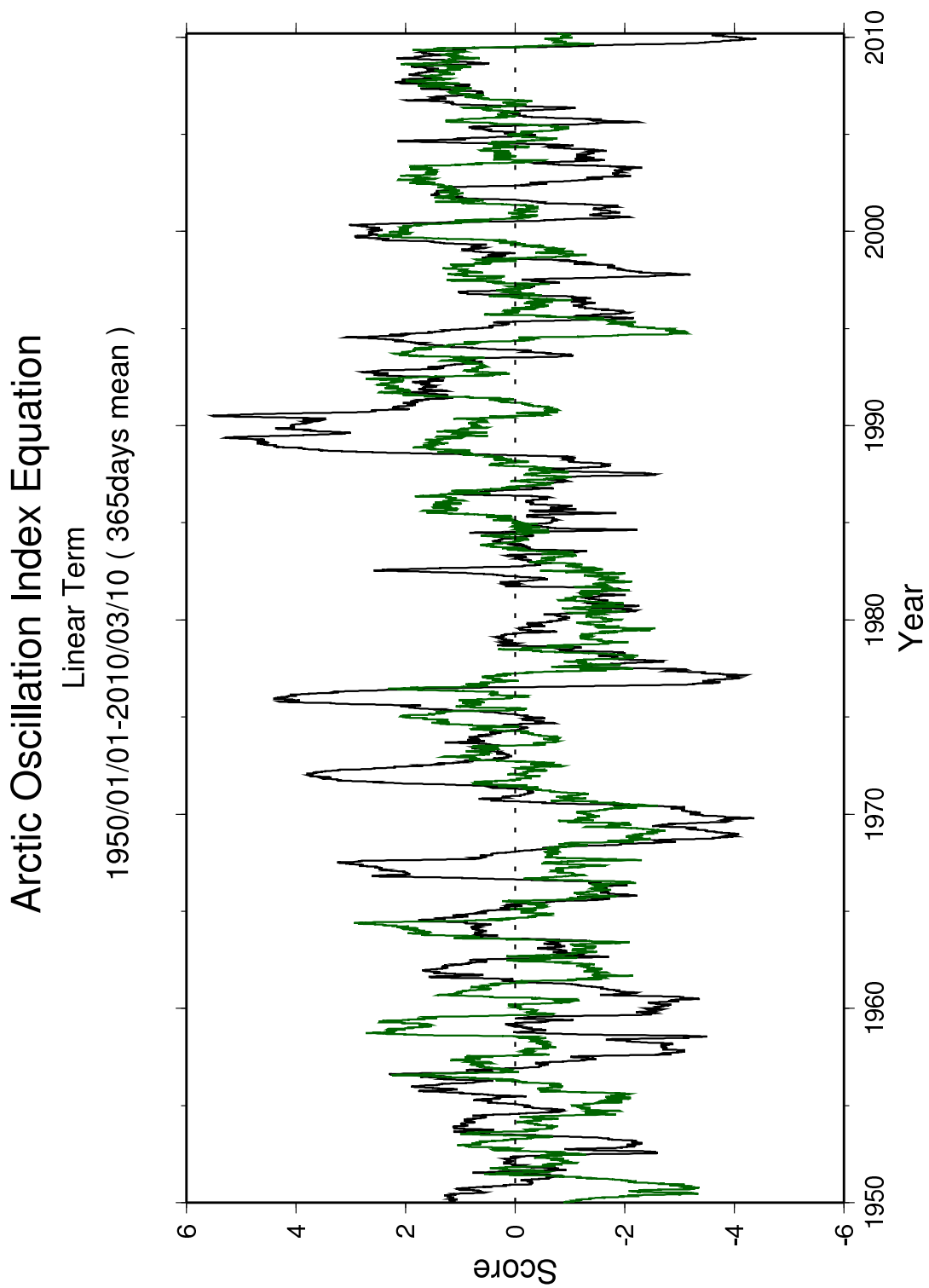


図 2: 1950 年から 2010 年までの AOI と線形項の時系列 (365 日移動平均)。横軸は年、縦軸は正規化された AOI、太実線は AOI、緑線は線形項。

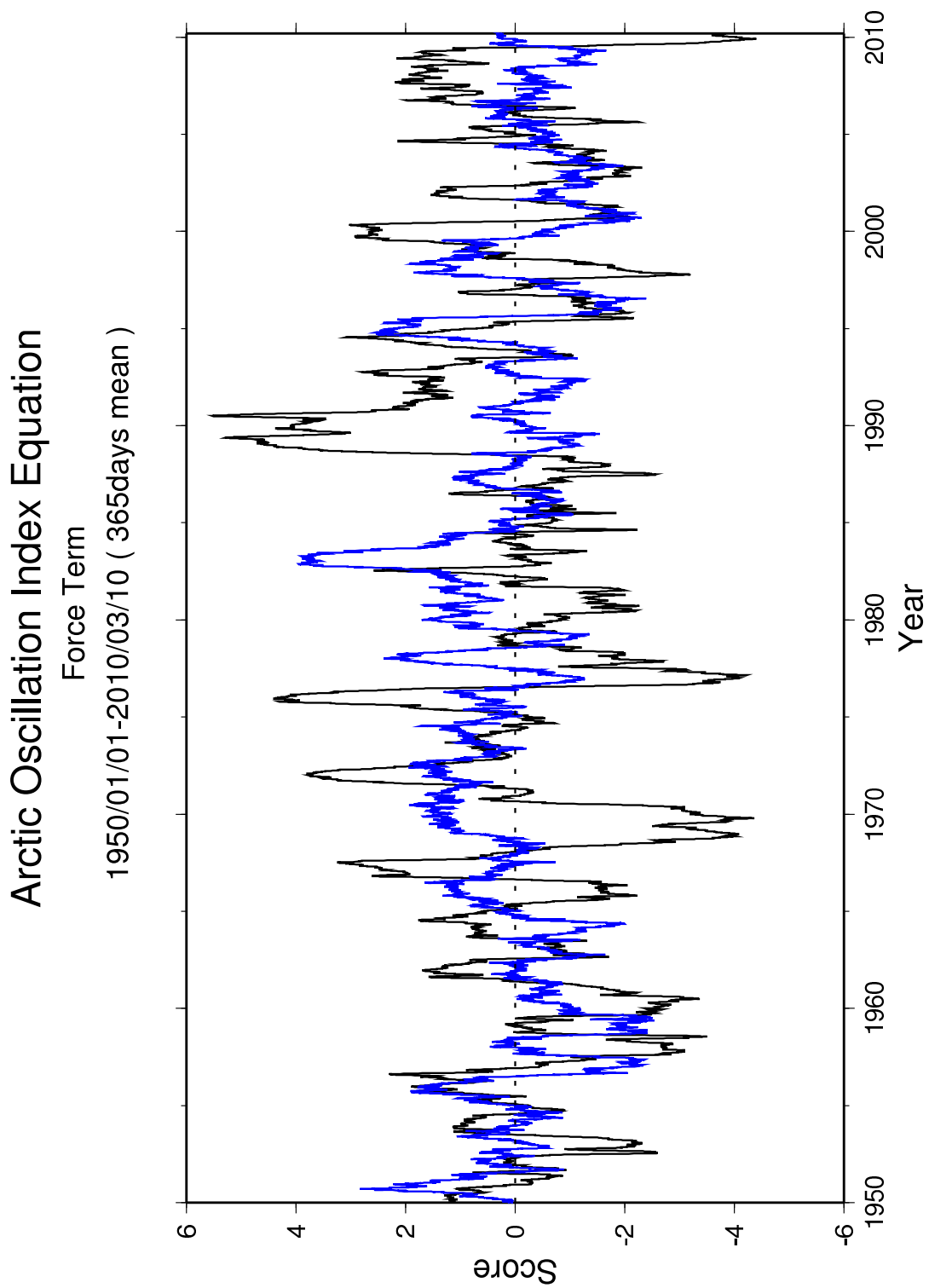


図 3: 1950 年から 2010 年までの AOI と外力項の時系列 (365 日移動平均)。横軸は年、縦軸は正規化された AOI、太実線は AOI、青線は外力項。

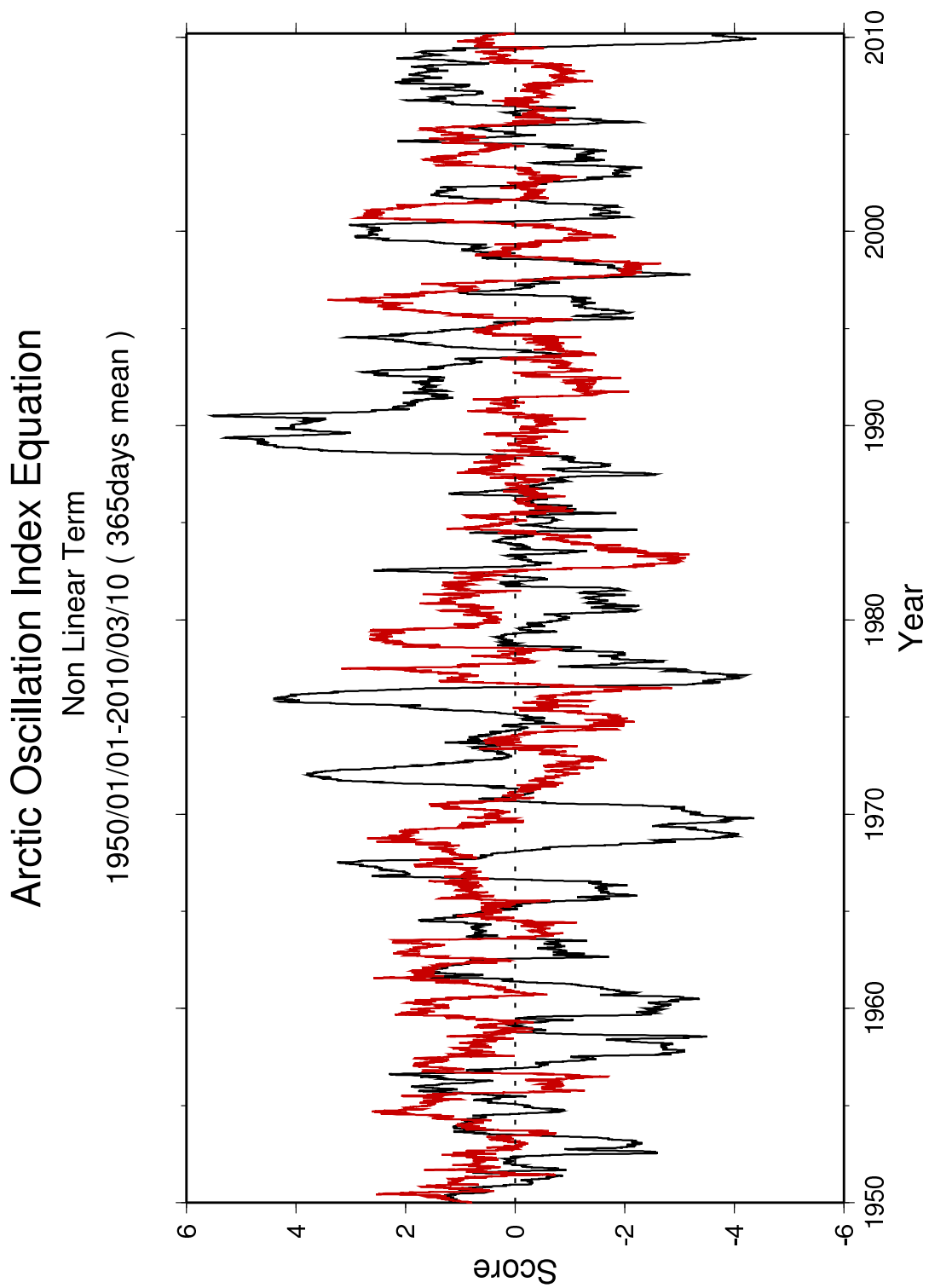


図 4: 1950 年から 2010 年までの AOI と非線形項の時系列 (365 日移動平均)。横軸は年、縦軸は正規化された AOI、太実線は AOI、赤線は非線形項。

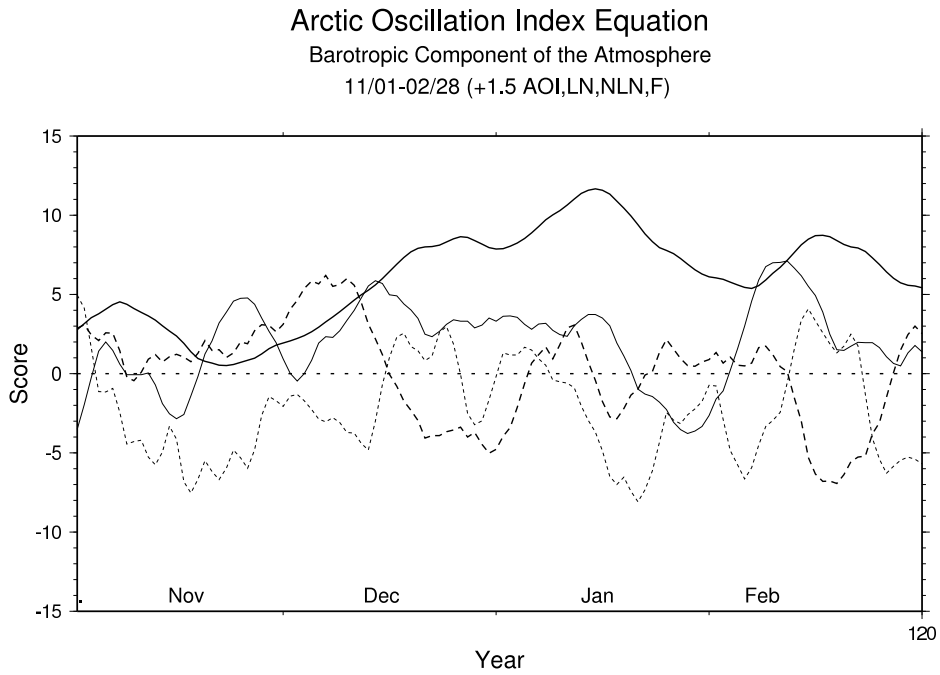


図 5: AOI が  $+1.5\sigma$  以上の時の AOI と各項。太実線は AOI、細実線は線形項、点線は非線形項、破線は外力項を示す。

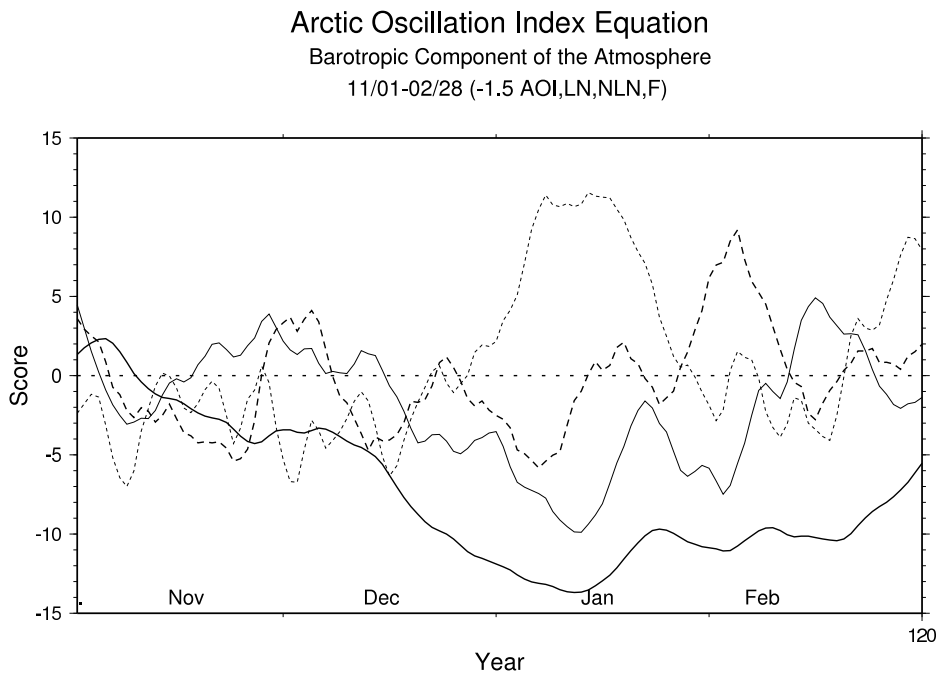


図 6: AOI が  $-1.5\sigma$  以下の時の AOI と各項。図の見方は図 5 と同じ。

Arctic Oscillation Index Equation  
 Barotropic Component of the Atmosphere  
 1971 11/01-02/28 (AOI, LN, NLN, F)

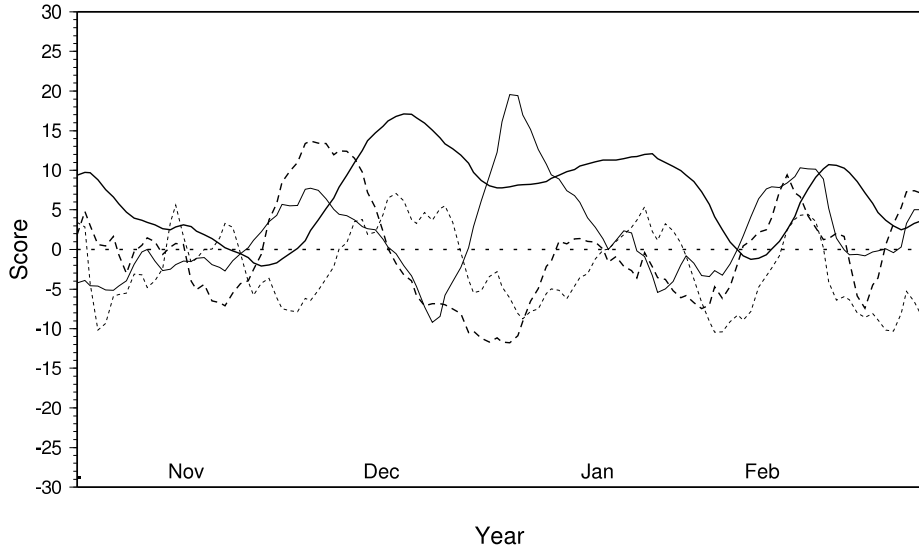


図 7: 1971 年 11 月 1 から 1972 年 2 月 28 日までの時の AOI と各項。図の見方は図 5 と同じ。

Arctic Oscillation Index Equation  
 Barotropic Component of the Atmosphere  
 1988 11/01-02/28 (AOI, LN, NLN, F)

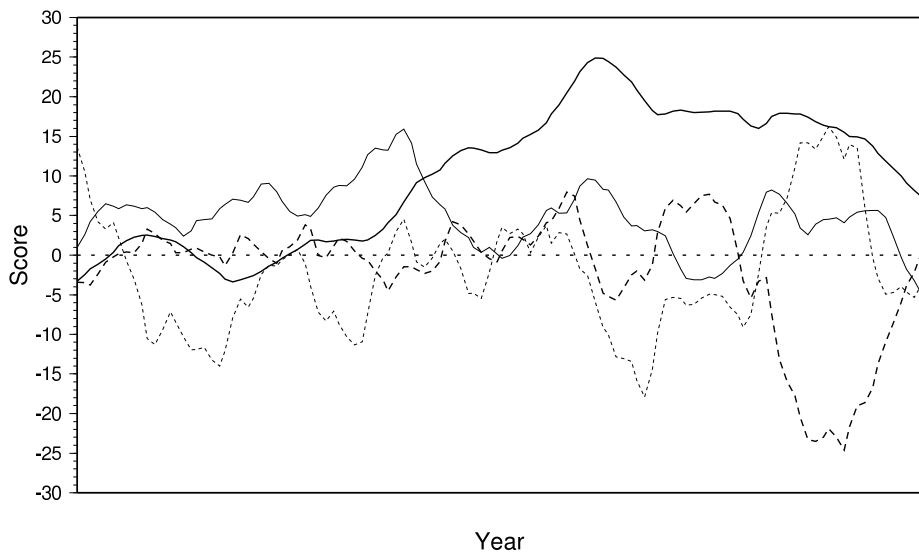


図 8: 1988 年 11 月 1 から 1989 年 2 月 28 日までの時の AOI と各項。図の見方は図 5 と同じ。

Arctic Oscillation Index Equation  
 Barotropic Component of the Atmosphere  
 1992 11/01-02/28 (AOI, LN, NLN, F)

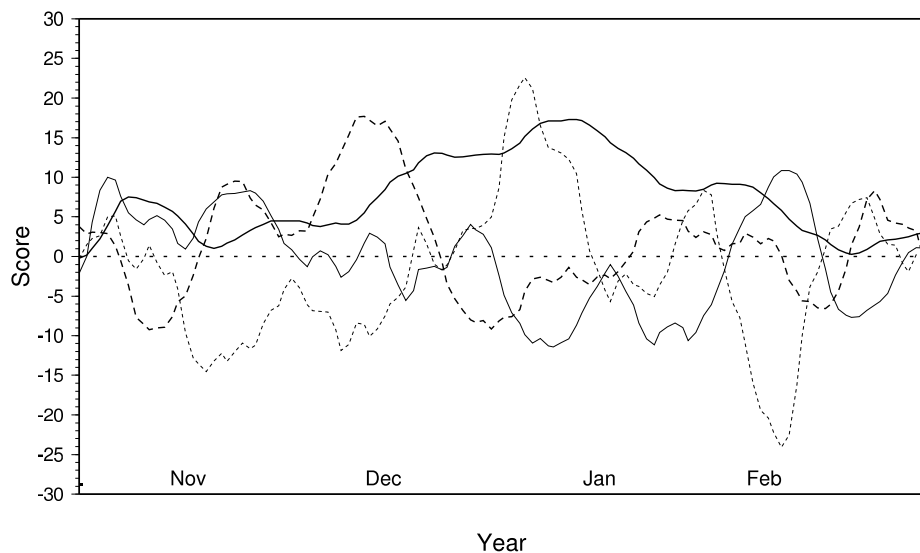


図 9: 1992 年 11 月 1 から 1993 年 2 月 28 日までの時の AOI と各項。図の見方は図 5 と同じ。

Arctic Oscillation Index Equation  
 Barotropic Component of the Atmosphere  
 1969 11/01-02/28 (AOI, LN, NLN, F)

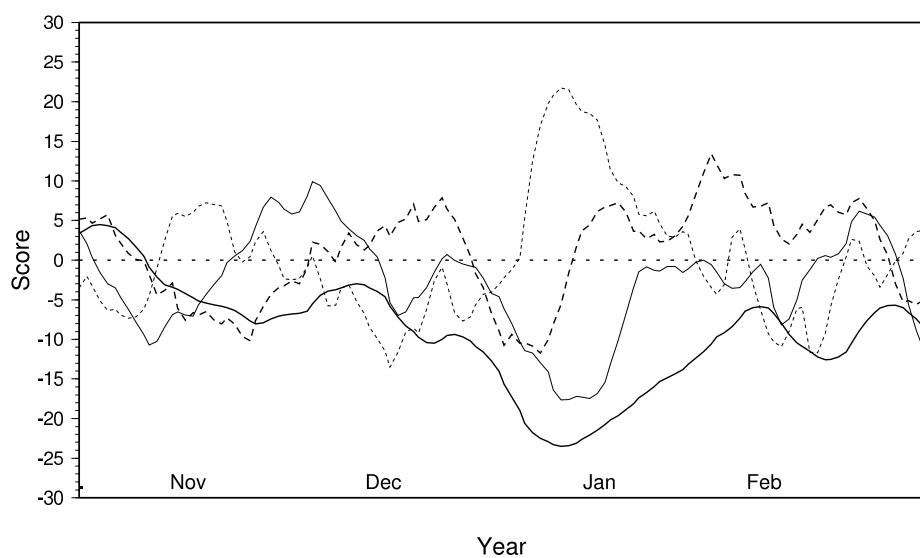


図 10: 1969 年 11 月 1 から 1970 年 2 月 28 日までの時の AOI と各項。図の見方は図 5 と同じ。

Arctic Oscillation Index Equation  
 Barotropic Component of the Atmosphere  
 1976 11/01-02/28 (AOI, LN, NLN, F)

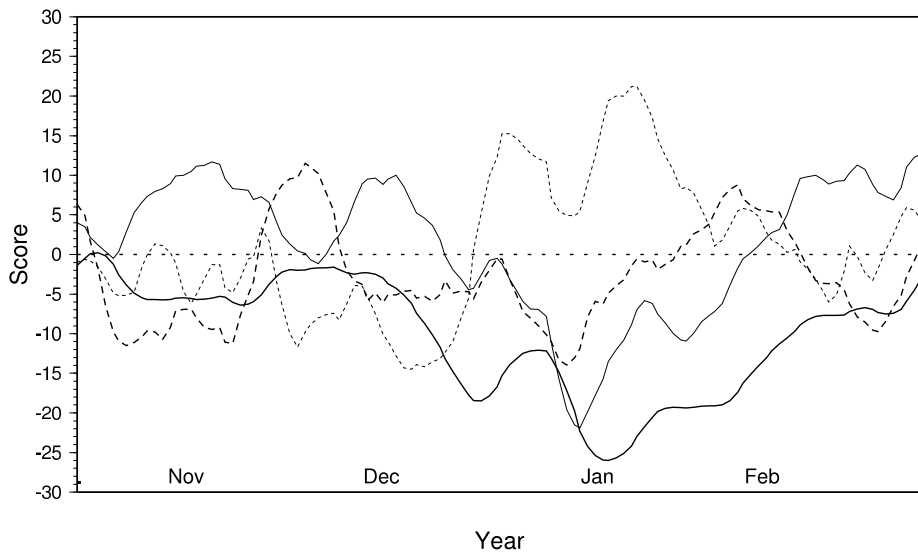


図 11: 1976 年 11 月 1 から 1977 年 2 月 28 日までの時の AOI と各項。図の見方は図 5 と同じ。

Arctic Oscillation Index Equation  
 Barotropic Component of the Atmosphere  
 2009 11/01-02/28 (AOI, LN, NLN, F)

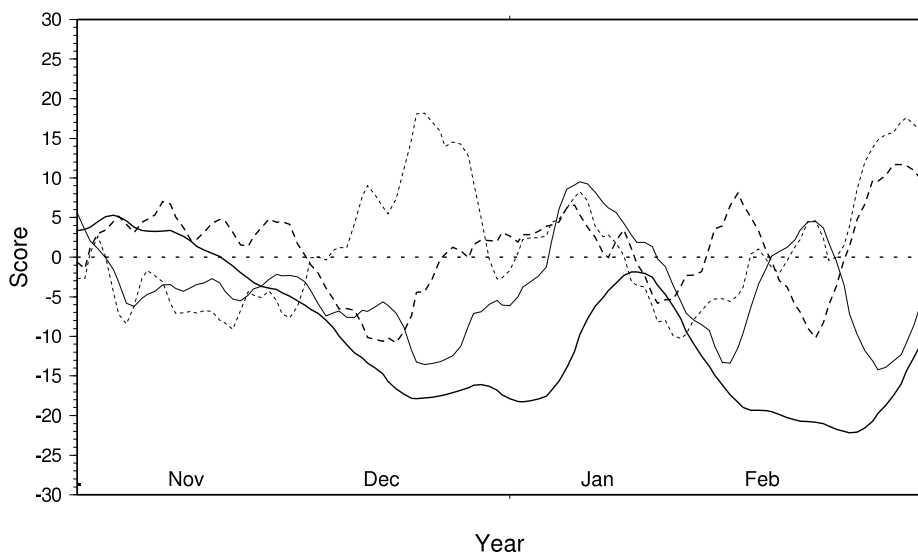
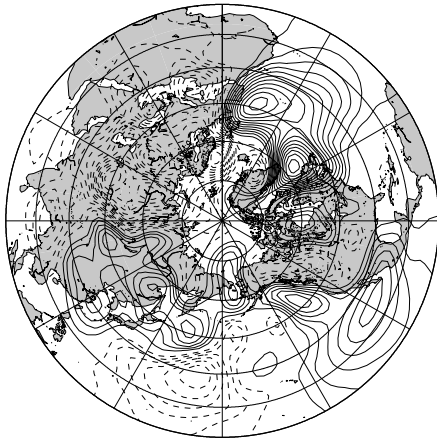


図 12: 2009 年 11 月 1 から 2010 年 2 月 28 日までの時の AOI と各項。図の見方は図 5 と同じ。

Linear Term (+1.5)

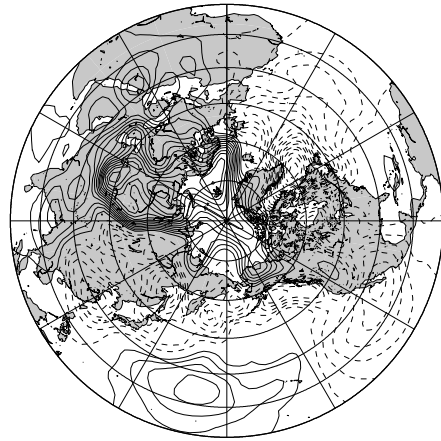
1950/12/01-2010/02/28



(a)  $+1.5\sigma$  以上の時の線形項

Forcing Term (+1.5)

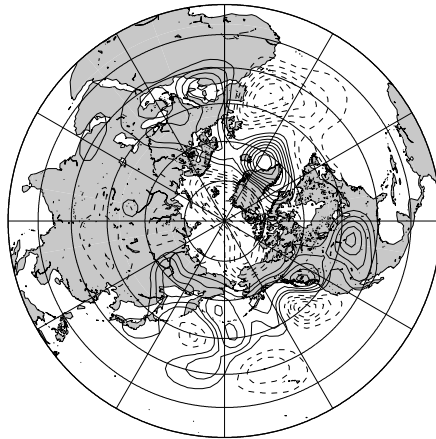
1950/12/01-2010/02/28



(b)  $+1.5\sigma$  以上の時の外力項

Nonlinear Term (+1.5)

1950/12/01-2010/02/28



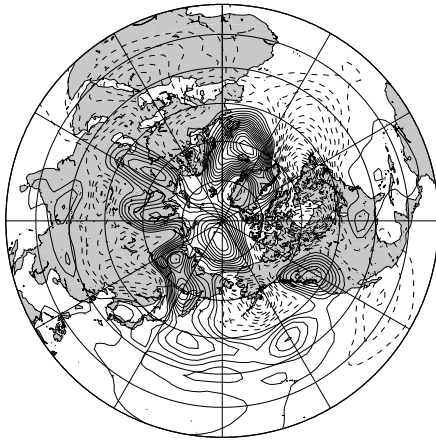
(c)  $+1.5\sigma$  以上の時の非線形項

図 13:  $+1.5\sigma$  以上の時の各項における順圧高度場



Linear Term (-1.5)

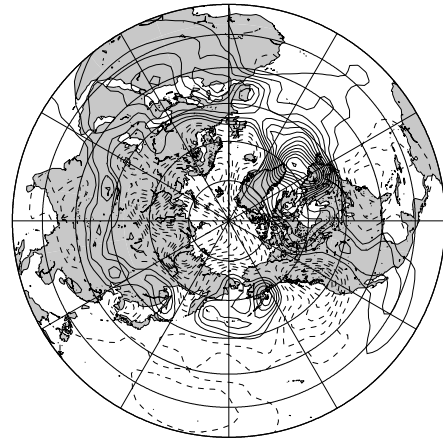
1950/12/01-2010/02/28



(a)  $-1.5\sigma$  以上の時の線形項

Forcing Term (-1.5)

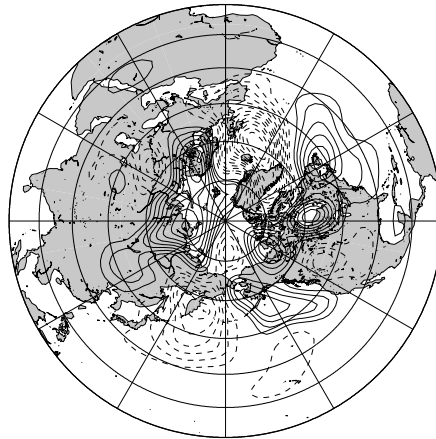
1950/12/01-2010/02/28



(b)  $-1.5\sigma$  以上の時の外力項

Nonlinear Term (-1.5)

1950/12/01-2010/02/28

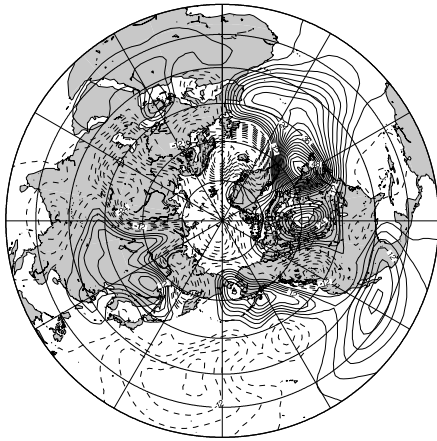


(c)  $-1.5\sigma$  以上の時の非線形項

図 14:  $-1.5\sigma$  以上の時の各項における順圧高度場

Linear Term (remainder)

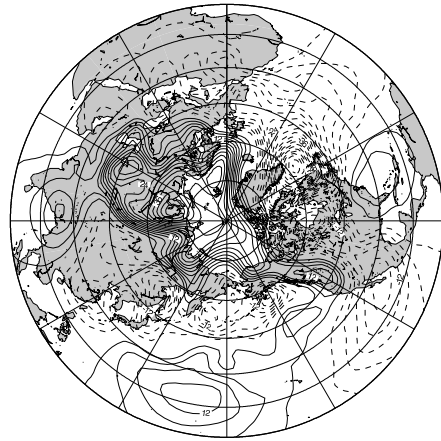
1950/12/01-2010/02/28



(a)  $+1.5\sigma - (-1.5\sigma)$  の線形項

Forcing Term (remainder)

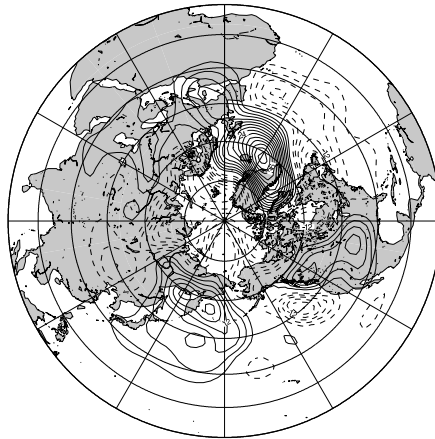
1950/12/01-2010/02/28



(b)  $+1.5\sigma - (-1.5\sigma)$  の外力項

Nonlinear Term (remainder)

1950/12/01-2010/02/28



(c)  $+1.5\sigma - (-1.5\sigma)$  の非線形項

図 15:  $+1.5\sigma$  から  $-1.5\sigma$  を差引いた時の各項における順圧高度場