

# NICAM-LETKFの開発および 4次元データ同化実験

2009年1月

近 藤 圭 一

# NICAM-LETKFの開発および 4次元データ同化実験

筑波大学大学院  
生命環境科学研究科  
地球科学専攻  
修士(理学)学位論文

近藤圭一

# Applying a Local Ensemble Transform Kalman Filter to the Nonhydrostatic Icosahedral Atmospheric Model

Keiichi KONDO

## Abstract

In this paper, first, we compare assimilation techniques of the full-rank extended Kalman filter (EKF) and the ensemble Kalman filter (EnKF), using a barotropic general circulation model, called barotropic S-model, under the perfect or imperfect model configuration. We investigate the accuracy of the EnKF in reference to the direct computation of the EKF. The barotropic S-model is based on the primitive equations and predicts the vertical mean state of the atmosphere. Although it has predictability comparable to the operational prediction models, the direct computation of the EKF is possible. Therefore, we can assess the accuracy of the EnKF as a function of the ensemble members. In this study, the convergence of the EnKF to the EKF is examined using various ensemble members. The EKF and EnKF directly assimilate the observation in the spectral space. The observations are made in the spectral space, and the observational elements are model variables.

According to the result of the root mean square error (RMSE), the EnKF converges to the full-rank EKF filter when the ensemble member is increased to more than 50 under perfect model configuration and more than 250 under imperfect model configuration. An EOF analysis is conducted using the covariance matrices of forecast error for both filters. The structure of the EOF-1 indicates the characteristics of the baroclinic instability waves in mid-latitudes in both filters, showing the same geographical distributions when it has converged.

It is concluded from the comparison of the RMSE that more than 50 (250) ensemble members are required for the non-localized EnKF to converge to the full-rank EKF for the practical assimilation in the spectral space under the perfect (imperfect)

model configuration of the barotropic general circulation model of the atmosphere.

Second, we apply the LETKF to the NICAM (Nonhydrostatic ICosahedral Atmospheric Model), which is a nonhydrostatic global atmospheric model because an assimilation system of the NICAM has not been constructed and the optimum initial condition for the NICAM does not exist. The NICAM adopted the nonhydrostatic equations and icosahedral grid structure. So, the NICAM can calculate convection directly. The NICAM is developed to resolve clouds, and has high performance in the case of high parallel computing. It is expected to understand the rainfall system more. So in this study, we apply the LETKF to the NICAM (NICAM-LETKF), and investigate the NICAM-LETKF performance by tuning the localization scale and changing the observational elements under the perfect model assumption.

According to the results, the NICAM-LETKF works stably even if the ensemble size is 20 and the analysis RMSEs are smaller than the observational errors. If the horizontal localization scale is 500 km and the vertical localization scale is 3.0-grid in the tropics and is 4.0-grid in Northern and Southern Hemisphere, the NICAM-LETKF shows good performance. The ensemble spread corresponds to the analysis RMSE. Moreover, the performance is comparable for the cases with and without assimilating the water vapor.

It is concluded from the results, the NICAM-LETKF works appropriately under the perfect model configuration.

Key words: Data assimilation, EKF, EnKF, LETKF, Barotropic S-model, NICAM, Localization

# 目次

Abstract	i
表目次	v
図目次	vi
<b>第 1 章 はじめに</b>	<b>1</b>
1.1 数値予報とデータ同化	1
1.2 目的	9
<b>第 2 章 カルマンフィルタとアンサンブルカルマンフィルタ</b>	<b>10</b>
2.1 カルマンフィルタ (KF) および拡張カルマンフィルタ (EKF)	10
2.2 アンサンブルカルマンフィルタ (EnKF)	17
2.3 局所化	24
2.4 局所アンサンブル変換カルマンフィルタ (LETKF)	26
2.5 Non-local patch LETKF	31
2.6 誤差共分散膨張	32
2.7 膨張係数および観測誤差の動的推定	34
<b>第 3 章 順圧 S-model-EnKF</b>	<b>38</b>
3.1 順圧 S-model	38
3.1.1 3次元スペクトルモデル	38
3.2 パーフェクトモデル実験	48
3.2.1 実験設定	48
3.2.2 結果	51
3.2.3 考察	55

3.2.4	結論	59
3.3	インパーフェクトモデル実験	61
3.3.1	実験設定	61
3.3.2	結果	63
3.3.3	考察	66
3.3.4	結論	69
<b>第4章</b>	<b>NICAM-LEKTF</b>	<b>94</b>
4.1	全球非静力学大気モデル NICAM	94
4.1.1	支配方程式	94
4.1.2	数値計算手法	98
4.1.3	正二十面体格子	99
4.2	パーフェクトモデル実験	100
4.2.1	実験設定	100
4.2.2	結果	103
4.2.3	考察	109
4.2.4	結論	113
<b>第5章</b>	<b>結論</b>	<b>143</b>
	<b>謝辞</b>	<b>145</b>
	<b>参考文献</b>	<b>146</b>

# 表 目 次

4.1	NICAM の支配方程式に用いられている記号その 1 . . . . .	114
4.2	NICAM の支配方程式に用いられている記号その 2 . . . . .	115
4.3	水平解像度”Glevel-n” と水平格子間隔 . . . . .	116

# 目次

2.1	ガウス関数およびガウス関数を近似した5次関数	37
3.1	S-model-EKF と S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の固有値	70
3.2	S-model-EKF と S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の第1固有ベクトル	71
3.3	S-model-EKF と S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の第2固有ベクトル	72
3.4	S-model-EKF と S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の第3固有ベクトル	73
3.5	S-model-EKF と S-model-EnKF の予報誤差共分散行列の固有値	74
3.6	S-model-EKF と S-model-EnKF の予報誤差共分散行列の第2固有ベクトル	75
3.7	S-model-EKF および S-model-EnKF の順圧展開係数 $w_i$ の真値に対する 解析 RMSE	76
3.8	S-model-EKF および S-model-EnKF の順圧高度の解析場と真値に対す る解析誤差	77
3.9	S-model-EKF および S-model-EnKF の順圧展開係数 $w_i$ の真値に対する 解析 RMSE (10 事例の平均)	78
3.10	S-model-LETKF の解析誤差共分散行列の固有値	79
3.11	S-model-LETKF の解析誤差共分散行列の第1固有ベクトル	80
3.12	S-model-LETKF の解析誤差共分散行列の第2固有ベクトル	81
3.13	S-model-LETKF の順圧展開係数 $w_i$ の真値に対する解析 RMSE	82
3.14	S-model-LETKF の順圧展開係数 $w_i$ の真値に対する解析 RMSE	83
3.15	局所化の影響	84
3.16	S-model-EKF と S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の固有値	85
3.17	S-model-EKF と S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の第1固有ベクトル	86
3.18	S-model-EKF と S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の第2固有ベクトル	87
3.19	S-model-EKF と S-model-EnKF の予報誤差共分散行列の固有値	88
3.20	S-model-EKF と S-model-EnKF の予報誤差共分散行列の第1固有ベクトル	89



3.21	S-model-EKF と S-model-EnKF の予報誤差共分散行列の第 2 固有ベクトル	90
3.22	S-model-EKF および S-model-EnKF の順圧展開係数 $w_i$ の真値に対する 解析 RMSE	91
3.23	S-model-EKF および S-model-EnKF の順圧高度の解析場と真値に対す る解析誤差	92
3.24	S-model-EKF および S-model-EnKF の順圧展開係数 $w_i$ の真値に対す る解析 RMSE (10 事例の平均)	93
4.1	速度ベクトル $\mathbf{v}$ と直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$	117
4.2	正 20 面体格子	117
4.3	鉛直レベルとローレンツ格子	118
4.4	NICAM の時間積分	118
4.5	バネ力学を用いた格子点の修正したバネ結合	119
4.6	修正型二十面体格子	119
4.7	水平コントロールボリュームと格子点の配列	120
4.8	NICAM-LETKF の解析 RMSE: 水平方向局所化の影響 (NH 850 hPa)	121
4.9	NICAM-LETKF の解析 RMSE: 水平方向局所化の影響 (NH 500 hPa)	122
4.10	NICAM-LETKF の解析 RMSE: 水平方向局所化の影響 (NH 250 hPa)	123
4.11	気温の水平誤差相関図	124
4.12	水平風 $v_1$ と気温の水平誤差相関図	125
4.13	NICAM-LETKF の解析 RMSE: 鉛直方向局所化の影響 (NH 850 hPa)	126
4.14	NICAM-LETKF の解析 RMSE: 鉛直方向局所化の影響 (NH 500 hPa)	127
4.15	NICAM-LETKF の解析 RMSE: 鉛直方向局所化の影響 (NH 250 hPa)	128
4.16	NICAM-LETKF の解析 RMSE: 鉛直方向局所化の影響 (TR 850 hPa)	129
4.17	NICAM-LETKF の解析 RMSE: 鉛直方向局所化の影響 (TR 500 hPa)	130
4.18	NICAM-LETKF の解析 RMSE: 鉛直方向局所化の影響 (TR 250 hPa)	131
4.19	水平風 $V_1$ の鉛直誤差相関図	132
4.20	NICAM-LETKF CNTL 実験の解析 RMSE およびアンサンブルスプレッ ド (850 hPa)	133

4.21	NICAM-LETKF CNTL 実験の解析 RMSE およびアンサンブルスプレッド (500 hPa) . . . . .	134
4.22	NICAM-LETKF CNTL 実験の解析 RMSE およびアンサンブルスプレッド (250 hPa) . . . . .	135
4.23	NICAM-LETKF CNTL 実験の解析 RMSE およびアンサンブルスプレッドの空間分布 (850 hPa) . . . . .	136
4.24	NICAM-LETKF CNTL 実験の解析 RMSE およびアンサンブルスプレッドの空間分布 (500 hPa) . . . . .	137
4.25	NICAM-LETKF CNTL 実験および TEST 実験の解析 RMSE (850 hPa)	138
4.26	NICAM-LETKF CNTL 実験および TEST 実験の解析 RMSE (850 hPa)	138
4.27	動的推定法を用いた NICAM-LETKF の解析 RMSE の時系列 (北半球) .	139
4.28	動的推定法を用いた NICAM-LETKF の解析 RMSE の時系列 (熱帯) . .	140
4.29	動的推定法を用いた NICAM-LETKF の解析 RMSE の時系列 (南半球) .	141
4.30	動的に推定された観測誤差の時系列 . . . . .	142
4.31	動的に推定された観測誤差の空間分布 . . . . .	142

# 第1章 はじめに

## 1.1 数値予報とデータ同化

近年のコンピュータ技術は非常に進歩し、数値予報に与える影響は非常に大きい。コンピュータの高速化に伴い、数値予報の精度向上のみならず、数値モデルにより、より細かいスケールの現象を解像できるようになっている。数値予報の精度を上げるためには大きく2通りある。1つは数値モデルの高度化、もう1つはデータ同化技術の高度化である。

数値モデルの高度化については、数値モデルの再現性を向上させるために高解像度化され、またスキームの改良による精緻化がなされている。近年のコンピュータの高速化により、一般的な大気大循環モデル: AGCM (Atmospheric General Circulation Model) でも  $O(10 \text{ km})$  のオーダーで地球全体を解像することが可能になってきた。AFES (AGCM for Earth Simulator; Ohfuchi et al. 2004) は、その名前の通り地球シミュレータ専用最適化された大気大循環モデルであり、格子間隔  $10 \text{ km}$  でメソスケール現象を地球全体で解像することができる。しかし水平解像度が  $10 \text{ km}$  以下の解像度となると、静力学平衡の仮定が満たされなくなるため、従来の静力学を仮定している AGCM では現象の再現が困難になることが指摘されていた。熱帯での深い対流は全球規模に影響を与える重要な現象であるが、AGCM では鉛直流を直接計算しないので、その効果を積雲対流パラメタリゼーション (e.g., Arakawa 2004) を用いて代用している。また、静力学平衡を仮定する場合、非静力学の効果が働かないため重力波の取り扱いが難しかった。

また、一般的なスペクトル法を用いた AGCM では、東西方向には高速フーリエ変換があるが、南北方向には高速ルジャンドル変換なるものは存在せず、実空間-スペクトル空間の変換に時間がかかる (Sato et al. 2005)。これは高解像度 AGCM を並列計算機において計算する場合、大きな問題となっている。格子点モデルでは  $O(N^2)$  のオーダーで計算量が増すが、スペクトルモデルでは  $O(N^3)$  のオーダーで計算量が増えると

ともにノード間通信も劇的に増え、高解像度での計算が事実上難しくなる。一方の格子点モデルであっても、等経度で格子点を区切っている限り、極と熱帯の格子間隔には大きな差があり、CFL条件を満たしにくく、計算不安定に陥りやすいため、こちらも高解像には向かない。

そこで、東京大学気候システム研究センター (CCSR: Center for Climate System Research) と地球フロンティア研究センターでは、解像度を従来の AGCM 以上に上げるために、方程式系に非静力学方程式系を採用し、格子系には準一様格子である修正型正二十面体を用いた NICAM (Nonhydrostatic ICosahedral Atmospheric Model; Satoh et al. 2008) の開発を始めた。NICAM は非静力学方程式系を採用したことで、上昇流を陽に計算できる。さらに高解像度時には雲物理過程を実装することで、数値予報における不確実性の 1 つである積雲パラメタリゼーションを使用せず、積雲 1 つ 1 つを解像することができる。また、格子系に全球で一様の正二十面体を採用したことで、全球で格子間隔が等しいため、時間積分する際のタイムステップの調節が容易である。低解像度の NICAM は、スペクトル法に比べて計算効率は悪い。しかし、格子間隔が 30 km 以下になる高解像度の場合、スペクトル法ではルジャンドル変換が膨大な計算時間をしめるようになるため、格子点モデルである NICAM の方が計算効率がよいとされている (Satoh et al. 2005)。また、NICAM は短期中期予報だけではなく、気候モデルとしても使えるように、エネルギーと質量を保存するスキームを開発し採用している (Satoh 2002; 2003)。Miura et al. (2007) では、格子間隔 3.5 km の NICAM を用いることで、大気大循環モデルでは再現が難しいとされる MJO (Madden-Julian Oscillation) の再現に成功した。

一方、コンピュータ技術の向上は、数値モデルそのものの改良だけではなく、アンサンブル予報の発展にも貢献している。アンサンブル予報は、数値予報において一般的になりつつある予報技術である。アンサンブル予報では、初期値に含まれている誤差を考慮し、解析誤差程度を摂動として初期値に加え多数の予報を行うため、現象を確率的に捉えることが可能となる。アンサンブル予報では、現象を確率論的に扱うことができるため、アンサンブルメンバーのばらつきから情報の確からしさを見積もることができる。しかし、アンサンブル予報は、多数の予報を行い計算機資源を大量に使用するため、決定論的な予報のモデル解像度と同等の解像で行うことが難しく、よりスケールの細かな現象を再現することはできない。数値モデルの高解像度化、精緻

化によって、より詳細な情報を得ることができるようになったが、決定論的な予報は、単独予報であるがゆえに、その予報の確からしさはわからない。

アンサンブル予報は、1992年12月、ヨーロッパ中期予報センター (ECMWF: European Center for Medium-Range Weather Forecasts; Molteni et al. 1996) および NCEP (National Centers for Environmental Prediction; Toth and Kalnay 1997) によって行われるようになった。

アンサンブル予報には初期摂動がどのように作成されるかによって様々な手法がある。LAF法 (Lagged Average Forecasting method; Hoffman and Kalnay 1983) は、初期値の時刻をずらし、評価時間をそろえることでアンサンブル予報とみなす方法である。日々行っている単独予報を束ねただけなので非常に簡便である一方、アンサンブルメンバーを効率的に増やすことができず、より多いアンサンブルメンバーを用意するためには古い初期値を用いた予報を使わなくてはならないという問題がある。

BGM法 (Breeding of growing mode method; Toth and Kalnay 1993, 1997) は、NCEPによって最初に用いられた。BGM法は、過去から予報開始時刻までに最も発達した成長ベクトル BV (Bred Vector) を取り出し、BVを初期摂動とすることでアンサンブルを作成する。成長ベクトルは、それぞれ互いに似通った構造を持つてしまうことが考えられるため、それぞれの摂動を直交化し、プラスマイナスのペア摂動を作成する。BGM法では、過去から現在までに成長してきたBVが将来にわたっても成長するものと仮定している。BGM法は、接線形方程式やアジョイント方程式を必要としない比較的簡便な方法であるだけでなく、過去において非線形モデルの中で成長してきた誤差を摂動とするため、非線形の効果も取り入れることができる。気象庁の週間アンサンブル予報では2007年まで現業で使用されていた。

SV法 (Singular Vector method; Buzza and Palmer 1995) は、ECMWFによって最初に用いられた。SV法は、評価時間 (誤差が線形的に成長する程度。全球モデルでは予報開始から12-48時間、領域モデルでは予報開始から30-60分程度) 内で最も成長する擾乱ベクトル SV (Singular Vector) を初期摂動として、アンサンブル予報を行う。大気モデルにおいて評価時間内に成長する擾乱はせいぜい数10個程度であると考えられているため、成長率の大きいもの、すなわち特異値の大きいものから数10個選んでくるSVは、有効な摂動であると言える。現在から評価時間内に最も成長するSVが、評価時間以降も予報値の確率分布の特徴を表すであろうと期待しているものの、評価時

間後も最も成長する保証はない。SVの計算に必要なノルムには、トータルエネルギーノルムが適当であるとされている (Palmer et al. 1998)。現在、気象庁の週間アンサンブル予報はSV法である。

さらに、Matsueda et al. (2006)、Matsueda et al. (2007)、Matsueda and Tanaka. (2008) では、各現業センターのアンサンブル予報を集め、MCGE (Multi-Center Grand Ensemble) を構築し、単独センターのアンサンブル予報より MCGE の法が優れていることを示した。これは各センターの数値モデルの不完全性が相殺されるためであると考えられている。

数値モデルの高解像度化およびアンサンブル予報技術の導入によって予測精度は改善するが、大気はカオス系であるため初期値に非常に敏感である。そのため、初期値にわずかに含まれる解析誤差が時間とともに成長し、やがてその誤差が支配的になり数値予報への悪影響を与える。そのため、観測値の情報を数値モデルに取り込んだより信頼性の高い初期値を作成することは非常に重要である。そのような初期値作成法をデータ同化という。数値モデルの予報値には予報誤差が含まれており、観測値にも観測誤差が含まれているので、データ同化によって、両誤差を考慮することで尤もらしい解析値を作成する。つまり観測値の情報とモデルの確からしさを考慮することで尤もらしい初期値を作成する。別の言い方をすれば、データ同化によって観測を数値モデルに取り込むことで、数値モデルが現実から離れていかないようにする働きがあるとも言える。

数値モデルの高度化とともにデータ同化技術も高度化されてきた。1950年前後のデータ同化研究の初期には、関数当てはめ法 (Panofsky 1949; Gilchrist and Cressman 1954) などの手法があった。これらの手法は、観測にフィットするような関数を探すもので、予報を観測で修正するというものではなかった。そのため、関数当てはめ法は厳密にはデータ同化とは言わず、客観解析と呼ばれる。

そのような中、モデルの予報を第一推定値とし、その第一推定値と観測との重み付け平均をとり、予報を観測で修正し解析値を得る最適内挿 (OI: Optimum interpolation) 法が登場した (Eliassen 1954; Gandin 1963)。OI法では、観測の重みは、格子点から距離、観測値の信頼性、数値モデルの統計的誤差などから、あらかじめ最適に求められている。OI法の登場によって、予報を観測で修正するデータ同化が実現した。またこのようなデータ同化は、同化された観測が数値モデルによって将来へ伝わるため、4次元

データ同化とも呼ばれる。しかし、OI法はモデル変数と線形関係にある観測しか取り込めないという欠点があった。そこで、様々な観測を取り込める3次元変分法 (3D-Var: 3-dimensional Variational method) が1991年6月にアメリカ気象局のデータ同化システムに採用された (Parrish and Derber 1992)。3D-Varで同化できる観測は、解析時刻もしくは解析時刻近辺の観測であり、基本的には観測データの種類の制限がない。しかし、3D-Varでは、すべての観測を同一の解析時刻の観測として扱う。

現在では、3D-Varに代わり、4次元変分法 (4D-Var: 4-dimensional Variational method; e.g., H. Liu and X. Zou 2001, and Pierre and Jean-Noël 2001) が主流となりつつある。4D-Varは、拘束条件に数値モデルを組み込むことで、様々な観測を適切な時刻で同化できるようになった。3D-Varでは、第一推定値の信頼性を表す背景誤差共分散は統計的推定値であり、4D-Varでも同様のものが使われている。しかし、4D-Varは拘束条件にモデルが組み込まれているので、統計的な背景誤差共分散は流れに依存する背景誤差共分散へ変形され、流れに依存した情報を扱えるようになっており、高度なデータ同化手法と呼ばれている。しかし、4D-Varは数値モデルのアジョイントを計算する必要があり、数値モデルが更新されるたびにアジョイントモデルを作り直さなければならない4D-Varは非常に維持、開発コストのかかるものである。

もう1つの高度なデータ同化手法として、カルマンフィルタ (KF: Kalman filter; Kalman 1960) がある。KFは、誤差がガウス分布で、誤差の時間発展が線形であるときに最適な推定解を求める。Jazwinski (1970) はKFを非線形系にも適応できるように拡張カルマンフィルタ (EKF: Extended Kalman filter) に拡張した。しかし、数値モデルの自由度は膨大であるため、そのままではEKFを数値モデルには適応できない。そこで、Evensen (1994) は、EKFの予報誤差共分散行列 (背景誤差共分散行列) をアンサンブル予報を用いて近似するアンサンブルカルマンフィルタ (Ensemble Kalman filter: EnKF) を提唱した。EnKFを利用することで、アンサンブル予報から日々変化する流れに依存した予報誤差を推定し、データ同化に役立てることができる。4D-Varと異なり、アジョイントモデルは必要なく、維持、開発コストは小さい。さらに、EnKFが作るアンサンブル摂動は、解析誤差を適切に反映したものであり、互いに直交した摂動を作り出すことができる。プラスマイナスペアの摂動を作成する従来の初期値作成法では、線形独立なアンサンブルメンバーがアンサンブルサイズの半分であるが、EnKFはすべてのアンサンブルメンバーが互いに直交しているため、EnKFは初期摂動作成

法としても有用である．また，アンサンブル予報とデータ同化を同じシステムで実現できるので，現業数値予報の運用効率がよい．

EnKF は，次の初期時刻のアンサンブル予報のための初期摂動を作成するアンサンブルアップデートの方法によって大きく 2 つに分けられる．1 つは初期の EnKF でよく用いられていた手法で，観測にも摂動を加えてアンサンブルメンバーを作成することから PO 法 (Perturbed Observation method) と呼ばれている．PO 法は，Evensen (1994) や Houtekamer and Mitchell (1998; 2001) など用いられており，カナダの現業システムで採用されている．もう 1 つは，EKF の解析誤差共分散行列の平方根を直接計算することにより，アンサンブルアップデートを行うもので平方根フィルタ (Square Root Filter: SRF) と呼ばれる．SRF には，Whitaker and Hamill (2002) のアンサンブル平方根フィルタ (Ensemble Square Root Filter: EnSRF)，Anderson (2001) のアンサンブル調節カルマンフィルタ (Ensemble Adjustment Kalman Filter: EAKF)，Bishop et al. (2001) のアンサンブル変換カルマンフィルタ (Ensemble Transform Kalman Filter: ETKF)，Ott et al. (2002) の局所アンサンブルカルマンフィルタ (Local Ensemble Kalman Filter; LEKF) が存在する．そして Hunt (2005)，Hunt et al. (2007) では，局所化を EnKF のアルゴリズムの中に取り入れることで並列計算効率の高い LEKF に ETKF のアプローチを採用した局所変換アンサンブルカルマンフィルタ (Local Ensemble Transform Kalman Filter: LETKF) を提唱した．LETKF は，非常に並列計算効率が高いのが特徴である．Miyoshi and Yamane (2007) では，AFES TL159/L48 に LETKF を適応し，比較的高解像度のモデルで LETKF が適切に働くことを示した．また，アンサンブルメンバー数を 1000 まで増やしたが，アンサンブルメンバー数は 40 程度でも LETKF は十分よく働くことを示した．さらに LETKF の並列化効率はアンサンブル予報部分を含めなくとも 99.99 % に達すると示されている．Miyoshi et al. (2007a) では，LETKF を非定時の観測も適切に扱えるように 4 次元化し (4D-LETKF; Hunt et al. 2004)，実際の観測を使っておよそ 1 年半にわたる実験的再解析 ALERA (AFES-LETKF Re-Analysis) を作成し，AFES-LETKF が長期にわたって安定して動作することを示した．Miyoshi et al. (2007b) では，格子点を基準に構成される LEKTF の local patch をなくし，物理的な距離による局所化を取り入れることで，観測の少ない場所で local patch 状のスプレッドの不連続が現れるのを解消し，さらに計算効率性を高めた．Miyoshi and Sato (2007) では，GSM-LETKF で衛星の放射輝度観測データの直接同化に成功した．Szunyogh et



al. (2008), Whitaker et al. (2008) では, NCEP 全球モデル T62/L28 に LETKF を適応し, NCEP 現業解析値との比較を行っている. Baek et al. (2006) では, Lorenz-96 model (e.g. Lorenz and Emanuel 1998) に LEKF を適応して, モデルバイアスの補正を試みている. Miyoshi and Kalnay (2005) は, EnKF のチューニングパラメータの 1 つである共分散膨張を KF を使って動的に推定する手法を提案した. しかし, 真の観測誤差がわかっているパーフェクトモデル実験では共分散膨張の動的推定はうまく機能するものの, 真の観測誤差のわからない現実大気の観測を同化する場合には, うまく動作しない (Miyoshi and Yamane 2007). そこで, Li et al. (2007), Kalnay et al. (2007) は, Miyoshi and Kalnay (2005) の動的共分散膨張に加え, 観測誤差も KF で動的に推定する方法を提案しており, 真の観測誤差より大きく外れた観測誤差を与えても, 解析サイクルを繰り返すことで真の観測誤差に近づくことが示された. EnKF は, 領域モデルにも適応されている. Zhang et al. (2004) では, メソモデルに EnKF を適応し, Miyoshi and Aranami (2006) では, 気象庁非静力学モデル NHM (Saito et al. 2006) に LETKF を適応し (NHM-LETKF), パーフェクトモデル実験で降水量を同化することに成功したが, 必ずしも降水量の同化が正のインパクトを与えるわけではないことを示した.

高度なデータ同化手法として, 4D-Var と EnKF を挙げたが, どちらが優れているかの議論は今なお継続中である. Kalnay et al. (2007) では, 4D-Var と EnKF ではどちらが優れているか議論しているが, 現段階ではどちらが優れているとは言えないとの見解を示している. 誤差の時間発展が線形でモデルが完全な場合には, 十分長くタイムウィンドウをとった 4D-Var と KF は同等の解が得られる (露木 1997; Bouttier and Courtier 1999). EnKF の場合は, 無限大のアンサンブルメンバーを用意することで KF と同値になる. 従って, 4D-Var はタイムウィンドウの長さ, EnKF はアンサンブルサイズが, パフォーマンスに重要な要素となってくる. さらに大気モデルの場合は, 大気非線形性およびモデル誤差が問題となってくる. 大気モデルは非線形性であるため, 線形の仮定が崩れるほど長いタイムウィンドウをとることはできず, 計算機資源には限りがあるためアンサンブルサイズには制限がかかる. Firtig et al. (2007) では, Lorenz 96 モデルを用いて 4D-Var と EnKF を比較している. その結果, 十分長いタイムウィンドウをとった 4D-Var と, 十分なアンサンブルサイズを用意した EnKF は, 解析誤差は両者ともに同程度であり, 両者の初期値からの予報精度も同程度であること

を示した。

EnKF は EKF の予報誤差共分散行列をアンサンブル予報で近似したものであるが、EKF と EnKF を直接比較した研究は少ない。Zang and Malanotte-Rizzoli (2003) では、海洋モデルに reduce rank EKF と EnKF を適応し、モデルの非線形性が強い場合には EnKF の方がパフォーマンスがよいとの結果が得られている。しかしながら、大気モデルの自由度は非常に大いために、full rank の EKF は直接計算できない。そのため、full rank の EKF と EnKF の比較はほとんど行われていない。近藤 (2006) では、順圧 S-model (Tanaka and Nohara 2003) に full rank EKF と EnKF を適応し、両者を比較しているが、アンサンブルサイズが小さいため、サンプリングエラーが混入していると考えられ、十分な結果は得られていない。Kondo and Tanaka (2007) では、近藤 (2006) のアンサンブルサイズをモデルの次元以上に増やし、full rank EKF と EnKF の比較を行っており、EnKF の方が性能の良いことを示した。

本論文では、第 2 章で KF, EKF, EnKF の導出を行った後、第 3 章では、筑波大学で開発された順圧 S-model による完全モデル実験 (Kondo and Tanaka (2007) に基づく)、および不完全モデル実験を行って、S-modelEKF および S-modelEnKF の比較を行った。第 4 章では、NICAM に LETKF を適応し、NICAM-LEKTF を構築した。そして NICAM-LEKTF の基本的な性能を調査した。第 5 章に、全体の考察を記した。

## 1.2 目的

本研究では、まずはじめに筑波大学で開発された順圧 S-model (Tanaka and Nohara 2003) に、EKF および EnKF を適応し、EKF をアンサンブル予報で近似した EnFK が EKF をどこまで近似できているか、またその性能はどれほどなのかを完全モデル実験および不完全モデル実験を行うことで検証する。

順圧 S-model は、従属変数  $(u, v, \phi)$  を 3 次元スペクトル展開した展開係数  $w_i$  で表され、順圧成分 (鉛直モード  $m = 0$ ) のみを考慮に入れた順圧プリミティブスペクトルモデルである。さらに重力波は考慮せずロスビー波を扱うモデルであるため、東西波数は 20 で切断され、南北モード数は 10 となっている。そのため、S-model の自由度は一般的な GCM と比較して大幅に少なくなっており、波数空間では、EKF の計算に必要な予報誤差共分散行列、解析誤差共分散行列をそのまま計算するとが可能なため、full-rank の EKF が計算可能となっている。近藤 (2007) では、EKF と EnKF の比較を行っているが、アンサンブルメンバー数が不足しており、十分な結果が得られているとは言えなかった。そのため、本研究では順圧 S-model の自由度を大幅に上回るアンサンブルメンバーを用意し、EnKF の性能を調査した。さらに、波数空間ではなく実空間での観測データを LETKF を用いて同化することにより、局所化の影響を調査する。

また、NCEP/NCAR 再解析を観測データと見立てることで、モデル誤差を考慮した実験を行い、パーフェクトモデル実験と同様に EKF と EnKF の比較を行い、さらにパーフェクトモデル実験の結果とも比較する。

一方で、全球非静力学モデル NICAM にはデータ同化システムが存在しないので、NICAM-LETKF を構築することで、NICAM に最適な初期値を作成する基盤を整える。具体的には、モデル誤差を仮定しないパーフェクトモデル実験を行い、観測値を同化することで、NICAM-LETKF の解析値が真値に近づくかどうかを確認する。さらに、観測要素を変え、観測されない要素があっても、その要素と相関のある観測を同化することで解析場が改善されるという EnKF の特徴を調査する。

## 第2章 カルマンフィルタとアンサンブルカルマンフィルタ

### 2.1 カルマンフィルタ (KF) および拡張カルマンフィルタ (EKF)

KF は, Kalman (1960) で提唱されたアルゴリズムであり, 誤差の時間発展が線形成長であり, 誤差の確率分布が正規分布であるという仮定の下で, 推定誤差が最も小さくなるような最適な解を与える. EKF は, Jazwinski (1970) によって KF を非線形モデルに拡張したものである. そこで, 本節では EKF の導出およびを行う.

KF は, 状態および誤差の時間発展からなる予報のプロセスと, 予報誤差および観測誤差からカルマンゲインを求め, 最適な状態および誤差を計算する解析のプロセスからなる.

まず, 状態変数  $\mathbf{x}_{t-1}^a$  に線形予報モデル  $M$  を作用させることで, 1 時刻前の解析値 (初期値) から現在の予報値を求める.

$$\mathbf{x}_t^f = M\mathbf{x}_{t-1}^a \quad (2.1)$$

ここで, 上付きの添え字の  $a, f$  は, それぞれ解析 (analysis), 予報 (forecast) を表し, 下付きの添え字  $t$  は時刻を表す. 一方, 真の状態の時間発展は,

$$\mathbf{x}_t^t = M^t\mathbf{x}_{t-1}^t \quad (2.2)$$

と表される. 上付きの添え字の  $t$  は, 真の状態 (truth) を表す. しかし, 実際にはモデル  $M$  は完全ではないため,

$$\mathbf{x}_t^t = M\mathbf{x}_{t-1}^t - \mathbf{q} \quad (2.3)$$

のように, モデル誤差  $\mathbf{q}$  を含み, 簡単のためモデルはバイアスを持たないとする  $\langle \mathbf{q} \rangle = 0$  となる. ここで,  $\langle \quad \rangle$  は統計的期待値を表す. 解析誤差  $\delta\mathbf{x}^a$ , および予報誤差

$\delta \mathbf{x}^f$  は,

$$\delta \mathbf{x}^{a,f} = \mathbf{x}^{a,f} - \mathbf{x}^t \quad (2.4)$$

と定義できる．これらを用いると，予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}_t^f$  は，

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t^f &= \left\langle \delta \mathbf{x}_t^f (\delta \mathbf{x}_t^f)^\top \right\rangle \\ &= \left\langle (\mathbf{x}_t^f - \mathbf{x}_t^t) (\mathbf{x}_t^f - \mathbf{x}_t^t)^\top \right\rangle \\ &= \left\langle (\mathbf{M} \mathbf{x}_{t-1}^a - (\mathbf{M} \mathbf{x}_{t-1}^t - \mathbf{q})) (\mathbf{M} \mathbf{x}_{t-1}^a - (\mathbf{M} \mathbf{x}_{t-1}^t - \mathbf{q}))^\top \right\rangle \\ &= \left\langle (\mathbf{M} (\mathbf{x}_{t-1}^a - \mathbf{x}_{t-1}^t) + \mathbf{q}) (\mathbf{M} (\mathbf{x}_{t-1}^a - \mathbf{x}_{t-1}^t) + \mathbf{q})^\top \right\rangle \\ &= \left\langle (\mathbf{M} \delta \mathbf{x}_{t-1}^a + \mathbf{q}) (\mathbf{M} \delta \mathbf{x}_{t-1}^a + \mathbf{q})^\top \right\rangle \\ &= \left\langle (\mathbf{M} \delta \mathbf{x}_{t-1}^a) (\mathbf{M} \delta \mathbf{x}_{t-1}^a)^\top + (\mathbf{M} \delta \mathbf{x}_{t-1}^a) \mathbf{q}^\top + \mathbf{q} (\mathbf{M} \delta \mathbf{x}_{t-1}^a)^\top + \mathbf{q} \mathbf{q}^\top \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{M} \delta \mathbf{x}_{t-1}^a (\delta \mathbf{x}_{t-1}^a)^\top \mathbf{M}^\top + \mathbf{q} \mathbf{q}^\top \right\rangle \\ &= \mathbf{M} \mathbf{P}_{t-1}^a \mathbf{M}^\top + \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (2.5)$$

と表される．ここで， $\mathbf{P}_{t-1}^a = \left\langle \delta \mathbf{x}_{t-1}^a (\delta \mathbf{x}_{t-1}^a)^\top \right\rangle$  は，1 時刻前の解析誤差共分散行列である．また，解析誤差  $\delta \mathbf{x}_{t-1}^a$  とモデル誤差  $\mathbf{q}$  には相関はないものと仮定したため， $(\mathbf{M} \delta \mathbf{x}_{t-1}^a) \mathbf{q}^\top$  のようなクロスタームは 0 とし， $\mathbf{Q}$  をモデル誤差共分散行列とした．また， $\mathbf{M}^\top$  には線形モデル  $\mathbf{M}$  の代わりにアジョイントモデルをもちいる．以上の状態変数の時間発展式 (2.1)，誤差の時間発展式 (2.5) をもって予報のプロセスとする．

次に解析のプロセスである．誤差の時間発展式 (2.1) より，予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}_t^f$  は，日々変化する  $\delta \mathbf{x}_t^f$  から求められることから，流れに応じた情報を得ることができる．予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}_t^f$  はその時刻での予報誤差の広がりを表しており，観測誤差共分散行列  $\mathbf{R}$  は，観測誤差の広がりを表している． $\mathbf{P}_t^f$ ,  $\mathbf{R}$  で表される誤差の広がりとは，予報および観測それぞれの信頼度のことである．解析のプロセスは，予報  $\mathbf{x}^f$  を観測  $\mathbf{y}^o$  でそれぞれの信頼度に応じた重み付け平均をとり，最適な推定値  $\mathbf{x}^a$  を求めるプロセスである．上付き添え字の  $o$  は観測 (observation) を表す．最適な推定値である解析  $\mathbf{x}^a$  は，予報  $\mathbf{x}^f$  と観測  $\mathbf{y}^o$  の加重平均なので，予報に対する観測の重みをカルマンゲイン行列  $\mathbf{K}_t$  とすると，

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t^a &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}) \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t \mathbf{y}^o \\ &= \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}^o - \mathbf{H} \mathbf{x}_t^f) \end{aligned} \quad (2.6)$$

と表される．ここで  $\mathbf{H}$  はモデル空間から観測空間への変換演算子で，観測演算子と呼ぶ．観測誤差  $\delta y_t$  は，

$$\delta y_t = y_t^o - \mathbf{H}x_t^t \quad (2.7)$$

と表される．一方，これを用いると  $y_t^o - \mathbf{H}x_t^f$  は，

$$\begin{aligned} y_t^o - \mathbf{H}x_t^f &= y_t^o - \mathbf{H}x_t^t + \mathbf{H}x_t^t - \mathbf{H}x_t^f \\ &= \delta y_t^o - \mathbf{H}\delta x_t^f \end{aligned} \quad (2.8)$$

と求まる．解析誤差  $\delta x_t^a$  は，式 (2.6) より，

$$\begin{aligned} \delta x_t^a &= x_t^a - x_t^t \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})x_t^f + \mathbf{K}_ty^o - x_t^t \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\delta x_t^f + \mathbf{K}_t\delta y^o \end{aligned} \quad (2.9)$$

これを用いると，解析誤差共分散行列  $\mathbf{P}_t^a$  は，

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t^a &= \left\langle \delta x_t^a (\delta x_t^a)^\top \right\rangle \\ &= \left\langle \left( (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\delta x_t^f + \mathbf{K}_t\delta y^o \right) \left( (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\delta x_t^f + \mathbf{K}_t\delta y^o \right)^\top \right\rangle \\ &= \left\langle (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\delta x_t^f (\delta x_t^f) (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})^\top \right\rangle + \left\langle (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\delta x_t^f (\mathbf{K}_t\delta y^o)^\top \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \mathbf{K}_t\delta y^o (\delta x_t^f) (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})^\top \right\rangle + \left\langle \mathbf{K}_t\delta y^o (\mathbf{K}_t\delta y^o)^\top \right\rangle \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\mathbf{P}_t^f (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})^\top + \mathbf{K}_t\mathbf{R}\mathbf{K}_t^\top \end{aligned} \quad (2.10)$$

と表される．ここで，予報誤差と観測誤差は相関がなく直交していると考えるので，クロスターム  $\delta x_t^f (\mathbf{K}_t\delta y^o)^\top$  は 0 とした．最適な推定値  $x_t^a$  の推定誤差を最小にするようなカルマンゲイン  $\mathbf{K}_t$  は，解析誤差共分散行列  $\mathbf{P}_t^a$  の対角成分のトレース，つまり解析誤差分散を最も小さくするようにして得られる．これは，最小分散推定に基づいている．

ここでは簡略化のため，背景場の状態変数  $x^b$  に同地点の観測  $x^o$  を同化する 1 次元の場合で考える．背景場の分散を  $(\sigma^b)^2$ ，観測の分散を  $(\sigma^o)^2$  とすると，それぞれの分散は真値  $x^t$  からの差の 2 乗で表される．

$$(\sigma^b)^2 = E [(x^b - x^t)^2] \quad (2.11)$$

$$(\sigma^o)^2 = E [(x^o - x^t)^2] \quad (2.12)$$

背景誤差と観測誤差に相関がないとすれば，

$$E[(x^b - x^t)(x^o - x^t)] = 0 \quad (2.13)$$

となる．解析値である不偏推定量  $x^a$  は，観測の重み  $w$  を用いて背景場と観測の加重平均で表されるので，

$$x^a = (1 - w)x^b + wx^o \quad (2.14)$$

となる．一方，推定誤差分散は，

$$(\sigma^a)^2 = (1 - w)^2(\sigma^f)^2 + w^2(\sigma^o)^2 \quad (2.15)$$

と表される．ここで， $(\sigma^a)^2$  を最小にするような重み  $w$  を求めには， $\frac{\partial(\sigma^a)^2}{\partial w} = 0$  を解けばよい．

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sigma^a)^2}{\partial w} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial w} [(1 - w)^2(\sigma^f)^2 + w^2(\sigma^o)^2] &= 0 \\ -2(1 - w)(\sigma^f)^2 + 2w(\sigma^o)^2 &= 0 \\ w((\sigma^f)^2 + (\sigma^o)^2) &= (\sigma^f)^2 \\ w &= \frac{(\sigma^f)^2}{(\sigma^f)^2 + (\sigma^o)^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

よって，最適な重みが求まる．

以上を空間 3 次元に拡張すると，推定誤差を最小にするようなカルマンゲイン  $\mathbf{K}$  が得られる．解析のプロセスでは時間発展を含まないことから，時間を表わす下の添え字  $t$  はすべて同じであるため，省略した．解析誤差の分散は，解析誤差共分散行列  $\mathbf{P}^a$  のトレース和 ( $\text{trace}\mathbf{P}^a$ ) である． $\text{trace}(\mathbf{P}^a)$  はカルマンゲイン  $\mathbf{K}$  の関数であるから， $\text{trace}(\mathbf{P}^a)$  を最小にするような  $\mathbf{K}$  は， $\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}}(\text{trace}\mathbf{P}^a) = 0$  を解けばよい．右辺を展開すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}}(\text{trace}(\mathbf{P}^a)) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} \left[ \text{trace} \left( (\mathbf{I} - \mathbf{KH}) \mathbf{P}^f (\mathbf{I} - \mathbf{KH})^\top + \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{K}^\top \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} \left[ \text{trace} (\mathbf{P}^f - \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{K}^\top - \mathbf{K} \mathbf{H} \mathbf{P}^f + \mathbf{K} \mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{K}^\top) + \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{K}^\top \right] \end{aligned}$$

ここで，予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}^f$  が対称行列であることを用いると，

$$\begin{aligned} \text{trace} (\mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{K}^\top) &= \text{trace} (\mathbf{K} \mathbf{H} \mathbf{P}^f)^\top \\ &= \text{trace} (\mathbf{K} \mathbf{H} \mathbf{P}^f) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}}(\text{trace}(\mathbf{P}^a)) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} [\text{trace}(\mathbf{P}^f) - 2\text{trace}(\mathbf{KHP}^f) \\ &\quad + \text{trace}(\mathbf{KHP}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{K}^\top) + \text{trace}(\mathbf{KRK}^\top)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

ここで，行列の公式

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}}(\text{trace}(\mathbf{ABA}^\top)) = \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^\top) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}}(\text{trace}(\mathbf{AB})) = \mathbf{B}^\top \quad (2.19)$$

を用いると (Gelb et al. 1974, 第 2.1-72, 2.1-73 式を参照) ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}}(\text{trace}(\mathbf{P}^a)) &= -2\mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top + 2\mathbf{KHP}^f \mathbf{H}^\top + 2\mathbf{KR} \\ &= -2(\mathbf{I} - \mathbf{KH}) \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top + 2\mathbf{KR} = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

となる．ここで，観測誤差共分散行列  $\mathbf{R}$  は対称行列である．これを  $\mathbf{K}$  について解くとカルマンゲイン行列  $\mathbf{K}$  が得られる．

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top (\mathbf{HP}^f \mathbf{H}^\top + \mathbf{R})^{-1} \quad (2.21)$$

これより， $\mathbf{H} = \mathbf{I}$  で 1 次元のとき，式 (2.21) は式 (2.16) に一致することがわかる．式 (2.21) を式 (2.10) に代入するすると (簡単のため  $\mathbf{HP}^f \mathbf{H}^\top + \mathbf{R} = \mathbf{A}$  と置く)，解析誤差共分散行列  $\mathbf{P}^a$  は，

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^a &= (\mathbf{I} - \mathbf{KH}) \mathbf{P}^f (\mathbf{I} - \mathbf{KH})^\top + \mathbf{KRK}^\top \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{H}) \mathbf{P}^f (\mathbf{I} - \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{H})^\top + \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{A}^{-1})^\top \\ &= \mathbf{P}^f - 2\mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{HP}^f + \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{HP}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{HP}^f + \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{RA}^{-1} \mathbf{HP}^f \\ &= \mathbf{P}^f - 2\mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{HP}^f + \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{HP}^f \mathbf{H}^\top + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{HP}^f \\ &= \mathbf{P}^f - 2\mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{HP}^f + \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{AA}^{-1} \mathbf{HP}^f \\ &= \mathbf{P}^f - \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top (\mathbf{HP}^f \mathbf{H}^\top + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{HP}^f \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{KH}) \mathbf{P}^f \end{aligned} \quad (2.22)$$

として与えられる．この式 (2.22) は，予報誤差共分散  $\mathbf{P}^f$  にカルマンゲイン  $\mathbf{K}$  を作用させることで，解析誤差共分散  $\mathbf{P}^a$  の各成分が小さくなることを表している．



ここまでは、誤差の時間発展が線形モデル  $M$  である場合についてであるが、実際の気象モデルは非線形であり、このままでは KF は適応できない。そこで、Jazwinski (1970) では、非線形モデルを線形化することで KF を近似した拡張カルマンフィルタ (Extended Kalman Filter: EKF) を導入した。非線形モデル  $M$  を  $x_0$  のまわりでの線形化すると、接線形モデル  $M$  は、

$$M = \left. \frac{\partial M}{\partial x} \right|_{x_t} \quad (2.23)$$

と表される。KF の状態変数の時間発展式 (2.1) の線形モデル  $M$  を非線形モデル  $M$  で置き換え、誤差の時間発展式 (2.5) の線形モデル  $M$  には、式 (2.23) を用いる。

線形理論である KF を非線形系に適応することで、共分散行列を過小評価してしまう。詳しくは後述するが、共分散行列を

$$P \leftarrow (1 + \delta)P \quad (2.24)$$

のように 1 よりわずかに大きい数をかけて膨張させてやる。これによって共分散の過小評価を防ぐ。

以上により、EKF を構成する式が揃ったので、以下にそれをまとめる。まずは予報のプロセスである。1 時刻前の状態変数  $x_{t-1}^a$  から非線形モデルを用いて、現在の状態変数  $x_t^f$  を予報するプロセス

$$x_t^f = Mx_{t-1}^a \quad (2.25)$$

同様に 1 時刻前からの誤差の時間発展のプロセス

$$P^f = MP_{t-1}^a M^\top + Q \quad (2.5)$$

次に解析のプロセスである。解析誤差を最も小さくするような予報に対する観測の重みであるカルマンゲイン行列  $K$  は

$$K_t = P_t^f H^\top (HP_t^f H^\top + R)^{-1} \quad (2.21)$$

$K$  を用いて、予報  $P^f$  を観測  $y^o$  で修正するプロセス

$$x_t^a = x_t^f + K_t (y^o - Hx_t^f) \quad (2.6)$$

Kを用いることで、予報誤差共分散  $P^f$  を小さくし、解析誤差  $P^a$  を求めるプロセス

$$P_t^a = (I - K_t H) P_t^f \quad (2.22)$$

となる。

KFが他のデータ同化手法と異なるのは、日々変化する流れに応じた誤差共分散を陽に計算するところである。最適内挿法、3D-Varなどでは、背景誤差共分散には統計的な平均値を使い、さらに計算効率を上げるため、背景誤差共分散を対角化し、分散のみを残す。一方のKFは、この背景誤差共分散行列を日々変化する予報誤差共分散行列で置き換え、対角化もしないため、誤差共分散行列の非対角成分まで考慮できる。この共分散は、異なる格子点間の相関および異なる変数間の相関であるため、少ない観測から多くの情報を引き出せる。たとえば、南半球では水蒸気の観測が少ないが、風や温度など水蒸気と相関のある観測を同化することで、水蒸気場を改善することが可能である。このKFの特徴は、後述のEnFKでも同じである。

## 2.2 アンサンブルカルマンフィルタ (EnKF)

本節では，前節に引き続き，EKF からアンサンブルカルマンフィルタ (Ensemble Kalman Filter: EnKE) が導き出される過程を述べる．

拡張カルマンフィルタ (EKF) を一般的な大気大循環モデルに実装する場合，大気大循環モデルの自由度が問題となってくる．大気大循環モデルの次元は  $N = O(10^6)$  のオーダーであり， $N$  を一辺とする正方行列である予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}^f$  および解析誤差共分散行列  $\mathbf{P}^a$  をコンピュータ上のメモリーに保存することは事実上不可能である．予報誤差共分散行列を格納するだけで，数 10 ~ 数 100GB のメモリーを必要とし，さらに同じサイズの行列をいくつも格納しなければならない．さらに，カルマンゲインを計算する式 (2.21) では，巨大な行列の逆行列を計算しなければならず，これは到底不可能である．そこで，EKF の予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}^f$  をアンサンブルを用いて近似した EnKF が Evensen (1994) によって提唱された．本節では，EKF の数式および行列を表す場合 ' を付けて，EnKF のものと区別した．

まず，状態変数の集合であるアンサンブルは，

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}] \quad (2.26)$$

と表せる． $m$  はアンサンブルサイズであり，一般的に大気の次元より大幅に小さい ( $m \ll N$ ) ．1 時刻前のそれぞれの初期値  $\mathbf{X}_{t-1}^a$  からの予報は，

$$\mathbf{X}_t^f = M(\mathbf{X}_{t-1}^a) \quad (2.27)$$

と表すことができる．予報誤差  $\mathbf{E}^f$  をアンサンブル平均  $\bar{\mathbf{X}}^f$  からのずれで表すと，

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^f &= [\mathbf{x}_t^{f(1)} - \bar{\mathbf{x}}_t^f, \mathbf{x}_t^{f(2)} - \bar{\mathbf{x}}_t^f, \dots, \mathbf{x}_t^{f(m)} - \bar{\mathbf{x}}_t^f] \\ &= \mathbf{X}_t^f - \bar{\mathbf{X}}_t^f \end{aligned} \quad (2.28)$$

以上を用いると，EnKF の予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}_t^f$  は，

$$\mathbf{P}_t^f = \frac{\mathbf{E}_t^f (\mathbf{E}_t^f)^\top}{m - 1} \quad (2.29)$$

と表すことができる．一方で，EKF の予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}_t^f$  は実対称行列なので，

大気モデルの次元  $N$  を一辺とする実行列の平方根  $\mathbf{E}_t^{\prime f}$  を持つことから，式 (2.5) より，

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t^{\prime f} &= \left\langle \delta \mathbf{x}_t^f \left( \delta \mathbf{x}_t^f \right)^\top \right\rangle \\ &= \frac{\mathbf{E}_t^{\prime f} \left( \mathbf{E}_t^{\prime f} \right)^\top}{N-1} \end{aligned} \quad (2.30)$$

と分解できる． $\mathbf{E}_t^{\prime f}$  は， $\mathbf{U}\mathbf{U}^\top = \mathbf{I}$  を満たすだけの自由度があり， $\mathbf{E}_t^{\prime f}$  の選び方は一意ではない． $\mathbf{E}_t^{\prime f}\mathbf{U}$  もこの関係を満たすため， $\mathbf{E}_t^{\prime f}$  は平方根といえる．ここで，式 (2.29) および式 (2.30) を比較すると，アンサンブルサイズ  $m$  は，モデルの次元  $N$  だけあれば十分であることがわかる．しかし，EKF の  $\mathbf{P}^{\prime f}$  は統計的期待値であるので，アンサンブルを用いて EKF の  $\mathbf{P}^{\prime f}$  を厳密に表現するためには，無限大のアンサンブルサイズが必要である．

アンサンブルサイズ  $m$  は，モデルの次元  $N$  だけあれば十分であることがわかったが，現実問題として，そのようなアンサンブル予報は不可能である．しかし，大気力学系の実質的な自由度は小さい (Dee 1995; Fukumori and Malanotte-Rizzo 1995; Cane et al. 1996)．このことは，EKF の予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}^{\prime f}$  を固有値分解すると，その固有値の多くがおおよそ 0 になることを示している．そのような固有値を無視すると，EKF の予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}^{\prime f}$  は，

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{\prime f} &\simeq \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^\top \\ &= \frac{\mathbf{E}_t^f \left( \mathbf{E}_t^f \right)^\top}{m-1} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$m$  メンバーのアンサンブル予報誤差からなるベクトルを用いて表すことができる．ここで， $\mathbf{\Lambda}$  は，対角成分に固有値を持つ  $m \times m$  の固有値行列， $\mathbf{V}$  は  $m \times N$  の固有ベクトルである．これらの結果から，EKF の方程式をアンサンブル予報誤差  $\mathbf{E}_t^f$  を用いて書き換えることを考える．誤差の時間発展式 (2.5) は，モデル誤差  $\mathbf{Q} = 0$  とすると，

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t^{\prime f} &= \mathbf{M}\mathbf{P}_{t-1}^{\prime a}\mathbf{M}^\top \\ &\simeq \frac{1}{m-1}\mathbf{M}\mathbf{E}_{t-1}^a \left( \mathbf{M}\mathbf{E}_{t-1}^a \right)^\top \end{aligned} \quad (2.32)$$

ここで、 $\mathbf{ME}_{t-1}^a$  は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{ME}_{t-1}^a &= \left[ \mathbf{M}\delta\mathbf{x}_{t-1}^{a(1)}, \mathbf{M}\delta\mathbf{x}_{t-1}^{a(2)}, \dots, \mathbf{M}\delta\mathbf{x}_{t-1}^{a(m)} \right] \\
&\simeq \left[ M(\bar{\mathbf{x}}_{t-1}^a + \delta\mathbf{x}_{t-1}^{a(1)}) - M(\bar{\mathbf{x}}_{t-1}^a), M(\bar{\mathbf{x}}_{t-1}^a + \delta\mathbf{x}_{t-1}^{a(2)}) - M(\bar{\mathbf{x}}_{t-1}^a) \right. \\
&\quad \left. \dots, M(\bar{\mathbf{x}}_{t-1}^a + \delta\mathbf{x}_{t-1}^{a(m)}) - M(\bar{\mathbf{x}}_{t-1}^a), \right] \\
&= \left[ M(\mathbf{x}_{t-1}^{a(1)}) - \bar{\mathbf{x}}_t^f, M(\mathbf{x}_{t-1}^{a(2)}) - \bar{\mathbf{x}}_t^f, \dots, M(\mathbf{x}_{t-1}^{a(m)}) - \bar{\mathbf{x}}_t^f \right] \quad (2.33)
\end{aligned}$$

となり、この式は  $m$  メンバーのアンサンブル予報と見なすことができ、非線形モデルを線形化することなく、非線形のまま使用できるという利点がある。以上より、EKFの予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}_t^f$  は、アンサンブルメンバーを用いることで、

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_t^f &= \mathbf{M}\mathbf{P}_{t-1}^a\mathbf{M}^\top \\
&\simeq \frac{1}{m-1}\mathbf{ME}_{t-1}^a(\mathbf{ME}_{t-1}^a)^\top \\
&= \frac{\mathbf{E}_t^f(\mathbf{E}_t^f)^\top}{m-1} = \mathbf{P}_t^f \quad (2.34)
\end{aligned}$$

のように近似できる。EnKFは大気の自由度が大幅に小さくなっていることを利用して、効率よくアンサンブルメンバーを選ぶことで、大気の次元  $N$  より大幅に小さいアンサンブルサイズ  $m$  のアンサンブルメンバーで、誤差共分散行列を近似してやることができる。

次に、カルマンゲインについて考える。一般的な大気大循環モデルでは、誤差共分散行列が大きすぎるためカルマンゲインを計算することが不可能である。そこで、予報誤差共分散行列をアンサンブル予報で近似したように、カルマンゲインもアンサンブル予報を用いて近似する必要がある。まず、予報誤差共分散行列と観測誤差共分散

行列からカルマンゲインを求める式 (2.21) に，式 (2.34) を代入すると，

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \mathbf{P}'^f \mathbf{H}^\top \left( \mathbf{H} \mathbf{P}'^f \mathbf{H}^\top + \mathbf{R} \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{m-1} \mathbf{E}_t^f \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \left[ \frac{1}{m-1} \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top + (m-1) \mathbf{R} \right]^{-1} \\
&= \mathbf{E}_t^f \left[ \mathbf{I} + \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \frac{1}{m-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right]^{-1} \left[ \mathbf{I} + \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \frac{1}{m-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right] \\
&\quad \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \left[ \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top + (m-1) \mathbf{R} \right]^{-1} \\
&= \mathbf{E}_t^f \left[ \mathbf{I} + \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \frac{1}{m-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right]^{-1} \left[ \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top + \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \frac{1}{m-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \right] \\
&\quad \left[ \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top + (m-1) \mathbf{R} \right]^{-1} \\
&= \mathbf{E}_t^f \left[ \mathbf{I} + \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \frac{1}{m-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right]^{-1} \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \\
&\quad \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{m-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \right] \left[ \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top + (m-1) \mathbf{R} \right]^{-1} \\
&= \mathbf{E}_t^f \left[ \mathbf{I} + \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \frac{1}{m-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right]^{-1} \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \\
&\quad \frac{1}{m-1} \mathbf{R}^{-1} \left[ (m-1) \mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \right] \left[ (m-1) \mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \right]^{-1} \\
&= \mathbf{E}_t^f \left[ \mathbf{I} + \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \frac{1}{m-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right]^{-1} \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \frac{1}{m-1} \mathbf{R}^{-1} \\
&= \mathbf{E}_t^f \left[ (m-1) \mathbf{I} + \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right]^{-1} \left( \mathbf{H} \mathbf{E}_t^f \right)^\top \mathbf{R}^{-1}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

のように変形できる．式 (2.35) では， $N \times N$  行列を直接コンピュータのメモリ上に保存する必要はなく， $N \times m$  行列  $\mathbf{E}^f$  と  $r \times m$  行列  $\mathbf{H} \mathbf{E}^f$  ( $r$  は観測の数で， $\mathbf{H} \mathbf{E}^f$  は各アンサンプルメンバーを観測データに相当するものに変換したものである) を保存するだけでよい．ただ，すべてのアンサンプルメンバーを保存できるだけのメモリは必要である．また，観測の数が多い場合には式 (2.35) の逆行列計算は困難であるため，式 (2.36) にまで変形する．このように式変形することで， $[\ ]$  の中は  $m \times m$  行列となる．そのため，アンサンプルサイズを 1 辺とした正方行列の逆行列計算ですむため，容易に計算できる．ここで，異なる観測の間には互いに独立しており相関はないと仮定するので，観測誤差共分散行列  $\mathbf{R}$  は対角行列になり，その逆行列計算は容易である．

さらに，予報誤差共分散行列をその平方根  $\mathbf{E}^f$  で近似することによるもう 1 つの利点

は、観測演算子  $\mathbf{H}$  を非線形演算子  $H$  のまま使用できるということである。

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}\mathbf{E}_t^f &= \left[ \mathbf{H}\delta\mathbf{x}_t^{f(1)}, \mathbf{H}\delta\mathbf{x}_t^{f(2)}, \dots, \mathbf{H}\delta\mathbf{x}_t^{f(m)} \right] \\
&\simeq \left[ H(\bar{\mathbf{x}}_t^f + \delta\mathbf{x}_t^{f(1)}) - H(\bar{\mathbf{x}}_t^f), H(\bar{\mathbf{x}}_t^f + \delta\mathbf{x}_t^{f(2)}) - H(\bar{\mathbf{x}}_t^f) \right. \\
&\quad \left. \dots, H(\bar{\mathbf{x}}_t^f + \delta\mathbf{x}_t^{f(m)}) - H(\bar{\mathbf{x}}_t^f), \right] \\
&= \left[ H(\mathbf{x}_t^{f(1)}) - H(\bar{\mathbf{x}}_t^f), H(\mathbf{x}_t^{f(2)}) - H(\bar{\mathbf{x}}_t^f), \right. \\
&\quad \left. \dots, H(\mathbf{x}_t^{f(m)}) - H(\bar{\mathbf{x}}_t^f) \right] \tag{2.37}
\end{aligned}$$

最後に、解析誤差共分散行列  $\mathbf{P}^a$  を計算する。予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}^f$  がアンサンブル予報誤差  $\mathbf{E}^f$  を用いて表現されたように、解析誤差共分散行列  $\mathbf{P}^a$  は解析アンサンブル摂動  $\mathbf{E}^a$  を用いて表現されるため、直接  $\mathbf{P}^a$  を計算することはない。解析アンサンブル摂動  $\mathbf{E}^a$  は、解析誤差共分散行列  $\mathbf{P}^a$  の平方根であるため、解析誤差を反映した最適な摂動を作成することが可能である。この解析アンサンブル摂動  $\mathbf{E}^a$  を計算する過程をアンサンブル・アップデートという。アンサンブル・アップデートによって作成された摂動は、 $m-1$  の次元を持っている。BGM法のような初期摂動作成法では、プラス・マイナスのペアからなる摂動を用いてアンサンブル予報を行うので、 $m$  メンバーのアンサンブル摂動が張る空間は  $\frac{1}{2}m$  の次元しかない。計算機資源が限られているためアンサンブルメンバーを非常に限られた数しか用意できない中で、BGM法のようなプラス・マイナスペアの摂動は不利であり、EnKF は従来の初期摂動作成法より優れていると言える。

アンサンブル・アップデートには大きく2種類の方法が存在する。1つはEnKFの初期の研究で用いられていた手法で、摂動観測法 (Perturbed Observation method: PO法) といい、観測にも摂動を加え、アンサンブルメンバーを作成する。もう1つは平行根フィルタ (Square Root Filter: SRF) で、EKFの解析誤差共分散行列を求める式(2.22)を直接解くことで、解析誤差共分散行列  $\mathbf{P}^a$  の平方根を計算する。

PO法は、それぞれのアンサンブルメンバーに対して独立にデータ同化・予報のサイクルを適応する。PO法では、モデル変数  $\mathbf{X}$  以外に観測にも摂動を加えてアンサンブルメンバーを作成するので、

$$\mathbf{Y}^o = [\bar{\mathbf{y}}^o + \delta\mathbf{y}^o] \tag{2.38}$$

PO法の解説の中での  $\bar{\mathbf{y}}^o$  は、観測データそのものを表す。PO法では、それぞれのアン

サンプルメンバーについて独立に解析が行われるので，同化方程式は，

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^a &= \mathbf{X}^f + \mathbf{K} (\mathbf{Y}^o - \mathbf{H}\mathbf{X}^f) \\ \bar{\mathbf{X}}^a + \delta\mathbf{X}^a &= \bar{\mathbf{X}}^f + \delta\mathbf{X}^f + \mathbf{K} \left[ \bar{\mathbf{Y}}^o + \delta\mathbf{Y}^o - \mathbf{H} (\bar{\mathbf{X}}^f + \delta\mathbf{X}^f) \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

となる．よって，それぞれの摂動に対しても

$$\delta\mathbf{X}^a = \delta\mathbf{X}^f + \mathbf{K} (\delta\mathbf{Y}^o - \mathbf{H}\delta\mathbf{X}^f) \quad (2.40)$$

が成り立つ．ここで，観測に摂動がないとすると，

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{X}^a &= \delta\mathbf{X}^f - \mathbf{K}\mathbf{H}\delta\mathbf{X}^f \\ \mathbf{E}^a &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}] \mathbf{E}^f \end{aligned} \quad (2.41)$$

この式 (2.41) によると，同じ観測をどのメンバーに対しても独立に解析を行うことを表している．この式 (2.41) から，解析誤差共分散行列  $\mathbf{P}^a$  を求めると，

$$\mathbf{P}^a = \frac{1}{m-1} \mathbf{E}^a [\mathbf{E}^a]^\top \quad (2.42)$$

$$= \frac{1}{m-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \mathbf{E}^f [(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \mathbf{E}^f]^\top \quad (2.43)$$

$$= [\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}] \mathbf{P}^f [\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}]^\top \quad (2.44)$$

と表すことができる．しかし，この式 (2.44) は式 (2.22) と比較すると， $[\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}]$  が1つ多いため，必要以上に解析誤差が小さくなってしまっていることを示している．これはアンサンブルアップデートの式 (2.41) を求める際に，観測誤差 (観測の摂動) を考慮しなかったためである．実際には，観測誤差共分散行列を満たすよう摂動を観測に与えてやる必要がある．具体的には式 (2.10) のように右辺に  $\mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^\top$  を加えてやる．

$$\mathbf{P}^a = [\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}] \mathbf{P}^f [\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}]^\top + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^\top \quad (2.45)$$

以上がPO法であり，それぞれのアンサンブルメンバーを独立に解析できるため，一度にすべてのアンサンブルをメモリに格納する必要もなく，簡便に計算できるという特徴がある．初期のEnKFでは，Evensen (1994), Houtekamer and Mitchell(1998; 2001)などで用いられており，カナダ気象局の現業システムにも採用されている．しかし，観測に摂動を与えるということは，新たなサンプリングエラーを導入するということであり，観測に摂動を与えないSRFの方が，性能が良いと言われている (Whitaker and Hamill 2002) ．



SRF はカルマンフィルタの解析誤差共分散行列を求める式 (2.22) を直接解く手法である。SRF では、アンサンブル平均に対して解析を行い、解析アンサンブル摂動は、予報誤差を変換 (transform) して作成する。解析誤差共分散行列の平方根を解くことで解析アンサンブル摂動を作成するので、SRF は解析値に含まれる誤差を反映した適切な摂動を作成可能である。

SRF のアンサンブルアップデートは、線形変換行列  $\mathbf{T}$  を用いて、

$$\mathbf{E}^a = \mathbf{E}^f \mathbf{T} \quad (2.46)$$

で与えられる。最もシンプルな手法として Serial EnSRF (Ensemble SRF, Whitaker and Hamill 2002) がある。Serial EnSRF では、

$$\mathbf{E}^a = (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{H}) \mathbf{E}^f \quad (2.47)$$

のようなアンサンブルアップデートを行う。ここで  $\tilde{\mathbf{K}}$  は、 $\tilde{\mathbf{K}} = \alpha\mathbf{K}$  で与えられ、 $\alpha$  は、

$$\alpha = \left( 1 + \sqrt{\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{H}\mathbf{P}^f\mathbf{H}^\top + \mathbf{R}}} \right)^{-1} \quad (2.48)$$

で与えられる (詳細は Whitaker and Hamill (2002) を参照)。カルマンゲイン行列を求める式 (2.35) を再び書くと、

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}^f (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \left[ \mathbf{H}\mathbf{E}^f (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top + (m-1)\mathbf{R} \right]^{-1} \quad (2.35)$$

である。Serial EnSRF では、”Serial” という名前が付く通り、観測を 1 個ずつ同化する。そうすることで、 $\mathbf{H}\mathbf{P}^f\mathbf{H}^\top$ ,  $\mathbf{H}\mathbf{E}^f$ ,  $\mathbf{H}\mathbf{E}^f (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top$ ,  $\mathbf{R}$  はスカラーになり、カルマンゲイン行列を計算することができる。Serial EnSRF は、逐次的に観測を一個ずつ同化し第一推定値を置き換え、次の観測を同化する。そのため、すべての観測を同化するまで、式 (2.35) を繰り返し計算する必要がある。

このように、Serial EnSRF は観測を 1 個同化して更新した第一推定値を用いて次の観測を同化するため、並列化することが非常に困難である。たとえ、遠く離れた観測が同化に影響を与えないと仮定する局所化を用いたとしても、並列化は非常に難しい。並列化は、メモリの分散および計算速度の向上において、大量のメモリを使う大気モデルでの EnFK に必要となる技術である。そこで、次節では EnKF が機能するために必要な局所化の概念を、さらに次々節では局所アンサンブル変換カルマンフィルタ (Local Ensemble Transform Kalman Filter, LETKF) の解説を行う。

## 2.3 局所化

局所化は大気モデルにアンサンブルカルマンフィルタを適応させる際に欠かせない概念である。局所化とは、1つの観測が影響を与える範囲はその観測の近傍に限られるであろうという大気の局所性を利用する。モデル格子点から遠く離れた観測はモデル格子点に与える影響がほとんどないものと仮定し、モデル格子点からある距離の内側にある観測のみを同化する。たとえば、つくばの気温とイギリスの気温には誤差相関はないという仮定は最もらしい。しかし、遠く離れた観測が全く影響を与えないかというところではなく、大気にはテレコネクションが存在し、遠くの観測を同化することによるインパクトは、全くないわけではない。ここで、限られたアンサンブルメンバーで  $E_nKF$  を実行する場合、サンプリングエラーが問題になり、これが局所化と大きく関係している。サンプリングエラーによる影響は、全球どこであっても変わらない。一方で、モデル格子点に近い観測は、モデル格子点に与える影響は大きく、遠く離れた観測は、モデル格子点に与える影響は小さい。このとき、観測が格子点から離れるにつれてサンプリングエラーによる影響の割合が大きくなってしまい、遠く離れた観測を同化すると、サンプリングエラーのため解析に悪影響を与えてしまうことになる。アンサンブルメンバーを増やせばサンプリングエラーは低減するが、限られた計算機資源の中では、アンサンブルメンバーは数10程度に限られてしまい、局所化を行わなければ  $E_nKF$  はサンプリングエラーのため満足に動かない。このような仮定をすることで、数値モデルの自由度は大幅に小さくなるものと考えられる。しかしながら、数10程度のアンサンブルメンバー数で、誤差共分散行列を精度良く表現できるものとは考えがたい。

そこで、局所化では大気のもう1つの特性を利用する。Patil et al. (2001) では、NCEPのアンサンブルメンバーを解析し、局所的な領域ではそれぞれのアンサンブルメンバーが非常に似た構造を持つ場所があることを発見した。これを位相空間で考える。位相空間内では、状態は一点で表され、状態の時間発展は線で表現される。また、任意の初期値から一定期間積分し、スピニングを終えて安定した解の集合をアトラクタと呼ぶ。局所的な位相空間でも同様で、系の状態は一点で表される。Patil et al. (2001) の局所的な領域ではそれぞれのアンサンブルメンバーが非常に似た構造を持つということ位相空間で考えると、アトラクタの分布はある1点のまわりに超低次元に広がってい

ることを意味し，彼らは局所低次元性 (local low dimensionality) と呼んでおり，大気力学系の持つ特性の1つであるとしている．すべてのアンサンブルメンバーは安定な解であることからアトラクタ上に分布しており，局所低次元性を利用することで，数10から数100程度の数少ない限られたアンサンブルメンバー数であっても，誤差共分散行列を効率よく表現することができると考えられる．

局所化関数には，どのような関数でも良いがガウス関数を近似した5次関数を用いることが多い．ガウス関数は，どれほど遠くの点でも厳密に0にならない関数のなので，ある一定上の距離が離れると完全に0になる5次関数を用いることが多い．局所化を実装する場合は，遠く離れた点との誤差相関を押さえ込むために，予報誤差共分散行列に5次関数をかけることで局所化を実現する．ガウス関数を近似した5次関数  $L(r)$  は，

$$L(r) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4}r^5 + \frac{1}{2}r^4 + \frac{5}{8}r^3 - \frac{5}{3}r^2 & (r \leq 1) \\ \frac{1}{12}r^5 - \frac{1}{2}r^4 + \frac{5}{8}r^3 + \frac{5}{3}r^2 - 5r + 4 - \frac{2}{3}r^{-1} & (1 < r \leq 2) \\ 0 & (2 < r) \end{cases} \quad (2.49)$$

のようになる． $r$  は，格子点から基準点までの距離である．5次関数とガウス関数を比較すると，非常に似た関数となる (図 2.1)．この5次関数は， $(2 < r)$  で完全に0になり，ある一定距離以上離れた場合のサンプリングエラーを完全に抑えることができる．

局所化関数  $L(r)$  を EnKF に適応させていく．EnKF の予報誤差共分散行列に局所化関数をかけると，

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (L(r)\mathbf{P}^f) \mathbf{H}^\top (\mathbf{H} (L(r)\mathbf{P}^f) \mathbf{H}^\top + \mathbf{R})^{-1} \\ &\simeq L(r) \left( \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top (\mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top + \mathbf{R})^{-1} \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

のように，カルマンゲイン  $\mathbf{K}$  に格子点を中心とした局所化を行うことで近似して実現できる．

## 2.4 局所アンサンブル変換カルマンフィルタ (LETKF)

局所アンサンブル変換カルマンフィルタ (Local Ensemble Transform Kalman Filter, LETKF) は, Hunt (2005), Hunt et al. (2007) で提唱されたアルゴリズムで, LEKF に ETKF のアンサンブルアップデート手法を組み込んだ EnKF で, 並列計算に非常に優れている. LETKF は各格子点を中心とする小領域 (local patch) を持っており, それぞれの local patch で独立に解析できる. この点は, 観測を 1 個ずつしか同化できない Serial EnSRF と大きく異なり, LETKF は実用性に優れている.

LEKF は, 格子点の周りの local patch 内のアンサンブルを使って解析を行う. その際に, local patch での予報誤差共分散を主成分分析し, その主成分を用いて効率的に解析を行う. 詳細は三好 (2006) および Ott et al. (2004) を参照していただきたい. さらに LETKF は, 予報誤差共分散の主成分分析を行わず, アンサンブルアップデートの際に ETKF のアンサンブル変換を取り入れることで, アンサンブル予報誤差を解析アンサンブルに一度に変換する. そのため, 非常に効率よく計算できるようなアルゴリズムになっている. Harlim and Hunt (2005) によると, LETKF と LEKF をいくつかのモデルに適用して比較実験を行ったところ, データ同化性能にほとんど違いがないことが確かめられている.

LETKF では, local patch 内の  $m$  個のアンサンブルメンバーが張る  $m$  次元空間内で解析を行う. まず, local patch 内の物理空間での  $N \times N$  予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}^f$  を規格化する ( $N$  のサイズは local patch 内の格子点数  $\times$  予報変数である).  $m$  次元空間内での  $m \times m$  予報誤差共分散行列  $\tilde{\mathbf{P}}^f = \frac{\mathbf{I}}{m-1}$  と定義すると, 物理空間での予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}^f$  は,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^f &= \frac{1}{m-1} \mathbf{E}^f (\mathbf{E}^f)^\top \\ &= \frac{1}{m-1} \mathbf{E}^f \mathbf{I} (\mathbf{E}^f)^\top \\ &= \mathbf{E}^f \tilde{\mathbf{P}}^f (\mathbf{E}^f)^\top \end{aligned} \quad (2.51)$$

と表すことができる. LETKF を含めて EnKF は, モデルの不完全性および, 少ないアンサンブルによる共分散の見積もり誤差などが生じるため, 予報誤差共分散が過小評価されてしまう. そこで, KF および EKF と同様に共分散膨張を行ってやる必要が

ある．具体的には，

$$\tilde{\mathbf{P}}^f \longleftarrow (1 + \delta)\tilde{\mathbf{P}}^f \quad (2.52)$$

のように  $\tilde{\mathbf{P}}^f$  を置き換える． $\delta$  は膨張係数で，0 よりわずかに大きい数である．

ここで，アンサンブル・アップデートをアンサンブル変換行列  $\mathbf{T}$  を用いて表すと，

$$\mathbf{E}^a = \mathbf{E}^f \mathbf{T} \quad (2.53)$$

となる．これより，物理空間での解析誤差共分散行列  $\mathbf{P}^a$  は，

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^a &= \frac{1}{m-1} \mathbf{E}^a (\mathbf{E}^a)^\top \\ &= \frac{1}{m-1} \mathbf{E}^f \mathbf{T} \mathbf{T}^\top (\mathbf{E}^f)^\top \end{aligned} \quad (2.54)$$

で与えられる．さらに，式 (2.51) と同様に， $m$  次元空間内での  $m \times m$  解析誤差共分散行列  $\tilde{\mathbf{P}}^a$  を用いて，物理空間での予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}^a$  を表すと，

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^a &= \frac{1}{m-1} \mathbf{E}^f \mathbf{T} \mathbf{T}^\top (\mathbf{E}^f)^\top \\ &= \mathbf{E}^f \tilde{\mathbf{P}}^a (\mathbf{E}^f)^\top \end{aligned} \quad (2.55)$$

となる．つまり， $m$  次元空間内での解析誤差共分散行列  $\tilde{\mathbf{P}}^a$  を求める必要がある．そこで，KF の解析誤差共分散  $\mathbf{P}^a$  を求める式 (2.22) に，EnKF のカルマンゲイン  $\mathbf{K}$  の式 (2.36) を代入する．

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^a &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}] \mathbf{P}^f \\ &= \left[ \mathbf{I} - \mathbf{E}^f \left[ (m-1)\mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}\mathbf{E}^f \right]^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \right] \frac{1}{m-1} \mathbf{E}^f (\mathbf{E}^f)^\top \\ &= \frac{1}{m-1} \mathbf{E}^f (\mathbf{E}^f)^\top \\ &\quad - \frac{1}{m-1} \mathbf{E}^f \left[ (m-1)\mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}\mathbf{E}^f \right]^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}\mathbf{E}^f (\mathbf{E}^f)^\top \\ &= \frac{1}{m-1} \mathbf{E}^f (\mathbf{E}^f)^\top \\ &\quad - \frac{1}{m-1} \mathbf{E}^f \left[ (m-1)\mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}\mathbf{E}^f \right]^{-1} \\ &\quad \left( \left[ (m-1)\mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}\mathbf{E}^f \right] - (m-1)\mathbf{I} \right) (\mathbf{E}^f)^\top \end{aligned} \quad (2.56)$$

ここで,  $(m-1)\mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{E}^f = \mathbf{A}$  と置くと,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^a &= \frac{1}{m-1}\mathbf{E}^f (\mathbf{E}^f)^\top \\
&\quad - \frac{1}{m-1}\mathbf{E}^f \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{A} - (m-1)\mathbf{I}] (\mathbf{E}^f)^\top \\
&= \frac{1}{m-1}\mathbf{E}^f \mathbf{I} (\mathbf{E}^f)^\top - \frac{1}{m-1}\mathbf{E}^f [\mathbf{I} - (m-1)\mathbf{A}^{-1}] (\mathbf{E}^f)^\top \\
&= \frac{1}{m-1}\mathbf{E}^f (m-1)\mathbf{A}^{-1} (\mathbf{E}^f)^\top \\
&= \mathbf{E}^f \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{E}^f)^\top \\
&= \mathbf{E}^f \left[ (m-1)\mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{E}^f \right]^{-1} (\mathbf{E}^f)^\top
\end{aligned} \tag{2.57}$$

よって,  $m$  次元空間内での  $m \times m$  解析誤差共分散行列  $\tilde{\mathbf{P}}^a$  は,

$$\tilde{\mathbf{P}}^a = \left[ (m-1)\mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{E}^f \right]^{-1} \tag{2.58}$$

である. 共分散膨張を考慮する場合, 式 (2.51) から,

$$\tilde{\mathbf{P}}^a = \left[ \frac{(m-1)\mathbf{I}}{1+\delta} + (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{E}^f \right]^{-1} \tag{2.59}$$

と表すことができる. さらに, 観測演算子  $\mathbf{H}$  を非線形演算子  $H$  に置き換えると,  $\mathbf{H}\mathbf{E}^f$  は,

$$\mathbf{H}\mathbf{E}^f \simeq H(\bar{\mathbf{X}}^f + \mathbf{E}^f) - H(\bar{\mathbf{X}}^f) \tag{2.60}$$

となる.

次に, 解析アンサンブル平均  $\bar{\mathbf{x}}[N \times 1]$  を求める. 解析アンサンブル平均  $\bar{\mathbf{x}}$  は,

$$\bar{\mathbf{x}}^a = \bar{\mathbf{x}}^f + \mathbf{K} (\mathbf{y}^o - H(\bar{\mathbf{x}}^f)) \tag{2.61}$$

と表される. 式 (2.36) を代入すると,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}}^a &= \bar{\mathbf{x}}^f + \mathbf{E}_t^f \left[ (m-1)\mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{E}_t^f)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{E}_t^f \right]^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{E}_t^f)^\top \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - H(\bar{\mathbf{x}}^f)) \\
&= \bar{\mathbf{x}}^f + \mathbf{E}_t^f \tilde{\mathbf{P}}^a (\mathbf{H}\mathbf{E}_t^f)^\top \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - H(\bar{\mathbf{x}}^f))
\end{aligned} \tag{2.62}$$

と変形することで, カルマンゲイン行列を直接求めずとも解析値を求めることができる.

アンサンブルアップデートは変換行列  $\mathbf{T}$  により与えられるので, 式 (2.55) より,

$$\mathbf{T} = \sqrt{m-1} \left( \tilde{\mathbf{P}}^a \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.63}$$

となり，新しい初期摂動を求めるためには，解析誤差共分散行列  $\tilde{\mathbf{P}}^a$  の平方根が必要である． $\tilde{\mathbf{P}}^a$  の平方根は一意ではないが， $(\tilde{\mathbf{P}}^a)^{\frac{1}{2}}$  が対称になるように選ぶ．そのためにはまず， $(\tilde{\mathbf{P}}^a)^{-1}$  を固有値分解する．

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}^a &= \left[ \frac{(m-1)\mathbf{I}}{1+\delta} + (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}\mathbf{E}^f \right]^{-1} \\ &= [\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^\top]^{-1} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{V}^\top\end{aligned}\tag{2.64}$$

$$(\tilde{\mathbf{P}}^a)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{V}^\top\tag{2.65}$$

$\mathbf{V}$  は固有ベクトル， $\mathbf{\Lambda}$  は固有値を対角成分に持つ行列である．このようにすることで， $\tilde{\mathbf{P}}^a$  の平方根を求めることができる．これより，LETKF のアンサンブルアップデートは，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^a &= \mathbf{E}^f \mathbf{T} \\ &= \mathbf{E}^f \left[ (m-1)\tilde{\mathbf{P}}^a \right]^{1/2} \\ &= \mathbf{E}^f \sqrt{m-1} \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{V}^\top\end{aligned}\tag{2.66}$$

で与えられる．

以上から，解析値と解析アンサンブル摂動が求まったので，これを元に次のアンサンブル初期値は解析の式 (2.62) とアンサンブル・アップデートの式 (2.66) から求めることができる．ただしここでは，便宜上，アンサンブル平均  $\bar{\mathbf{x}}^{a,f} [N \times 1]$  を束ねて， $\bar{\mathbf{X}}^{a,f} [N \times m]$  とし， $\bar{\mathbf{x}}^{a,f}$  を  $\bar{\mathbf{X}}^{a,f}$  に入れ替えた．つまり， $\bar{\mathbf{X}}^{a,f} = [\bar{\mathbf{x}}^{a,f}, \bar{\mathbf{x}}^{a,f}, \dots, \bar{\mathbf{x}}^{a,f}]$  で， $N \times m$  行列である．

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^a &= \bar{\mathbf{X}}^a + \mathbf{E}^a \\ &= \bar{\mathbf{X}}^f + \mathbf{E}_t^f \tilde{\mathbf{P}}^a (\mathbf{H}\mathbf{E}_t^f)^\top \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - H(\bar{\mathbf{X}}^f)) + \mathbf{E}^f \sqrt{m-1} \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{V}^\top \\ &= \bar{\mathbf{X}}^f + \mathbf{E}_t^f \left[ \tilde{\mathbf{P}}^a (\mathbf{H}\mathbf{E}_t^f)^\top \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - H(\bar{\mathbf{X}}^f)) + \sqrt{m-1} \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{V}^\top \right]\end{aligned}\tag{2.67}$$

このようにして，次のアンサンブル予報のためのアンサンブル初期値を作成することができる．

LETKF の計算効率性は，式 (2.59) の逆行列計算とアンサンブル変換行列  $\mathbf{T}$  を求める計算を，1 回の固有値分解で共有しているところである．さらに，式 (2.67) において，解析アンサンブルを計算する過程で，巨大な  $N \times m$  行列  $\mathbf{E}^f$  を乗じる回数が 1 回

で済むようになっている．これは，たいていの場合  $N \gg m$  であるため，LETKF では計算量が少なくなる．

このような LETKF の特徴は，全球雲解像モデル NICAM に EnKF を適応する際に必要となる技術で，LETKF の並列計算効率は実装するにあたって非常に重要である．たとえば Serial EnSRF は並列化ができないためすべてのアンサンブルメンバーを 1 ノードに読み込まなければならず，高解像モデルの全メンバーの全球データを 1 ノードに読み込むのは難しい．LETKF では領域ごとに分割して並列化可能なので，1 ノードには全メンバーの局所化領域分のデータを読み込むだけでよいため，高解像モデルであっても EnKF の実装が可能となる．

LETKF は，局所化をアルゴリズムに取り入れたものとなっているが，LETKF の局所化は，観測誤差局所化 (observation localization) と呼ばれており，予報誤差共分散行列ではなく，観測誤差共分散行列に局所化を施す．つまり，局所化関数  $L(r)$  の逆数を観測誤差共分散行列にかけてやることで，遠く離れた観測の観測誤差を無限大にし，局所化を実現する．具体的には，LETKF を構成する式の中には観測誤差共分散行列  $\mathbf{R}$  の逆数  $\mathbf{R}^{-1}$  が含まれているので，式 (2.49) の局所化関数を用いて，

$$\mathbf{R}^{-1} \leftarrow L(r)\mathbf{R}^{-1} \quad (2.68)$$

のように置き換えると，

$$\mathbf{K} = \left( \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top (\mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top + \mathbf{R}/L(r))^{-1} \right) \quad (2.69)$$

式 (2.50) の一般的な局所化と上式 (2.69) を比べると，観測誤差局所化の方が局所化の効果が小さい．しかし，Miyoshi et al. (2005) では LEKF に，また Miyoshi and Yamane (2007) では，LETKF に観測誤差局所化を適応し，LEKF および LETKF が安定して動いているのを確かめている．

以上をまとめると，LETKF では 1 つの格子点を中心とする local patch を構成する．この local patch のサイズは，格子点距離によって決められており，直方体のような形をしている．解析は local patch 内のすべての格子点上の変数に対して行われる．当然，同化される観測も local patch 内のみの観測である．解析値は local patch 内すべての格子点において作成されるが，local patch の中心の格子点の解析のみを保存する．以上の操作をすべての格子点において行うことで，全球の解析値を得ることができる．



## 2.5 Non-local patch LETKF

本研究では，Miyoshi et al. (2007b) による local patch を持たない LETKF を用いたので，以下で解説する．通常 LETKF の local patch は，格子点に基づいた直方体で構成され，局所化も格子点に基づいたものであるため，極に近づくにつれ local patch のサイズが小さくなり，高緯度地方では十分に観測を同化できず，local patch 状のスプレッドの不連続が確認されていた．そこで，Miyoshi et al. (2007b) は LETKF の local patch をなくし，実質的な距離に応じた局所化を行うことで，スプレッドの不連続を解消した（ただし，鉛直方向の局所化は通常の LETKF と同様に格子点距離に基づいている）．

実質的な距離  $r$  は，Hubeny (1953) より，

$$r = \sqrt{(A \cdot dP)^2 + (B \cdot \cos P \cdot dR)^2} \quad (2.70)$$

ここで， $P, dP, dR$  はそれぞれ平均緯度，2点間の緯度の差，2点間の経度の差を表し， $A, B$  は経線および大円の曲率を表している．

$$A = \frac{R_{po}}{(1 - e \cdot \sin^2 P)^{3/2}} \quad (2.71)$$

$$B = \frac{R_{eq}}{(1 - e \cdot \sin^2 P)^{1/2}} \quad (2.72)$$

ここで， $R_{po} = 6334834.0$  [m] (地球の短径)， $R_{eq} = 6377937.0$  [m] (地球の長径) を表し， $e = 0.006674$  で定数である．ここで求めた距離  $r$  を式 (2.49) に用いることで，物理的な実際の距離に応じた局所化を行うことができる．本研究では，式 (2.49) の5次関数は，

$$r = 2 \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \sigma \quad (2.73)$$

のときに0になるようにした．

以上，non-local patch LETKF の概要をまとめると，Non-local patch LETKF では，1格子点のみの変数に対して解析を行うため， $X$  の次元  $N$  はモデル変数の数と等しい．水平方向の局所化は，格子点からある一定の範囲内（物理的な距離の内側）の観測を同化することで実現し，鉛直方向の局所化は，格子点距離に基づいて観測を同化する．このような局所化の方法は，物理的な半径の球の local patch を持っているのと同様である．物理的な距離に応じて局所化を行うことで，不連続性を導入してしまっているが，オリジナルの LETKF の場合でも同じであり，格子点に応じた局所化の方がより不連続を導入してしまっている．

## 2.6 誤差共分散膨張

EKF では、モデルの不完全性や非線形モデルを線形化近似するため、予報誤差共分散行列は実際より小さく見積もられてしまう。一方の EnKF では、モデルの不完全性のほかに少ないメンバー数によるサンプリングエラーによって、予報誤差共分散行列が実際より小さく見積もられてしまう。これらは covariance underestimation と呼ばれている。予報誤差共分散行列が過小評価されたまま同化サイクルを繰り返すと、EKF, EnKF は予報を過剰に信頼し、観測の情報を取り込まなくなり、やがて発散してしまう。このことは、式 (2.21) のカルマンゲインを求める式からもわかる。予報誤差共分散行列  $P^f$  が小さくなることで観測に対する重みカルマンゲイン  $K$  は小さくなり、同化の式 (2.6) より、観測による情報が解析に反映されにくくなり、やがて EKF, EnKF は現実から離れてしまうと考えられる。この原因ははっきりとは調べられてはいないが、線形理論である KF を非線形系に適応することにより、理論における過程が満たされない部分に起因するものと考えられている (三好 2006)。

そこで、これをふせぐため予報誤差共分散行列を人為的に大きくしてやる共分散膨張を導入する。

$$P^f \leftarrow (1 + \delta)P^f \quad (2.74)$$

$\delta$  は 0 よりわずかに大きい数である。このように予報誤差共分散行列  $P^f$  に 1 より少し大きい数をかけることで、予報誤差共分散行列を膨張させ、予報誤差の過小評価を防ぐ。また

$$(1 + \delta)P^f = P^f + Q \quad (2.75)$$

のように、誤差の過小評価分をモデル誤差に相当するものとしても表現することもできる。しかし、この  $Q$  の導入は必ずしもモデル誤差による影響だけではなく、EKF, EnKF が発散しないようにするための処置であり、理論的背景が明確であるというわけではない。

EnKF の場合、この共分散膨張はスプレッド膨張によって表現される。共分散を膨張させるのではなく、共分散を計算する前のスプレッドを膨張させる。

$$E^f \leftarrow (1 + \delta)E^f \quad (2.76)$$

これにより予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}^f$  は  $(1+\delta)^2$  倍に大きくなる．この方法は multiplicative inflation と呼ばれる．

もう 1 つの方法は，解析アンサンブルに統計的に計算した解析誤差共分散行列を反映するようなランダム摂動  $\eta$  を加える方法がある．

$$\mathbf{E}^a \longleftarrow \mathbf{E}^a + \eta \quad (2.77)$$

これは，ランダム摂動を加えるので additive inflation と呼ばれる．ここで，ランダム摂動を予報誤差ではなく解析誤差に加えるのには理由がある．少ない  $\eta$  から計算される統計的な解析誤差共分散行列には，サンプリングエラーが含まれるので，予報計算を行うことでランダム摂動  $\eta$  に力学的拘束をかけるためである．

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^f &= \mathbf{M}(\mathbf{E}^a + \eta) \\ &= \mathbf{M}\mathbf{E}^a + \mathbf{M}\eta \end{aligned} \quad (2.78)$$

このように，予報誤差共分散行列を見積もるためにランダム摂動  $\eta$  を用いるのではなく，モデルによる変形を受けた  $\mathbf{M}\eta$  を用いることで，日々変化する誤差成分を取り出すことができる．Miyoshi and Kalnay (2005) では，Lorenz の 40 変数モデルを使ってランダム誤差ベクトルを加えて作った BV が，何もしない BV では捕らえることのできなかつた高次の摂動シグナルを捕らえていることを示した．これは，何もしない BV が Breeding サイクルを繰り返すうちに，摂動が古くなり高次のシグナルを捕らえにくい．一方のランダム誤差ベクトルを足し込みモデルによる拘束を加えることで，摂動が新しくなりより高次のシグナルを捕らえやすくなる．モデルによる力学的拘束を受けるので，シグナルのない場所ではランダム摂動は発達しない．

KF は線形システムでのアルゴリズムであるため，ランダム過程を含まない線形モデルのでは過去を忘れない．しかし大気モデルは非線形システムであるため，カオスによって 2 週間程度で過去を忘れてしまう．そのため誤差共分散の過小評価を招いてしまう．共分散膨張は過去の忘却を解決するものとして解釈することができる．このように共分散膨張は forgetting factor (Pham et al. 1998) とも呼ばれる．

## 2.7 膨張係数および観測誤差の動的推定

前節では、共分散膨張について述べたが、膨張係数  $\delta$  の与え方には任意性があり、試行錯誤により  $\delta$  を求める必要がある。これは、ただでさえ時間のかかる EnKF によるデータ同化サイクルを、複数回行わなければならないことを意味している。そこで、Miyoshi and Kalnay (2005) では、膨張係数  $\delta$  を動的に推定する手法を提案している。

共分散膨張は、EnKF が見積もる予報誤差の過小評価を防ぐために導入されたものである。そのため、膨張係数  $\delta$  は、

$$\langle \mathbf{d}_{o-b} \mathbf{d}_{o-b}^\top \rangle = (1 + \delta) \mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H} + \mathbf{R} \quad (2.79)$$

として見積もることができる。ここで、 $\mathbf{d}_{o-b} = \mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}^f)$  であり、観測値と予報値の差 = D 値 である。アンサンブルサイズが限られていることを考えると、 $\mathbf{P}^f$  の非対角成分はサンプリングエラーの占める割合が大きい。そのため、式 (2.79) のトレース和を用いる。つまり、観測点での D 値の 2 乗が、アンサンブル予報誤差の分散と観測誤差の和に等しいとする。D 値には、予報誤差と観測誤差の両方を含むことを考えれば、理解できる。式 (2.79) から、膨張係数  $\delta$  は、

$$\delta = \frac{\mathbf{d}_{o-b} \mathbf{d}_{o-b}^\top - \text{trace}(\mathbf{R})}{\text{trace}(\mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H})} - 1 \quad (2.80)$$

として求めることができる。

一方、Desroziers et al (2005) では、観測誤差の動的推定を行っている。パーフェクトモデル実験では、あらかじめ観測誤差を決めた上で観測値を作成しているため、観測誤差共分散行列  $\mathbf{R}$  は真である。しかし、現実のデータ同化を考えた場合、観測誤差は不明な場合が多い。そのため、不確かな観測誤差が EnKF に悪影響を及ぼすと考えられている。Desroziers et al (2005) によると、観測誤差共分散行列  $\mathbf{R}$  は、

$$\langle \mathbf{d}_{o-a} \mathbf{d}_{o-b}^\top \rangle = \mathbf{R} \quad (2.81)$$

として与えられる．ここで， $\mathbf{d}_{o-a} = \mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}^a)$  である．式 (2.81) を変形すると，

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{d}_{o-a} \mathbf{d}_{o-b}^\top \rangle &= \left\langle \left( \mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}^a) \right) \left( \mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}^f) \right)^\top \right\rangle \\
&= \left\langle \left( \mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}^t + \delta \mathbf{x}^a) \right) \left( \mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}^t + \delta \mathbf{x}^f) \right)^\top \right\rangle \\
&\simeq \left\langle \left( \mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}^t) - H(\delta \mathbf{x}^a) \right) \left( \mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}^t) - H(\delta \mathbf{x}^f) \right)^\top \right\rangle \\
&= \left\langle \left( \delta \mathbf{y}^o - H(\delta \mathbf{x}^a) \right) \left( \delta \mathbf{y}^o - H(\delta \mathbf{x}^f) \right)^\top \right\rangle \\
&= \left\langle \delta \mathbf{y}^o \left( \delta \mathbf{y}^o \right)^\top \right\rangle - \left\langle \delta \mathbf{y}^o \left( H(\delta \mathbf{x}^f) \right)^\top \right\rangle \\
&\quad - \left\langle H(\delta \mathbf{x}^a) \left( \delta \mathbf{y}^o \right)^\top \right\rangle + \left\langle H(\delta \mathbf{x}^a) \left( H(\delta \mathbf{x}^f) \right)^\top \right\rangle \\
&= \left\langle \delta \mathbf{y}^o \left( \delta \mathbf{y}^o \right)^\top \right\rangle \\
&= \mathbf{R}
\end{aligned} \tag{2.82}$$

となり， $\langle \mathbf{d}_{o-a} \mathbf{d}_{o-b}^\top \rangle$  は観測誤差共分散行列  $\mathbf{R}$  を表す．ただし，クロスターム項  $\left\langle \delta \mathbf{y}^o \left( H(\delta \mathbf{x}^f) \right)^\top \right\rangle$ ， $\left\langle H(\delta \mathbf{x}^a) \left( \delta \mathbf{y}^o \right)^\top \right\rangle$ ， $\left\langle H(\delta \mathbf{x}^a) \left( H(\delta \mathbf{x}^f) \right)^\top \right\rangle$  は，0 とした．

以上のように，膨張係数  $\delta$  および観測誤差共分散  $\mathbf{R}$  は，時間的，空間的に局所化が可能である．局所化を行っている EnKF では，局所化領域内の観測誤差分散  $(\sigma^o)^2$  は，

$$(\sigma^o)^2 = \text{trace} \left( \mathbf{d}_{o-a} \mathbf{d}_{o-b}^\top \right) \tag{2.83}$$

として得られ，局所化領域毎に尤もらしい観測誤差共分散  $(\sigma^o)^2$  が得られる．膨張係数  $\delta$  も同様である．さらに，1 時刻での統計を使って計算することで，解析時刻毎に時間変化する膨張係数  $\delta$  および観測誤差共分散  $(\sigma^o)^2$  が得られる．

しかし，1 時刻で計算する場合には，局所化領域内には観測点が少ないため，サンプリングエラーが大きくなり，非現実的な値となる可能性がある．そこで，式 (2.80)，式 (2.83) から求まる推定値の上限，下限を定める．さらに，上下限を指定した推定値を観測値とみなすことで，単純なスカラーカルマンフィルタを使って動的に尤もらしい推定値が得られる．これによって，場所に依存しながら時間変動する膨張係数  $\delta$  および観測誤差共分散  $(\sigma^o)^2$  を使用することができるようになる．

動的に求めたい推定値を  $\Delta^a$  とし，背景値を  $\Delta^b$ ，観測値を  $\Delta^o$  とする．また，それぞれの分散を  $v^a$ ， $v^b$ ， $v^o$  とする．推定値  $\Delta^a$  とは，膨張係数  $\delta$  もしくは観測誤差共分散

$(\sigma^o)^2$  である． $\Delta$  の予報プロセスは，

$$\Delta_t^b = \Delta_{t-1}^a \quad (2.84)$$

$$v_t^b = \alpha v_{t-1}^a \quad (2.85)$$

である．さらに， $\Delta$  の解析プロセスは，

$$\Delta^a = \frac{v^o \Delta^b + v^b \Delta^o}{v^o + v^b} \quad (2.86)$$

$$v^a = \left(1 - \frac{v^b}{v^b + v^o}\right) v^b \quad (2.87)$$

である．

ここで， $\alpha$ ， $v^o$  という2つのコントロールパラメータが使用されている．Miyoshi and Kalnay (2005) では，Lorenz モデルを用いて，数桁にわたるレンジで  $\alpha$ ， $v^o$  の値を変化させても影響はないと述べられている．Miyoshi and Yamane (2007) では，パーフェクトモデル実験において，上記の膨張係数  $\delta$  の動的推定法を用いることで，解析アンサンブルプレッドの大きさが真の解析誤差の大きさに近づくことを示している．しかし，実際の観測を用いた実験では，観測誤差が不確かであることがことから，膨張係数の動的推定はうまく動かないと述べられている．Kalnay et al. (2007) では，SPEEDY モデルを用いたパーフェクトモデル実験において，膨張係数と観測誤差の動的推定を試みている．その結果，初期には誤った観測誤差を与えても，同化サイクルを繰り返し，動的に更新していくことで，正しい観測誤差へと収束していくことを確認した．さらに，膨張係数も適切に保たれていることを確認している．ただし，Kalnay et al. (2007) では，大規模な大循環モデルにおいて，膨張係数および観測誤差の動的推定が適切に動作するかについては確認されていない．

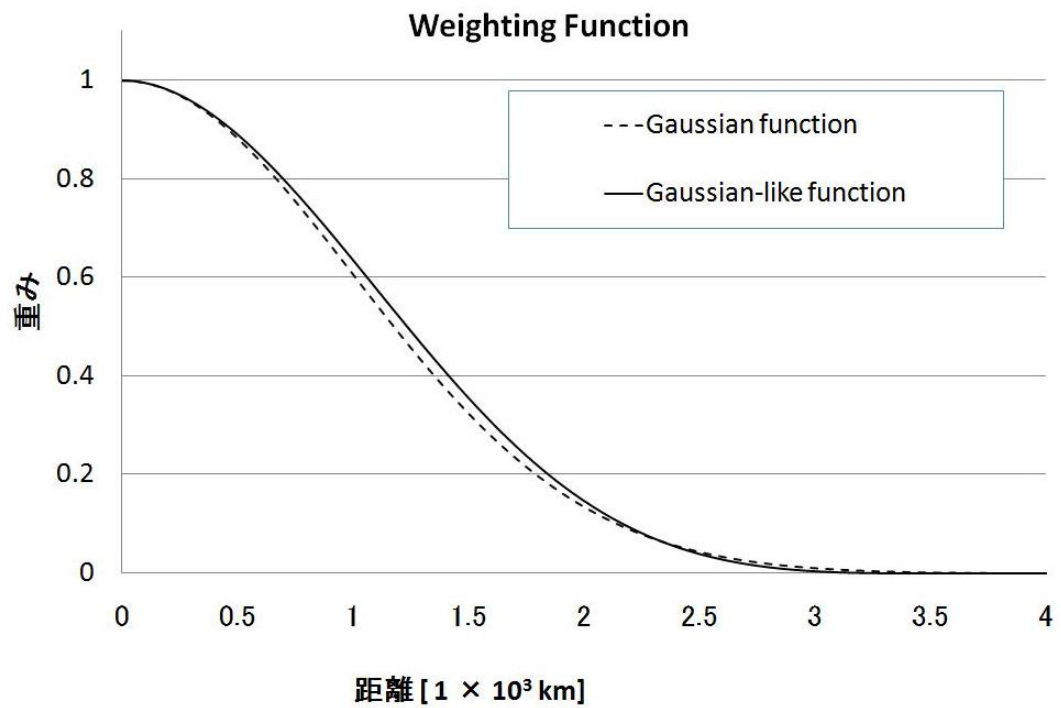


図 2.1: ガウス関数およびガウス関数を近似した 5 次関数 . 非常によく似ているのがわかる .

# 第3章 順圧S-model-EnKF

## 3.1 順圧S-model

本節では，順圧S-model (Tanaka 2003) の解説を行う．

### 3.1.1 3次元スペクトルモデル

本研究では，Tanaka (2003) で開発された大気大循環モデルを用いた．このモデルは3次元スペクトル展開したプリミティブ方程式系の鉛直波数0のみで方程式系を閉じたものである．

球座標系  $(\lambda, \theta, p)$  において，水平方向の運動方程式，連続の式，熱力学第1法則の式，静力学平衡の式から，次のような行列表記のプリミティブ方程式を得る．

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{N} + \mathbf{F} \quad (3.1)$$

$\tau$  は無次元化された時間であり， $\tau = 2\Omega t$  である．式 (3.1) の各記号は以下の通りである．

$\mathbf{U}$  : 従属変数ベクトル

$$\mathbf{U} = (u, v, \phi)^T \quad (3.2)$$

$\mathbf{M}, \mathbf{L}$  : 線形演算子

$$\mathbf{M} = 2\Omega \text{diag} \left( 1, 1, -\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \right) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \sin \theta & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ 2\Omega \sin \theta & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial(\cdot) \cos \theta}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$



N : 非線形項ベクトル

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv \\ -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + \omega p \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

F : 外部強制項からなるベクトル

$$\mathbf{F} = \left( F_u, F_v, \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{pQ}{c_p \gamma} \right) \right)^T \quad (3.6)$$

ただし,

$diag()$  : 対角行列

$()^T$  : 転置行列

とする.

式 (3.1) の基礎方程式系の基本状態として, 断熱かつ摩擦なし, つまり ( $F = 0$ ) の静止大気 ( $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi}$ ) = 0 を考え, そこに微小擾乱 ( $u', v', \phi'$ ) を与える. このとき式 (3.1) の非線形演算子 N は,

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} - \left( \frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u' - \omega \frac{\partial}{\partial p} u' + \frac{\tan \theta}{a} u' v' \\ - \left( \frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) v' - \omega \frac{\partial}{\partial p} v' - \frac{\tan \theta}{a} u' u' \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{p^2}{R\gamma} \left( \frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \omega p \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] \end{pmatrix}$$

2 次以上の摂動項を無視すると, 結局  $\mathbf{N} = 0$  となり, 式 (3.1) を線形化した基本状態は以下のように表せる.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial \tau} + \mathbf{L} \mathbf{U}' &= 0 \\ \mathbf{U}' &= (u', v', \phi')^T \end{aligned} \quad (3.7)$$

これ以降は簡単のため,  $\mathbf{U}' = (u', v', \phi')^T$  を  $\mathbf{U} = (u, v, \phi)^T$  と略記する.

## 鉛直構造関数

このベクトル方程式 (3.7) において，鉛直構造関数  $G_m(p)$  を導入して，鉛直方向と水平方向に変数分離を行う．

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\lambda, \theta, p, \tau) &= (u, v, \phi)^T \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (u_m, v_m, \phi_m)^T G_m(p) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} U_m(\lambda, \theta, \tau) G_m(p) \end{aligned} \quad (3.8)$$

ここで添字の  $m$  は鉛直モード番号 (vertical mode number) を意味する．これを式 (27) に代入し，分離された各変数に関する方程式を導く．

$$\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m}{dp} + \frac{1}{gh_m} G_m = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{gh_m} \frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (3.10)$$

常微分方程式 (3.9) を鉛直構造方程式 (vertical structure equation) と呼ぶ．また水平風成分についても同様に鉛直構造関数を導入して，

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v_m + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi_m}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u_m + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi_m}{\partial \theta} = 0 \quad (3.12)$$

と導ける．式 (3.10) , (3.11) , (3.12) をまとめて水平構造方程式 (horizontal structure equation) と呼ぶ．ここで分離定数中の  $h_m$  は距離の次元 ( $L$ ) をもち，鉛直構造方程式 (3.9) の固有関数である鉛直構造関数  $G_m(p)$  に対する固有値として求まる．また，水平構造方程式 (3.10) は流体層の厚さ  $h_m$  の線形浅水方程式系と同じ形であることから， $h_m$  は等価深度 (equivalent height) の意味を持つ．

鉛直構造関数  $G_m(p)$  の正規直交性により，気圧  $p$  の任意の関数  $f(p)$  について，次の鉛直変換を導くことができる．

$$f(p) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m G_m(p) \quad (3.13)$$

$$f_m = \frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} f(p) G_m(p) dp \quad (3.14)$$

ここで  $f_m$  は第  $m$  鉛直モードの鉛直変換係数である．

鉛直モード  $m = 0$  は順圧 (barotropic) モード, または外部 (external) モードといい, 鉛直方向に節を持たず, ほとんど全層で一定のまま変化しないモードである. これに対して鉛直モード  $m \geq 1$  は傾圧 (baroclinic) モード, または内部 (internal) モードといい,  $m$  番目のモードに関しては鉛直方向に  $m$  個の節を持つ. 本研究で用いた順圧スペクトルモデルは, 鉛直モード  $m = 0$  の順圧モードだけを考慮したモデルであり, 鉛直方向に平均した大気の特性を考慮するのに適したモデルであるといえる. 順圧モード  $m = 0$  における等価深度  $h_0$  は 9728.4m である.

### 水平構造関数

前節で, 第  $m$  鉛直モードの鉛直構造関数の固有値として得た等価深度を用いて, 水平構造方程式 (3.10), (3.11), (3.12) を解く. ここで式 (3.10), (3.11), (3.12) を

$$\mathbf{M}_m \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U}_m + \mathbf{L} \mathbf{U}_m = 0 \quad (3.15)$$

と行列表記する. 添字の  $m$  は第  $m$  鉛直モードを意味する. ただし

$$\mathbf{M}_m = 2\Omega \text{diag} \left( 1, 1, \frac{1}{gh_m} \right)$$

$$\mathbf{U}_m = (u_m, v_m, \phi_m)^T$$

である. ここで次のスケール行列  $\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m$  を導入する.

$$\mathbf{X}_m = \text{diag} \left( \sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, gh_m \right) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{Y}_m = 2\Omega \text{diag} \left( \sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, 1 \right) \quad (3.17)$$

これらを式 (3.15) に以下のように作用させる.

$$(\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m) \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) = 0 \quad (3.18)$$

ここで

$$\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m = \text{diag} (1, 1, 1) \quad (3.19)$$

だから式 (3.18) は

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) = 0 \quad (3.20)$$

と書ける．尚，

$$\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta & \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ \sin \theta & 0 & \alpha_m \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

である．式 (3.21) 中の  $\alpha_m$  は次のように定義した笠原パラメータと呼ばれるものである．

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{gh_m}}{2\Omega a} \quad (3.22)$$

このことは，浅水方程式中の 4 つの惑星パラメータ ( $g$ : 重力,  $h_m$ : 等価深度,  $\Omega$ : 地球の自転速度,  $a$ : 惑星半径) が唯一の惑星固有パラメータ  $\alpha_m$  だけであらわせることを示している (Tanaka 1985) .

式 (3.20) は時間  $\tau$  の線形システムであるから次のように解を仮定して，水平方向成分と時間成分とに変数分離することができる．

$$\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m(\lambda, \theta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) e^{-i\sigma_{nlm}\tau} \quad (3.23)$$

$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  は水平構造関数 (horizontal structure function), または Hough 関数と呼ばれる．Hough 関数は第  $m$  鉛直モードに相当する水平ノーマルモード, すなわち水平自由振動を意味し, 経度  $\lambda$  と緯度  $\theta$  の関数である．添字の  $n$  は東西波数,  $l$  は南北モード番号を示している．

式 (3.23) を水平構造方程式 (3.20) に代入して，

$$-i\sigma_{nlm} \mathbf{H}_{nlm} + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) \mathbf{H}_{nlm} = 0 \quad (3.24)$$

この固有値問題を解くことで固有関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  と対応する固有値  $\sigma_{nlm}$  を求めることができる．式 (3.20) は緯度  $\theta$  について線形であるから, Hough ベクトル関数  $\Theta_{nlm}(\theta)$  を用いて  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  を次のように経度依存と緯度依存とに変数分離できる．

$$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) = \Theta_{nlm}(\theta) e^{in\lambda} \quad (3.25)$$

ただし，

$$\Theta_{nlm}(\theta) = \begin{pmatrix} U_{nlm}(\theta) \\ -iV_{nlm}(\theta) \\ Z_{nlm}(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

とする．南北風成分に関しては位相を  $\pi/2$  だけずらすために  $i = \sqrt{-1}$  がかけられている．南北モードは3種類の異なるモードから構成される．一つは低周波の西進するロスビーモード (Rossby mode)  $l_r$  で，残りの二つは高周波の西進，および東進する重力波モード (gravity mode)  $l_{wg}$  ,  $l_{eg}$  である．

Swartrauber and Kasahara (1985) によると，水平構造関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  は球面調和関数展開の和として得られる．この方法で求められる水平構造関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  が正規直交性をもつならば，これを基底にして波数展開することが出来る．水平構造関数が直交関数であることは以下のように示される．

緯度と経度に関する内積は以下のように表される．

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (U_{nlm}U_{n'l'm}^* + V_{nlm}V_{n'l'm}^* + Z_{nlm}Z_{n'l'm}^*) e^{-i(n-n')\lambda} \cos \theta d\lambda d\theta \quad (3.27)$$

アスタリスクは複素共役を意味し， $nlm$  と  $n'l'm$  は東西波数と南北モード番号の異なるモードを示している．式 (3.21) の線形演算子  $\mathbf{L}_m = \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m$  は非対称のエルミート行列であるため，次の関係 (skew-self adjoint) が成立する．

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{L}_m \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle + \langle \mathbf{L}_m \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0 \quad (3.28)$$

式 (3.28) に式 (3.24) を代入して，

$$(\sigma_{nlm} - \sigma_{n'l'm}^*) \langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0 \quad (3.29)$$

を得る．式 (3.29) から以下の二つの条件が課せられる．

- $n = n'$  かつ  $l = l'$  のとき

$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle$  は線形浅水方程式系の全エネルギー量に比例する量であり，決して0にはならない．よって式 (3.29) を満たすためには  $\sigma_{nlm} = \sigma_{nlm}^*$  である必要があり，従って  $\sigma_{nlm}$  は実数でなくてはならない．

- それ以外のとき

$\sigma_{nlm} \neq \sigma_{nlm}^*$  であれば式 (3.29) を満たすためには  $\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0$  が成り立つ必要がある．すなわち固有振動数  $\sigma_{nlm}$  に相当する固有関数  $\mathbf{H}_{nlm}$  が，固有振動数  $\sigma_{n'l'm}$  に相当する固有関数  $\mathbf{H}_{n'l'm}$  と直交関係にあることを示している．

以上の二つの条件から，任意のモード  $nlm$  について，以下の正規直交関係が成立する．

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_{nlm} \cdot \mathbf{H}_{n'l'm}^* \cos \theta d\lambda d\theta = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \quad (3.30)$$

以上の水平構造関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  の直交性から，次のフーリエ - ハフ変換が導かれる．

第  $m$  鉛直モードに相当する物理空間において， $\lambda, \theta, \tau$  を座標とする任意のベクトル関数を  $\mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau)$  とすると，

$$\mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{nlm}(\tau) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \quad (3.31)$$

$$a_{nlm}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau) \cdot \mathbf{H}_{nlm}^* \cos \theta d\lambda d\theta \quad (3.32)$$

となる．

### 3次元ノーマルモード関数展開

鉛直構造関数と水平構造関数を結合させ，3次元ノーマルモード関数  $\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p)$  を構成し，式(3.1)を展開する．3次元ノーマルモード関数  $\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p)$  は鉛直構造関数  $G_m(p)$  と水平構造関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  とのテンソル積であり，以下のように定義される．

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) &= G_m(p) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \\ &= G_m(p) \mathbf{\Theta}_{nlm}(\theta) e^{in\lambda} \end{aligned} \quad (3.33)$$

この3次元ノーマルモード関数も以下に示す内積の下で，直交関係を満たす．

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{\Pi}_{nlm}, \mathbf{\Pi}_{n'l'm} \rangle &= \frac{1}{4\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{\Pi}_{nlm} \cdot \mathbf{\Pi}_{n'l'm}^* \cos \theta d\lambda d\theta dp \\ &= \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (3.34)$$

この関係により，3次元ノーマルモード関数展開が導かれる．式(3.1)中の  $\mathbf{U}$  と  $\mathbf{N}$  と  $\mathbf{F}$  は3次元ノーマルモード関数によって次のように展開される．

$$\mathbf{U}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M w_{nlm}(\tau) \mathbf{X}_m \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (3.35)$$

$$\mathbf{N}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M n_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (3.36)$$

$$\mathbf{F}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M f_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (3.37)$$

ここで  $w_{nlm}(\tau)$ ,  $n_{nlm}(\tau)$ ,  $f_{nlm}(\tau)$  はそれぞれ, 従属変数ベクトル  $\mathbf{U}$ , 非線形項ベクトル  $\mathbf{N}$ , 外部強制ベクトル  $\mathbf{F}$  についての展開係数である.  $w_{nlm}(\tau)$ ,  $n_{nlm}(\tau)$ ,  $f_{nlm}(\tau)$  は展開基底の正規直交性式 (3.34) より, 以下のフーリエ変換で求められる.

$$w_{nlm}(t) = \langle U(\lambda, \theta, p, t), \mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \rangle \quad (3.38)$$

$$n_{nlm}(t) = \langle N(\lambda, \theta, p, t), \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \rangle \quad (3.39)$$

$$f_{nlm}(t) = \langle F(\lambda, \theta, p, t), \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \rangle \quad (3.40)$$

同様の内積を式 (3.1) 全体に施すことによって, プリミティブ方程式系の 3 次元スペクトルモデルが導かれる.

$$\left\langle \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} + \mathbf{L} \mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F}, \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm} \right\rangle = 0 \quad (3.41)$$

式 (3.35), (3.36), (3.37) で展開した大気変数を式 (3.40) の各項に代入し, 内積の積分計算を実行すると, 空間依存は消えて時間のみの関数となり, 最終的に行列表記のプリミティブ方程式は以下のようなスペクトル表記のプリミティブ方程式系に書き直すことが出来る.

$$\frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i = -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w_j w_k + f_i \quad (3.42)$$

$$i = 1, 2, \dots, K$$

ここで,  $\tau$  は無次元時間,  $\sigma_i$  はラプラス潮汐方程式の固有振動数,  $r_{ijk}$  は非線形相互作用係数で実数となる. 非線形項中の  $r_{ijk}$  は非線形の波-波相互作用 (wave-wave interaction) および帯状-波相互作用 (zonal-wave interaction) に関する相互作用係数 (interaction coefficients) で実数である.  $K$  は全波数で,  $K = (2N + 1)(L + 1)(M + 1)$  である.  $N$  は東西全波数,  $L$  は南北全波数,  $M$  は鉛直全波数を示す. 厳密には  $K \rightarrow \infty$  としなくてはならないが, 通常はある波数で切断して方程式系を構成する.

以上より, 順圧成分と傾圧成分からなる鉛直構造関数, ロスビーモードと重力波モードからなる水平構造関数の両方を用いることで, プリミティブ方程式系をスペクトル表示で表すことができた.

鉛直モード  $m = 0$  だけで方程式系 (3.41) を閉じると

$$\left\langle \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} + \mathbf{L} \mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F}, \mathbf{Y}_0^{-1} \mathbf{\Pi}_{nl0} \right\rangle = 0 \quad (3.43)$$

これをスペクトル表記すると，

$$\frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i = -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w_j w_k + s_i \quad (3.44)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, K$

ここで， $K$  は式 (3.42) の  $K$  とは異なり，順圧スペクトルモデルにおける全波数を意味し， $K = (2N + 1)(L + 1)$  である．本研究では東西波数は  $n = 0, 1, \dots, 20$  で，南北モードはロスビーモード  $l_r = 0, 1, \dots, 20$  の赤道対称モード (奇数モード) で波数切断している．鉛直波数  $m = 0$  のみで方程式系を閉じたこのモデルは，式 (3.44) における外力の順圧成分  $f_i$  の他に順圧-傾圧相互作用の項  $g_i$  が新たに加わってくる．ここでは  $s_i = f_i + g_i$  を順圧成分の外力と呼ぶことにし，これを  $s_i = s_i(w_i, \tau)$  のように従属変数  $w_i$  と時間の関数としてパラメタライズした．

システム行列  $A, B$

$|\epsilon|$  を最小とするようなシステム行列  $A, B$  を同時に求める方法を述べる (本小節ではテンソル表記をベクトル表記とした) ．

外力  $f$  の式から気候値を除いた式は，

$$f = Aw + Bw^* + \epsilon \quad (3.45)$$

で与えられる．外力  $f$  を求める際の回帰係数からなる複素行列  $A$  および  $B$  は， $|\epsilon|$  を最小にするように与えられる．

まず， $A = A_R + iA_I, B = B_R + iB_I, w = w_R + iw_I, w^* = w_R - iw_I$  とすると，

$$\begin{aligned} f &= Aw + Bw^* + \epsilon \\ &= (A_R + iA_I)(w_R + iw_I) + (B_R + iB_I)(w_R - iw_I) + \epsilon_R + \epsilon_I \\ &= A_R w_R - A_I w_I + B_R w_R + B_I w_I \\ &\quad + iA_I w_R + iA_R w_I + iB_I w_R - iB_R w_I + \epsilon_R + \epsilon_I \end{aligned} \quad (3.46)$$

上式を行列表記すると，

$$\begin{pmatrix} f_R \\ f_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_R + B_R & -A_I + B_I \\ A_I + B_I & A_R - B_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_I \end{pmatrix} \quad (3.47)$$



となる．ここで，東西波数 0 はすべて実数のため，東西波数 0 の虚部は存在しないことに注意が必要である．さらに， $A_R + B_R = a$ ， $A_I + B_I = b$ ， $-A_I + B_I = c$ ， $A_R - B_R = d$  とおくと，

$$\begin{pmatrix} f_R \\ f_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_I \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

両辺に右から  $(w_R, w_I)^\top$  をかける．

$$\overline{\begin{pmatrix} f_R \\ f_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^\top} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^\top} + \overline{\begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^\top} \quad (3.49)$$

ここで時間平均をとることで，右辺第二項は 0 となる．よって，

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} f_R \\ f_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^\top} \left[ \overline{\begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^\top} \right]^{-1} \quad (3.50)$$

右辺を計算することで， $a$ ， $b$ ， $c$ ， $d$  が求まり，これらから  $A_R$ ， $A_I$ ， $B_R$ ， $B_I$  を同時に求めることができる．以上より，システム行列  $A$ ， $B$  を求めることができる．

多くの観測値から未知のシステム行列を解くこのような問題を逆問題という．観測データから逆問題を解いてモデルの最適外力を統計的 (Statistical) に求めていることから，このモデルを順圧 S-model と呼んでいる．

本章では，EKF を直接計算可能な順圧 S-model に EKF と EnKF を適応し，パーフェクトモデル実験および現実大気の観測を使った実験を行い，EKF と EnKF の同化性能比較を行った．

## 3.2 パーフェクトモデル実験

まずは、EKF と EnKF が正常に機能するかどうかを調べるために、モデル誤差がないパーフェクトモデルを仮定した実験を行った。具体的には、式 (2.5) の誤差の時間発展において、モデル誤差  $Q = 0$  とした。本実験は、Kondo and Tanaka (2007) に基づいている。

### 3.2.1 実験設定

EKF と EnKF を順圧 S-model に適応し、スペクトル空間でのモデル変数を直接観測して、それを同化した。物理空間での同化の際には、アンサンブルサイズが小さい場合には、遠く離れた点との共分散にサンプリングエラーが混入しているため、局所化によってそれを取り除く必要がある。しかし、スペクトル空間での同化の場合、スペクトル展開係数  $w_i$  は wave-wave interaction により、互いにすべての  $w_i$  と相互作用を持つため、局所化を行うことができない。そこで、波数空間での観測を同化する際には、local patch を持つオリジナル LETKF を用いたものの、局所化を行わず、つまり局所化半径を無限にして同化実験を行った。順圧 S-model に EKF, local patch LETKF を適応したものを、それぞれ S-model-EKF, S-model-EnKF とする。EKF の共分散膨張は 1 % とした。S-model-EnKF のアンサンブルサイズは 20, 50, 100, 410, 1000 で、共分散膨張がそれぞれ 10 %, 3 %, 1 %, 0.5 %, 0.5 % となるようにスプレッドを膨張させた。410 とは、順圧 S-model の自由度である。同化期間は、1990 年 1 月 1 日 00Z から同年 1 月 31 日 00Z までである。大気の実値は順圧 S-model の長期積分とした。順圧 S-model はロスビー波を表現するモデルであるため、それよりスケールの小さな重力波はノイズとなるので、観測値は重力波程度のガウス乱数を観測誤差として真値に上乘せして作成した。観測誤差の大きさは、Tanaka (1985) から  $50 J/m^2$  とした。これらは物理空間での観測誤差に換算すると順圧高度にして 5.9 m, 東西風速で 1.0 m/s, 南北風速で 1.0 m/s 程度である。ここでは単純化のため、すべてのモデル変数を観測したことにした。つまり観測演算子  $H = I$  である。

EnKF は局所化をすることで少ないアンサンブルサイズでも動作することが知られているので、スペクトル空間ではなく実空間において局所化の影響を調べるため、用いた EnKF は、S-model-EnKF の場合とは異なり、non-local patch の LEKTF である。これ

を S-model-LETKF と呼ぶことにする．アンサンブルサイズは，20, 50, 100, 410 で，6 時間毎に実空間で観測を同化した．この実験では，スペクトル空間と同じ観測を用いるために，スペクトル空間で作成した観測を実空間にリトリーブして作成した．観測誤差は，実空間にリトリーブした観測値と真値から計算し，順圧高度 5.9 m, 東西風速 1.0 m/s, 南北風速 1.0 m/s である．実空間の S-model の格子点は，緯度方向に 72 格子点，経度方向に 30 格子点であり，その自由度は大きいので，観測を間引いて全格子点 17 % になるように均一に間引き，それぞれの観測は互いに相関を持たず独立であるとした．局所化半径は，局所化スケールをもって表される．局所化スケールは，ガウス関数の 1 標準偏差で定義される．順圧 S-model は水平 2 次元モデルであるため，水平方向の局所化が存在し，アンサンブルサイズが 20, 50, 100, 410 の場合，局所化スケールはそれぞれ 900 km, 900 km, 1200 km, 1200 km とした．ガウス関数を近似した 5 次関数の裾が 0 になる距離は，3300 km, 3300 km, 4400 km, 4400 km である．共分散膨張については，それぞれ 8 %, 7 %, 8 %, 8 % となるようなスプレッド膨張を行った．

また，局所化の与える影響を調べるために，アンサンブルサイズが 410 であるの場合には，十分にサンプリングエラーが取り除かれると考えられるため，局所化なしの実験も行った．この実験では，スプレッド膨張は 10 % とした．そのほかの設定は，S-model-EnKF と同様である．

EnKF による実験を始めるにあたって，実験開始の初期時刻において初期アンサンブルを用意する必要がある．まず，評価時刻  $t$  での解析値を  $\mathbf{x}_t^a$  とすると，1 日前を初期値とする評価時刻における予報値を  $\mathbf{x}_{t-1}^f$ ，2 日前を初期値とする評価時刻における予報値を  $\mathbf{x}_{t-2}^f$ ，以下同様に， $m$  日前を初期値とする評価時刻における予報値は  $\mathbf{x}_{t-m}^f$  となる．ここで，評価時刻とはアンサンブル予報を行う時刻である．それぞれの予報誤差は，

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_{t-i}^f &= \mathbf{x}_{t-i}^f - \mathbf{x}_t^a \\ i &= 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \quad (3.51)$$

で与えられる．古い初期値を用いた予報誤差のノルムは新しい初期値を用いた予報誤差のノルムより大きいので，このまま  $\delta \mathbf{x}_{t-i}^f$  を初期摂動として用いるには誤差のノルムが大きすぎ，利用することはできない．そこで，予報誤差のリスケールを行う．具体的にはまず規格化を行う．予報誤差のノルムは  $\|\delta \mathbf{x}_{t-i}^f\|$  で与えられるので，これよ

り  $\frac{\delta \mathbf{x}_{t-i}^f}{\|\delta \mathbf{x}_{t-i}^f\|}$  として規格化を行い，これにノルムの基準とする  $j$  日目の予報の予報誤差  $\|\delta \mathbf{x}_{t-j}^f\|$  をかけると初期摂動  $\delta P_i^f$  は，

$$\begin{aligned} \delta P_i^f &= \|\delta \mathbf{x}_{t-j}^f\| \times \frac{\delta \mathbf{x}_{t-i}^f}{\|\delta \mathbf{x}_{t-i}^f\|} \\ i &= 1, 2, 3, \dots, m, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \quad (3.52)$$

で与えられる．本研究では  $j = 7$  とした．つまり予報誤差  $\delta \mathbf{x}_{t-i}^f$  のノルムを 7 日目の初期値からの予報誤差のノルム  $\|\delta \mathbf{x}_7^f\|$  に揃えた．一般的には，7 日目の予報誤差のノルムに合わせるのには，ノルムが大きすぎるため好ましくない．ただ，順圧 S-model は誤差の成長が弱いため，なおかつパーフェクトモデルであるのでより誤差成長が遅いため，7 日目の予報誤差ノルムに合わせた．これは，観測誤差のおよそ 4 倍に相当する．順圧 S-Model は線形性が強く力学的不安定が小さいため，一般的な大循環モデルと比べ初期値依存性が小さい．そのため似通った初期値を数多く作成しても，それは偏ったアンサンブルメンバーを作成していることとなり，数少ないアンサンブルメンバーで効率よく確率分布関数の広がりを捉えるというアンサンブル化のメリットが得られにくいと考えられる．それを考慮に入れると，初期摂動  $\delta P_i^f$  を直交化し，重複する摂動を取り除く必要がある．本研究では初期摂動の直交化に EOF 解析 (Empirical Orthogonal Function Analysis: 経験的直交関数解析) を用いた．EOF 解析をすることで，重複しない成長モードを取り出すことができる．この方法では， $\pm$  のペアの摂動をすることで，最大 820 個の初期アンサンブルを作成できる．しかし，1000 アンサンブルは作成不可能なので，様々な年で 200 個の初期アンサンブルを作成し，それらを束ねて 1000 個の初期アンサンブルを作成した．一方の S-model-EKF で必要な初期解析誤差共分散行列  $P^a$  は，観測誤差共分散行列  $R$  の 2 倍の大きさである．以上のように，同化初期に計算される誤差共分散行列は，必ずしも流れに依存した情報ではないが，同化サイクルを繰り返すことで最適な値に更新されていく．

本実験はパーフェクトモデル実験であるため，真値がわかっている．解析値の精度比較には真値に対する RMSE (Root Mean Square Error) を用いている．RMSE は，物

実空間で計算する場合は、緯度による重みを考慮するため、

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i^a - x_i^t)^2 \cos \phi_i}{\sum_{i=1}^n \cos \phi_i}} \quad (3.53)$$

となり、スペクトル空間で計算する場合は、

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x'^{a_i} - x'^{t_i})^2}{N}} \quad (3.54)$$

となる。上添え字の  $a, t$  は、それぞれ解析 (analysis)、真 (true) を表し、 $n$  は実空間での格子点数、 $N$  はスペクトル空間での変数の数、 $\phi$  は格子点の緯度を表している。また、' はスペクトル空間の変数と実空間の変数を区別するためである。解析アンサンブルスプレッドは、

$$\text{Spread} = \sqrt{\text{trace}(\mathbf{P}^a)} \quad (3.55)$$

と表される。

### 3.2.2 結果

図 3.1 は、S-model-EKF と S-model-EnKF がともに収束したと考えられる 1990 年 1 月 31 日 00Z の解析誤差共分散行列の固有値スペクトルの図である。固有値は  $m - 1$  だけ存在する。解析誤差共分散行列の固有値は推定される解析誤差の分散を示している。アンサンブルサイズが 20 の S-model-EnKF の固有値スペクトルは、S-model-EKF から大きく異なる。しかし、アンサンブルサイズが 50 の S-model-EnKF の固有値スペクトルは、S-model-EKF の固有値スペクトルとおおよそ一致する。さらに、アンサンブルサイズが 100 以上の S-model-EnKF 固有値の大きさは、S-model-EKF より小さい。固有値の大きさは、推定される解析誤差の大きさを表しているため、S-model-EnKF の推定する解析誤差の大きさは、S-model-EKF より小さいことを意味している。これは、EKF が非線形モデルの線形化を必要とするのに対し、EnKF はそれを必要としないことが一因であると考えられる。また、アンサンブルサイズが 410 の場合と 1000 の場合

ではほとんど差がみられない。以上の結果から，S-model-EnKF はアンサンブルサイズが 100 以上であれば収束することがわかった。また，S-model-EKF の第 100 固有値は第 1 固有値の  $1/10^5$  程度であり，大気モデルにおいて解析誤差共分散行列は縮退していることを示している。

図 3.2 は，図 3.1 と同時刻の解析誤差共分散行列の第 1 固有ベクトルの空間分布であり，解析誤差の中で最も卓越した誤差を表している。アンサンブルサイズが 50, 100, 410, 1000 のとき，東部太平洋，アメリカ大陸北部，大西洋には傾圧不安定波が現れている。しかし，アンサンブルサイズが 20 のときは現れていない。一方で，北極には別のピークがみられる。この結果より，S-model-EKF とアンサンブルサイズが 50 以上の S-model-EnKF は，解析誤差パターンは同じものに収束したと言える。図 3.3，図 3.4 は，それぞれ第 2 固有ベクトル，第 3 固有ベクトルの空間分布であるが，第 1 固有ベクトルと異なり S-model-EKF と S-model-EnKF は一致していない。しかし，図 3.3 の (f) と図 3.4 (e) は同じ構造をしている。この結果は，S-model-EKF および S-model-EnKF で卓越する誤差は，おおそ同じであることを示唆している。しかし，S-model-EKF および S-model-EnKF の同じ構造の固有ベクトルが異なる固有値に対応しているのは，おそらく EKF には非線形モデルの線形化が必要であるためであり，必ずしも S-model-EnKF が S-model-EKF に一致する必要はない考えられる。

図 3.5 は，解析誤差共分散行列ではなく予報誤差共分散行列の固有値である。解析誤差共分散行列の固有値スペクトル (図 3.1) と比較すると，予報誤差共分散行列の第 1 ~ 10 固有値の大きさは解析誤差共分散行列の第 1 ~ 10 固有値より，わずかであるが大きいのがわかる。予報誤差共分散行列の固有値は推定される予報誤差の大きさを，解析誤差共分散行列の固有値は推定される解析誤差の大きさを表しているので，解析誤差共分散行列の固有値の方が予報誤差共分散行列の固有値より小さいことは，観測を同化することで予報を修正し，解析誤差を小さくすることに成功したことを意味している。一方で，図 3.6 は，予報誤差共分散行列の固有ベクトルの空間構造である。解析誤差共分散行列の固有ベクトルの空間構造 (図 3.2) と比較すると，ほとんど同じである。

図 3.7 は，S-model-EKF と S-model-EnKF での解析値  $w_i$  とその真値に対する RMSE とアンサンブルスプレッドの時系列である。EKF ではスプレッドは計算されないが，解析誤差共分散行列の対角成分がスプレッドに相当する。観測誤差は  $2.25 \times 10^{-4}$  である。S-model-EKF と S-model-EnKF の解析誤差は，同化サイクルを繰り返すことで小さく

なっていくのを見て取れる．アンサンブルサイズが 50, 100, 410, 1000 の S-model-EnKF では，解析誤差 RMSE はアンサンブルスプレッドと一致している．しかし，アンサンブルサイズが 20 の S-model-EnKF では，アンサンブルメンバーが少ないためかアンサンブルスプレッドを過小評価し，観測を十分に同化できていないことがわかる．アンサンブルスプレッドの大きさは共分散膨張で調整できるが，本実験では解析 RMSE が最も小さくなるように共分散膨張をチューニングしている．RMSE はそれぞれ日々変化するのに対し，アンサンブルスプレッドはほとんど時間変化していない．

図 3.8 は，1990 年 1 月 31 日 00Z の順圧高度場の解析値 (実線) と解析誤差分布 (シェード) である．それぞれの解析値は，非常によく似ていることがわかる．アンサンブルサイズが 20 の S-model-EnKF では，解析誤差は S-model-EKF より大きい．アンサンブルサイズが 50 の S-model-EnKF の解析誤差は，S-model-EKF と同程度である．さらに，アンサンブルサイズが 410 の S-model-EnKF の解析誤差は，アンサンブルサイズが 1000 の場合と比較してもほとんど変わらない．S-model-EKF とアンサンブルサイズが 50 以上の S-model-EnKF の誤差パターンには傾圧不安定が現れており，両者でよく似ている．これらの結果からアンサンブルサイズが 50 の場合の S-model-EnKF の同化性能は，S-model-EKF と同程度であることがわかる．

以上の結果は 1 事例であったが，より統計的に信頼性のある結果を得るために異なった年・季節で 10 事例の実験を行った．図 3.9 は，10 事例の平均した解析値  $w_i$  の RMSE 時系列である．1 事例のときと同様に，解析誤差は同化サイクルを繰り返すことで観測の情報を取り込み，小さくなっていくのがわかる．10 事例の平均であるので，RMSE は滑らかな曲線になっている．アンサンブルサイズが 20 の S-model-EnKF が最も解析誤差が大きく，アンサンブルサイズが 410 と 1000 の場合が最も解析誤差が小さい．アンサンブルサイズが 100 以上の S-model-EnKF では，解析誤差は S-model-EKF より小さい．これは，上記で述べたように EKF には非線形モデルの線形化近似が必要であるからと考えられる．S-model-EnKF の解析 RMSE の大きさは，十分な数のアンサンブルメンバーがあれば S-model-EKF と同程度になり，その数は 50 から 100 であることがわかった．Szunyogh et al. (2005) は，T62/L28 のモデルを用いて EnKF による同化実験を行ったところ、アンサンブルサイズが 40 と 80 の場合でも，局所化を適切に行うことで，実質的な差異は認められなかったと述べられており，本実験の結果と異なる．

そこで最後に，S-model-EnKF と S-model-LETKF を比較した．S-model-EnKF はス

ベクトル空間での観測を同化，S-model-LETKF は実空間での観測を同化している．アンサンブルサイズが 410 の場合は、局所化ありの LETKF と局所化なしの LETKF を比較している．図 3.10 は、1990 年 1 月 31 日 00Z の解析誤差共分散行列の固有値スペクトルの図である．固有値は  $m - 1$  だけ存在する．解析誤差共分散行列の固有値は推定される解析誤差の分散を示している．局所化を行わない LETKF の固有値スペクトルは、局所化を行う LETKF と値が大きく異なる．具体的には、局所化を行わない LETKF の第 30 以降の固有値は、局所化を行う LETKF の固有値より大きい。

図 3.11 は、図 3.10 と同時刻の S-model-LETKF の解析誤差共分散行列の第 1 固有ベクトルの空間分布であり、解析誤差の中で最も卓越した誤差を表している．また比較のため、アンサンブルサイズ 410 の S-model-EnKF の第 1 固有ベクトルを加えてある．S-model-EnKF の第 1 固有ベクトルは、すでに述べているが傾圧不安定波が現れている．しかし、S-model-LETKF の第 1 固有ベクトルには傾圧不安定波は現れていない．第 2 固有ベクトルの空間構造 (図 3.12) には、傾圧不安定波が現れている．特に局所化を行わない S-model-LETKF の第 2 固有ベクトルの構造は、S-model-EnKF の第 1 固有ベクトルの構造とよく似ている．実空間で局所化を行わない S-model-LETKF とスペクトル空間で観測を同化する S-model-EnKF は、ともにすべての観測を同化しているので、両者の固有ベクトルの構造が似ているのは自然であり、局所化を行う S-model-LETKF の固有ベクトルの構造と、S-model-EnKF の固有ベクトルの構造が異なるのは、不自然ではない。

図 3.13 は、S-model-LETKF の解析値  $w_i$  の RMSE の時系列である．比較のためアンサンブルサイズが 50 のときの S-model-EnKF の解析 RMSE を加えてある．観測誤差は  $2.25 \times 10^{-4}$  であり、解析誤差は観測誤差より十分小さく、アンサンブルスプレッドは RMSE と一致しており (図略)、S-model-LETKF は機能していると考えられる．S-model-LETKF の解析 RMSE は、アンサンブルサイズが 20 以上でも収束している．しかし、S-model-LETKF の解析 RMSE は S-model-EnKF と比較すると非常に大きい．以上の結果から、S-model-EnKF には及ばないものの、S-model-LETKF はよく機能しており、Szunyogh et al. (2005) の結果とも矛盾していない．しかしながら、実空間での観測を同化する S-model-LETKF の解析 RMSE は、スペクトル空間での観測を同化する S-model-EnKF の解析 RMSE に収束しなかった．

そこで、アンサンブルサイズ 410 で局所化半径を無限大、つまり局所化なしの実験



を行った。図 3.14 は、アンサンブルサイズが 20, 410 で局所化を行う場合、およびアンサンブル 410 で局所化を行わない場合の S-model-LETKF の RMSE を比較した図である。図 3.14 によると、局所化の有無、アンサンブルサイズの大きさに関わらず、解析誤差に大きな差はないように見える。しかしながら、アンサンブルサイズを 410 まで増やし、局所化を行わなくても、S-model-EnKF ほど解析誤差を小さくすることはできていないことがわかる。一方で、局所化を行う場合と行わない場合の解析誤差に大きな差がないことから、アンサンブルサイズが 410 程度であれば、遠く離れた点との相関に含まれるサンプリングエラーを取り除くことができたことを示している。また、適切に局所化を行うことで、アンサンブルサイズが 20 のように小さくても、十分解析誤差を小さくできることを表している。

図??は、アンサンブルサイズ 410 で局所化ありの S-model-LETKF と局所化なしの S-model-LETKF の解析値  $w_i^a$  と、真値  $w_i^a$  の差に対して EOF 解析を行い、その第 1 固有ベクトルと第 2 固有ベクトルの空間構造である。EOF 解析の期間は、LETKF が十分に収束したと考えられる 1990 年 1 月 15 日 18Z から 1990 年 1 月 31 日 00Z までである。この図は、真値に対して解析値にどのような誤差が残っているかを表している。(a) の局所化を行う場合、第 1 固有ベクトルには環状のような構造が現れており、その寄与率はおよそ 48 %にも達する。一方、(b) の局所化を行わない場合、(a) と同様に第 1 固有ベクトルには環状構造が現れているが、寄与率は 19 %程度である。このことから、局所化を行うことで、波数 0 もしくはそれより少し大きな波数に誤差がたまりやすいことを示している。

### 3.2.3 考察

本実験では、full rank EKF と EnKF を筑波大学で開発された順圧 S-model に適応し、それぞれ S-model-EKF, S-model-EnKF とした。そして両フィルターをモデル誤差を考えないパーフェクトモデル実験の下で、スペクトル空間の観測を同化し、その同化性能を比較した。さらに、局所化の概念を取り入れ実空間での観測を同化し (S-model-LETKF)、同様に比較した。S-model-EKF, S-model-EnKF, S-model-LETKF の比較には、解析・予報誤差共分散行列、解析 RMSE, アンサンブルスプレッドを用いた。

まず、十分データ同化サイクルを繰り返した後の十分収束したと考えられる S-model-

EKF, S-model-EnKF の解析誤差共分散を固有値分解し, 固有値と固有ベクトルの比較を行った. S-model-EKF の第 100 固有値は, 第 1 固有値の  $10^5$  程度であり, 解析誤差共分散行列は縮退しているといえる. このことは, 自由度が 410 の順圧 S-model においては, アンサンブルサイズは 100 程度で十分であることを示唆している. 固有値の大きさに着目すると, S-model-EnKF の固有値の大きさは S-model-EKF より小さい. 固有値の大きさは, EnKF および EKF によって推定された誤差の大きさを示している. そのため, S-model-EKF の固有値が大きい理由として, EKF には非線形モデルの線形化近似が必要であり, その線形化近似による誤差が S-model-EKF の固有値を大きくしている一因であると考えられる. 一方, 第 1 固有ベクトルの空間構造を見てみると, アンサンブルサイズが 100 以上のとき, S-model-EnKF は S-model-EKF に収束していることがわかった. 解析誤差の空間分布は傾圧不安定波であるが, これは順圧 S-model が傾圧不安定をパラメタライズしていることに起因し, それがもっとも発達する誤差として第 1 固有ベクトルに現れたと考えられる. もう 1 つの成長誤差は, 北極に現れている. これはおそらく非線形相互作用によって現れてきたものであると思われる. 以上より, S-model-EnKF が S-model-EKF に収束するためには, 50 ~ 100 程度のアンサンブルサイズが必要であるということである.

予報誤差共分散行列と解析誤差共分散行列を比較すると, 固有ベクトルの空間構造はほとんど変化せず, 最も大きな固有値とその周辺の値が解析誤差共分散行列の固有値の方が小さい. これは, パーフェクトモデル実験においては, データ同化にモデルバイアスは影響しないため, 傾圧不安定をパラメタライズしている順圧 S-model では, 不確実性の高い傾圧不安定が卓越する誤差として第 1 固有ベクトルに現れたと考えられる. 固有値の大きさに関しては, 観測を同化することで予報により広がった共分散行列を小さくする働きがあるため, 固有値が小さくなったといえる.

次に, S-model-EKF, S-model-EnKF の解析値について RMSE とアンサンブルスプレッドの比較を行った. アンサンブルスプレッドは EnKF が推定する解析誤差であるため, 実際の解析誤差である RMSE に一致することが望ましい. 本実験では, アンサンブルサイズが 20 以上の場合, S-model-EnKF のアンサンブルスプレッドは RMSE に一致した. つまり, S-model-EnKF が実際の解析誤差を見積もるためには少なくとも 50 メンバー以上は必要であるということである. RMSE とアンサンブルスプレッドを詳しく見てみると, RMSE は細かな時間変化が大きいアンサンブルスプレッドはほと

んど時間変化しない．これは，RSME が同化する観測の観測誤差の悪影響を受けやすいため時間変化が大きく，一方のアンサンブルスプレッドはモデルの特徴を表現するものであるため，つまり誤差の時間発展の遅い順圧 S-model の特徴を表すため，アンサンブルスプレッドの時間変化は小さいと考えられる．順圧高度場での解析誤差分布では，アンサンブルサイズが 50 以上の S-model-EnKF の誤差パターンは S-model-EKF によく似ており，アンサンブルサイズを大きくすると解析誤差はより小さくなるが，アンサンブルサイズが 410 と 1000 の場合では誤差のパターンには違いがほとんど見られない．これらの結果から，S-model-EKF と S-model-EnKF の作り出す解析値の誤差パターンは非常に似通ったものであり，アンサンブルサイズが十分に大きい S-model-EnKF の解析誤差は，S-model-EKF の解析誤差より小さくなる．これは固有値・固有ベクトルを比較した場合と同じで，EnKF は非線形モデルをそのまま使用できることが一因ではないかと考えられる．

統計的な信頼性を検証するために，同様の実験を 10 事例行い，その平均を求めた．S-model-EKF の RMSE は，1 事例の場合と同様に，アンサンブルサイズが 50 の S-model-EnKF の RMSE と同程度であった．S-model-EnKF のアンサンブルサイズが 100, 410, 1000 の場合は，S-model-EKF の RMSE より小さく，これは EKF の非線形モデルの線形化近似が影響していると考えられる．さらに，アンサンブルサイズによる違いを見ると，410 の場合と 1000 の場合では，ほとんど RMSE に変化がないことがわかった．これらの結果から，S-model-EnKF は S-model-EKF を上回る性能を持っていることがわかった．Zang and Malanotte-Rizzoli (2003) では，モデルの非線形性が強い場合は EnKF が reduce rank EKF に同化性能で勝っていることが示されているが，本研究の誤差成長の遅い順圧 S-model を用いた実験では，full rank EKF の場合であっても，非線形性がある場合には EnKF の方が同化性能がよいことが示された．これは，EKF には非線形モデルの線形化近似が含まれているためであると考えられる．

最後に，S-model-LETKF を用いて実空間の観測を同化する際に局所化を導入し，その影響を検証した．S-model-LETKF を用いた実空間同化実験によると，アンサンブルサイズが 20 であっても，解析誤差は観測誤差より十分小さくなることが確認され，S-model-LETKF は機能していることがわかる．また，さらにアンサンブルサイズを大きくしても大きな違いは見られなかった．Szunyogh et al. (2005) では、NCEP の Global Forecast System (GFS) に LEKF を適応し、適切に局所化を行うことでアンサ

サンプルサイズが40の場合と80の場合では、解析値に実質的な差異が認められなかったことが示されているが、順圧 S-model の自由度を考えると、本実験の結果は妥当と言える。実空間同化の S-model-LETKF とスペクトル空間同化の S-model-EnKF の RMSE を比較すると、S-model-EnKF の方が RMSE が小さい。1 つ目の理由として、局所化の影響が考えられる。順圧 S-model の自由度は、スペクトル空間では非常に小さいが、実空間では非常に大きくなってしまふ。そこで、局所化を行うことで、数少ないアンサンブルメンバーによって離れた点との共分散に見積もり誤差が混入するのを防ぎ、EnKF は機能するようになる。S-model-LETKF では、総観規模の擾乱のような局所的な解析誤差を捕らえることはできるが、テレコネクションや半球規模に広がる誤差を捕らえることはできない。2 つ目の理由として、実空間の観測がスペクトル空間の観測と違うと言うことが考えられる。本実験の実空間の観測は、スペクトル空間で作成した観測を実空間にリトリーブして得られたものであり、空間的に局所的な情報を持ち、リトリーブにより誤差が混入している可能性があることが考えられる。さらに、観測誤差設定がスペクトル空間での設定と独立に行われ、実空間およびスペクトル空間での観測誤差設定の同一性が保証されていない可能性もある。その一方で、S-model-EnKF はモデルの基本的な自由度の観測を直接同化しているため、実空間リトリーブ観測の同化に比べて精度が良くなることは最もらしく、また、スペクトル観測は半球スケールの情報をもっている可能性がある。さらに、空間的に局在化していない観測を同化して、解析値に拘束をかけるので、大きなスケールのシグナルを捕らえやすいとも考えられる。また、スペクトル空間の観測を同化する際には局所化を適応できないため、RMSE の収束は実空間の観測を同化する場合に比べて遅れてしまふ。従って、実空間同化の S-model-LETKF とスペクトル空間同化の S-model-EnKF の解析値に違いが現れたのは、局所化の影響、観測の違い、順圧 S-model の誤差相関スケールなど様々な要因が考えられる。

そこで、アンサンプルサイズが十分であると考えられる 410 の場合に、局所化を行う S-model-LETKF と局所化を行わない S-model-LETKF を比較した。その結果、局所化を行わず、北半球全域の観測を同化する S-model-LETKF と、局所化を行った S-model-LETKF の解析誤差の比較では、局所化を行う S-model-LETKF の方がわずかに解析誤差が小さいが、その差はほとんどないことがわかった。その理由としては、アンサンプルサイズが十分であるために、遠く離れた点との相関にサンプリングエラーがほとん

ど混入しなかったことが挙げられる。しかし、遠く離れた観測からも重要なシグナルを捕らえることのできたものの、そのインパクトは小さく、結果としてほとんど差が現れなかったのではないかと考えられる。しかしながら、スペクトル空間の観測を同化する S-model-EnKF の性能には及ばなかった。これは、実空間での観測はスペクトル空間の観測をリトリーブして作成されたものであり、リトリーブによる誤差が混入するという上記の‘2つ目の理由’であると考えられる。一方で、S-model-LETKF による解析値と真値の差は、真の解析誤差を表しているが、その解析誤差に対して EOF 解析を行い、解析値に蓄積された誤差パターンを調べた。その結果、局所化の有無にかかわらず、第 1 固有ベクトルには環状構造が現れた。局所化を行う S-model-LETKF の場合は、第 1 固有ベクトルの寄与率は 48 % に達した。また、局所化を行わない S-model-LETKF の場合は、第 1 固有ベクトルの寄与率は 19 % に抑えられた。これは、局所化を行うことで、波数 0 のような小さな波数の誤差が解析値に蓄積されやすいことを示している。つまり、局所化を行うことで小さな波数の誤差を取り除くことができない。しかし、自由度の大きな一般的な数値モデルの場合、アンサンブルサイズには限りがあるため、局所化なしでは EnKF は機能せず、局所化は必要な技術である。そのため、例えば、帯状平均を同化するというような、小さな波数の誤差を取り除くようなことが必要である。

### 3.2.4 結論

本研究での実験の結果、力学的不安定の弱い順圧 S-model に full rank の EKF, EnKF を適応した S-model-EKF と S-model-EnKF を、モデル誤差を含まないパーフェクトモデルを仮定した実験を行うことで比較した。この際、S-model-EKF と S-model-EnKF はモデルの基本的な自由度の観測を直接同化している。その結果、S-model-EKF と S-model-EnKF の解析誤差は、観測誤差を大幅に下回り、データ同化は成功した。さらに、S-model-EnKF は S-model-EKF を上回る同化性能を持っていることが示された。そして S-model-EnKF は、アンサンブルサイズを 20 から 50 に大きくすることで大幅に RSME は改善し、100 以上にすることで、RMSE は収束した。

一方、データ同化を実空間で行う S-model-LETKF を構築し、局所化の影響を調査した。その際の観測は、スペクトル空間から実空間にリトリーブして得られたものである。その結果、S-model-LETKF の解析誤差共分散行列の固有値スペクトルは、スペク

トル空間の観測を同化する S-model-EnKF に収束しなかった。しかし、局所化を行わない S-model-LETKF の解析誤差共分散行列の第 2 固有ベクトルが、S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の第 1 固有ベクトルにほぼ一致するなど、共通点も見られた。また、S-model-LETKF の解析誤差は、観測誤差を下回った。アンサンブルサイズを 20 から 410 まで変化させても、S-model-LETKF の解析誤差に大きな差はなく、小さいアンサンブルサイズであっても局所化を用いることで、S-model-LETKF は安定して動作した。さらに、アンサンブルサイズが 410 の場合は、局所化を行わずとも S-model-LETKF は安定して動作し、局所化を用いた S-model-LETKF の解析誤差を下回った。しかし、スペクトル空間の観測を直接同化する S-model-EnKF には収束しなかった。

### 3.3 インパーフェクトモデル実験

第 3.2 節では, S-model-EKF および S-model-EnKF をパーフェクトモデルを仮定した実験の元で比較し, S-model-EnKF の有用性を確かめた. そこで本節では, NCEP/NCAR 再解析 (Kalnay et al. 1996) を観測と見立てることで, モデル誤差が含まれている場合の実験を行った.

#### 3.3.1 実験設定

本実験では, 第 3.2 節で開発した S-model-EKF および S-model-EnKF をそのまま用いる. 観測には NCEP/NCAR 再解析を用い, その詳細は以下の通りである.

- 水平グリッド間隔:  $2.5^{\circ} \times 2.5^{\circ}$
- 鉛直グリッド間隔: 17 層 (1000, 925, 850, 700, 600, 500, 400, 300, 250, 200, 150, 100, 70, 50, 30, 20, 10 hPa)
- 気象要素: 水平風 ( $u, v$ ), ジオポテンシャル高度  $\phi$
- 期間: 1950 年 1 月 1 日 ~ 2007 年 12 月 31 日
- 時間間隔: 0000Z, 0600Z, 1200Z, 1800 Z

再解析データとは, 同一の数値予報モデルとデータ同化手法を用いて過去数 10 年間にわたり得られてきた観測を同化し, 長期間にわたって出来る限り均質になるように作成したデータセットのことである. このような均質な大気解析データセットは, きわめて信頼度の高い基礎資料になりうる. 特に気候変動の解明, 大気大循環の解析と全球のエネルギー循環の研究の際には有用である. NCEP/NCAR では 1949 年 1 月から 50 年以上という長期にわたって同一のデータ同化手法により再解析が行われており, このデータは解析に用いることが出来る. ただし, 1979 年に初めて人工衛星 TIROS が打ち上げられ, 客観解析に初めて衛星データが導入されたことにより, 1979 年を境にデータの不連続的な変動が残っていることに留意しなくてはならない. モデルや解析スキーム等による見かけの気候変動は取り除かれているが, 入力データの質の不連続は明瞭に残っている. また,  $2.5^{\circ} \times 2.5^{\circ}$  の等圧面データには, すべての変数に対して

T30 の波数切断で平滑化施されているため、高緯度地方では波動状の誤差が顕著に現れる。しかし長周期の変動の研究では、長期間にわたる均質なデータである再解析データは貴重である。NCEP/NCAR 再解析データに用いられている予報モデルの水平分解能は T62、鉛直分解能は 30 層、データ同化手法は 3 次元変分法で、その解析レベルはモデル面である。ただし、先に述べたとおり等圧面データには平滑化のために T30 の波数切断が行われている。

本実験では、NCEP/NCAR 再解析を 3 次元ノーマルモード展開した際の展開係数  $w_i$  を観測としたので、第 3.2 節と同様にスペクトル空間の観測の同化実験である。そのため、局所化は適応していない。再解析を現実大気の観測と見立てて同化するためモデル誤差が混入し、EKF, EnKF はうまく機能しないことが考えられる。そこで、モデル誤差  $Q$  に相当するものを共分散膨張によって補う。本実験では、S-model-EKF の共分散膨張は 10 % とした。一方、S-model-EnKF のアンサンブルサイズは 200, 250, 300, 410, 1000 で、共分散膨張がそれぞれ 200 %, 170 %, 80 %, 65 %, 65 % となるようにスプレッドを膨張させた。膨張係数が大きいように思われるかもしれないが、順圧 S-model はモデルバイアスが大きいので、膨張係数を大きくしなければ LETKF が動作しなかったため、このように大きな値になってしまった。アンサンブルサイズ 100 で実験を行ったが、収束しなかったため上記記載には含めていない。410 とは、順圧 S-model の自由度である。同化期間は、北極振動指数の急変が起こった 1989 年 1 月 1 日 00Z から同年 1 月 31 日 00Z を含む、10 事例である。大気の実値はわからないが、ここでは観測に解析値が収束するかどうかを調査する。順圧 S-model はロスビー波を表現するモデルであるため、それよりスケールの小さな重力波はノイズとなる。それが NCEP/NCAR 再解析に含まれている誤差であると想定され、Tanaka (1985) から、観測誤差の大きさは  $50 \text{ J/m}^2$  とした。これらは物理空間での観測誤差に換算すると順圧高度にして 5.9 m、東西風速で 1.0 m/s、南北風速で 1.0 m/s 程度である。ここでは単純化のため、すべてのモデル変数を観測したことにした。つまり観測演算子  $H = I$  である。

初期アンサンブルに関しては、前節では過去において成長してきた誤差を作成することで初期アンサンブルを生成したが、本実験では順圧 S-model の長期積分から適当な日付の予報値を必要なアンサンブルメンバーの数だけ選んで作成した。初期アンサンブルは、初期の解析時刻での大気の状態を表しているわけではないが、解析サイクルを繰り返すことで観測を同化し現実の大気の状態へと収束すると考えられる。実際、



Mihoshi and Yamane (2007) では、初期アンサンブルはモデルの長期ランから選ばれている。

解析値の精度を確かめるために、現実大気の観測を同化する本実験では真値がわからないため、観測に対する RMSE を用いた。本実験はスペクトル空間で行われているので、

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x^{a_i} - x^{o_i})^2}{N}} \quad (3.56)$$

となる。上添え字の  $a, o$  は、それぞれ解析 (analysis)、観測 (observation) を表し、 $N$  はスペクトル空間での変数の数を表している。解析アンサンブルスプレッドは、

$$\text{Spread} = \sqrt{\text{trace}(\mathbf{P}^a)} \quad (3.57)$$

と表される。

### 3.3.2 結果

図 3.16、図 3.19 は、S-model-EKF と S-model-EnKF がともに収束したと考えられる 1989 年 1 月 31 日 00Z の解析誤差共分散行列および予報誤差共分散行列の固有値スペクトルの図である。固有値は  $m - 1$  だけ存在する。解析誤差共分散行列の固有値は推定される解析誤差の分散を示し、予報誤差共分散行列の固有値は予報誤差の広がりを示している。S-model-EnKF の固有値スペクトルは S-model-EKF から大きく異なるが、共分散膨張が S-model-EKF より大きいことを考えれば妥当であると考えられる。解析誤差共分散行列は、予報誤差共分散行列に観測の情報を取り込むことで解析値の確かさを向上させるので、解析誤差共分散行列の固有値が予報誤差共分散行列より小さくなるのは理解できる。アンサンブルサイズが 410 の場合と 1000 の場合は、固有値の差はほとんど認められないが、第 350 以降の固有値の大きさが異なる。パーフェクトモデル実験と異なり、第 1 ~ 10 固有値が非常に大きく、第 300 固有値あたりから非常に小さくなり、解析・予報誤差共分散行列は大きく縮退しているとは言えない。また、第 10 固有値までの固有値が非常に大きいのは、順圧 S-model の中で特に成長する誤差パターンは 10 個である可能性、もしくは東西波数  $n = 0$  の自由度は 10 であるので、東西波数  $n = 0$  が関わっている可能性がある。

そこで、固有ベクトルの空間構造を調べてみる。図 3.17, 図 3.18 は、図 3.1 と同時刻の解析誤差共分散行列の第 1 固有ベクトルおよび第 2 固有ベクトルの空間構造であり、解析誤差の中で最も卓越する誤差とそれに次ぐ誤差の空間構造を表している。図 3.17 の第 1 固有ベクトルには、S-model-EnKF および S-model-EKF では、アンサンブルサイズの違いによる空間構造の違いはあるが、すべてにおいて環状パターンが現れている。さらに図 3.17 の第 2 固有ベクトルの空間構造も同様の結果となっている。また、第 10 固有ベクトルまでを比較してみたが、同様に環状パターンが現れ、S-model-EKF と S-model-EnKF を比較では第 6 固有ベクトルまではその空間構造はほぼ一致した (図略)。

一方、図 3.20, 図 3.21 は、予報誤差共分散行列の第 1 固有ベクトルと第 2 固有ベクトルの空間構造である。解析誤差共分散行列の固有ベクトルと異なり、第 1 固有ベクトルには傾圧不安定波が現れている。アンサンブルサイズが大きくなればなるほど、傾圧不安定波がはっきりしており、より S-model-EKF の誤差パターンに近づく。第 2 固有ベクトルは環状モードであるが、ところどころにピークが見られる。解析誤差共分散行列は、観測の情報を取り込んだ影響で予報誤差共分散行列を修正したものであると考えられるので、固有ベクトルの構造が変わるのは不自然ではない。傾圧不安定のような成長しやすい誤差パターンを観測の同化によって修正したと言える。また、第 10 固有ベクトルまでの空間構造を比較してみると、同様に傾圧不安定波が現れており、第 5 固有ベクトルの空間構造までが S-model-EKF と S-model-EnKF でほぼ一致した。S-model-EKF は非線形モデルの線形化近似が必要なので、必ずしも S-model-EnKF に一致するとは限らないが、両者の解析および予報の最も成長する誤差パターンは非常によく似ており、同じ誤差パターンに収束したと言える。

図 3.22 は、S-model-EKF と S-model-EnKF での解析値  $w_i$  とその観測に対する RMSE とアンサンブルスプレッドの時系列である。EKF ではスプレッドは計算されないが、解析誤差共分散行列の対角成分がスプレッドに相当する。 $w_i$  は、重力波をフィルタリングしてロスビー波を再現したものであるため、観測誤差としては、重力波に相当する  $2.25 \times 10^{-4}$  とした。S-model-EnKF の解析誤差は、アンサンブルサイズが 200 のときはアンサンブルスプレッドに対して RMSE が大きい。これは膨張係数をさらに大きくしても改善しなかった。また RMSE の大きさは解析初期とその後でほとんど改善されず、観測誤差  $2.25 \times 10^{-4}$  と同程度である。これは、アンサンブルメンバーが少ないためかアンサンブルスプレッドを過小評価し、観測を十分に同化できていないことがわかる。その

ほかのアンサンブルサイズでは、アンサンブルスプレッドに対して RMSE は一致しており、観測誤差よりも小さくなっているのがわかる。S-model-EKF では解析初期において、RMSE が 0 であるが、これは初期値に観測 (NCEP/NCAR 再解析) を用いたためである。S-model-EKF のスプレッドは RMSE と比較してやや小さいが、これ以上膨張係数を大きくすると S-model-EKF が発散した (図略)。S-model-EKF の RMSE は、アンサンブルサイズ 200 の S-model-EnKF より小さいが、アンサンブルサイズ 250 の S-model-EnKF より大きい。パーフェクトモデル実験同様に、RMSE はそれぞれ日々変化するのに対し、アンサンブルスプレッドはほとんど時間変化していない。

図 3.23 は、1989 年 1 月 31 日 00Z の順圧高度場の解析値 (実線) と解析誤差分布 (シェード) である。アンサンブルサイズが 200 の S-model-EnKF では、解析誤差は S-model-EKF より大きい。アンサンブルサイズが 250 以上の S-model-EnKF の解析誤差は、S-model-EKF より小さい。さらに、アンサンブルサイズが 300 の S-model-EnKF の解析誤差は、アンサンブルサイズが 1000 の場合と比較してもほとんど変わらない。S-model-EKF とすべての S-model-EnKF の誤差パターンには傾圧不安定が現れており、ピークの位置は非常によく似ている。これらの結果からアンサンブルサイズが 250 程度場合の S-model-EnKF の同化性能は、S-model-EKF と同程度であることがわかる。

以上の結果は 1 事例であったが、より統計的に信頼性のある結果を得るために異なった年・季節で 10 事例の実験を行った。図 3.24 は、10 事例の平均した解析値  $w_i$  の RMSE 時系列である。1 事例のときと同様に、解析誤差は同化サイクルを繰り返すことで観測の情報を取り込み、小さくなっていくのがわかる。10 事例の平均であるので、RMSE は滑らかな曲線になっている。アンサンブルサイズが 200 の S-model-EnKF が最も解析誤差が大きく、観測誤差を下回ることができないが、アンサンブルサイズが 250 以上の場合は観測誤差を下回り、データ同化が機能している。さらにアンサンブルサイズが 410 と 1000 の場合が最も解析誤差が小さい。アンサンブルサイズが 300 以上の S-model-EnKF では、解析誤差は S-model-EKF より小さく、S-model-EKF とアンサンブルサイズ 250 の S-model-EnKF が同程度の性能である。S-model-EKF の解析 RMSE の大きさは、十分な数のアンサンブルメンバーがあれば S-model-EnKF と同程度になり、その数は 250 程度であることがわかった。

### 3.3.3 考察

本実験では、full rank EKF と LETKF を筑波大学で開発された順圧 S-model に適応し、それぞれ S-model-EKF、S-model-EnKF とし、モデル誤差を考えないパーフェクトモデル実験で両フィルターが機能するかどうかを確かめた上で、モデル誤差を考慮した実験を行った。具体的には NCEP/NCAR 再解析を 3 次元ノーマルモード展開し、その展開係数  $w_i$  をスペクトル空間で得られた観測として同化し、その同化性能を比較した。S-model-EKF、S-model-EnKF の比較には、解析・予報誤差共分散行列、解析 RMSE (対観測)、アンサンブルスプレッドを用いた。

まず、十分データ同化サイクルを繰り返した後の十分収束したと考えられる S-model-EKF、S-model-EnKF の解析誤差共分散を固有値分解し、固有値と固有ベクトルの比較を行った。パーフェクトモデル実験とは異なり、固有値スペクトルは第 1 ~ 10 固有値が値が大きく、第 11 ~ 300 固有値までは緩やかに小さくなり、以降の固有値は急激に小さくなる。このことは、S-model-EnKF が S-model-EKF を近似するためには、アンサンブルサイズは 300 以上も必要であることを示している。しかし実際には EKF は非線形モデルの線形化という EnKF にはない近似を行っているため、S-model-EnKF が S-model-EKF と同等の性能を実現するためには、アンサンブルサイズは 300 より少ないと考えられる。実際、RMSE の比較ではアンサンブルサイズ 250 程度で、S-model-EnKF は S-model-EKF と同程度の性能であった。

一方、固有ベクトルの空間構造を見てみると、第 1 ~ 6 固有ベクトルまでは S-model-EnKF は S-model-EKF に収束していることがわかった。予報誤差共分散行列の固有ベクトルに現れる特徴は主に傾圧不安定波である。この結果はパーフェクトモデル実験と一致し、順圧 S-model が傾圧不安定をパラメタライズしていることに起因し、それが最も発達する誤差として現れてきたと考えられる。しかし、解析誤差共分散行列の固有ベクトルには、傾圧不安定波は現れず、環状パターンが現れる。値が大きい固有値の数は 10 個であり、これらに対応する固有ベクトルの空間構造はすべて環状であった。また、値が大きい固有値の数と東西波数  $n = 0$  の自由度の数と同じ 10 である。これは観測の情報を同化することで、予報誤差共分散行列は解析誤差共分散行列に変形され、誤差分散の大きい傾圧不安定は、観測の情報によって修正され、東西波数  $n = 0$  の環状パターンが残ったと考えられる。実際に解析誤差共分散行列の固有値は、予報

誤差共分散行列の固有値より小さくなっている。

しかし、観測値と解析値の差を見てみると、その卓越する誤差パターンは傾圧不安定波である。S-model-EKF と S-model-EnKF によって見積もられる解析誤差と実際の誤差は異なることを示している。これは EKF, EnKF がモデルバイアスに非常に敏感であるため、順圧 S-model の大きなバイアスの悪影響を受けたものと考えられる。このことは、共分散膨張係数をパーフェクトモデル実験より大きな値にし、アンサンブルブレッドを広げてやらないと S-model-EnKF が動作しないことから、モデルバイアスが非常に大きいことがわかる。EnKF によるバイアス補正は、Beak (2006) などで行われており、そのような手法を実装する必要がある。もしくは、共分散膨張を multiplicative inflation ではなく、モデルバイアスを考慮するような摂動を解析アンサンブルに足し込む additive inflation を用いるという方法もある。

S-model-EKF と S-model-EnKF の RMSE の比較という点では、S-model-EnKF アンサンブルサイズが 250 以上でないと S-model-EKF を近似できない。10 事例の平均からこのことは確かめられた。これは、パーフェクトモデル実験でアンサンブルサイズが 100 で十分でサンプリングエラーを除去できるという結果と異なる。モデルのバイアスが大きい場合、アンサンブルサイズを大きくして、さまざまな可能性を考慮することが必要であるため、より大きなアンサンブルサイズが必要なかもしれない。順圧 S-model は初期値敏感性が小さく、外力の推定にバイアスがあると考えられているため、加藤 (2006), 近藤 (2006) で用いられているバイアス補正アンサンブルを組み込むか、Buizza (1999) の Stochastic physics を導入すれば、アンサンブルサイズを小さくできる可能性がある。

EnKF は無限のアンサンブルメンバーをそろえることでサンプリングエラーがなくなり、EKF を近似できる。しかし本実験では、アンサンブルサイズ 300 の S-model-EnKF と 410 の S-model-EnKF と 1000 の S-model-EnKF ではその解析値にほとんど違いは見られず、アンサンブルサイズはモデルの自由度以下であっても十分であることが確かめられた。これは、モデルによる変数間の拘束により、モデルの実質的な自由度は見かけの自由度より小さいこと示しており、少ないアンサンブルメンバーによるサンプリングエラーは残るのもの、それはずっと小さいものであると考えられる。さらに順圧 S-model は非線形モデルであるため、非線形モデルの線形化を必要とする。また、本実験は波数空間での同化実験であるため、実空間で同化実験を行う場合には局所化を

適応することができ、よりアンサンブルサイズを小さくできると言われている。ただ、パーフェクトモデル実験で示したように、実空間では局所化によって本来取り込まれるべき離れた点の重要なシグナルを無視してしまう可能性があるので注意が必要である。

### 3.3.4 結論

本研究での実験の結果，力学的不安定の弱い順圧 S-model に full rank EKF, EnKF を適応した S-model-EKF と S-model-EnKF を，NCEP/NCAR 再解析を観測値として同化する実験を行うことで比較した．この際，S-model-EKF と S-model-EnKF はモデルの基本的な自由度の観測を直接同化している．その結果，S-model-EKF とアンサンブルサイズが 250 以上の S-model-EnKF の解析誤差は，観測誤差を下回り，データ同化は成功した．さらに，S-model-EnKF は S-model-EKF を上回る同化性能を持っていることが示された．そして S-model-EnKF 様々な場で様々な場では，アンサンブルサイズを 200 から 250 に大きくすることで大幅に RSME は改善し，300 以上にすることで，RMSE は収束した．

# Eigenvalue for EKF and EnKF

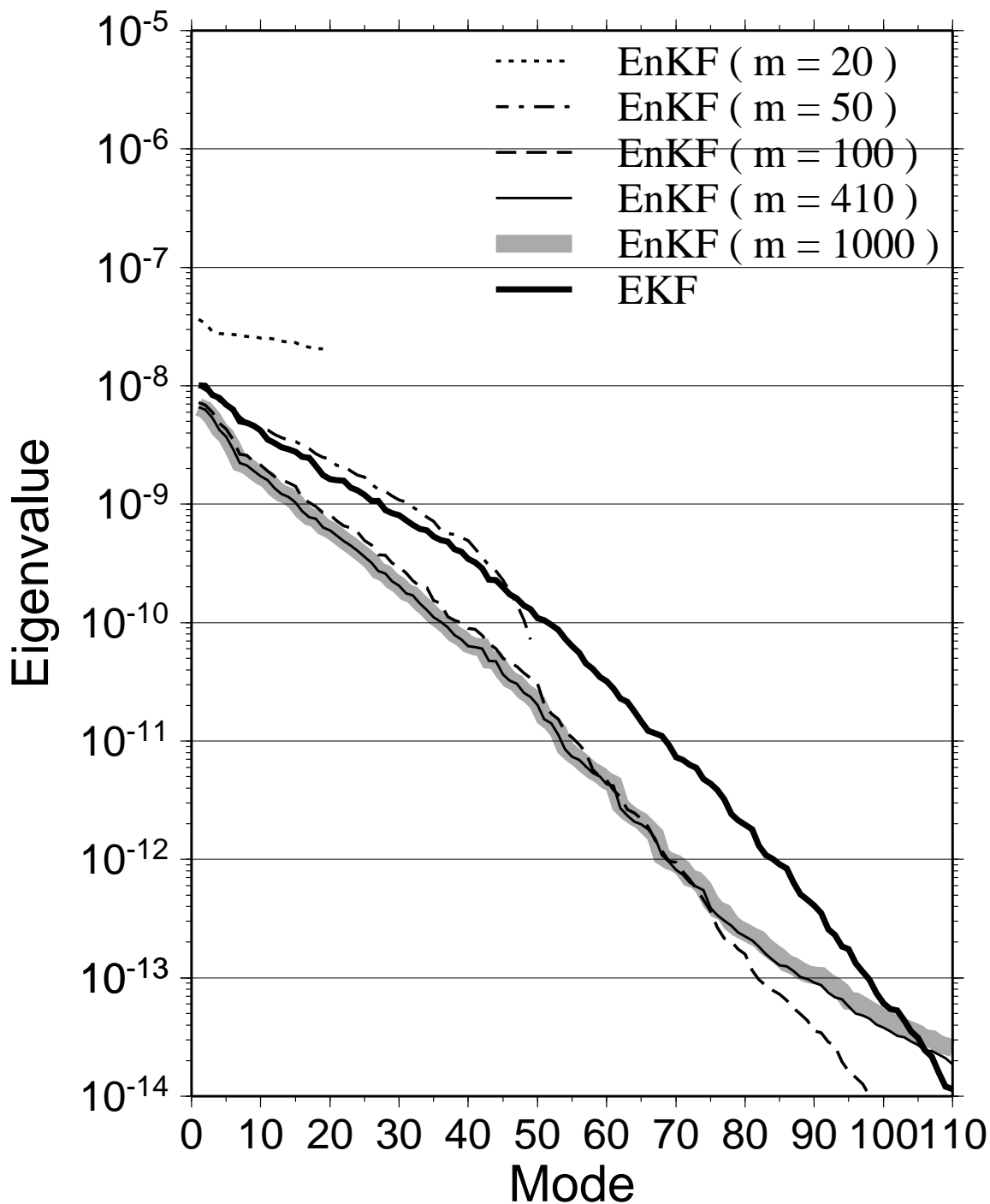


図 3.1: 1990 年 1 月 31 日 00Z における S-model-EKF および S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の固有値．アンサンブルサイズは 20, 50, 100, 410, 1000.



## 1st Eigenvector for Analysis Cov. EKF vs EnKF

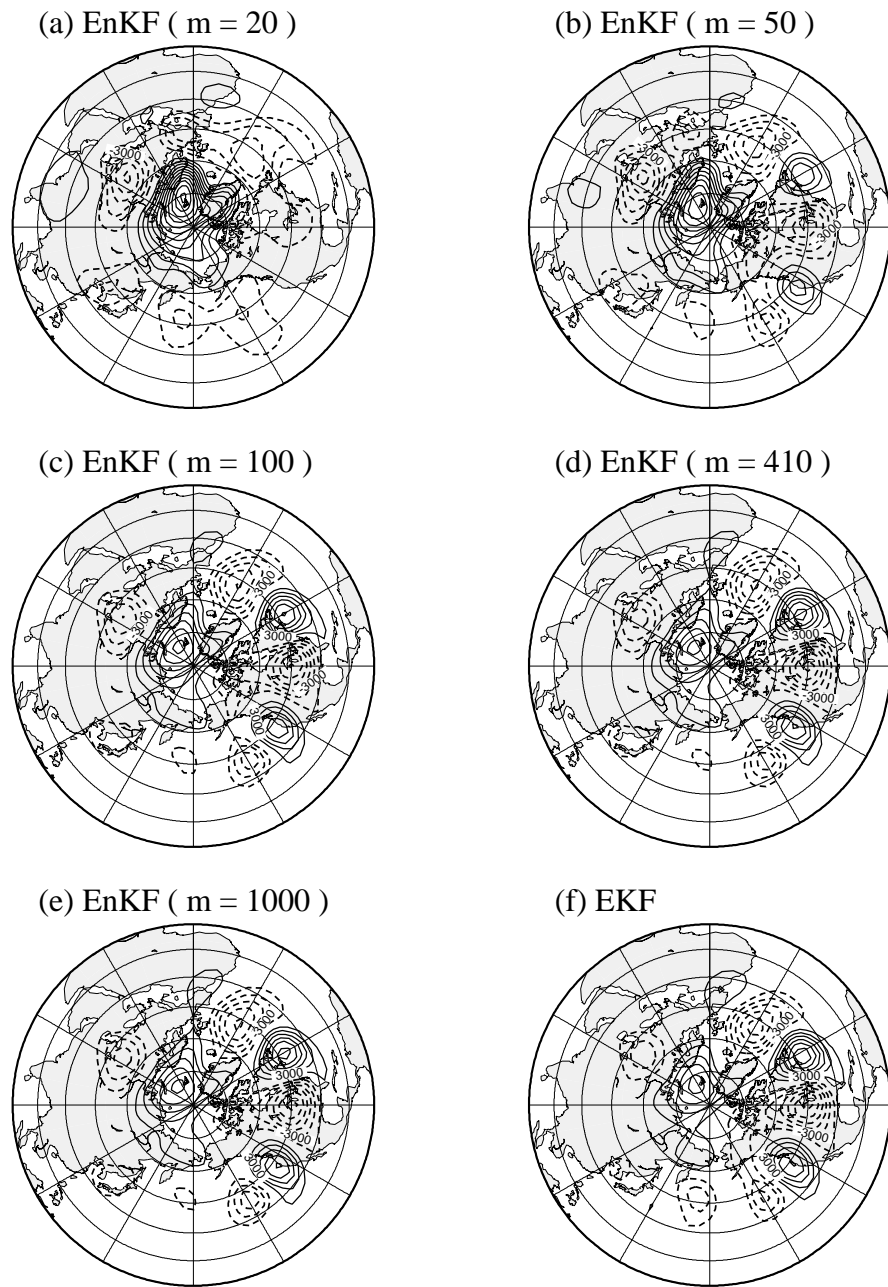


図 3.2: 1990 年 1 月 31 日 00Z における S-model-EKF および S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の第 1 固有ベクトル . (a) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 20), (b) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 50), (c) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 100), (d) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 410), (e) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 1000) (f) S-model-EKF.

## 2nd Eigenvector for Analysis Cov. EKF vs EnKF

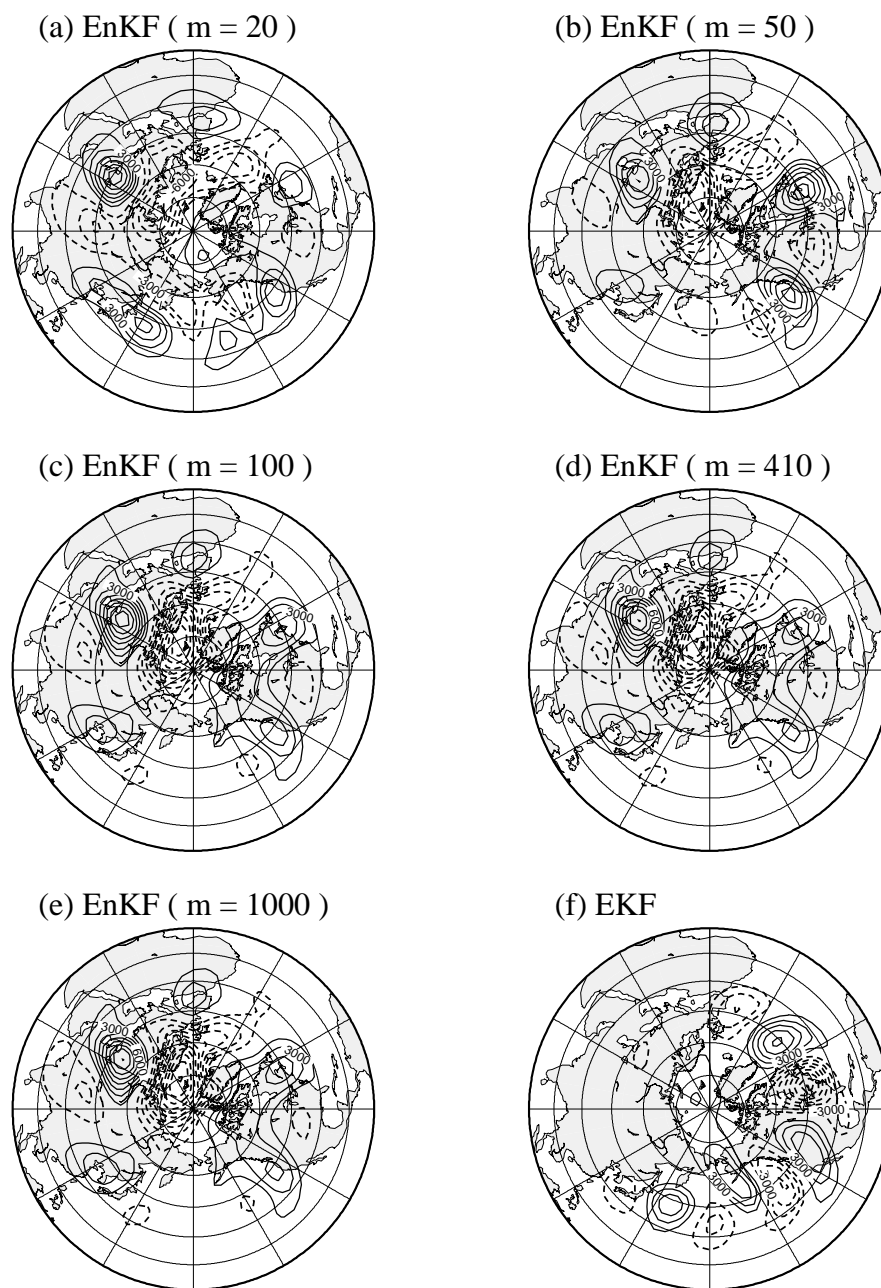


図 3.3: 1990 年 1 月 31 日 00Z における S-model-EKF および S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の第 2 固有ベクトル . (a) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 20), (b) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 50), (c) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 100), (d) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 410), (e) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 1000) (f) S-model-EKF.

### 3rd Eigenvector for Analysis Cov. EKF vs EnKF

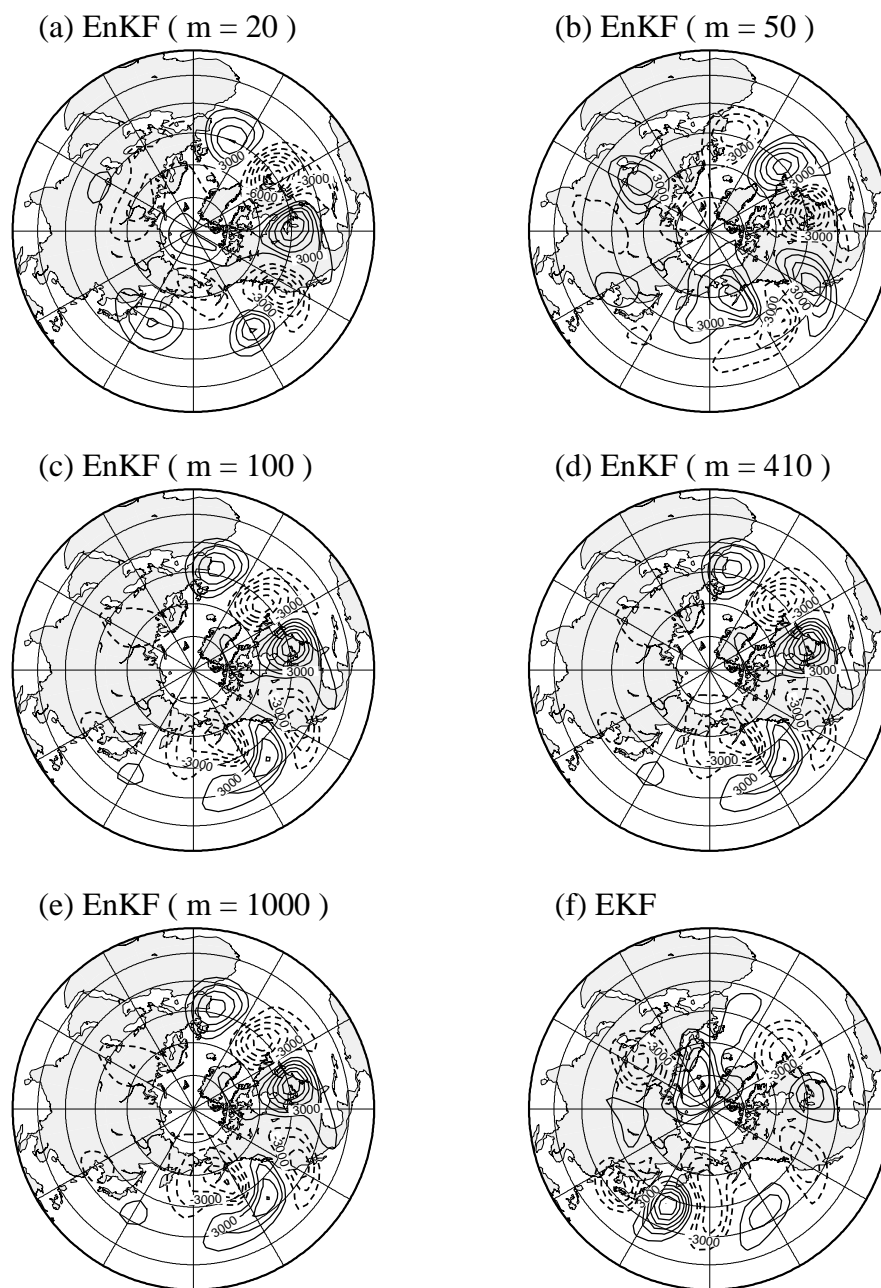


図 3.4: 1990 年 1 月 31 日 00Z における S-model-EKF および S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の第 3 固有ベクトル . (a) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 20), (b) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 50), (c) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 100), (d) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 410), (e) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 1000) (f) S-model-EKF.

# Eigenvalue for EKF and EnKF

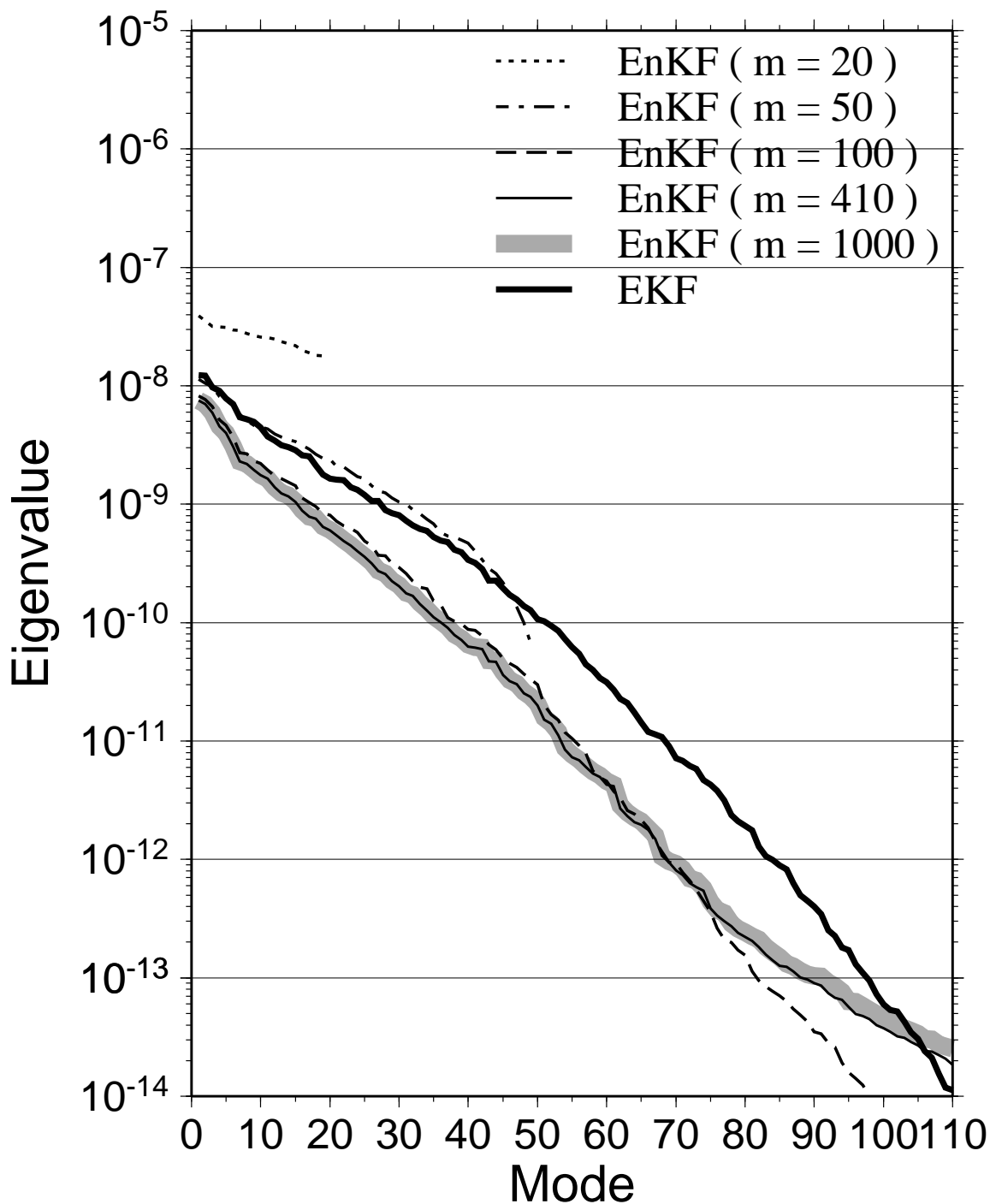


図 3.5: 1990 年 1 月 31 日 00Z における S-model-EKF および S-model-EnKF の予報誤差共分散行列の固有値．アンサンブルサイズは 20, 50, 100, 410, 1000.

# 1st Eigenvector for Forecast Cov. EKF vs EnKF

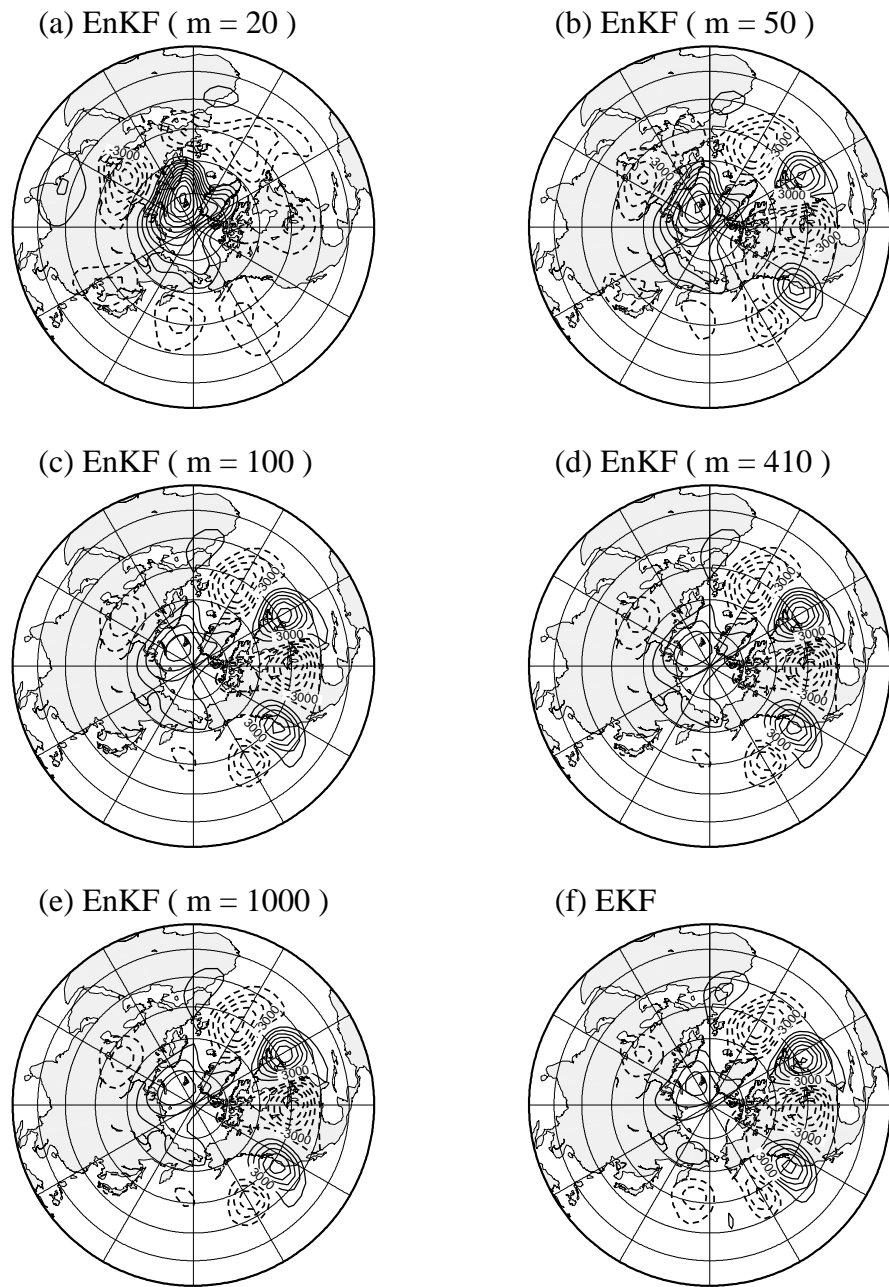


図 3.6: 1990 年 1 月 31 日 00Z における S-model-EKF および S-model-EnKF の予報誤差共分散行列の第 1 固有ベクトル . (a) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 20), (b) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 50), (c) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 100), (d) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 410), (e) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 1000) (f) S-model-EKF.

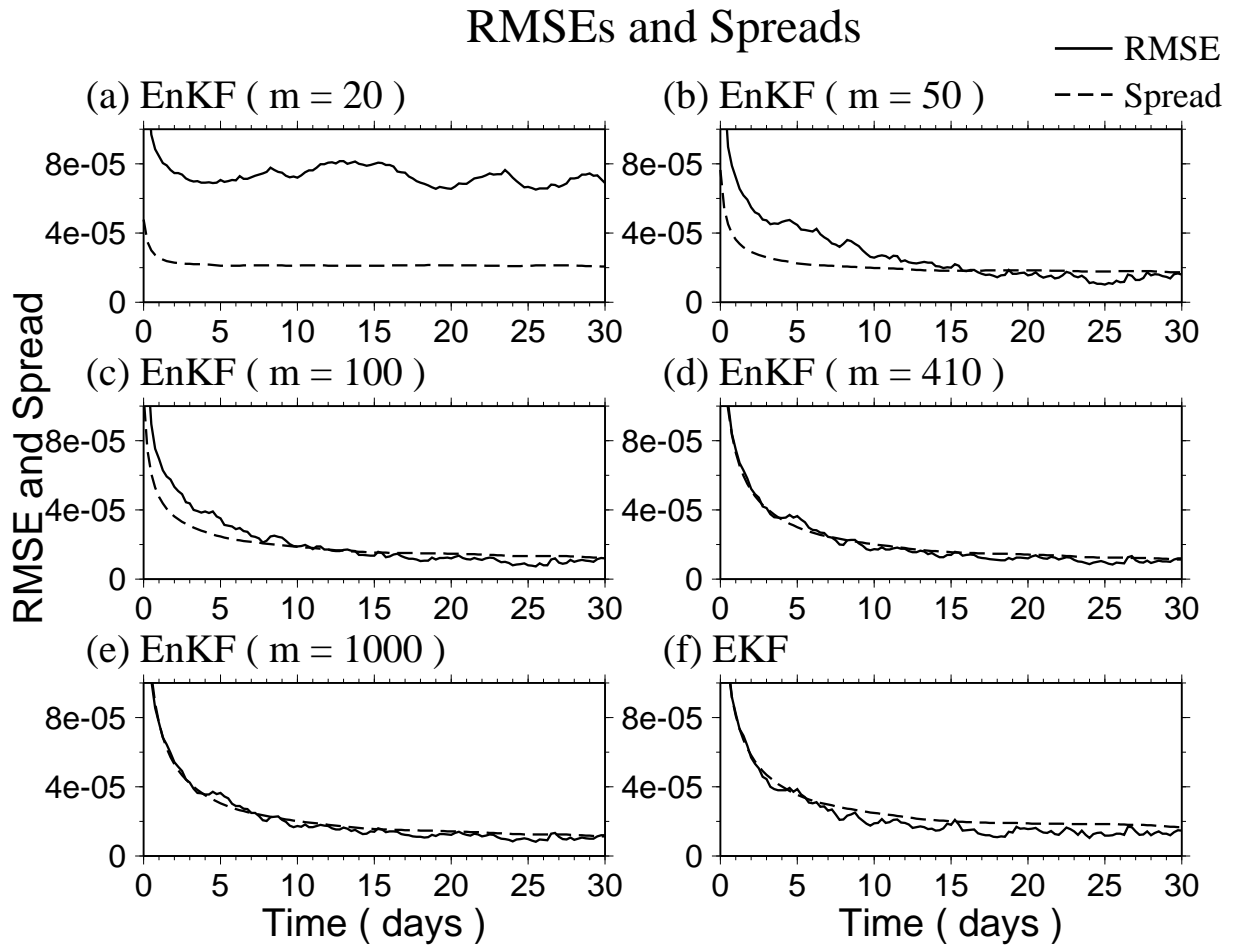


図 3.7: 順圧展開係数  $w_i$  の真値に対する解析 RMSE の時系列 . 実線は解析 RMSE , 破線は解析アンサンブルスプレッド . 期間は 1990 年 1 月 1 日 00Z から 1990 年 1 月 31 日 00Z . (a) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 20), (b) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 50), (c) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 100), (d) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 410), (e) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 1000) (f) S-model-EKF. 観測誤差はおよそ  $2.25 \times 10^{-4}$ .

## Barotropic Heigh ( m )

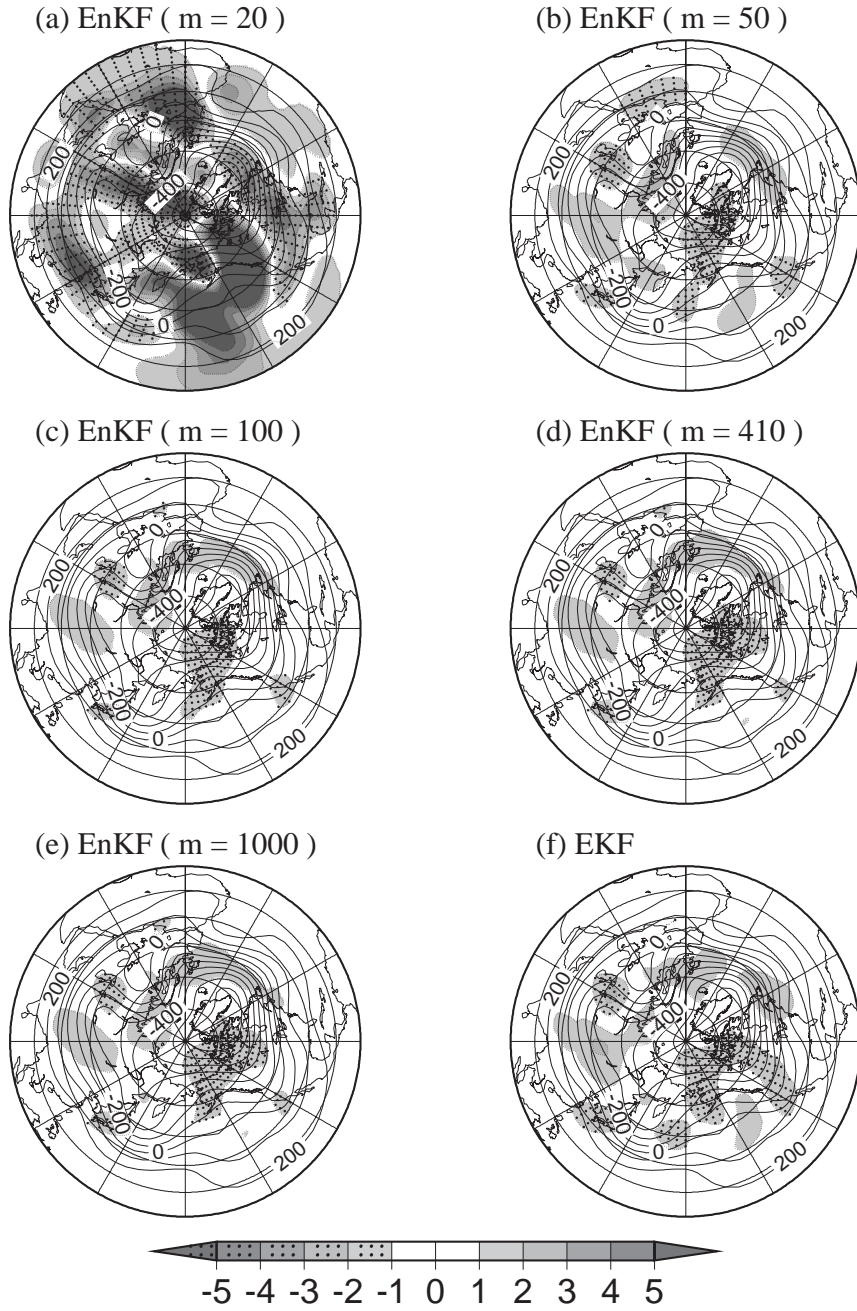


図 3.8: 1990 年 1 月 31 日 00Z における順圧高度の解析場 (実線) と真値に対する解析誤差 (シェード). 単位は m. (a) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 20), (b) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 50), (c) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 100), (d) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 410), (e) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 1000) (f) S-model-EKF.

# RMSE for EKF and EnKF

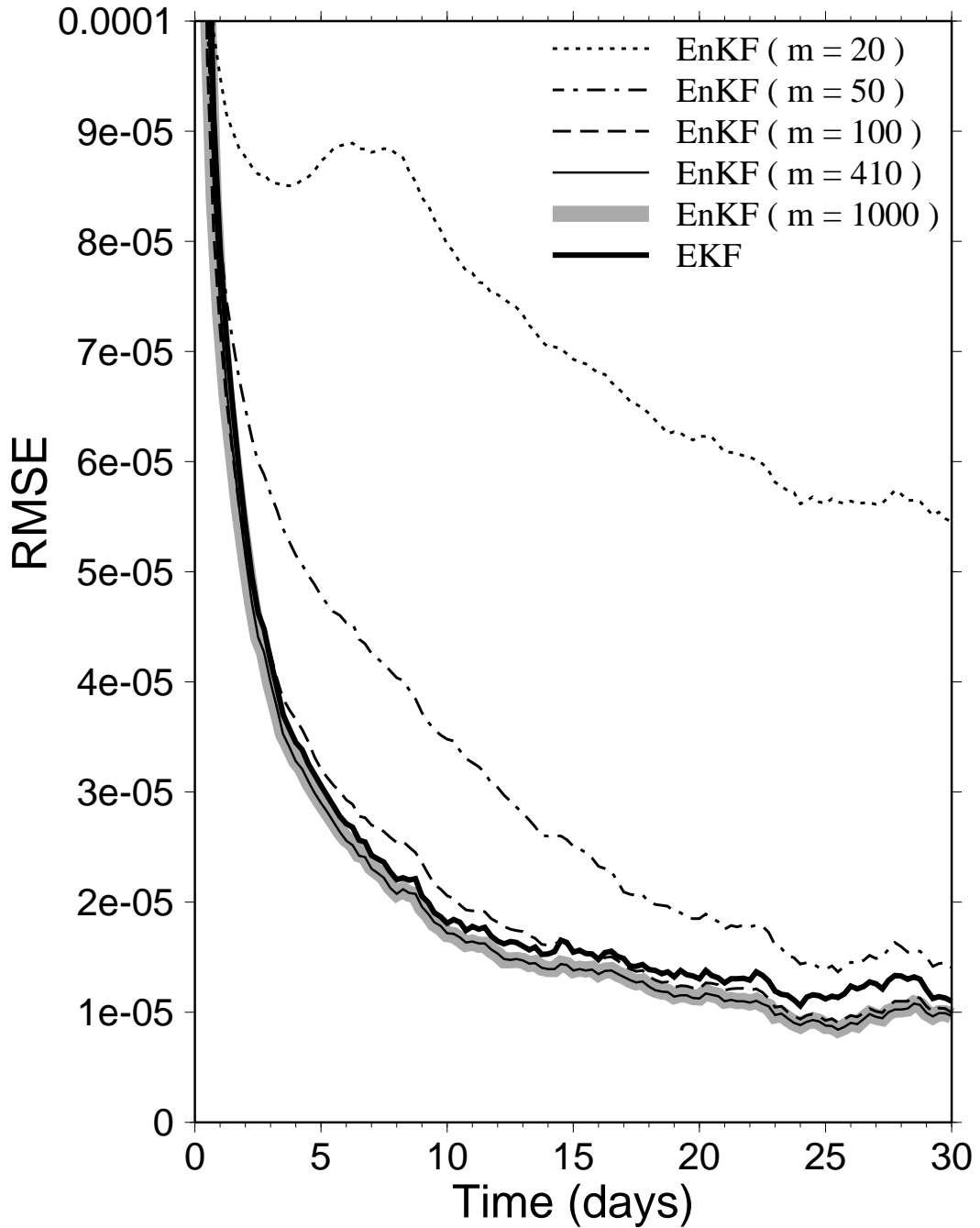


図 3.9: 順圧展開係数  $w_i$  の真値に対する解析 RMSE (10 事例の平均) . アンサンブルサイズは 20, 50, 100, 410 , 1000. 観測誤差はおよそ  $2.25 \times 10^{-4}$ .



# Eigenvalue for LETKF

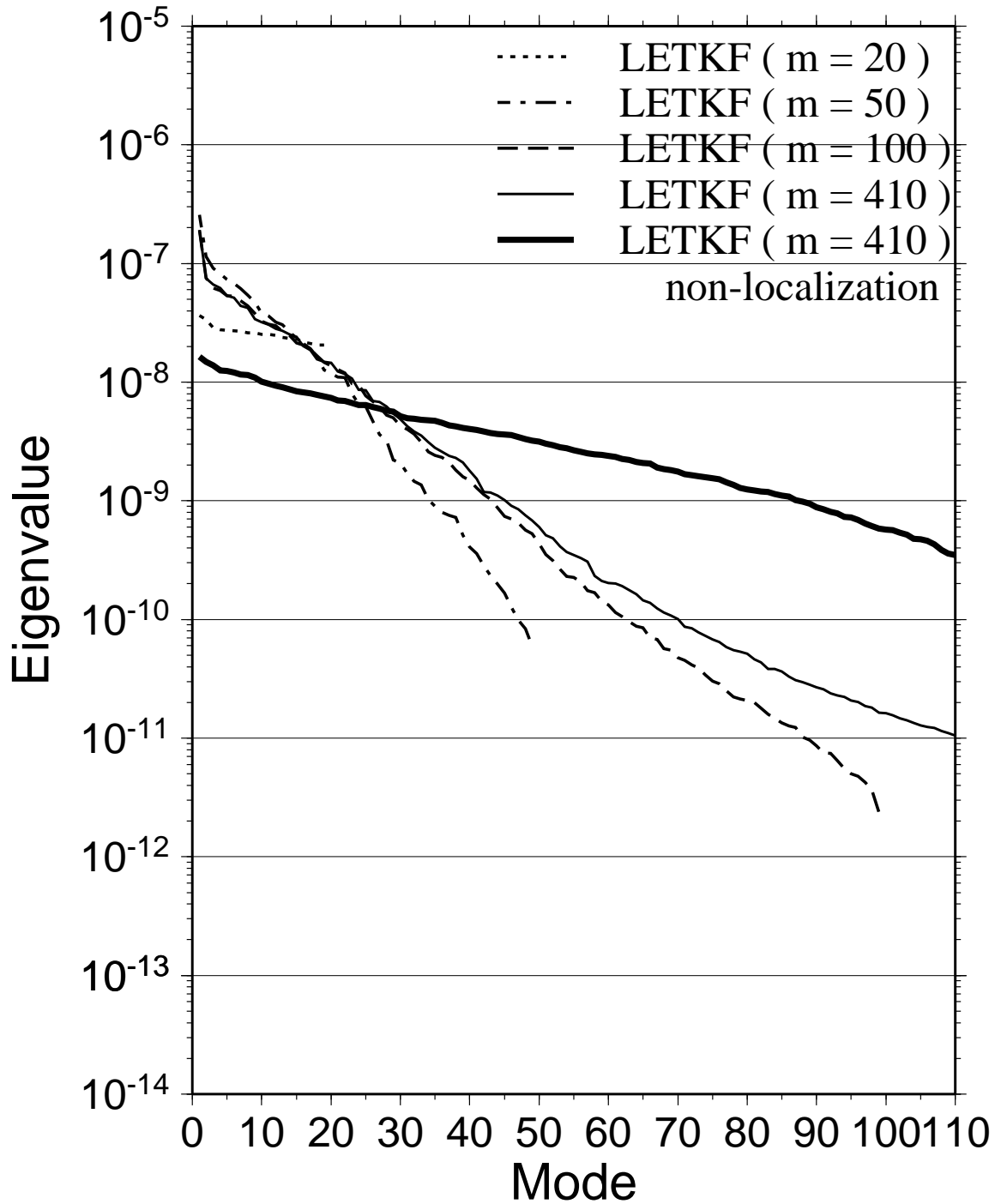


図 3.10: 1990 年 1 月 31 日 00Z における S-model-LETKF の解析誤差共分散行列の固有値 . アンサンブルサイズは 20, 50, 100, 410 , 410 (局所化なし).

# 1st Eigenvector for Analysis Cov. EKF vs EnKF

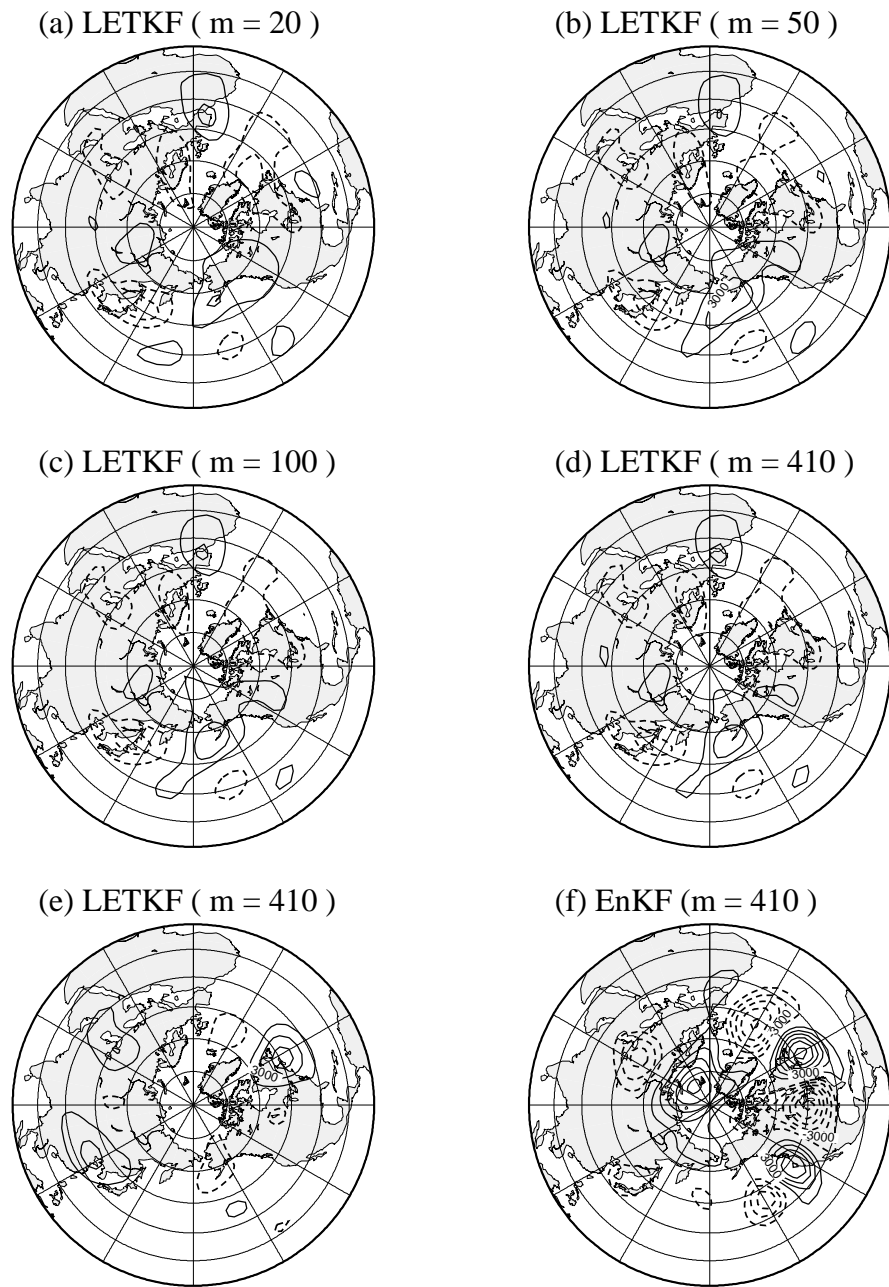


図 3.11: 1990 年 1 月 31 日 00Z における S-model-LETKF の解析誤差共分散行列の第 1 固有ベクトル . (a) S-model-LETKF (アンサンブルサイズ: 20), (b) S-model-LETKF (アンサンブルサイズ: 50), (c) S-model-LETKF (アンサンブルサイズ: 100), (d) S-model-LETKF (アンサンブルサイズ: 410), (e) S-model-LETKF (アンサンブルサイズ: 410 (局所化なし)), (f) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 410).

## 2nd Eigenvector for Analysis Cov. EKF vs EnKF

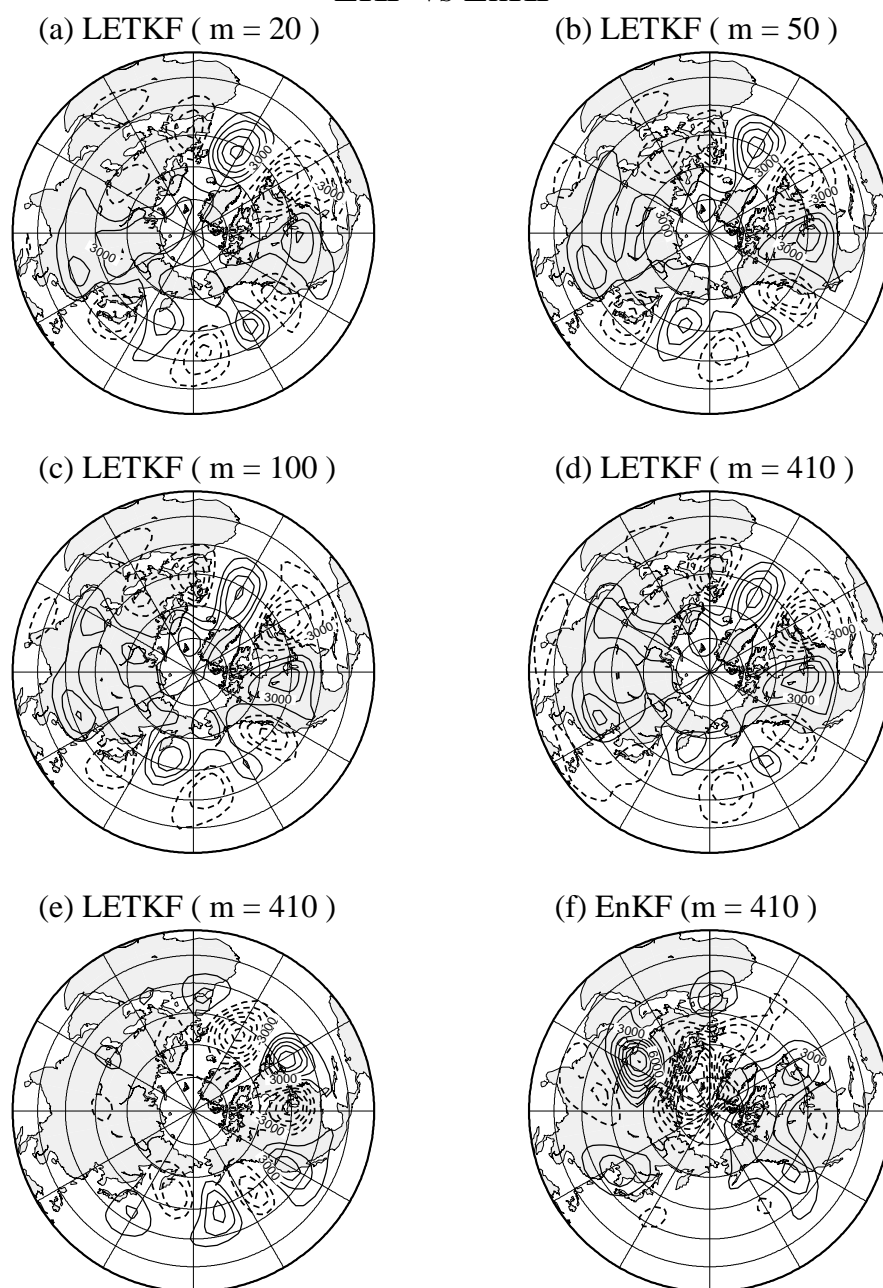


図 3.12: 1990 年 1 月 31 日 00Z における S-model-LETKF の解析誤差共分散行列の第 2 固有ベクトル . (a) S-model-LETKF (アンサンブルサイズ: 20), (b) S-model-LETKF (アンサンブルサイズ: 50), (c) S-model-LETKF (アンサンブルサイズ: 100), (d) S-model-LETKF (アンサンブルサイズ: 410), (e) S-model-LETKF (アンサンブルサイズ: 410 (局所化なし)) (f) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 410).

# RMSE for LETKF

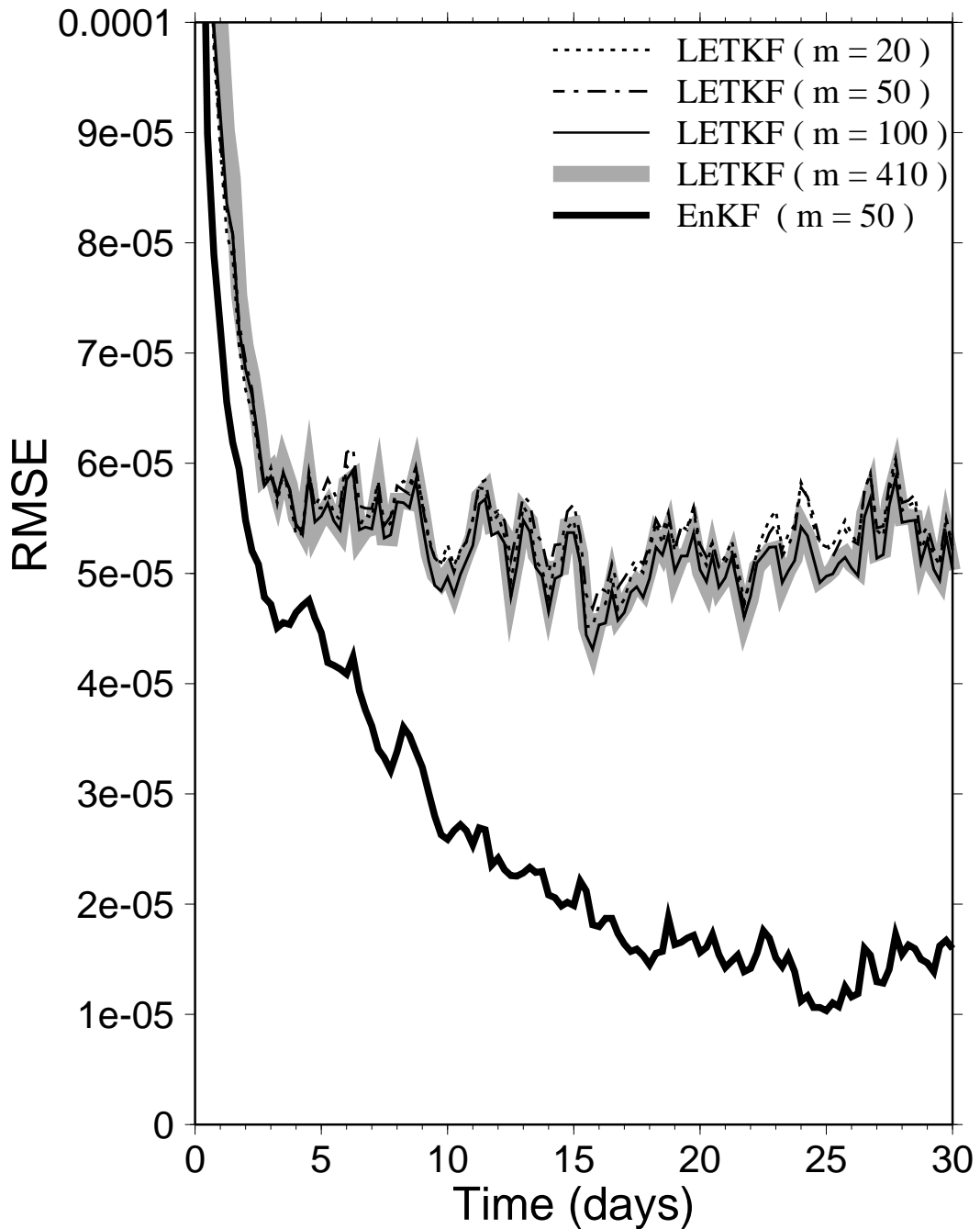


図 3.13: S-model-LETKF および S-model-EnKF の順圧展開係数  $w_i$  の真値に対する解析 RMSE の時系列．期間は 1990 年 1 月 1 日 00Z から 1990 年 1 月 31 日 00Z．観測誤差はおよそ  $2.25 \times 10^{-4}$ ．

## RMSE for LETKF

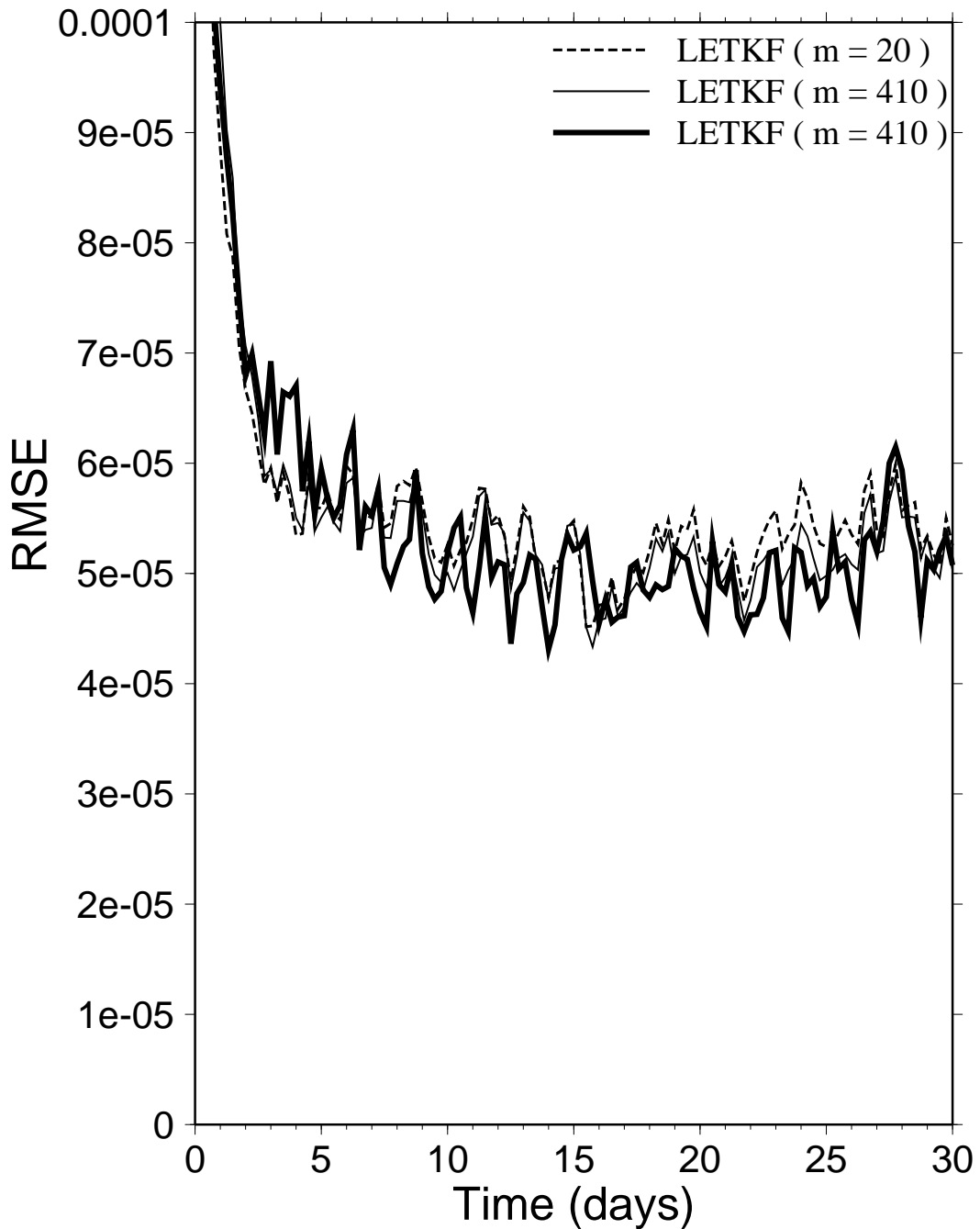
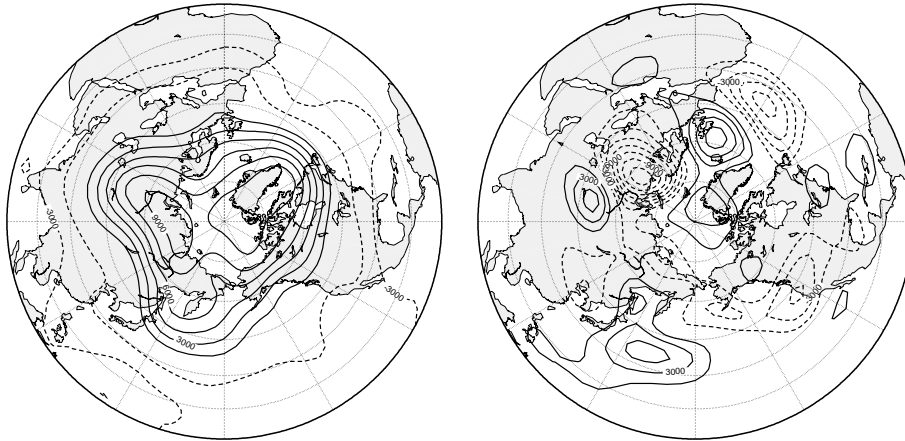


図 3.14: S-model-LETKF および S-model-EnKF の順圧展開係数  $w_i$  の真値に対する解析 RMSE の時系列．期間は 1990 年 1 月 1 日 00Z から 1990 年 1 月 31 日 00Z．観測誤差はおよそ  $2.25 \times 10^{-4}$ ．

Eigenvector ( m=20 )  
Analysis Cov. for EnKF

First ( 47.5 % )

Second ( 7.9 % )

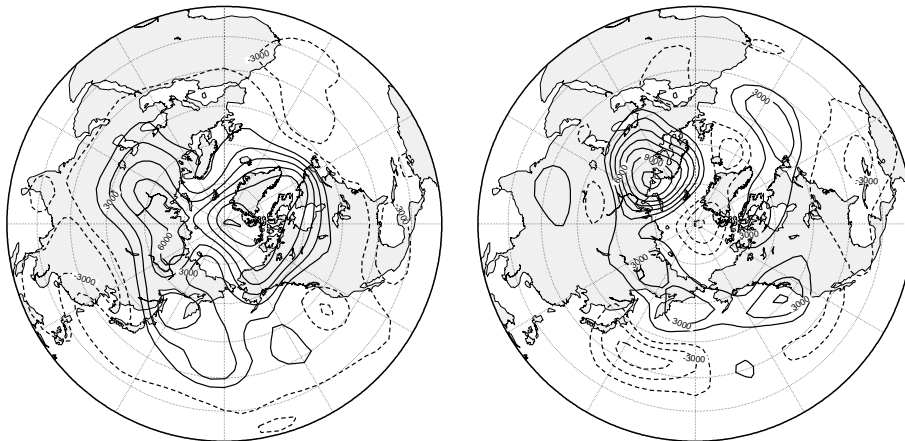


(a) アンサンブルサイズ 410 , 局所化あり

Eigenvector ( m=410 )  
Analysis Cov. for EnKF

First ( 19.1 % )

Second ( 9.2 % )



(b) アンサンブルサイズ 410 , 局所化なし

図 3.15:  $w_i$  の解析値と真値の差の EOF-1 および EOF-2 . 期間は 1990 年 1 月 15 日 18Z から 1990 年 1 月 31 日 00Z まで . ( ) 内は寄与率 . (a) S-model-LETKF 局所化あり , (b) S-model-LETKF 局所化なし .

# Eigenvalue for EKF and EnKF

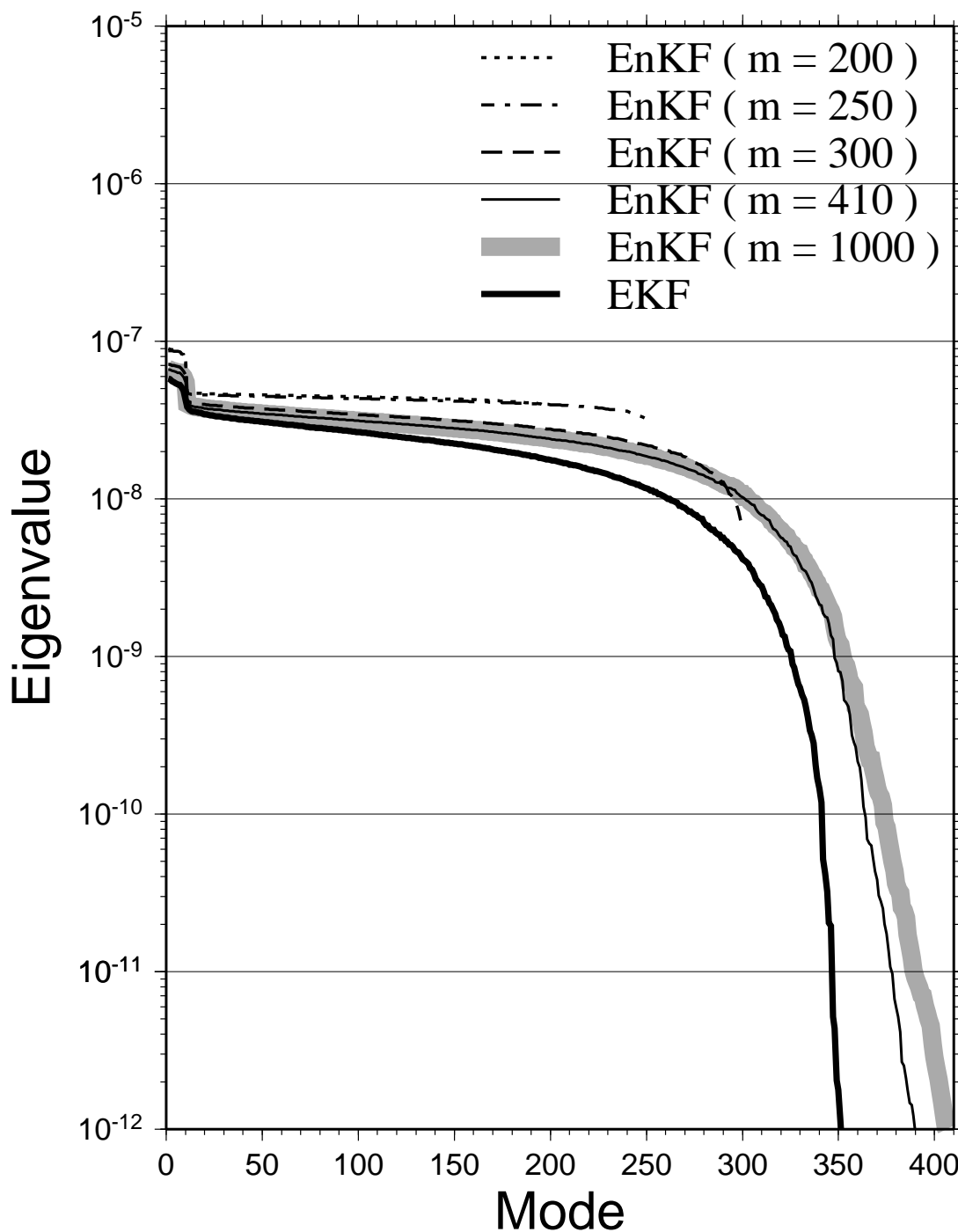


図 3.16: 1989 年 1 月 31 日 00Z における S-model-EKF および S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の固有値．アンサンブルサイズは 200，250，300，410，1000.

## Eigenvector for Analysis Cov. EKF vs EnKF

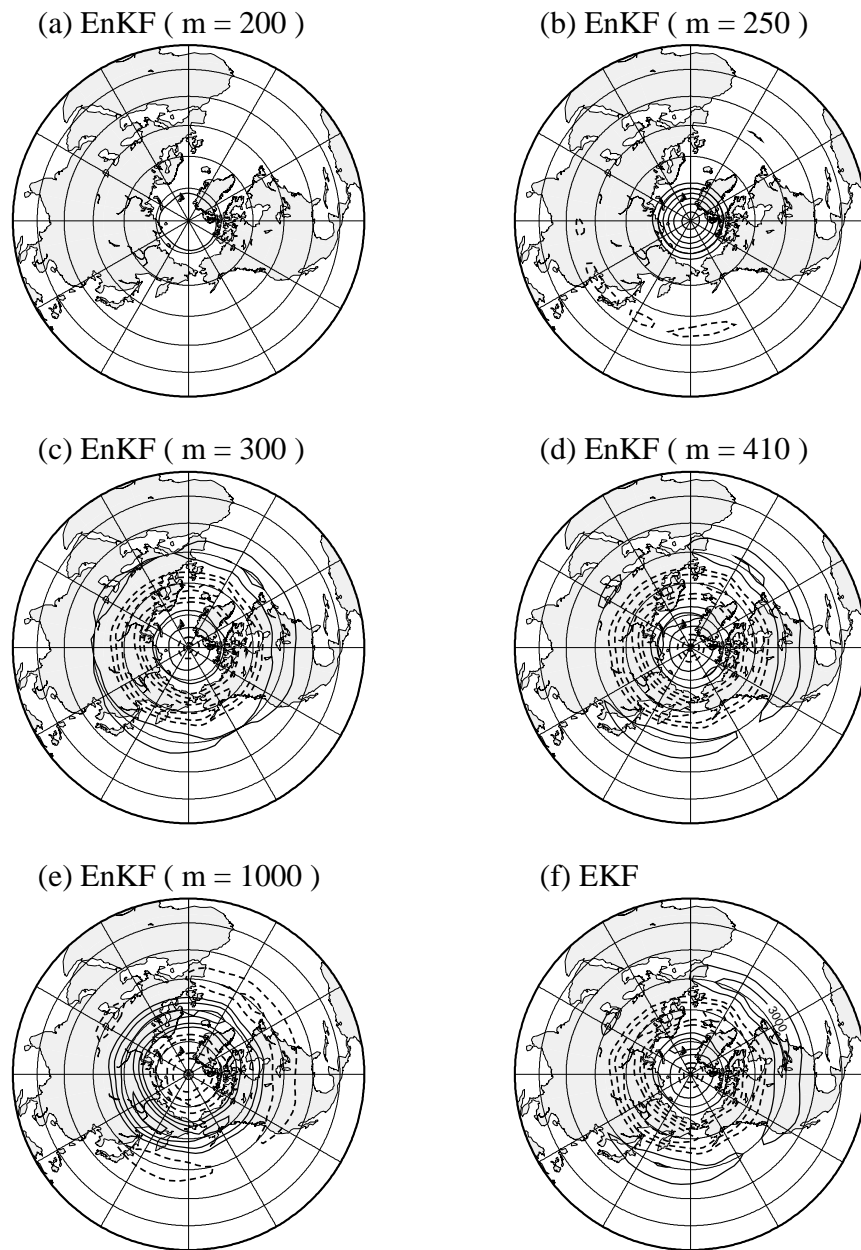


図 3.17: 1989 年 1 月 31 日 00Z における S-model-EKF および S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の第 1 固有ベクトル . 一部コンターの符号が逆であるが , 固有ベクトルの空間構造には影響しない . (a) S-model-EnKF ( アンサンブルサイズ: 200 ), (b) S-model-EnKF ( アンサンブルサイズ: 250 ), (c) S-model-EnKF ( アンサンブルサイズ: 300 ), (d) S-model-EnKF ( アンサンブルサイズ: 410 ), (e) S-model-EnKF ( アンサンブルサイズ: 1000 ) (f) S-model-EKF.



## Eigenvector for Analysis Cov. EKF vs EnKF

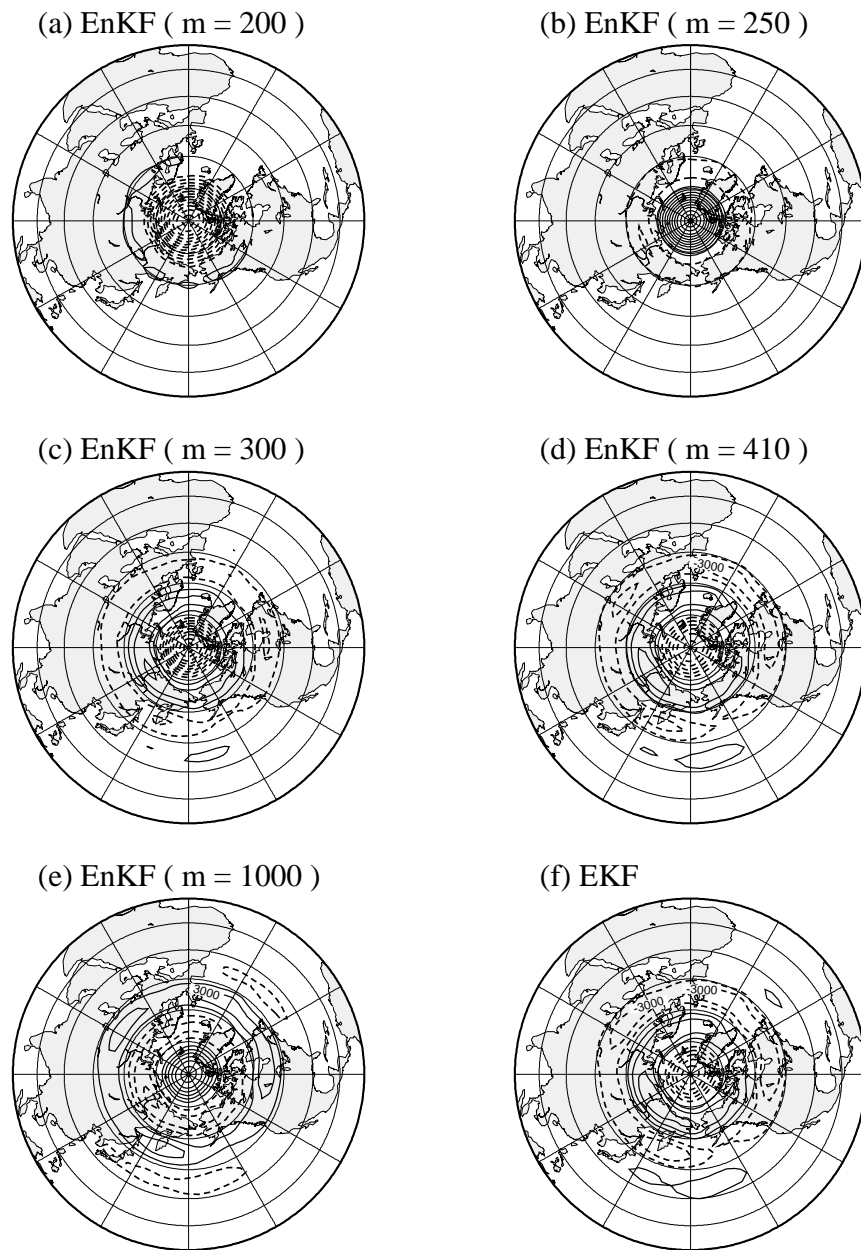


図 3.18: 1989 年 1 月 31 日 00Z における S-model-EKF および S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の第 2 固有ベクトル . 一部コンターの符号が逆であるが , 固有ベクトルの空間構造には影響しない . (a) S-model-EnKF ( アンサンブルサイズ: 200 ), (b) S-model-EnKF ( アンサンブルサイズ: 250 ), (c) S-model-EnKF ( アンサンブルサイズ: 300 ), (d) S-model-EnKF ( アンサンブルサイズ: 410 ), (e) S-model-EnKF ( アンサンブルサイズ: 1000 ) (f) S-model-EKF.

# Eigenvalue for EKF and EnKF

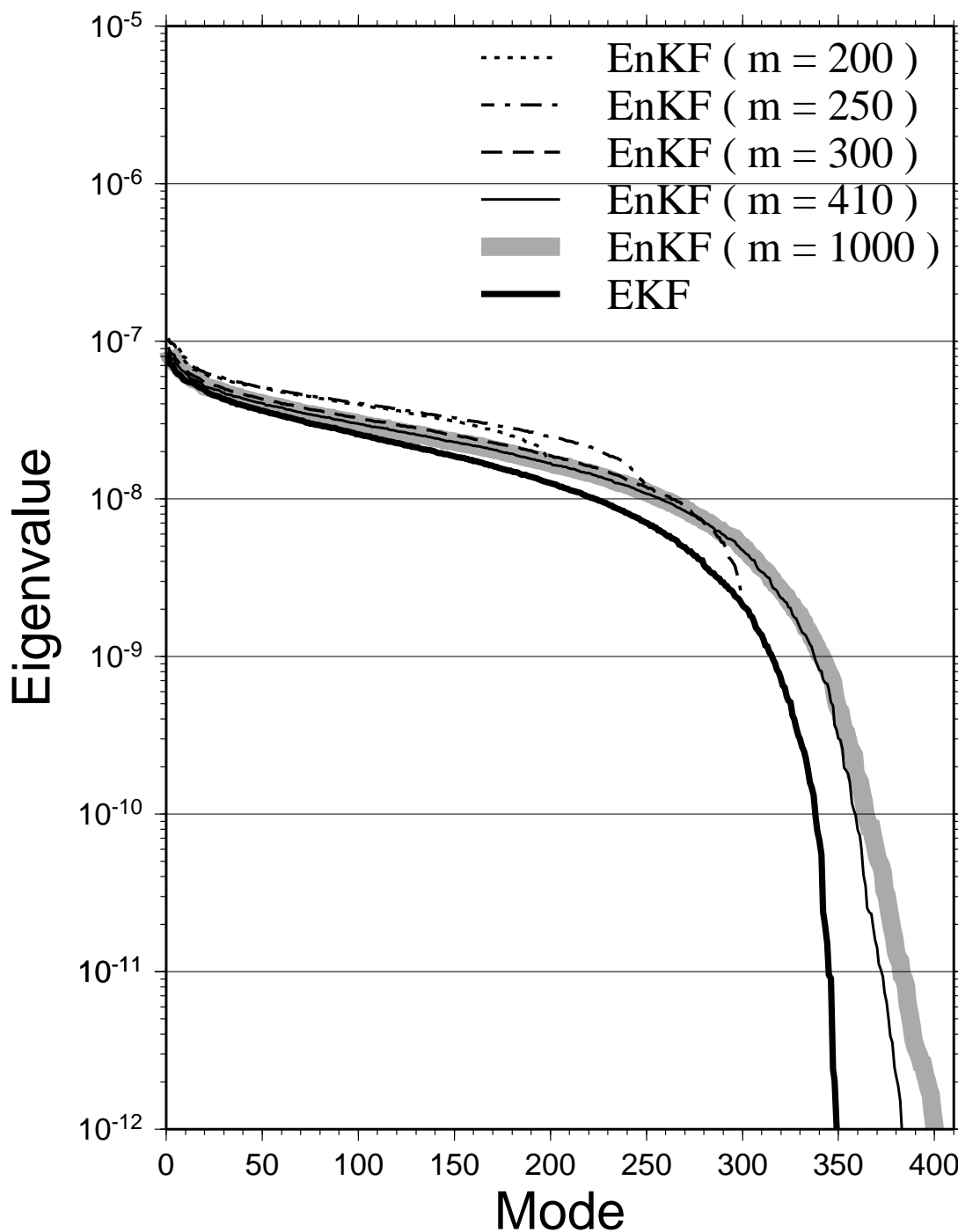


図 3.19: 1989 年 1 月 31 日 00Z における S-model-EKF および S-model-EnKF の予報誤差共分散行列の固有値．アンサンブルサイズは 200, 250, 300, 410, 1000.

## Eigenvector for Forecast Cov. EKF vs EnKF

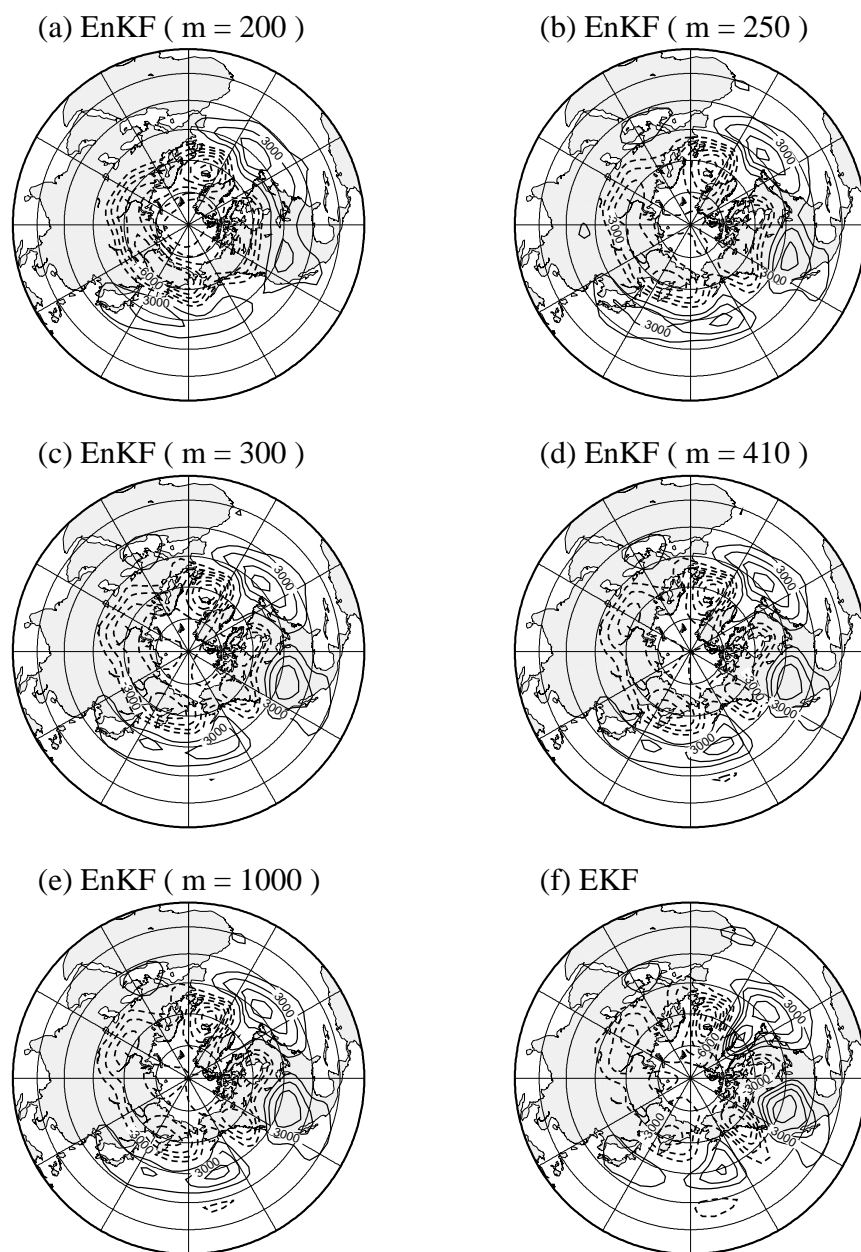


図 3.20: 1989 年 1 月 31 日 00Z における S-model-EKF および S-model-EnKF の予報誤差共分散行列の第 1 固有ベクトル . 一部コンターの符号が逆であるが , 固有ベクトルの空間構造には影響しない . (a) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 200), (b) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 250), (c) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 300), (d) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 410), (e) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 1000) (f) S-model-EKF.

## Eigenvector for Forecast Cov. EKF vs EnKF

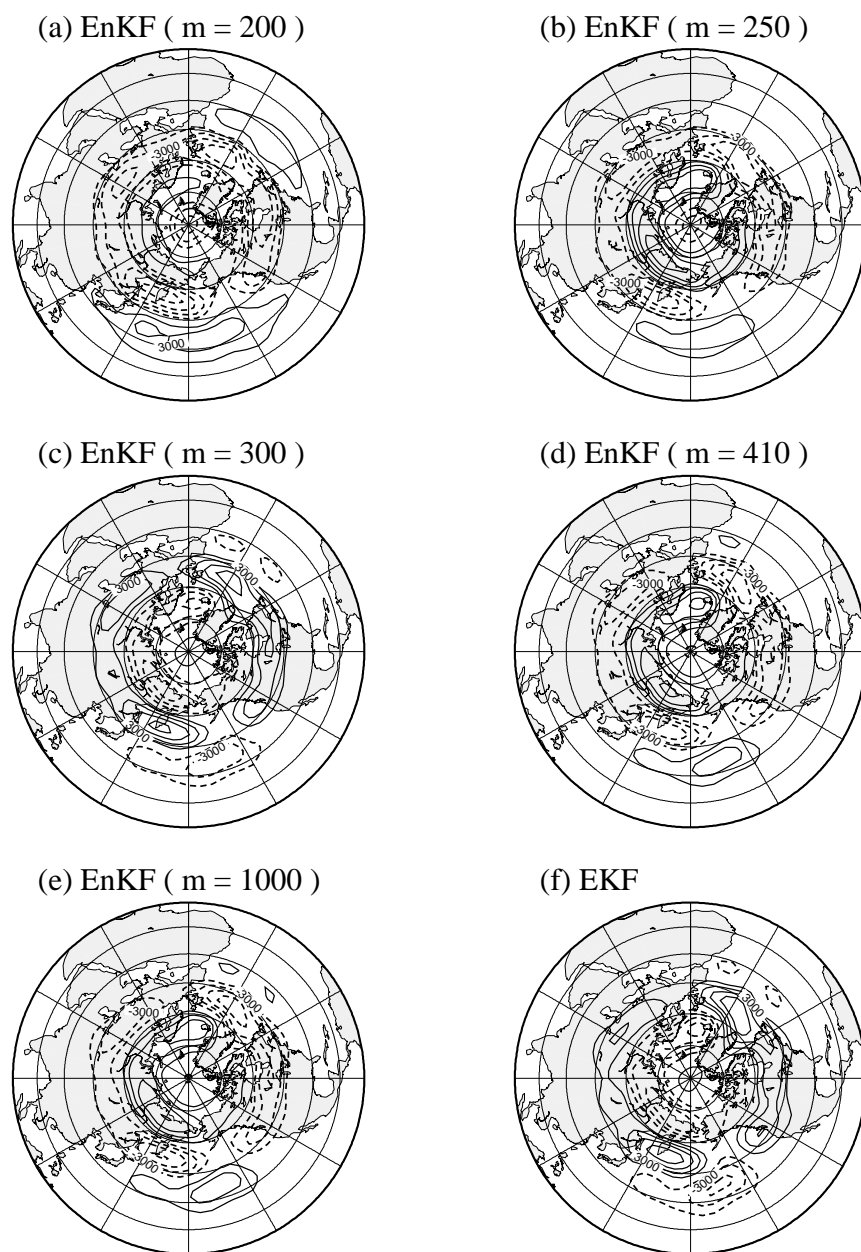


図 3.21: 1989 年 1 月 31 日 00Z における S-model-EKF および S-model-EnKF の予報誤差共分散行列の第 2 固有ベクトル . 一部コンターの符号が逆であるが , 固有ベクトルの空間構造には影響しない . (a) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 200), (b) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 250), (c) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 300), (d) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 410), (e) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 1000) (f) S-model-EKF.

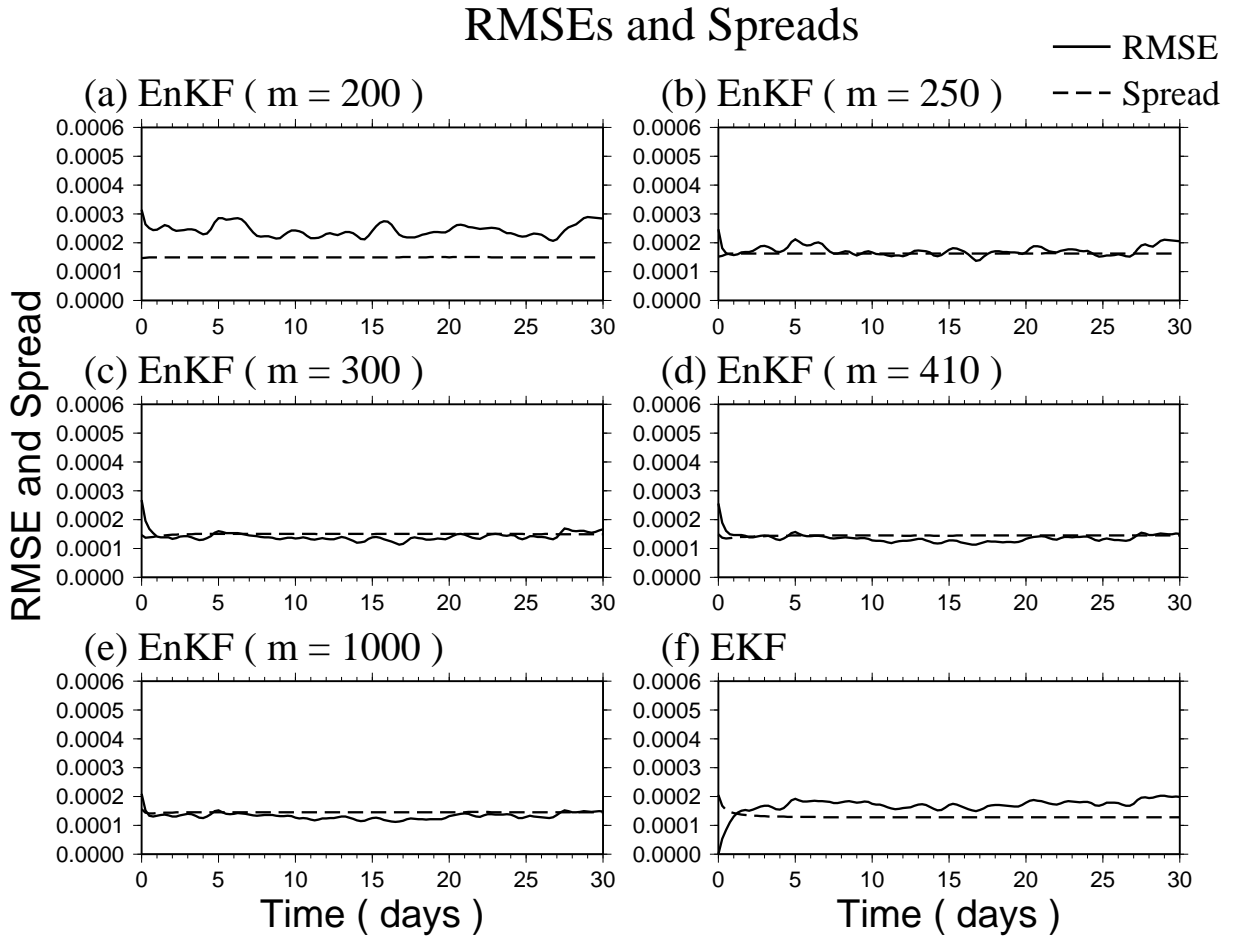


図 3.22: 順圧展開係数  $w_i$  の真値に対する解析 RMSE の時系列．実線は解析 RMSE，破線は解析アンサンブルスプレッド．期間は 1989 年 1 月 1 日 00Z から 1989 年 1 月 31 日 00Z．(a) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 20), (b) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 50), (c) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 100), (d) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 410), (e) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 1000) (f) S-model-EKF. 観測誤差はおよそ  $2.25 \times 10^{-4}$ .

## Barotropic Heigh ( m )

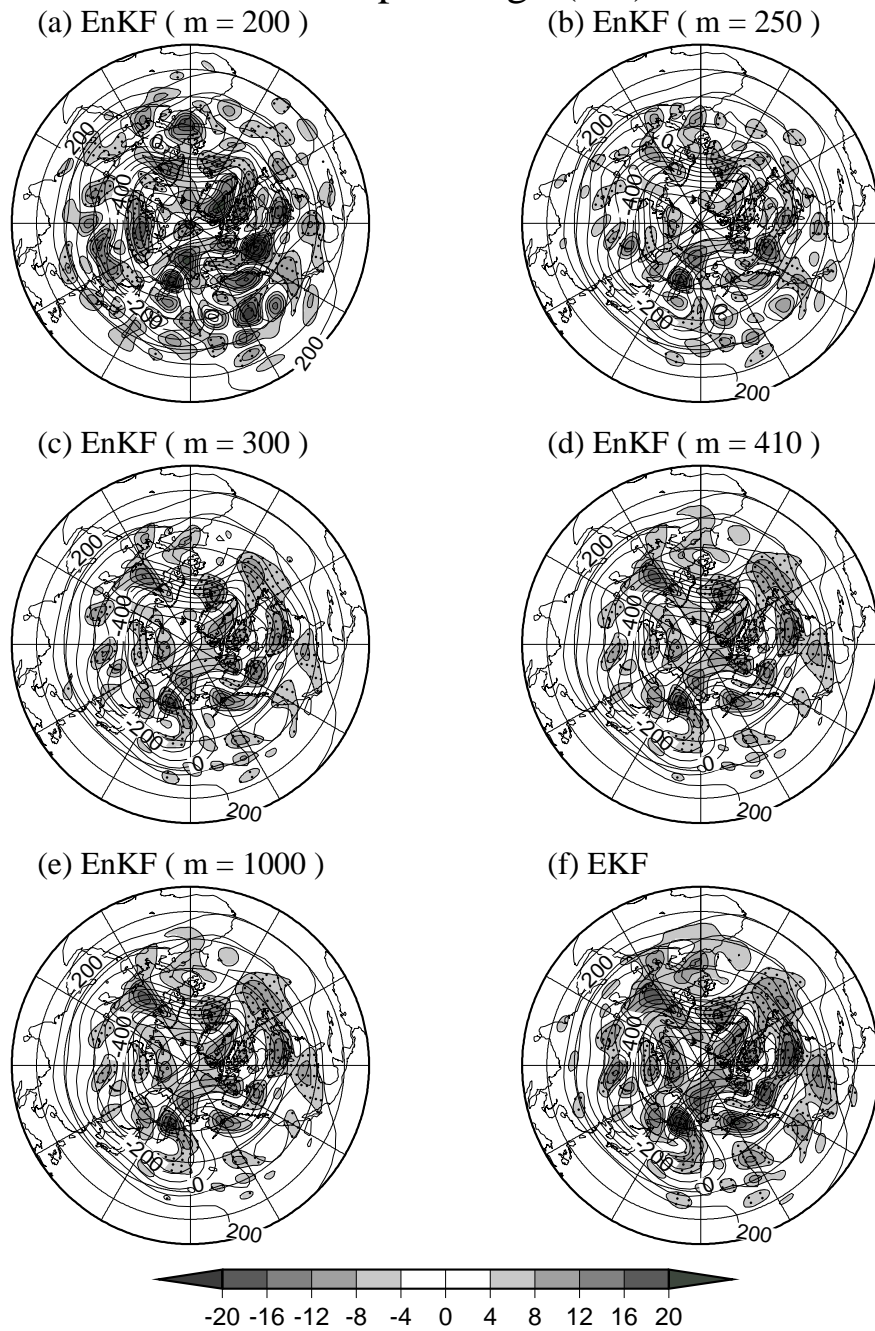


図 3.23: 1989 年 1 月 31 日 00Z における順圧高度の解析場 (実線) と真値に対する解析誤差 (シェード). 単位は m. (a) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 20), (b) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 50), (c) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 100), (d) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 410), (e) S-model-EnKF (アンサンブルサイズ: 1000) (f) S-model-EKF.

# RMSE for EKF and EnKF

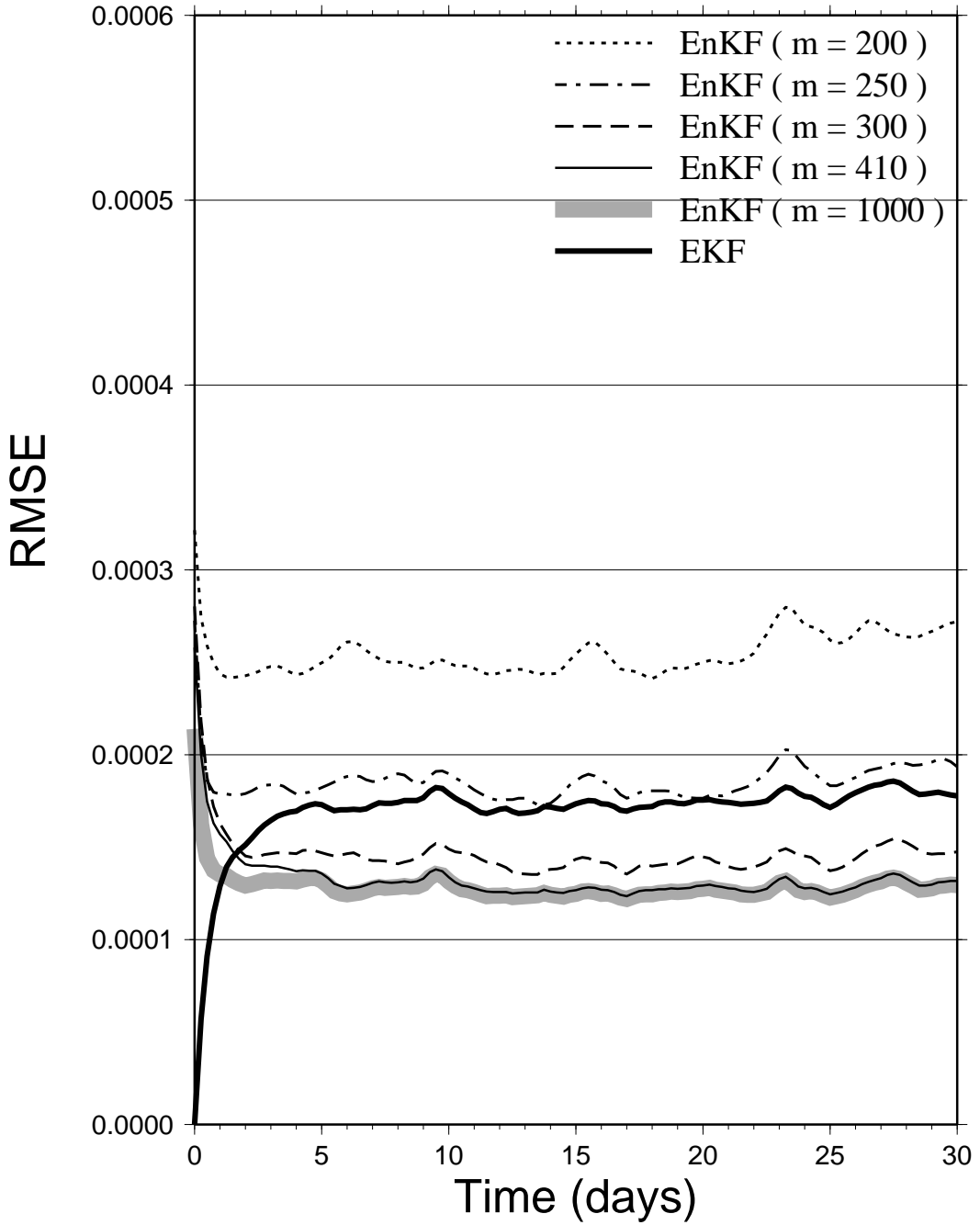


図 3.24: 順圧展開係数  $w_i$  の真値に対する解析 RMSE (10 事例の平均) . アンサンブルサイズは 20, 50, 100, 410 , 1000. 観測誤差はおよそ  $2.25 \times 10^{-4}$ .

# 第4章 NICAM-LEKTF

## 4.1 全球非静力学大気モデル NICAM

従来の AGCM では鉛直流を直接計算しないため雲を解像することができなかったが，全球非静力学大気モデル Nonhydrostatic icosahedral atmospheric model: NICAM Sato et al. (2008) は，鉛直流を直接計算し高解像度化することで，深い対流とメソスケールの循環を再現できる新しいも大循環モデルである．

### 4.1.1 支配方程式

NICAM の方程式に用いられている記号を表 4.1 と表 4.2 に記す．

深い大気を表現するための  $\gamma \equiv \frac{r}{r_0}$ ，地形に沿った座標系にするための  $G^{\frac{1}{2}} \equiv \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)_h$  である．ここで，鉛直座標  $\xi$  は高度  $z$  と以下のように関係づけられている．

$$\gamma \nabla_h \phi = \nabla_{h0} \phi \quad (4.1)$$

$$\gamma \nabla_h \cdot \mathbf{u} = \nabla_{h0} \cdot \mathbf{u} \quad (4.2)$$

$$\xi = \frac{z_T(z - z_S)}{z_T - z_S} \quad (4.3)$$

$$G^{\frac{1}{2}} \nabla_{h0} \phi = \tilde{\nabla}_{h0} \left( G^{\frac{1}{2}} \phi \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \mathbf{G}^Z G^{\frac{1}{2}} \phi \right) \quad (4.4)$$

$$G^{\frac{1}{2}} \nabla_{h0} \cdot \mathbf{u}_h = \tilde{\nabla}_{h0} \cdot \left( G^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_h \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( G^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{G}^Z \right) \quad (4.5)$$

$$G^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (4.6)$$

そして， $G^{\frac{1}{2}}$ ， $\gamma^2$  を用いた NICAM の予報変数は，

$$(R, P, \mathbf{V}_h, W, E_a, Q_n) = G^{\frac{1}{2}} \gamma^2 (\rho, \dot{p}, \rho \mathbf{v}_h, \rho w, \rho e_a, \rho q_n) \quad (4.7)$$



と表せる．ここで， $q_n$  の  $n$  は，雲微物理過程の実装のため次のような水の状態による区分を表している．

$n = 1$	:	水蒸気
$2 \leq n \leq j_{max} + 1$	:	液体の水
$j_{max} + 2 \leq n \leq j_{max} + k_{max} + 1$	:	固体の水 (氷)

NICAM の支配方程式系は，全密度における連続の式，水平・鉛直方向の運動方程式，内部エネルギーの顕熱部分における方程式，水の状態別における連続の式から成り立つ．

- 全密度における連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\rho \mathbf{v}_h) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho w)}{\partial z} = - \sum_{j=1}^{j_{max}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho q_{l,j} w_{l,j}^*)}{\partial z} - \sum_{k=1}^{k_{max}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho q_{i,k} w_{i,k}^*)}{\partial z} \quad (4.8)$$

- 水平方向の運動方程式

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v}_h)}{\partial t} + \mathbf{a}_h + \mathbf{c}_h = -\nabla_h p + \mathbf{f}_h - \sum_{j=1}^{j_{max}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho q_{l,j} w_{l,j}^* \mathbf{v}_h)}{\partial z} - \sum_{k=1}^{k_{max}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho q_{i,k} w_{i,k}^* \mathbf{v}_h)}{\partial z} \quad (4.9)$$

- 鉛直方向の運動方程式

$$\frac{\partial (\rho w)}{\partial t} + a_z + c_z = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + f_z - \sum_{j=1}^{j_{max}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho q_{l,j} w_{l,j}^* w)}{\partial z} - \sum_{k=1}^{k_{max}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho q_{i,k} w_{i,k}^* w)}{\partial z} \quad (4.10)$$

- 内部エネルギーの顕熱部分における方程式

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial (\rho e_a)}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\rho \mathbf{v}_h h_a) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho w h_a)}{\partial z} \\
&= \left( \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h p + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\
&- \left[ \sum_{j=1}^{j_{max}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho q_{l,j} C_l T w_{l,j}^*)}{\partial z} + \sum_{k=1}^{k_{max}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho q_{i,k} C_i T w_{i,k}^*)}{\partial z} \right] \\
&- \left( \sum_{j=1}^{j_{max}} \rho q_{l,j} g w_{l,j}^* + \sum_{k=1}^{k_{max}} \rho q_{i,k} g w_{i,k}^* \right) - (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{f}_h + w f_z) + q_{heat} - L_{v00} S_v + L_{f00} S_i
\end{aligned} \tag{4.11}$$

- 水の状態別における連続の式

$$\frac{\partial (\rho q_d)}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\rho q_d \mathbf{v}_h) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho q_d w)}{\partial z} = S_d \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial (\rho q_v)}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\rho q_v \mathbf{v}_h) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho q_v w)}{\partial z} = S_v \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\rho q_{l,j})}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\rho q_{l,j} \mathbf{v}_h) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial [r^2 \rho q_{l,j} (w + w_{l,j}^*)]}{\partial z} &= S_{l,j}, \\
& \text{for } 1 \leq j \leq j_{max}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\rho q_{i,k})}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\rho q_{i,k} \mathbf{v}_h) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial [r^2 \rho q_{i,k} (w + w_{i,k}^*)]}{\partial z} &= S_{i,k}, \\
& \text{for } 1 \leq k \leq k_{max}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

そして、これらの式(4.8) , (4.9) , (4.10) , (4.11) と(4.12) から(4.16) に要素  $G^{\frac{1}{2}} \gamma^2$  をかけ、また、式(4.2) から式(4.6) を用いて、次の地形に沿った鉛直座標系で深い大気を表現する支配方程式系が得られる。

- 全密度における連続の式

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \tilde{\nabla}_{h0} \cdot \left( \frac{\mathbf{V}_h}{\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\mathbf{V}_h}{\gamma} \cdot \mathbf{G}^z + \frac{W}{G^{\frac{1}{2}}} \right) = G_R \tag{4.16}$$

- 水平方向の運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial t} + \tilde{\nabla}_{h0} \frac{P}{\gamma} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \mathbf{G}^{\mathbf{Z}} \frac{P}{\gamma} \right) = G_{V_h} \quad (4.17)$$

- 鉛直方向の運動方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{P}{G^{\frac{1}{2}} \gamma^2} \right) + Rg = G_W \quad (4.18)$$

- 内部エネルギーの顕熱部分における方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E_a}{\partial t} + \tilde{\nabla}_{h0} \cdot \left( h_a \frac{\mathbf{V}_h}{\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ h \left( \frac{\mathbf{V}_h}{\gamma} \cdot \mathbf{G}^{\mathbf{Z}} + \frac{W}{G^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \\ & - \left\{ \mathbf{V}_h \cdot \left[ \tilde{\nabla}_{h0} \frac{P}{\gamma} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \mathbf{G}^{\mathbf{Z}} \frac{P}{\gamma} \right) \right] + w \left[ \gamma^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{P}{G^{\frac{1}{2}} \gamma^2} \right) + Rg \right] \right\} + Wg = G_{E_a} \end{aligned} \quad (4.19)$$

- 水の状態別における連続の式

$$\frac{\partial Q_n}{\partial t} + \tilde{\nabla}_{h0} \cdot \left( q_n \frac{\mathbf{V}_h}{\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ q_n \left( \frac{\mathbf{V}_h}{\gamma} \cdot \mathbf{G}^{\mathbf{Z}} + \frac{W}{G^{\frac{1}{2}}} \right) \right] = G_{Q_n} \quad (4.20)$$

ここでは，

$$\mathbf{G}^{\mathbf{Z}} \equiv \nabla_{h0} \xi = \frac{\tilde{\nabla}_{h0Z}}{G^{\frac{1}{2}}} \quad (4.21)$$

とする．そして，この方程式系の右辺は次に示す．


$$G_R = - \sum_n \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{W_n^*}{G^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (4.22)$$

$$G_{\mathbf{V}_h} = \tilde{\mathbf{F}}_h - \tilde{\mathbf{A}}_h - \tilde{\mathbf{C}}_h - \sum_n \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \mathbf{V}_h \frac{W_n^*}{G^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (4.23)$$

$$G_W = \tilde{F}_z - \tilde{A}_z - \tilde{C}_z - \sum_n \frac{\partial}{\partial \xi} \left( w \frac{W_n^*}{G^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (4.24)$$

$$G_{E_a} = - \sum_n \frac{\partial}{\partial \xi} \left( C_n T \frac{W_n^*}{G^{\frac{1}{2}}} \right) - \sum_n W_n^* g - \left( \mathbf{V}_h \cdot \tilde{\mathbf{F}}_h + w \tilde{F}_z \right) - L_{v00} \tilde{S}_v - L_{f00} \tilde{S}_i + \tilde{Q}_{heat} \quad (4.25)$$

$$G_{Q_n} = \tilde{S}_n - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{W_n^*}{G^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (4.26)$$

ここでの  $W_n^*$  は降水の構成状態による質量フラックス， $\tilde{\mathbf{A}}$  は運動量の移流ベクトル， $\tilde{\mathbf{C}}$  はコリオリ力のベクトルを表している．定義は次に示す．NICAM では， 4.1 に示す

ように地球を直交基底  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  で定めている．ここでの  $\mathbf{e}_3$  は  $\Omega$  と同じ方向で，速度の3成分は  $(v_1, v_2, v_3) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  で表す．

$$W_n^* = G^{\frac{1}{2}} \gamma^2 \rho q_n w_n^* \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} \equiv & \left\{ \tilde{\nabla}_{h0} \cdot \left( v_1 \frac{\mathbf{V}_h}{\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ v_1 \left( \frac{\mathbf{V}_h}{\gamma} \cdot \mathbf{G}^{\mathbf{Z}} + \frac{W}{G^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \right\} \mathbf{e}_1 \\ & + \left\{ \tilde{\nabla}_{h0} \cdot \left( v_2 \frac{\mathbf{V}_h}{\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ v_2 \left( \frac{\mathbf{V}_h}{\gamma} \cdot \mathbf{G}^{\mathbf{Z}} + \frac{W}{G^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \right\} \mathbf{e}_2 \\ & + \left\{ \tilde{\nabla}_{h0} \cdot \left( v_3 \frac{\mathbf{V}_h}{\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ v_3 \left( \frac{\mathbf{V}_h}{\gamma} \cdot \mathbf{G}^{\mathbf{Z}} + \frac{W}{G^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \right\} \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} \equiv \rho G^{\frac{1}{2}} \gamma^2 (-2|\Omega|v_2\mathbf{e}_1 + 2|\Omega|v_1\mathbf{e}_2) \quad (4.29)$$

数値積分には，補足的に以下の全エネルギーの式を用いる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_a + K + \Phi}{\partial t} + \tilde{\nabla}_{h0} \cdot \left[ (ha + k + \phi_v ar) \frac{\mathbf{V}_h}{\gamma} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (ha + k + \phi) \left( \frac{\mathbf{V}_h}{\gamma} \cdot \mathbf{G}^{\mathbf{Z}} + \frac{W}{G^{1/2}} \right) \right] = G_{E_a+K+\Phi} \end{aligned} \quad (4.30)$$

ここで， $(K, \phi) = \rho G^{1/2} \gamma^2 (k, \phi)$  で，運動エネルギーと位置エネルギーであり， $G_{E_a+K+\Phi}$  は，

$$G_{E_a+K+\Phi} = - \sum_n \frac{\partial}{\partial \xi} \left( C_n T \frac{W^*}{G^{1/2}} \right) - L_{v00} \tilde{S}_v - L_{f00} \tilde{S}_i + \tilde{Q}_{heat} \quad (4.31)$$

である．

#### 4.1.2 数値計算手法

NICAMの水平格子には正二十面体を採用している(図4.2)．正二十面体には三角形が20個あり，これをGlevel-0とする．それぞれの三角形を1回分割して4個の小さな三角形に分割することで，解像度が1つ上がりGlevel-1となる．同様のことを繰り返し $n$ 回分割するし，Glevel- $n$ となる．そのときの格子点数は， $10(2^n)^2 + 2$ となる．水平解像度”Glevel- $n$ ”と水平格子間隔の関係は，表4.3で示した．鉛直座標には，地形に沿ったLorenz格子を用いた．水平方向にはすべての予報変数はコントロールボリューム

ムの重心に配置され，鉛直方向には  $R, V_h, E, Q_n$  は正規レベル， $W$  はハーフレベルに配置される (図 4.3) .

支配方程式の時間積分には，split-explicit 法を採用している．時間積分の概略図を図 4.4 に示した．fast mode 項は，時間間隔  $\Delta_\tau$  の small time step 毎に求め，一方の slow mode 項は，より大きな時間間隔  $\Delta_t$  の large time step 毎に求めている．ここでの分割数は  $N_s = \frac{\Delta_t}{\Delta_\tau}$  となる．small time step の積分には，速い波の鉛直伝播には陰解法，速い波の水平伝播には陽解法を用いている．これは，horizontally explicit and vertically implicit scheme (HEVI 法; Saito et al. 1998; 2006) と呼ばれている．forward-backward 法は，HEVI 法と flux division 法 (Satoh 2002) を基盤とした．全エネルギーを保存するために，全エネルギーの式 (4.30) を用いた．large time step の積分には，2 次精度の Runge-Kutta，および 3 次精度の Runge-Kutta が使用できる．運動量の移流項と物理過程には large time step が用いられている．

### 4.1.3 正二十面体格子

NICAM の水平格子には正二十面体格子系が用いられており，三角形を分割することで解像度を上げることができる (Stuhne 1996) . この分割して得られた格子を標準格子と呼ぶ．標準格子で形成される三角形の面積は球面上で滑らかに分布しておらず，各格子点がコントロールボリュームの中心に位置していないので，完全な 2 次精度が得られない (Tomita et al. 2001) . そこで Tomita et al. (2001) では，バネ力学を導入し，格子点を適当なバネで結んだ (図 4.5) . このようにバネ力学によって格子を生成し，三角形の中心を結んで六角形のコントロールボリュームを構成する．このとき，二十面体の頂点のコントロールボリュームは五角形である．さらに格子点の位置がコントロールボリュームの中心になるように格子点を再配置する．このように修正型二十面体格子系を構成することで，2 次精度が保証され，計算効率を保つ．図 4.6 は，Glevel-5 の修正型二十面体格子である．

図 4.7 は標準格子と水平コントロールボリュームを表している．図 4.7 において，三角形  $P_i$  の全頂点にベクトル  $\mathbf{u}$  が与えられたとき，コントロールボリューム  $Q_i$  の頂点のベクトル  $\mathbf{u}$  は次のように内挿される．

$$\mathbf{u}_h(Q_i) \cong \frac{s_0 \mathbf{u}_h(P_0) + s_1 \mathbf{u}_h(P_i) + s_2 \mathbf{u}_h(P_{1+\text{mod}(i,6)})}{s_0 + s_1 + s_2} \quad (4.32)$$

ここで、 $s_0, s_1, s_2$  は、 $Q_i P_i P_{1+mod(i,6)}$ 、 $Q_i P_{1+mod(i,6)} P_0$ 、 $Q_i P_0 P_i$  の各々の面積である。コントロールボリュームが五角形の場合は6が5に置き換わる。また、ガウス理論から発散をもとめると、

$$\nabla_{h0} \cdot \mathbf{u}_h(P_0) \cong \frac{1}{a(P_0)} \sum_{i=1}^6 b_i \frac{\mathbf{u}_h(Q_i) + \mathbf{u}_h(Q_{1+mod(i,6)})}{2} \cdot \mathbf{n}_i \quad (4.33)$$

となる。ここでの  $b_i$  は  $Q_i Q_{1+mod(i,6)}$  の2点間の最短距離である弧の長さ、また、 $\mathbf{n}_i$  は  $Q_i Q_{1+mod(i,6)}$  の中点におけるこの弧の外向き単位垂直ベクトルを意味する。また、 $a(P_0)$  は点  $P_0$  と結合するコントロールボリュームの面積である。

全球非静力学モデル NICAM は、現在も開発中のモデルであるが、NICAM を用いたデータ同化システムは存在せず、NICAM に最適な初期値は作られていないため、数値予報に悪影響を与えると考えられる。そこで本章では、NICAM に non-local patch LETKF を適応し、NICAM-LETKF を構築したので、その詳細を述べる。

## 4.2 パーフェクトモデル実験

本実験では、全球非静力学モデル NICAM の低解像度 Glevel-5 (水平格子間隔 224 km) を用いた。LETKF には、さまざまチューニングパラメータ (膨張係数、局所化スケール) があり、それらはモデルに左右される。局所化スケールは、モデルの誤差相関距離によって変化するので、特にチューニングが必要である。そこで、本実験ではパーフェクトモデルを仮定し、最適な水平方向の局所化スケールおよび鉛直方向の局所化スケールを調査した。その上で、水蒸気を同化した場合と同化しない場合で解析場にどれほどの影響があるのか調査した。

### 4.2.1 実験設定

本実験は、パーフェクトモデルという仮定の下、観測システムシミュレーション実験 (OSSE: Observing Systems Simulation Experiments) を行った。真値には、2006 年 12 月 29 日 12Z の JMA-GSM 解析値を初期値に NICAM を 2007 年 1 月 31 日 12Z まで積分し、2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 31 日 12Z までを真値として使用した。初期アンサンブルは、適当な日付の JMA-GSM 解析値をランダムに 20 もしくは 40 個選び、

スピナップのためそれぞれ2日積分したものを初期アンサンプルとした。観測値は、真値にガウス分布のノイズを観測誤差として上乘せし、6時間毎に作成した。実験期間は2007年1月1日12Zから2007年1月31日12Zで、6時間毎に観測を同化した。

本実験の観測分布は、空間的・時間的に均一である。観測は、水平方向には10格子点につき1個、鉛直方向には3格子点につき1個で、観測密度は平面的には10%、全体では3.3%程度である。観測要素は、気圧  $P$ 、気温  $T$ 、水平風  $v_1, v_2, v_3$ 、水蒸気の混合比  $Q_v$  である。観測誤差は、それぞれ 1.0 hPa, 1.0 K, 1.0 m/s, 0.0005 kg/kg である。アンサンプルサイズは基本的には40である。

局所化スケールは、チューニングパラメータの1つでアンサンプルサイズによって変化する。遠くの離れた点ほど、アンサンプルサイズが限られていることでサンプリングエラーの占める割合が、観測の重要なシグナルより大きくなる。そのため、局所化を行わなければ EnKF は発散してしまう。しかし、局所化を強めれば、遠くの観測を取り込まなくなり、EnKF の特徴の1つである流れに依存した情報を同化しなくなりかねない。そのため、局所化スケールのチューニングが必要である。しかし、このチューニングは試行錯誤であるため、多大な計算機資源を必要とする。そのため、アンサンプルサイズは40に固定した。本実験では、まず最適な水平方向の局所化スケールを決定し、その上で最適な鉛直方向の局所化スケールを決定する。さらに最適な局所化スケールを用いた同化実験を CNTL 実験、観測要素から水蒸気の混合比  $Q_v$  を抜いた実験を TEST 実験とし、水蒸気の同化が解析場に与える影響を調べた。

スプレッド膨張（共分散膨張の平方根）は、様々なチューニングを行った結果、基本的にはアンサンプルサイズが20の場合は2%（およそ4%の共分散膨張）、アンサンプルサイズが40の場合は1%（およそ2%の共分散膨張）とし、それぞれ一定値である。また、膨張係数および観測誤差の動的推定法が、NICAM-LETKF において動作するか確認を行っている。アンサンプルサイズは40である。膨張係数を動的に求める際の2つのコントロールパラメータ  $\alpha, v^o$  については、三好 (2006) で用いられているように、 $\alpha = 1.03$ ,  $v^o = 0.21$  を用いた。初期のスプレッド膨張はおよそ9%（20%の共分散膨張）、その分散は  $v^a = 0.21$  とした。スプレッド膨張係数の上限は、およそ9%（20%の共分散膨張）、下限は0.0%とした。また、観測誤差を動的に求める際には、 $\alpha = 1.03$ ,  $v^o$  については、観測要素毎（気圧、温度、水平風、水蒸気の混合比）に異なり、それぞれ  $200^2, 2.0^2, 2.0^2, 0.0010^2$  とした。初期の観測誤差分散  $\delta^a$  は、真の観測誤差分散の3

倍,  $\delta^a$  の分散  $v^a$  は,  $200^2, 2.0^2, 2.0^2, 0.0030^2$  とした. 観測誤差分散の下限は, 0.0 とし, 上限は設けていない.

本実験では, 初期値化は行っていない.

本研究で用いた NICAM のスキームは以下の通りである. 地表面過程にはルイス地表面過程, 境界層にはメラー山田 2 次, 積雲パラメタリゼーションには荒川・シューベルト積雲対流パラメタリゼーションを用いた.

本実験はパーフェクトモデル実験であるため, 真値がわかっているため, 解析値の精度比較には真値に対する RMSE (Root Mean Square Error) を用いた. RMSE は, 物理空間で計算する場合は, 緯度による重みを考慮するため,

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i^a - x_i^t)^2 \cos \phi_i}{\sum_{i=1}^n \cos \phi_i}} \quad (4.34)$$

となる. 上添え字の  $a, t$  は, それぞれ解析 (analysis), 真 (true) を表し,  $n$  は実空間での格子点数,  $\phi$  は格子点の緯度を表している. 各格子点における解析アンサンブルブレッドは,

$$\text{Spread}^{grid} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\mathbf{x}^{a(i)} - \bar{\mathbf{x}}^a)^2} \quad (4.35)$$

と表される. ここで,  $m$  はアンサンブルメンバー数を,  $\mathbf{x}^{a(i)}$  は  $i$  番目のアンサンブルメンバーを表す. さらに, 解析アンサンブルブレッドの領域平均は, RMSE のときと同様に緯度による重みを考慮するため,

$$\text{Spread} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\text{Spread}_i^{grid})^2 \cos \phi_i}{\sum_{i=1}^n \cos \phi_i}} \quad (4.36)$$

となる.

本実験の同化の計算は, T2K 筑波システムを用いて計算された.



## 4.2.2 結果

### 水平方向の局所化スケール

図 4.8, 図 4.9, 図 4.10 は, 実験期間における北半球 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $90^{\circ}\text{N}$ ) の解析 RMSE の時系列で, それぞれ 850 hPa, 500 hPa, 250 hPa 面での高度 [m], 気温 [K], 東西風 [m/s], 水蒸気の混合比 [g/kg] の解析誤差である. 鉛直方向の局所化スケールを 2.5 grid (V2.5) に固定し, 水平方向の局所化スケールを変化させて, その影響を見る. 比較のため, アンサンブルサイズが 20 の場合も載せてある. 水平方向の局所化スケールは 300 km (H300), 500 km (H500), 700 km (H700) と変化させている. 局所化関数が 0 になるのは, それぞれ 1095 km, 1826 km, 2556 km である. Houtekamer et al. (2005) では, 局所化関数が 0 になる半径がおよそ 2800 km となるような関数を使用しており, また Miyoshi and Yamane (2007) では, およそ 1600 km の局所関数を用いており, 本実験での局所化と同じオーダーである. 観測を同化し予報を修正することで, 解析誤差はすべての要素で観測誤差より大幅に小さくなっているのがわかる. LETKF が収束するまでにはおよそ 7 日から 10 日程度必要であり, 上層ほど収束が遅い. この傾向は局所化スケールによらない. 最も解析誤差が小さいのは 500 km のときであるが, 300 km のときも十分に解析誤差は小さく, ほとんど区別は付かない. 一方, 700 km のときは, 最も多くの観測を同化しているが解析誤差は一番大きい. これは, 遠く離れた点との共分散にはサンプリングエラーが混入しており, 局所化が適切に働いていないことを示している. さらに, アンサンブルサイズが 20 の場合, 水平方向に 300 km, 鉛直方向に 1.5-grid と比較的強い局所化を行うことで, 解析誤差はアンサンブルサイズが 40 の場合と同程度にまで小さくできる. また局所化スケールが 1000 km と非常に大きい場合, LETKF はすぐに発散してしまい, 局所化が適切に働いていないことを示している. 熱帯 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $20^{\circ}\text{S}$ ) および南半球 ( $20^{\circ}\text{S}$ – $90^{\circ}\text{S}$ ) の結果は, 北半球の結果と同様であった (図略).

そこで, アンサンブルサイズが 40 のとき, 予報誤差共分散行列にどれほどのサンプリングエラーが含まれているのか, また水平方向の局所化がどのように働いているのかを表しているのが, 図 4.11 である. この図では, 観測誤差共分散行列ではなく予報誤差共分散行列に局所化を施した. 図 4.11 は, 実験期間最後の 2007 年 1 月 31 日 12Z の気温の水平誤差相関である. は相関の基準点を示している. シェードは相関に統計

的な優位性があるかどうかを表している。局所化を行わない場合、基準点から遠く離れた点との間に有意でない相関が存在するのがわかる。これはサンプリングエラーと言える。サンプリングエラーはあらゆる点でほぼ同程度と考えられるが、観測が解析に与える影響は、遠い点ほど小さい。そのため、遠く離れた点では観測のシグナルよりサンプリングエラーの占める割合が大きくなり、正しい情報が同化されなくなる。そこで局所化を施すことによりサンプリングエラーはほとんど取り除くことができる。ただ、遠く離れた点の優位な相関までダンプしてしまう。局所化スケールを 300 km まで小さくすると、相関の分布は同心円状になり、流れに依存した情報を利用できる EnKF の利点を損ないかねない。局所化スケールが 500 km と 700 km の場合は流れに依存した情報を利用でき、サンプリングエラーも取り除かれており、局所化はよく働いている。図 4.8、図 4.9、図 4.10 を見ると、局所化スケールが 500 km と 700 km の場合では、500 km の場合の方が RMSE が小さい。これは、局所化スケールが 700 km の場合は、わずかにサンプリングエラーが残っている可能性があることを示唆している。本来であれば、遠くの観測からも重要なシグナルがある。図 4.11 と図 4.12 でも見られるように、遠く離れた点であっても優位な相関が見られる。局所化を行うことで、このような遠く離れた点の重要なシグナルを無視してしまうことになるが、局所化を行わなければサンプリングエラーの悪影響を受ける。局所化スケールのサイズはサンプリングエラーとシグナルのトレードオフであり、両者を解決するにはアンサンプルサイズを増やすしかない。

図 4.12 は、基準点の風と気温の誤差相関図である。予報誤差共分散行列の非対角成分は、異なる変数間の相関を表しており、これはモデルの力学構造そのものである。局所化を行うことで、相関のピークの位置はいくらかずれる。強い局所化を施すほど、その影響は大きい。これは力学的なモデルのバランスを少なからず壊すことになり、モデルを時間積分する際に、このアンバランスが高周波の発生をさせ、数値予報に悪影響を与える可能性がある。しかし、Miyoshi and Yamane (2007) などでも述べられているとおり、局所化を行っても初期値化の必要はなく、局所化はモデルの力学的な構造を大きく崩すものではないと言える。実際、本実験では局所化スケール 300 km であっても、NICAM-LETKF は安定して動作した。以上より、NICAM Glevel-5 での最適な水平方向の局所化スケールは 500 km とした。

## 鉛直方向の局所化スケール

水平方向の局所化スケールを調べたのと同様にして、鉛直方向の局所化スケールを調べた。図 4.13, 図 4.14, 図 4.15 は、実験期間における北半球 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $90^{\circ}\text{N}$ ) の解析 RMSE の時系列で、それぞれ 850 hPa, 500 hPa, 250 hPa 面での高度 [m], 気温 [K], 東西風 [m/s], 水蒸気の混合比 [g/kg] の解析誤差である。水平方向の局所化スケールを 500 km (H500) に固定し、鉛直方向の局所化スケールを変化させて、その影響を見る。鉛直方向の局所化スケールは 2.5-grid (V2.5), 3.5-grid (V3.5), 5.0-grid (V5.0) と変化させている。局所化関数が 0 になるのは、それぞれ 9.1-grid, 12.8-grid, 18.3-grid である。Miyoshi and Yamane (2007) では、48 層の AFES を用いた場合、鉛直方向の局所化スケールは 3.0-grid が最適としており、本研究でもそれと同程度のスケールである。観測を同化し予報を修正することで、解析誤差は小さくなっているのがわかる。LETKF が収束するまでにはおよそ 7 日から 10 日程度必要であり、上層ほど収束が遅い。この傾向は局所化スケールによらない。同化期間初期では、局所化スケールの小さい場合の方が、解析誤差が速く小さくなる。しかし、同化期間中間以降の LETKF が収束したあたりからは、鉛直方向の局所化スケールが 5.0-grid の場合に解析誤差が若干大きいものの、大きな差は見られない。この傾向は南半球 ( $20^{\circ}\text{S}$ – $90^{\circ}\text{S}$ ) でも同様であった。

一方、図 4.16, 図 4.17, 図 4.18 は、実験期間における熱帯 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $20^{\circ}\text{S}$ ) の解析 RMSE の時系列で、それぞれ 850 hPa, 500 hPa, 250 hPa 面での高度 [m], 気温 [K], 東西風 [m/s], 水蒸気の混合比 [g/kg] の解析誤差である。局所化スケールは、上記と同じである。北半球の場合と同様に、観測を同化し予報を修正することで、解析誤差は小さくなり、LETKF が収束するまでにはおよそ 7 日から 10 日程度必要であり、上層ほど収束が遅くなっている。熱帯では局所化スケールが 2.5-grid, 3.5-grid の場合は解析誤差にほとんど違いがないが、5.0-grid の場合は解析誤差が大きくなっている。これは、熱帯では誤差相関スケールが北半球より小さいことを示唆しており、5.0-grid の場合は、局所化が適切ではなく、遠く離れた点との共分散にはサンプリングエラーが混入していることを示している。

以上の結果を踏まえて、南北半球 ( $30^{\circ}\text{N}$ – $90^{\circ}\text{N}$ ,  $30^{\circ}\text{S}$ – $90^{\circ}\text{S}$ ) では鉛直方向の局所化スケールを 4.0-grid, 熱帯 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $20^{\circ}\text{S}$ ) では 3.0-grid に設定し、熱帯と南北半球の間の局所化スケールは南北半球と熱帯の線形内挿とした。また、南北半球ではアンサンブルスプレッドは RMSE に一致したが、熱帯ではアンサンブルスプレッドが過小評価され

ていた．そこで，スプレッド膨張を南北半球 ( $30^{\circ}\text{N}$ – $90^{\circ}\text{N}$ ,  $30^{\circ}\text{S}$ – $90^{\circ}\text{S}$ ) では同様の 1 %，熱帯 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $20^{\circ}\text{S}$ ) では 3 % に設定し，熱帯と南北半球の間のスプレッド膨張は南北半球と熱帯の線形内挿とした．その結果が，図 4.13，図 4.14，図 4.15，図 4.16，図 4.17，図 4.18 の 4.0-grid (TR 3.0-grid) (V4.0 (TR 3.0)) である．局所化スケールが 4.0-grid (TR 3.0-grid) の場合，解析誤差は最も小さい．さらに収束するまでの時間も短くなっている．

アンサンプルサイズが 40 のとき，予報誤差共分散行列にどれほどのサンプリングエラーが含まれているのか，また鉛直方向の局所化がどのように働いているのかを表しているのが，図 4.19 である．この図では，観測誤差共分散行列ではなく予報誤差共分散行列に局所化を施した．図 4.19 は，実験期間最後の 2007 年 1 月 31 日 12Z の予報誤差共分散行列の 1 成分に相当するもので，水平風  $V_1$  の鉛直誤差相関である． は相関の基準点を示している．シェードは相関に統計的な優位性があるかどうかを表している．局所化を行わない場合，水平方向の局所化のときと同様に，基準点から遠く離れた点との間に有意でない相関があるのがわかる．これはサンプリングエラーと言える．局所化スケールを 3.0-grid まで小さくすると，流れに依存した情報を利用できる EnKF の利点を損ないかねない．局所化スケールが 4.0-grid と 5.0-grid の場合は流れに依存した情報を利用でき，サンプリングエラーも取り除かれており，局所化はよく働いている．図 4.13，図 4.14，図 4.15 を見ると，局所化スケールが 4.0-grid の場合が最も RMSE が小さい．これは，局所化スケールが 5.0-grid の場合は，わずかにサンプリングエラー残っている可能性があることを示唆している．局所化スケールのサイズは鉛直方向に関しても，サンプリングエラーとシグナルのトレードオフであり，両者を解決するにはアンサンプルサイズを大きくするしかない．以上より，NICAM Glevel-5 での最適な鉛直方向の局所化スケールは 4.0-grid (TR 3.0-grid) とした．

## CNTL 実験

上記実験より，局所化スケールは，水平方向 500 km，鉛直方向 4.0-grid (TR 3.0-grid) が最適であるとわかったので，この設定の NICAM-LETKF による同化実験を CNTL 実験とする．図 4.20，図 4.21，図 4.22 は，実験期間における解析 RMSE およびアンサンプルスプレッドの時系列で，それぞれ 850 hPa，500 hPa，250 hPa 面での高度 [m]，気温 [K]，東西風 [m/s]，水蒸気の混合比 [g/kg] である．解析 RMSE は  $\overline{x^a - x^a}$ ，アン

サンプルスプレッドは  $|\overline{E^a}|$  と同等である．観測を同化し予報を修正することで，解析誤差はすべての要素で観測誤差より大幅に小さくなっているのがわかる．また，どの高度・要素においても，同化期間初期の LETKF が収束するまでは解析誤差の方が大きい，LETKF が収束した同化期間中間以降は，北半球と南半球の解析 RMSE とアンサンプルスプレッドはよく一致している．例えば，図 4.21 の (a) ジオポテンシャル高度の図では，期間後半に南半球で解析 RMSE が大きくなっているが，アンサンプルスプレッドもそれに対応するかのようにならなっており，アンサンプルスプレッドは解析誤差を捕らえていると言える．温度や水蒸気の混合比は，下層ほど解析誤差が大きい，これは海洋からの水蒸気の供給によるものであると考えられる．また，北半球の方が南半球より解析 RMSE の値は小さいが，これは南北半球の海陸分布違い，および夏半球と冬半球の違いなどが影響していると考えられる．一方，熱帯では積雲対流が活発であるためか，解析 RMSE，アンサンプルスプレッドともに南北半球より大きい．

図 4.23 は，850 hPa の気温および水蒸気の混合比の解析 RMSE とアンサンプルスプレッドの空間分布，図 4.24 は，500 hPa のジオポテンシャル高度および風の解析 RMSE とアンサンプルスプレッドの空間分布である．2007 年 1 月 16 日 00Z から 2007 年 1 月 17 日 18Z までの平均である．1 時刻毎に空間分布の図を作ることはできるが，ノイズが多いので 2 日間の平均を載せた．これらを見ると，RMSE は局所的に値の大きな場所が点在している．850 hPa の気温と水蒸気の混合比では，主に海洋の影響を受けるため，海洋上で RMSE が大きい．500 hPa のジオポテンシャル高度と風速は，熱帯収束帯 ITCZ 周辺，ジェットが蛇行しているあたりで RMSE が大きくなっている．熱帯収束帯 ITCZ では，積雲対流が活発であるため不確実性が高く，ジェットが大きく蛇行し，地上には低気圧があり，ジェットが砕波するような場所では不確実性が高いため，RMSE が大きくなるのは自然である．一方，アンサンプルスプレッドもその分布は局所的であり，RMSE の分布とほぼ一致する．つまり，解析誤差の大きな場所でアンサンプルのばらつきが大きいことを示している．これは，NICAM-LETKF が初期値に含まれる不確実性を，アンサンプルスプレッドを大きくすることで捕らえていると言える．

## CNTL 実験と TEST 実験の比較

これまでの実験により、NICAM-LETKF はパーフェクトモデル実験では正常に機能することが確かめられた。そこで、水蒸気が解析場に与える影響について調べる。図 4.25 は、CNTL 実験と TEST 実験の 850 hPa における解析 RMSE の時系列で、(a) 気温、(b) 水蒸気の混合比である。大気下層では、気温と水蒸気は海洋からの影響を強く受けているため、水蒸気の観測の同化の影響は大きいと考えられる。しかし、図 4.25 を見てもわかるとおり、同化期間初期では、水蒸気の観測を同化する影響は大きく、CNTL 実験と TEST 実験では RMSE に大きな差がある。しかし、同化期間中盤以降は、CNTL 実験と TEST 実験では RMSE に大きな差は見られない。同様に、図 4.25 は、CNTL 実験と TEST 実験の 500 hPa における解析 RMSE の時系列で、(a) ジオポテンシャル高度、(b) 東西風である。こちらも図 4.25 と同様に、同化期間初期では水蒸気の観測を同化する影響は大きく、CNTL 実験と TEST 実験では RMSE にその差が現れているものの、同化期間中盤以降はそのような差は見られない。これは、EnKF が日々変化する予報誤差共分散行列を考慮している点にある。予報誤差共分散行列の非対角成分は、異なる地点間の共分散 (相関)、もしくは異なる変数間の共分散 (相関) を表している。アンサンブルメンバーに含まれている摂動は、モデルによる力学的拘束を受けて成長してきた摂動であるため、予報誤差共分散行列はモデルの力学構造を表している。つまり、たとえ水蒸気が観測されなかったとしても、水蒸気と相関を持つ変数を同化することで、水蒸気場は大きく改善されることが期待される。本実験の結果は、その EnKF の特徴が明瞭に現れた結果と言える。また、解析 RMSE とアンサンブルスプレッドの空間分布 (図略) は、CNTL 実験と TEST 実験で RMSE に大きな差がある同化期間初期では、両実験の差は大きいですが、LETKF が収束した段階では両実験の空間分布に大きな差は見られない。

アンサンブルサイズが 20 の場合は、アンサンブルスプレッドが RMSE に比べて多少大きいものの、水蒸気を同化する実験と同化しない実験では、RMSE は同程度の大きさになり、アンサンブルサイズが 40 の場合とほぼ同様の結果となった (図略)。

## 共分散膨張および観測誤差の動的推定

図 4.27 は、動的推定なし、膨張係数の動的推定のみ、膨張係数および観測誤差の動的推定を行った実験の北半球の解析 RMSE の時系列で、(a) 500 hPa ジオポテンシャル高度、(b) 500 hPa 東西風、(c) 850 hPa 気温、(d) 850 hPa 水蒸気の混合比である。図 4.28、図 4.29 は、それぞれ熱帯、南半球の RMSE 時系列である。これらから、膨張係数のみを動的に推定する実験が最も解析 RMSE が小さくなっており、適切に膨張係数が設定されたことを示している。また、膨張係数および観測誤差を動的に推定する場合であっても、真の観測誤差を用いている実験（動的推定なし、膨張係数の動的推定の実験）と同程度まで解析誤差は小さくなっていることがわかる。これは、真の観測誤差がわからなくても、カルマンフィルタを用いて観測誤差を推定することで、真の観測誤差に近づいていることを示唆している。

さらに、図 4.30 は、モデル最下層の気圧の観測誤差の推定値の時系列である。図 4.31 は、図 4.30 と同じで、2007 年 1 月 8 日 00Z のモデル最下層の気圧の観測誤差の推定値の空間分布である。これらから、初期に大きな観測誤差を設定しても、カルマンフィルタを用いて観測誤差を推定することで、真の観測誤差に近づくことが確かめられた。

### 4.2.3 考察

本研究では、低解像度の NICAM Glevel-5 に LETKF を適応して NICAM-LETKF によるデータ同化システムを構築し、その性能をパーフェクトモデル実験を行い調査した。NICAM は雲解像を目的に開発された全球非静力学モデルであるため、モデル変数が多く、LETKF が正常に動作する保証はなかったが、本研究により、適切に局所化を行うことでアンサンブルサイズが 20 であっても安定して動作し、解析誤差は観測誤差を大きく下回ることがわかった。さらに、LETKF が見積もる解析誤差であるアンサンブルスプレッドは、実際の解析誤差である RMSE に空間的にも一致し、解析誤差を的確に捉えていると言える。

より高解像度モデルに LETKF を適応した場合は、モデルの自由度が上がるため、よりアンサンブルサイズを大きくしなければならないと思われる。もしくは、局所化スケールを小さくする必要がある。逆に言えば、アンサンブルサイズを大きくして局所化スケールを大きくすれば、LETKF のパフォーマンスは上がると考えられる。Szunyogh

et al. (2005) は、NCEP GFS T62/L28 に LETKF を適応し、アンサンブルサイズ 40 の場合によりパフォーマンスを得ることができ、また、局所化を適切に行うことで、アンサンブルサイズが 40 と 80 の場合の結果には実用上問題とされるほどの差は見られない、との結果が得られている。Miyoshi and Yamane (2007) では、比較的高解像度モデルである AFES TL159/L48 に LETKF を適応し、そのパフォーマンスを調査した。その結果、アンサンブルサイズを 40 から 160 にまで大きくしても、解析誤差に大きな差はないことが示された。Szunyogh et al. (2005) と Miyoshi and Yamane (2007) を比較すると、モデル解像度とアンサンブルサイズは比例関係にはないと言える。しかし、順圧 S-model-LETKF で示唆されたように、局所化を行うことでテレコネクションなどの半球スケールのシグナルを無視してしまうことは十分に考えられる。また、サンプリングエラーを抑えるための強すぎる局所化はモデルの力学的構造を壊してしまう可能性がある上、日々変化する情報を扱える EnKF の利点をなくしてしまう。現実問題としてアンサンブルサイズは計算機資源によって制限されており、局所化とサンプリングエラーはトレードオフである。

本研究では、局所化スケールを変化させ、最適な局所化スケールを求めた。しかし、結果でも示したように、局所化スケールの選び方によって LETKF の性能は大きく変化し、アンサンブルサイズの違いを上回るほど、その変化は大きい。Houtekamer et al. (2005) では、モデルに NCEP GFS T62/L28 を使用し、局所化スケール 770 km の局所化関数を用いている。また Miyoshi et al. (2007b) では、モデルに JMA-GSM TL159/L48 を使用し、局所化スケール 500 km の局所化関数を用いている。本実験では、NICAM の Glevel-5 (格子間隔 224 km) を使用し、500 km の局所化スケールが最もよいパフォーマンスを得た。これより、局所化スケールはモデル解像度と線形関係にあるわけではない。局所化スケールは、モデル解像度よりもモデルの持つ特性によるところが大きく、モデルの誤差相関距離を試行錯誤によって調査する必要があると思われる。

本実験では、局所化関数はガウス関数の近似関数を用いているが、誤差相関距離が広がる方向は一定ではない可能性は十分にあり、ガウス関数を用いた局所化は適切ではないと考えられる。つまり誤差相関が強い方向には、誤差相関は遠くまで存在し、サンプリングエラーが支配的になる距離はより遠くなる。一方、誤差相関が弱い方向には、サンプリングエラーが支配的になる距離は短い。Anderson (2007) では、動的に局所化スケールを見積もる方法を調査している。また、本実験での観測分布は、全球均一に



分布しているため現実的な観測分布であるとは言えない。これが、局所化スケールにいくらか影響する可能性はある。均一な分布であれば、純粋に最適な局所化スケールを決めることができるが、不均一な分布であれば、海洋など観測の少ない場所では遠くの観測でも同化することで、解析場が修正される可能性はある。そのためにも、日々変化する誤差相関距離に応じた局所化は必要であると言える。また、気温、風などの誤差相関スケールは総観規模スケールであると考えられるが、降水現象などは、局地的なものもあり、誤差相関スケールは気温や風とは異なる。そのような場合、降水を同化する場合に同一の局所化スケールを用いると、降水と風のどちらに局所化スケールを合わせるかが問題となる。降水に合わせた場合、局所化スケールはかなり小さくなり、EnKFのメリットを生かせない。一方、風に合わせた場合、降水を同化するにはサンプリングエラーが含まれてしまう。そこで、数段階にわたって局所化スケールを変えることで観測を同化する手法が提案されている(三好 2008)。

本研究では、スプレッド膨張は、ある程度チューニングし、熱帯で3%、それ以外で1%を用いた。しかし、実際には時空間的に一定値がよいという保証はない。擾乱が存在するような場所では不確実性が大きいいため、より観測を取り込みやすくする必要があり、膨張係数は大きめにする必要があると考えるのは自然であると思われる。逆に、擾乱が存在しない不確実性の小さい場所では、膨張係数は小さくてもかまわない。Miyoshi and Kalnay (2005) では、膨張係数を動的に推定する手法を提案しており、尤もらしい考えと言える。そこで、本研究でもカルマンフィルタを用いた膨張係数の動的推定法を導入したところ、解析誤差の改善が見られた。これは、場所により異なったスプレッド膨張を行うことで、より適切にアンサンブルスプレッドの大きさを保つことができ、真の解析誤差を捕らえやすくなったと言える。

Kalnay et al. (2007) では、SPEEDY モデルを用いて、膨張係数の他に観測誤差の動的推定も同時に行っている。それによると、観測誤差が不確かであっても、カルマンフィルタによって観測誤差を動的推定することにより、真の観測誤差に近づくことが示されているが、より大規模な大循環モデルを用いた場合に適切に動作するのは、述べられていない。そこで、本研究でも、Kalnay et al. (2007) と同様にパーフェクトモデル実験のもとで膨張係数および観測誤差の動的推定を行った。その結果、モデルにNICAMを用いた場合、データ同化サイクル初期に与えた観測誤差が不確かであっても、カルマンフィルタによって観測誤差を動的推定することにより、真の観測誤差

に近づくことが示された．これにより、NICAMのような大規模モデルであっても膨張係数および観測誤差の動的推定手法が有効であることと考えられる．実際の観測を同化するには、観測測器の変更などによって観測誤差も変化する．そのため、観測誤差の動的推定法は、数値予報にとって有効な手法であると考えられる．

本研究では、地表気圧だけではなく 3 次元の気圧も観測要素として同化した．気圧を観測として同化する場合、局所化などによる疎密波が悪影響を及ぼすと言われている (三好 私信) が、NICAM は完全圧縮性の非静力学モデルであるため、観測を同化した際に発生する疎密波は、非静力の作用によって自動的に調節されるものと考えられる．実際、3 次元の気圧を同化することによる悪影響は見られなかった．

様々な研究で用いられているように、本研究では、適当な日付の JMA-GSM の解析値をスピナップさせたものを、初期値アンサンブルとした．観測を同化する前の初期のアンサンブル平均は気候学的な場であり、日々の大気を表現しているわけではない．しかし、観測を同化することで解析値は徐々に日々の大気を表現するようになると考えられる．実際、本研究でもそのようにして観測にフィットするような解析場が得られている．初期アンサンブルに必要とされるのは、ある程度のスプレッドを持ち、バランスがとれており、酷似したメンバーがないことである．バランスがとれているというのは、初期値から積分してもノイズとなるような高周波が発生しないということである．EnKF は、過去の情報を大気を持つメモリの分だけ引き継ぐので、不適切な初期アンサンブルにより発生した高周波ノイズは、しばらくの間データ同化に悪影響を及ぼすと考えられる．

#### 4.2.4 結論

本研究では、全球非静力学モデル NICAM に LETKF を適応し (NICAM-LETKF)、パーフェクトモデル実験のもと、NICAM-LETKF の基本的な評価を行った。アンサンブルサイズは 20 であっても安定して動作し、解析誤差を観測誤差より小さくすることに成功した。アンサンブルサイズを 40 にまで増やすことで、さらに解析誤差を小さくすることができたが、解析誤差は局所化サイズに大きく左右されることもわかった。アンサンブルスプレッドは、解析 RMSE に一致し、NICAM-LETKF は解析誤差を適切に反映した初期摂動を作成していることが示された。

最適な局所化サイズを求めた後、水蒸気の混合比を同化する CNTL 実験とそれを同化しない TEST 実験を行った結果、同化サイクル初期では CNTL 実験の方が RMSE が小さい。しかし、同化サイクルを繰り返し水蒸気と相関のある観測を同化することによって、TEST 実験の RMSE は CNTL 実験の RMSE にほぼ一致した。

表 4.1: NICAM の支配方程式に用いられている記号その 1

$r$	: 地球の中心からの距離
$r_0$	: 地球の半径
$z = r - r_0$	: 平均海水面からの高さ
$t$	: 時間
$\phi$	: スカラー量
$\mathbf{u}$	: ベクトル量
$z_T$	: モデル領域の最頂点の高さ
$z_S$	: 地表面の高さ
$\rho$	: 湿潤空気の全密度
$q_v$	: 水蒸気の比湿
$l_{max}, k_{max}$	: 液体/固体の水の構成要素の全数
$q_{l,j}(j = 1, \dots, l_{max})$	: 液体の水の $j$ 番構成要素の比湿
$q_{i,k}(k = 1, \dots, k_{max})$	: 固体の水の $k$ 番構成要素の比湿
$q_l = \sum_{j=1}^{l_{max}} q_{l,j}$	: 水の液体の相の比湿
$q_i = \sum_{k=1}^{k_{max}} q_{i,k}$	: 水の固体の相の比湿
$q_w = q_v + q_l + q_i$	: 水全体の比湿
$q_d = 1 - q_w$	: 乾燥空気の比湿
$s_n$	: $n$ 番構成要素の質量源の項
$\mathbf{v}$	: 速度ベクトル
$w$	: 鉛直速度
$\mathbf{v}_h$	: 水平速度ベクトル

表 4.2: NICAM の支配方程式に用いられている記号その 2

$p$	: 気圧
$T$	: 気温
$g$	: 重力加速度
$\Omega$	: 地球の角速度
$\mathbf{f}$	: 摩擦力
$\mathbf{a} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$	: 運動方程式の移流項
$\mathbf{c} = 2\rho\Omega \times \mathbf{v}$	: コリオリ力
$L_v, L_f$	: 蒸発/融解の潜熱
$L_{v00}, L_{f00}$	: 0K における蒸発/融解の潜熱
$C_{pd}$	: 乾燥空気の定圧比熱
$C_{pv}$	: 水蒸気の定圧比熱
$C_l, C_i$	: 液体/固体の水の比熱
$R$	: 気体定数
$C_v = q_d C_{vd} + q_v C_{vv} + q_l C_l + q_i C_i$	: 全空気の定積比熱
$e_a = C_v T$	: 内部エネルギーの顕熱部分
$h_a \equiv h - (q_v L_{v00} - q_i L_{f00})$	: エンタルピーの顕熱部分
$\rho'$	: 密度の摂動
$p'$	: 気圧の摂動

表 4.3: 水平解像度”Glevel-n” と水平格子間隔

水平解像度	水平格子間隔
Glevel-5	224km
Glevel-6	112km
Glevel-7	56km
Glevel-8	28km
Glevel-9	14km
Glevel-10	7km
Glevel-11	3.5km

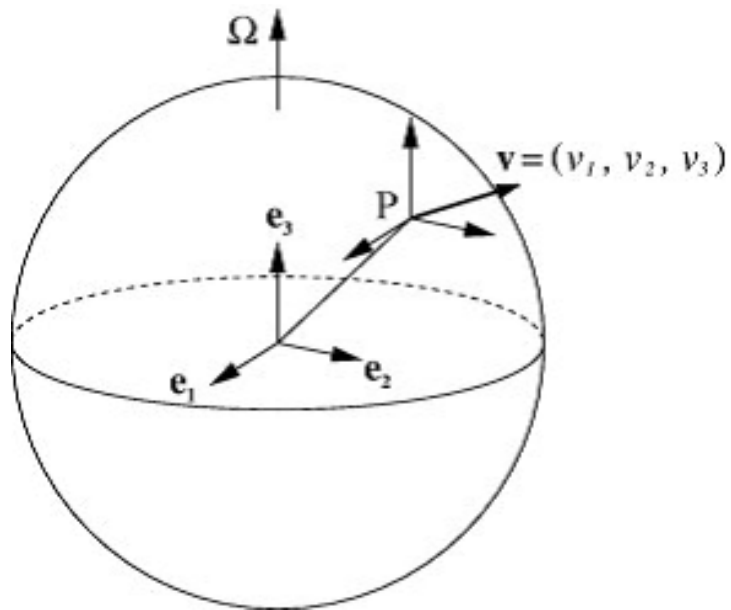


図 4.1: 速度ベクトル  $\mathbf{v}$  の 3 成分と直交基底  $\{e_1, e_2, e_3\}$  . Satoh et al. (2008) より .

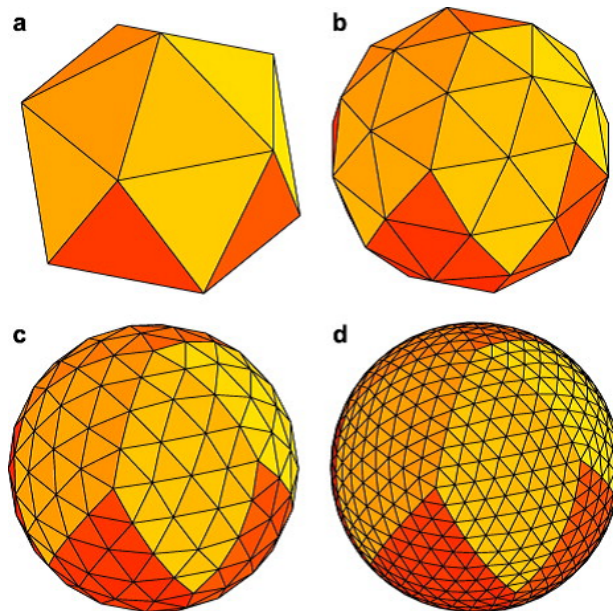


図 4.2: 正 20 面体格子の生成法 (a) Glevel-0, (b) Glevel-1, (c) Glevel-2, (d) Glevel-3 .  
Satoh et al. (2008) より .

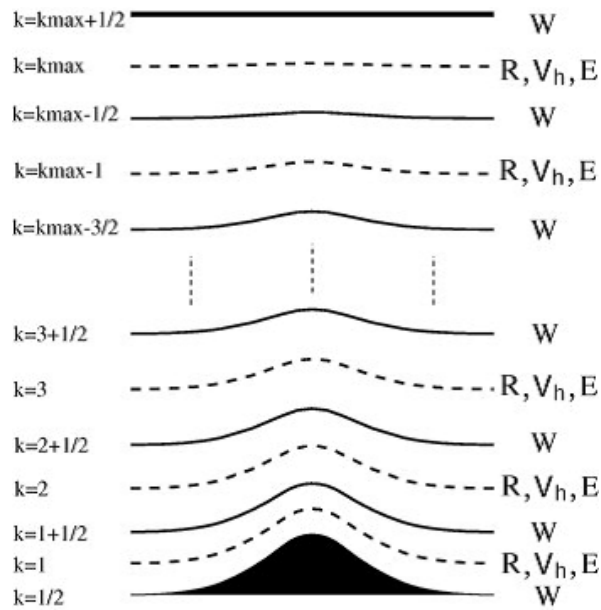


図 4.3: 鉛直レベルとローレンツ格子における変数の配置を示す． $R$  は密度， $V_h$  は水平風， $W$  は鉛直流， $E$  は内部エネルギーである．水に関する量  $Q$  は，内部エネルギー  $E$  と同じ配置である． $k$  は鉛直レベルインデックス， $k_{max}$  は鉛直層数である．Sato et al. (2008) より．

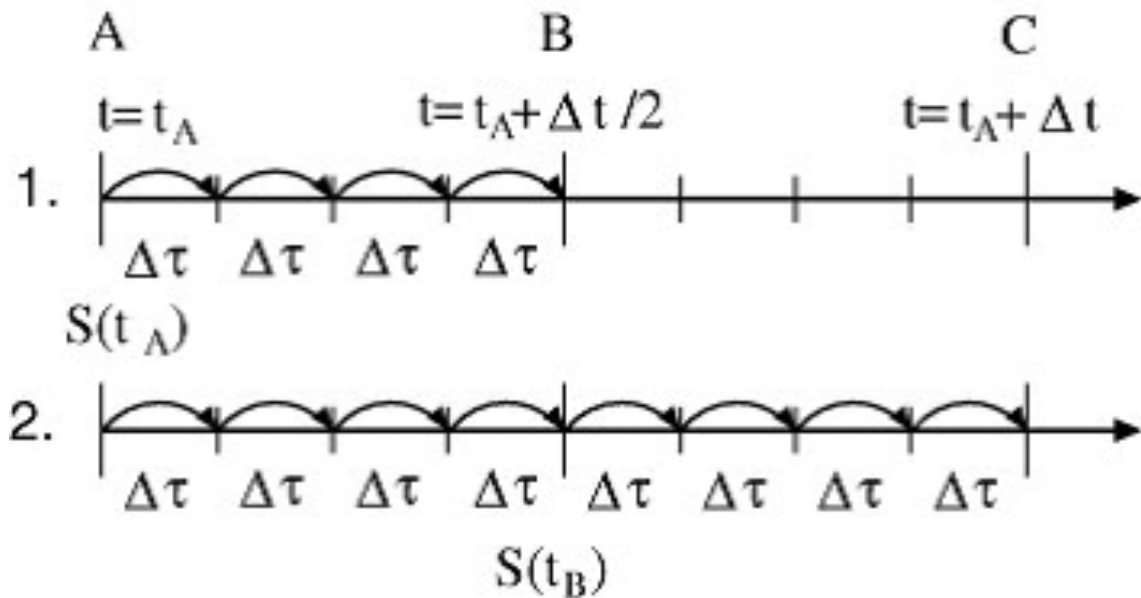


図 4.4: 時間積分方法．Sato et al. (2008) より．



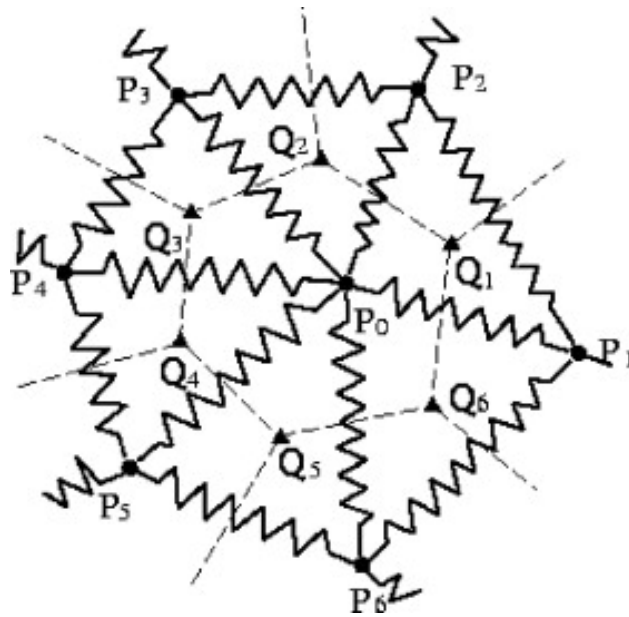


図 4.5: バネ力学を用いた格子点の修正したバネ結合 Satoh et al. (2008) より .

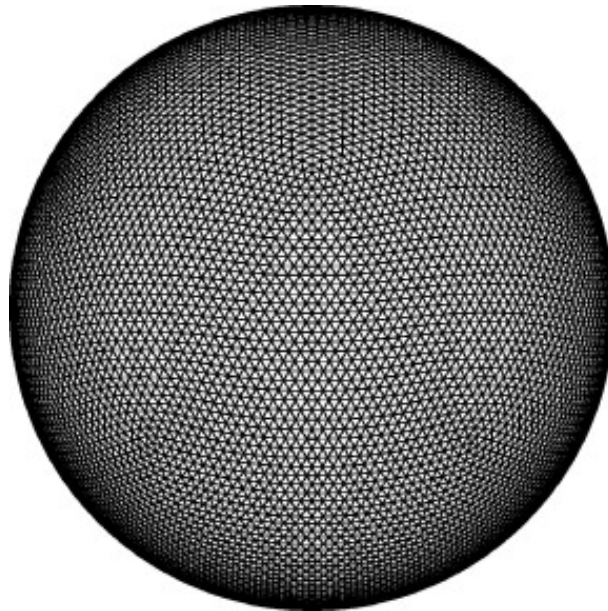


図 4.6: バネ力学によって修正された修正型二十面体格子 (Glevel-5) Satoh et al. (2008) より .

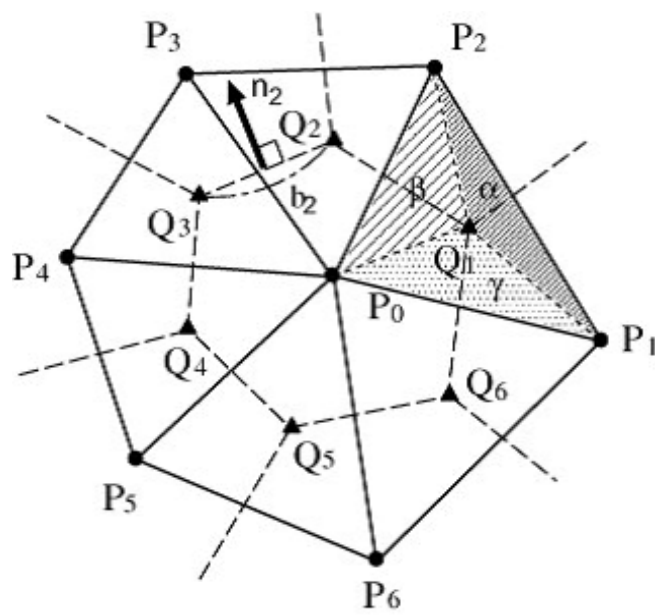


図 4.7: 六角形の場合の水平コントロールボリュームと格子点の配列 .Sato et al. (2008) より .

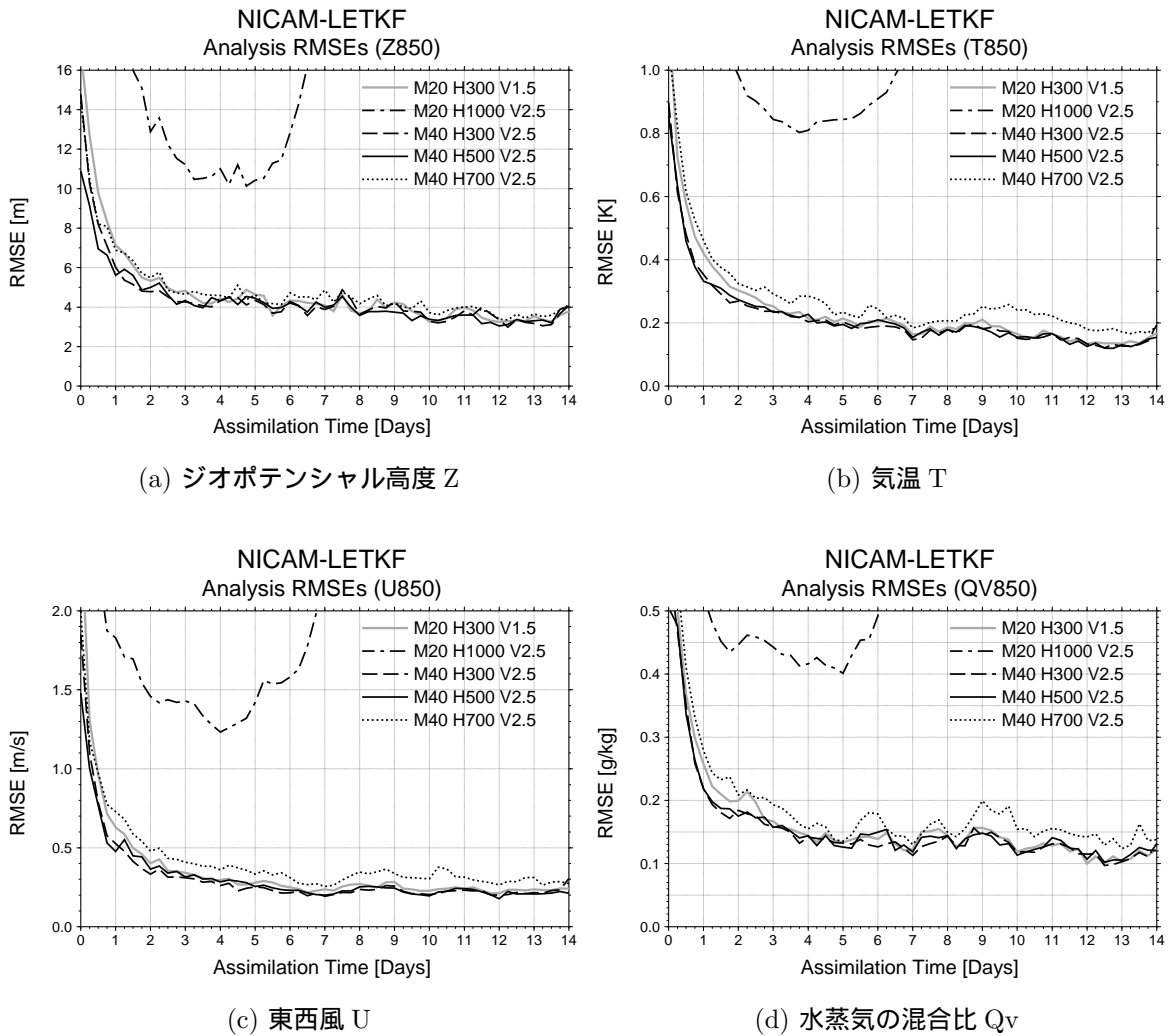
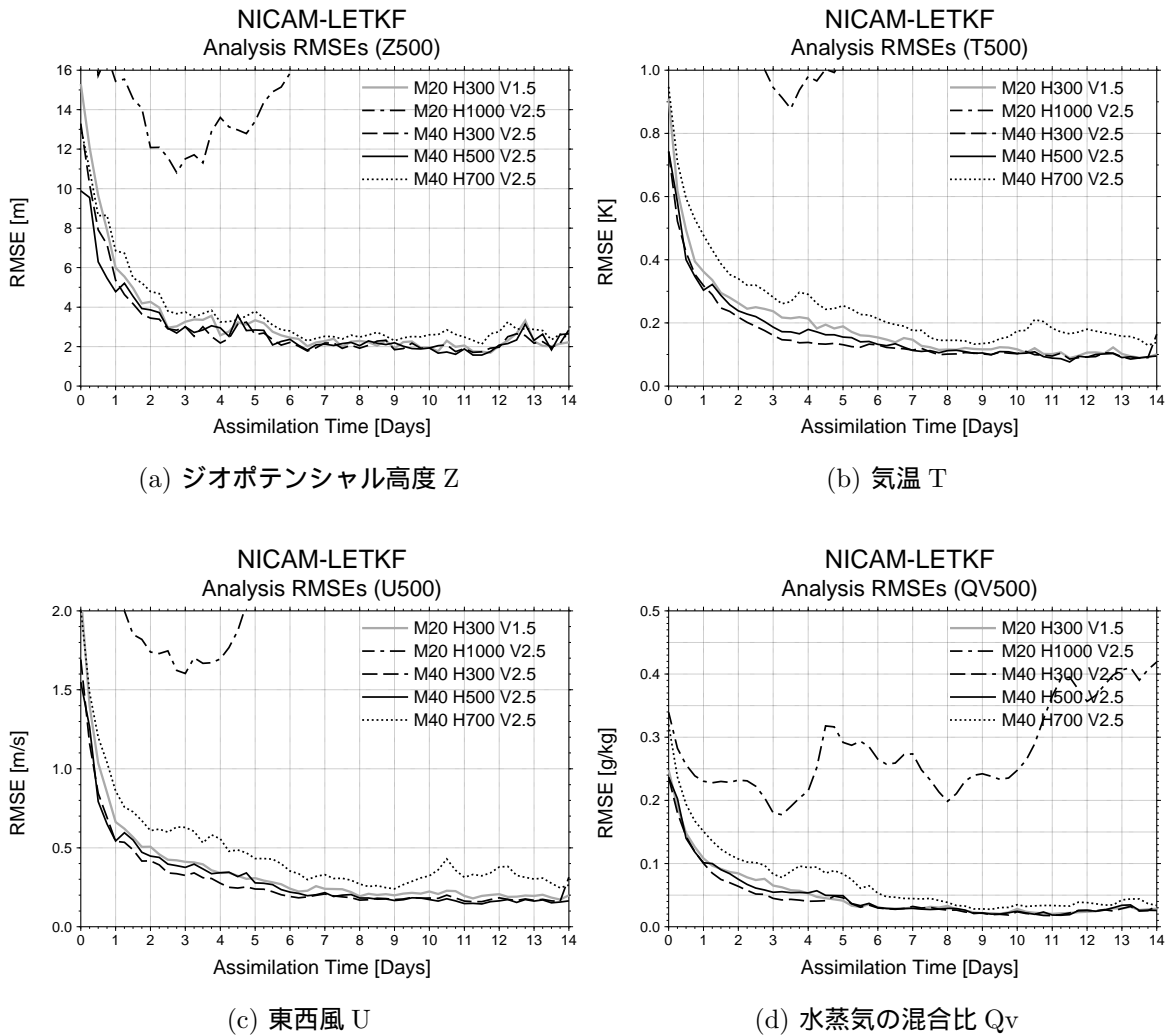


図 4.8: NICAM-LETKF 解析値の北半球 (20°N–90°N) 850 hPa における RMSE (対真値) である。期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 15 日 12Z までである。アンサンブルサイズが 40 の場合は、鉛直方向の局所化スケールを 2.5 grid に固定。一方、アンサンブルサイズが 20 の場合は、ともに変化させてある。(a) ジオポテンシャル高度 Z [m], (b) 気温 T [K], (c) 東西風 U [m/s], (d) 水蒸気の混合比 Qv [g/kg].



(a) ジオポテンシャル高度 Z

(b) 気温 T

(c) 東西風 U

(d) 水蒸気の混合比 Qv

図 4.9: NICAM-LETKF 解析値の北半球 (20°N–90°N) 500 hPa における RMSE (対真値) である。期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 15 日 12Z までである。アンサンブルサイズが 40 の場合は、鉛直方向の局所化スケールを 2.5 grid に固定。(a) ジオポテンシャル高度 Z [m], (b) 気温 T [K], (c) 東西風 U [m/s], (d) 水蒸気の混合比 Qv [g/kg].

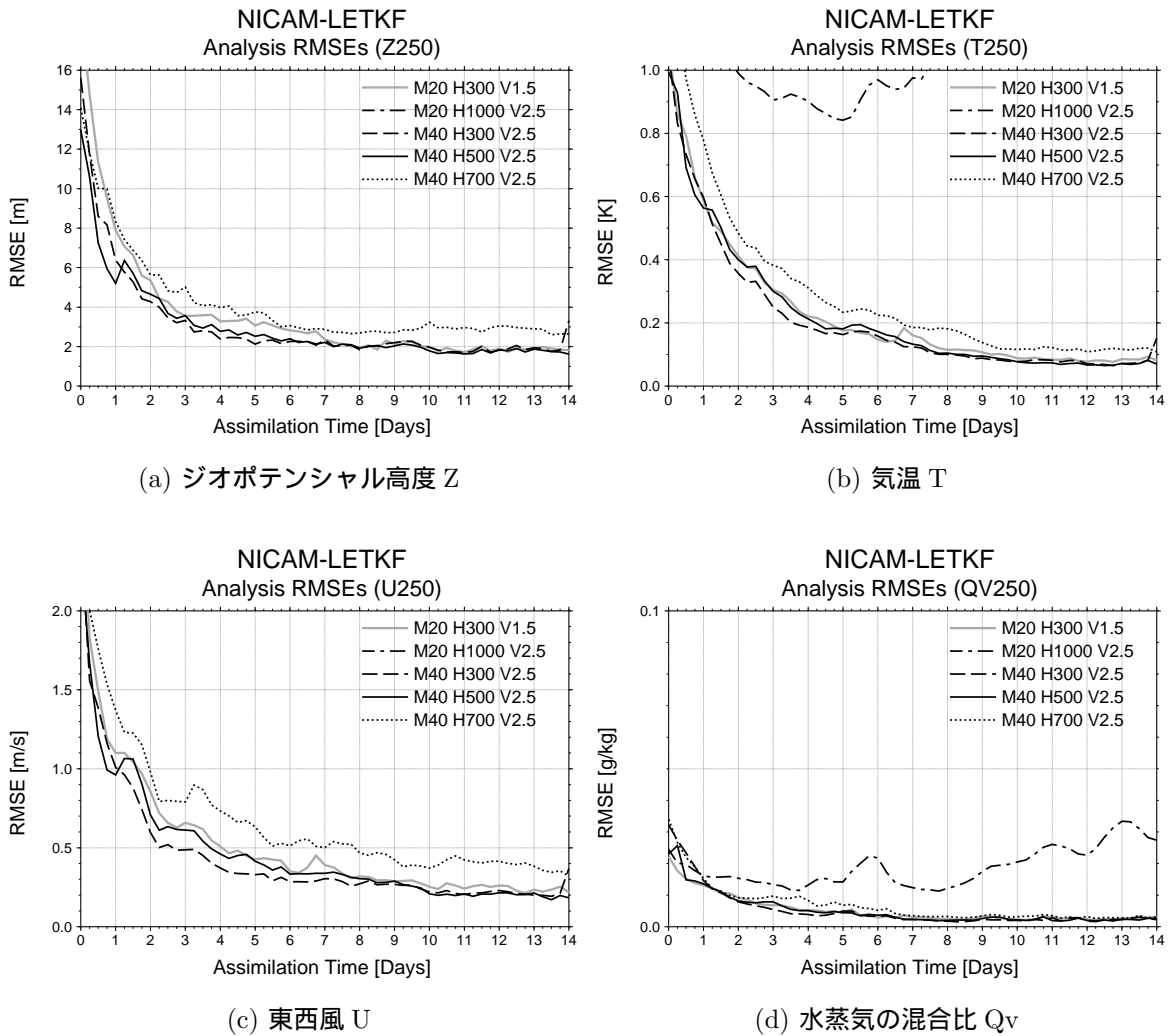


図 4.10: NICAM-LETKF 解析値の北半球 (20°N–90°N) 250 hPa における RMSE (対真値) である。期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 15 日 12Z までである。アンサンブルサイズが 40 の場合は、鉛直方向の局所化スケールを 2.5 grid に固定。(a) ジオポテンシャル高度 Z [m], (b) 気温 T [K], (c) 東西風 U [m/s], (d) 水蒸気の混合比 Qv [g/kg].

## NICAM-LETKF Error Correlation

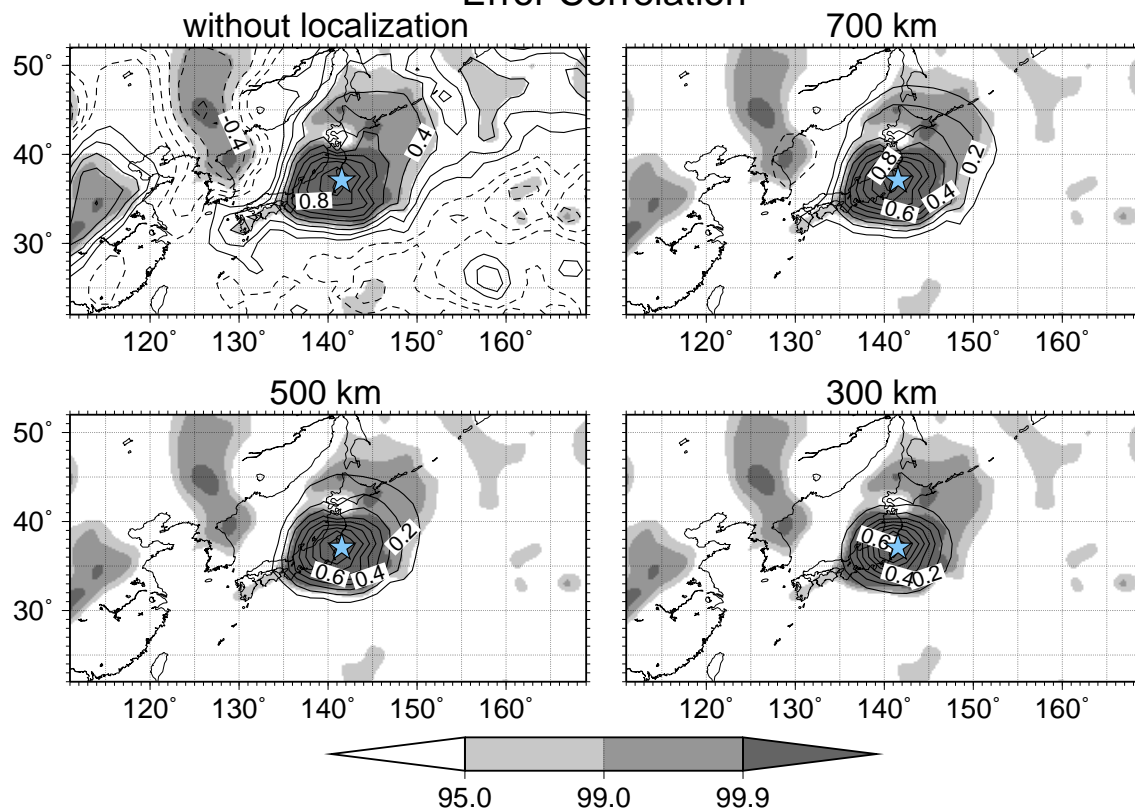


図 4.11: 2007 年 1 月 31 日 12Z の気温の水平誤差相関図で，予報誤差共分散行列の 1 成分を見ている．アンサンブルメンバーは 40．左上の図は局所化なし，右上の図は局所化スケール 700 km の局所化，左下の図は局所化スケール 500 km の局所化，右下の図は局所化スケール 300 km の局所化． は相関の基準点である．等値線は 0.1，破線は負の相関を表し，シェードは統計的に優位な領域である．局所化は，予報誤差共分散行列そのものに局所化関数をかけた．

## NICAM-LETKF Error Correlation

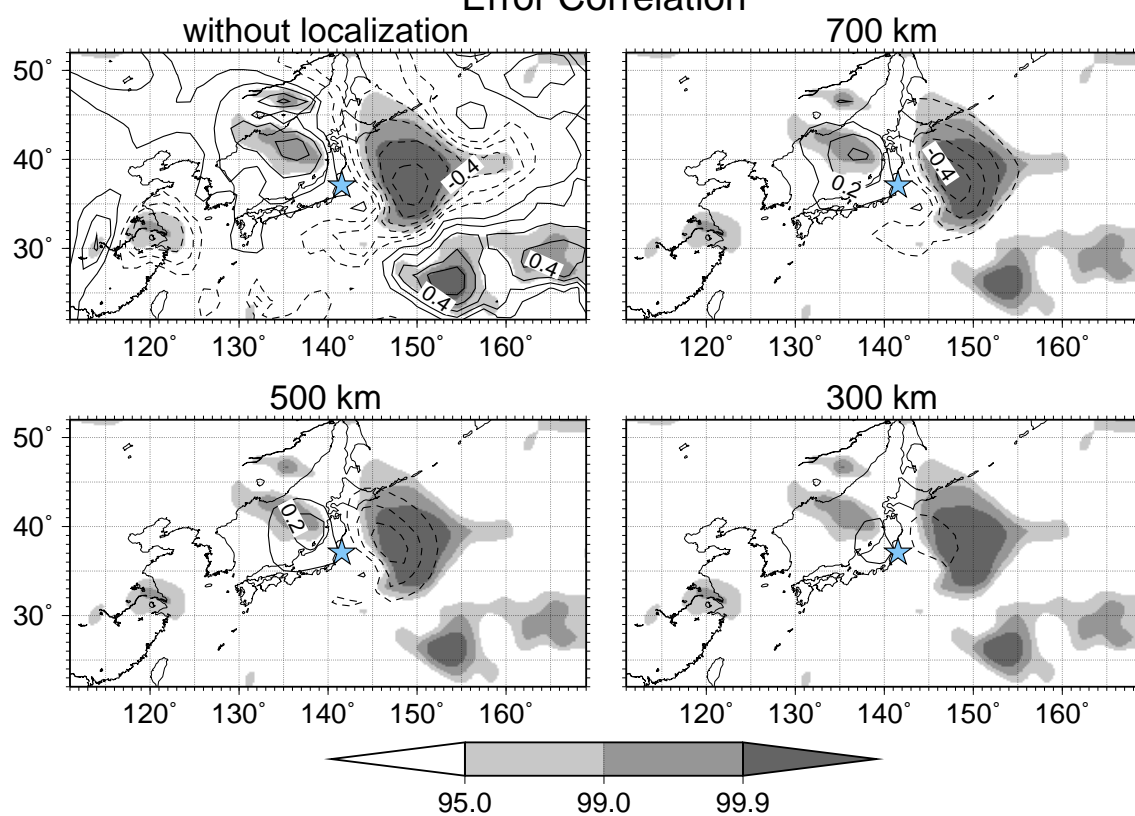


図 4.12: 2007 年 1 月 31 日 12Z の 1 点 での水平風  $v_1$  と気温の水平誤差相関図である . 図の見方は図 4.11 と同じである .

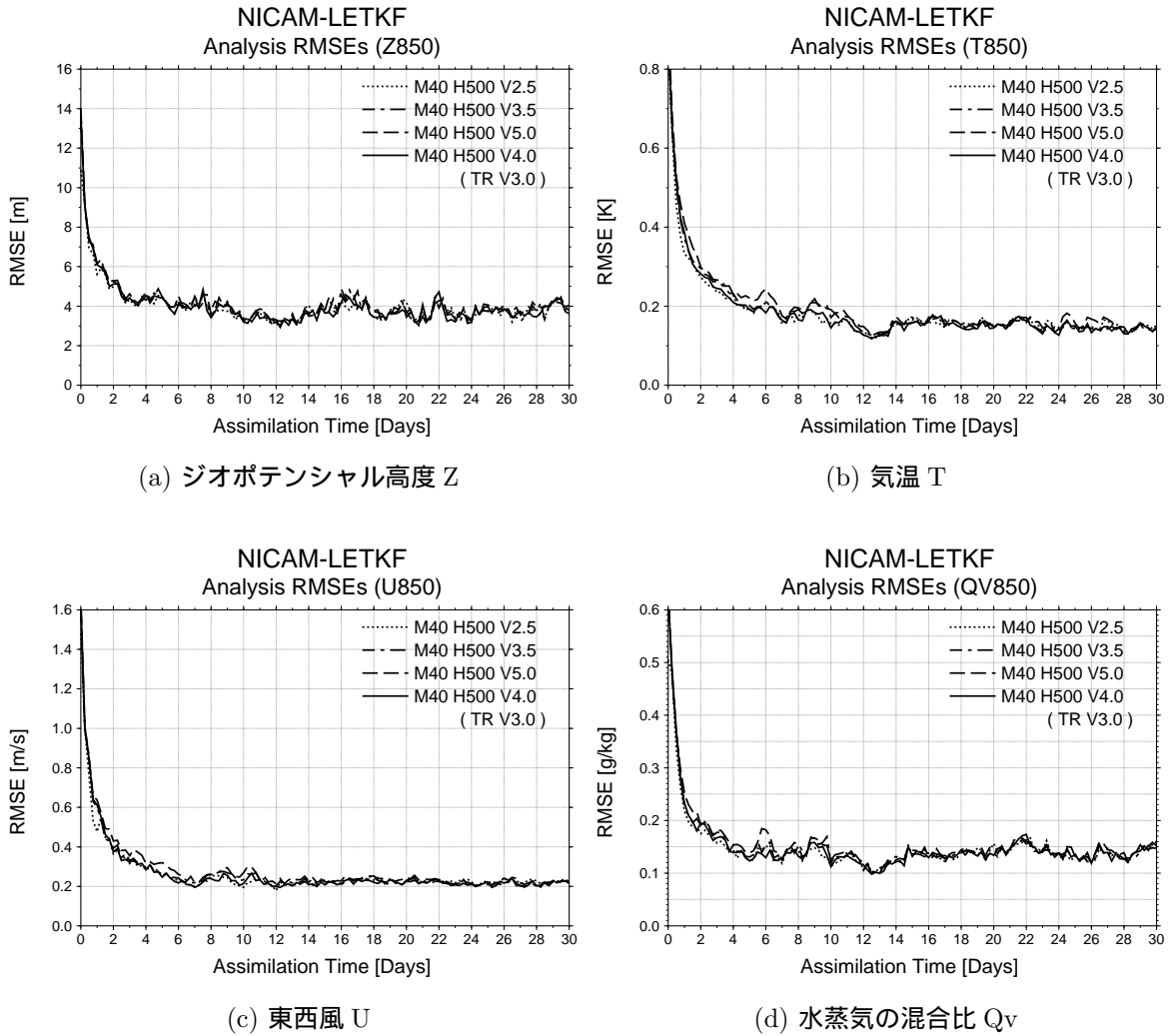


図 4.13: NICAM-LETKF 解析値の北半球 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $90^{\circ}\text{N}$ ) 850 hPa における RMSE (対真値) である。期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 31 日 12Z までである。アンサンブルサイズは 40。水平方向の局所化スケールは 500 km に固定。(a) ジオポテンシャル高度  $Z$  [m], (b) 気温  $T$  [K], (c) 東西風  $U$  [m/s], (d) 水蒸気の混合比  $Q_v$  [g/kg].



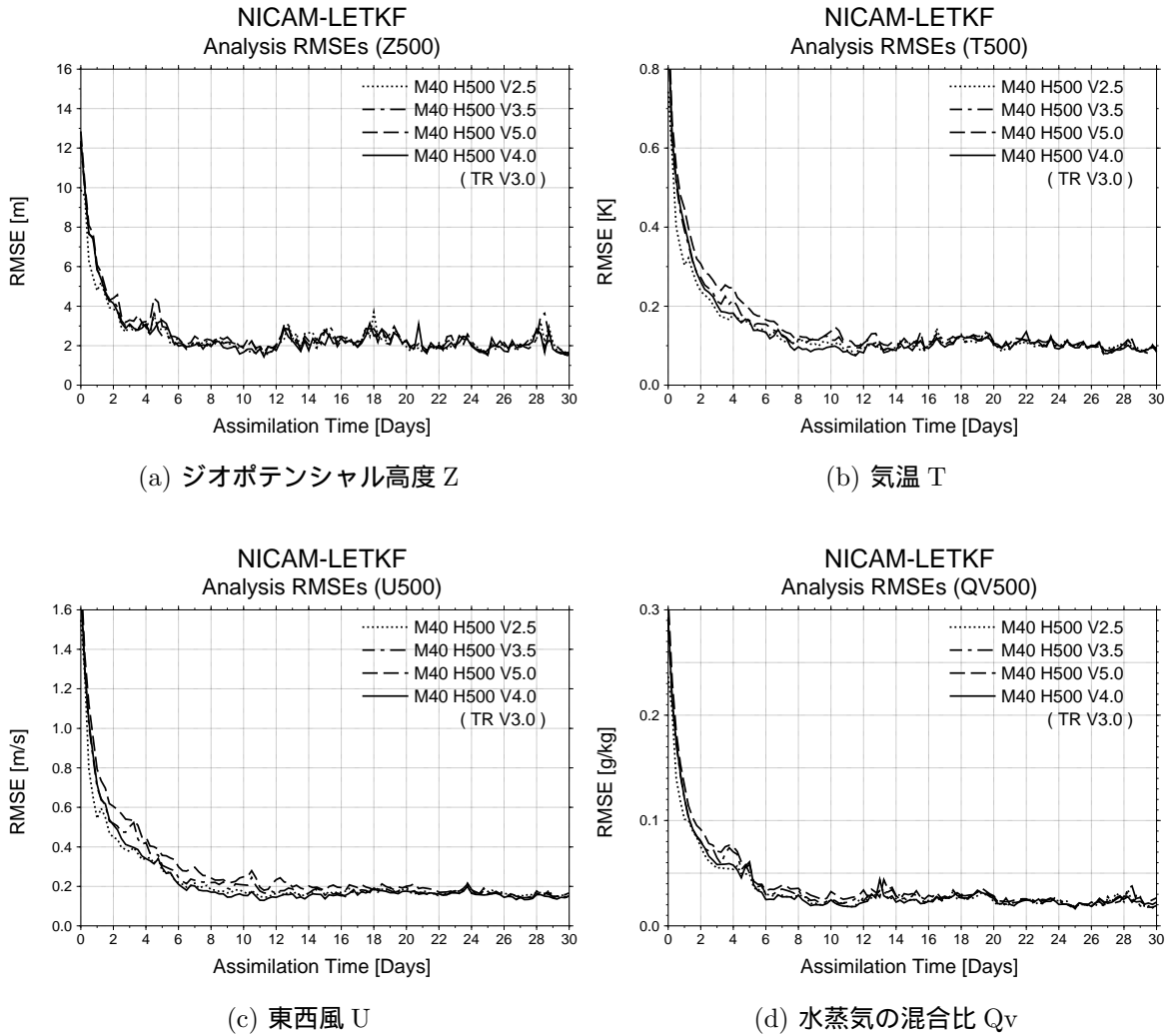


図 4.14: NICAM-LETKF 解析値の北半球 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $90^{\circ}\text{N}$ ) 500 hPa における RMSE (対真値) である。期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 31 日 12Z までである。アンサンブルサイズは 40。水平方向の局所化スケールは 500 km に固定。(a) ジオポテンシャル高度  $Z$  [m], (b) 気温  $T$  [K], (c) 東西風  $U$  [m/s], (d) 水蒸気の混合比  $Q_v$  [g/kg].

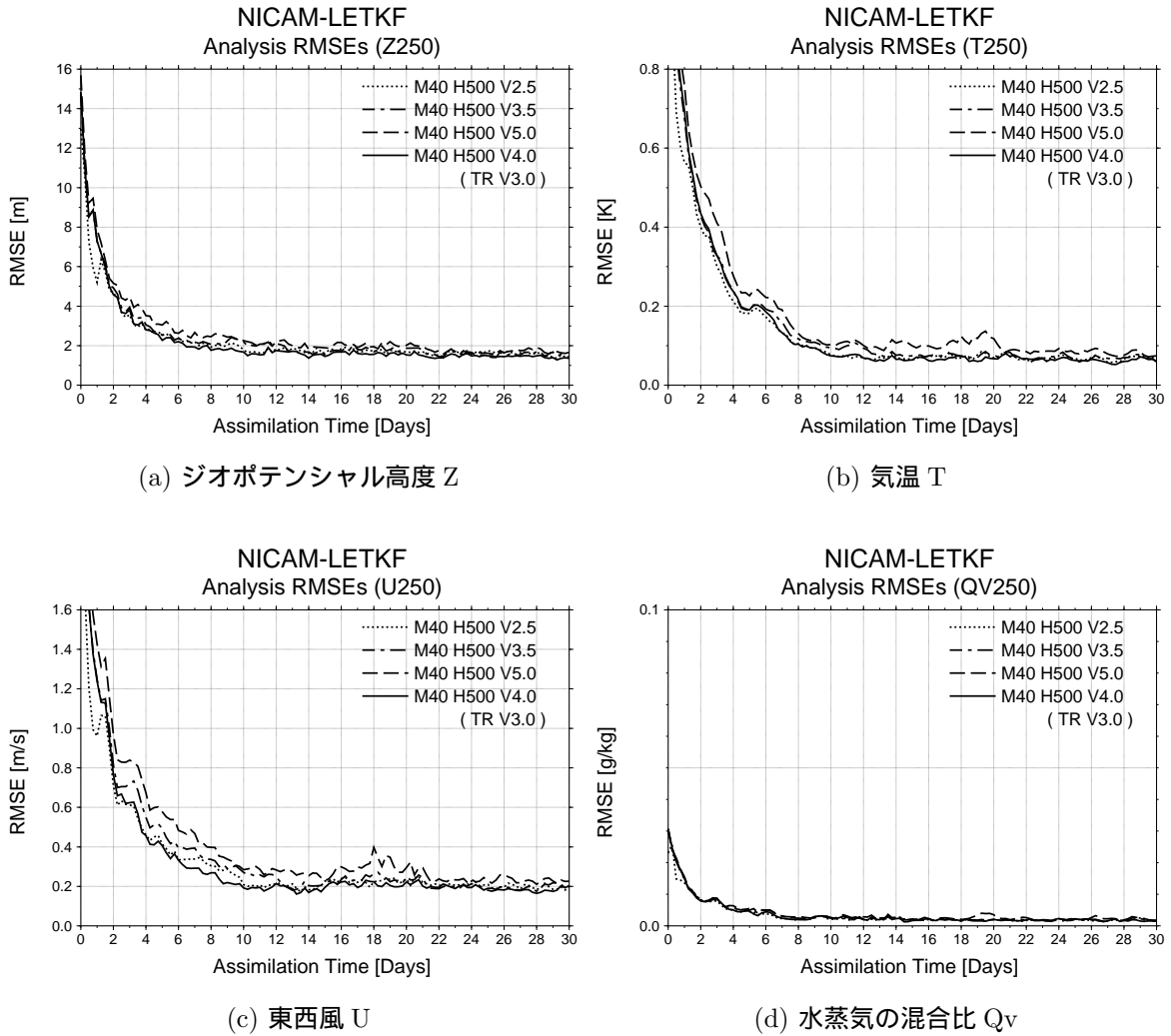
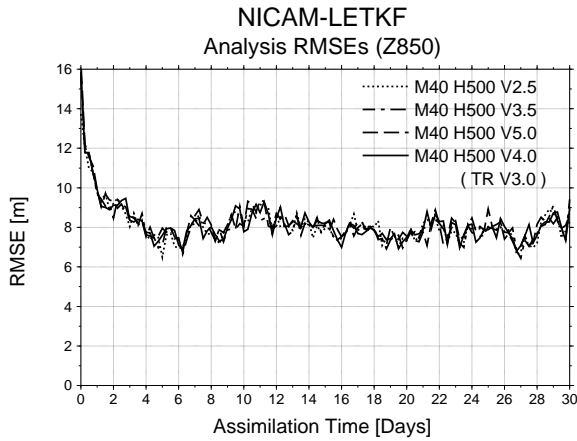
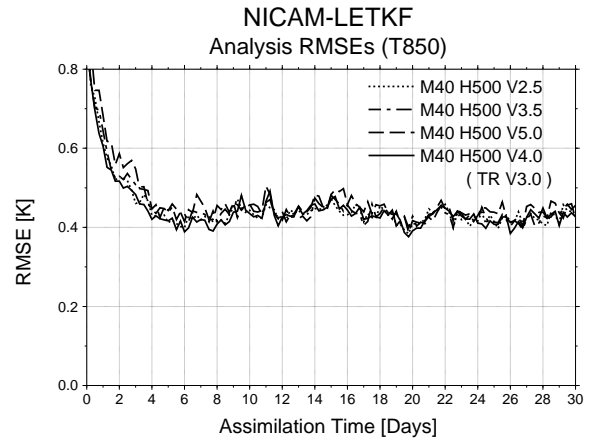


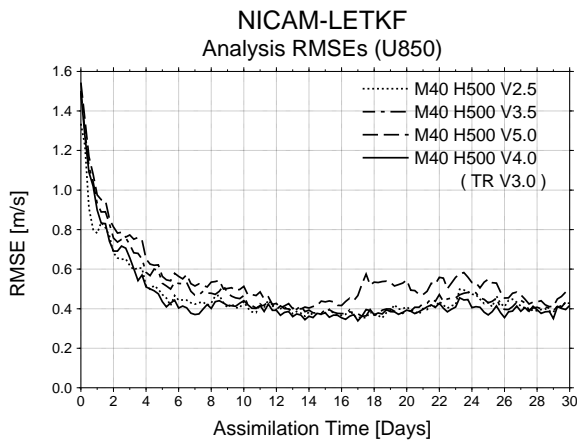
図 4.15: NICAM-LETKF 解析値の北半球 (20°N–90°N) 250 hPa における RMSE (対真値) である。期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 31 日 12Z までである。アンサンブルサイズは 40。水平方向の局所化スケールは 500 km に固定。(a) ジオポテンシャル高度 Z [m], (b) 気温 T [K], (c) 東西風 U [m/s], (d) 水蒸気の混合比  $Q_v$  [g/kg].



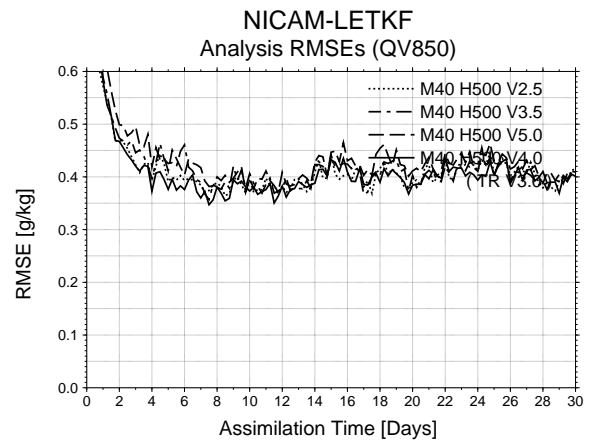
(a) ジオポテンシャル高度 Z



(b) 気温 T



(c) 東西風 U



(d) 水蒸気の混合比  $Q_v$

図 4.16: NICAM-LETKF 解析値の北半球 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $90^{\circ}\text{N}$ ) 850 hPa における RMSE (対真値) である。期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 31 日 12Z までである。アンサンブルサイズは 40。水平方向の局所化スケールは 500 km に固定。(a) ジオポテンシャル高度 Z [m], (b) 気温 T [K], (c) 東西風 U [m/s], (d) 水蒸気の混合比  $Q_v$  [g/kg]。

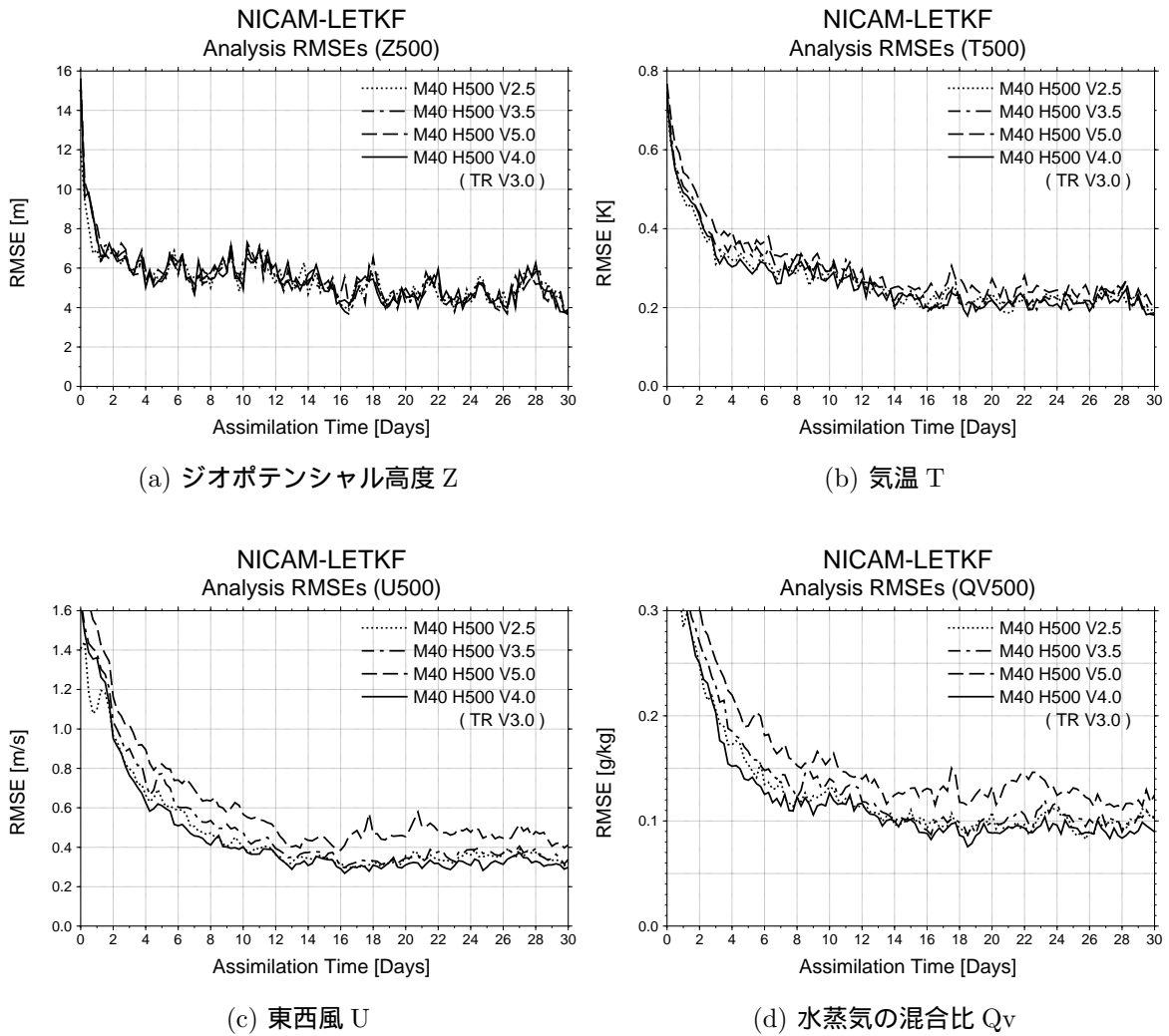
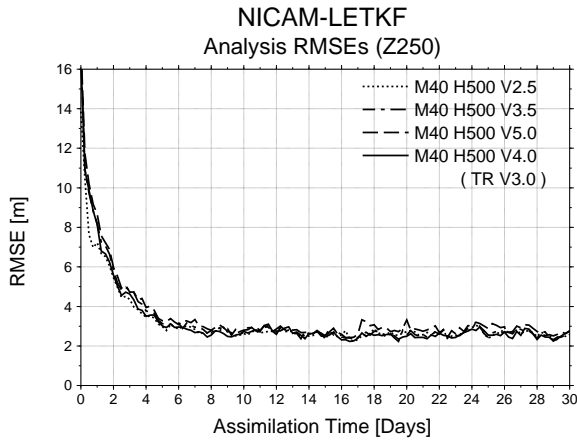
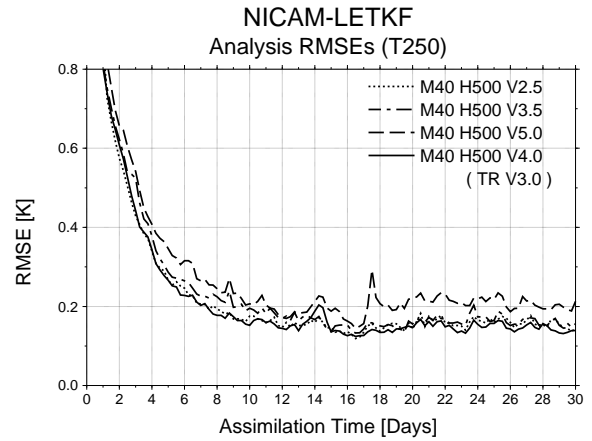


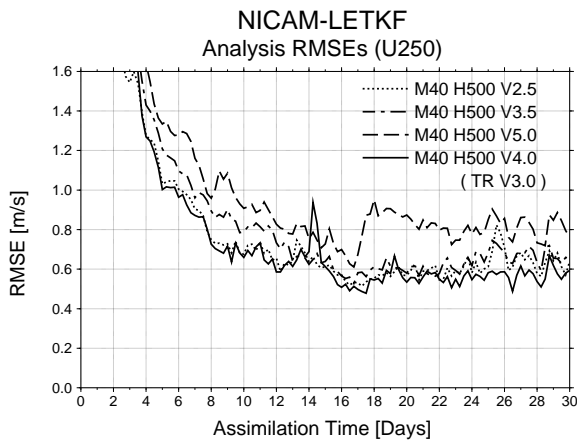
図 4.17: NICAM-LETKF 解析値の北半球 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $90^{\circ}\text{N}$ ) 500 hPa における RMSE (対真値) である。期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 31 日 12Z までである。アンサンブルサイズは 40。水平方向の局所化スケールは 500 km に固定。(a) ジオポテンシャル高度  $Z$  [m], (b) 気温  $T$  [K], (c) 東西風  $U$  [m/s], (d) 水蒸気の混合比  $Q_v$  [g/kg].



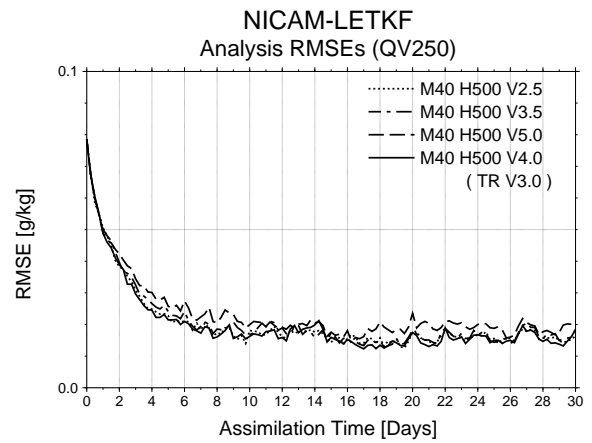
(a) ジオポテンシャル高度 Z



(b) 気温 T



(c) 東西風 U



(d) 水蒸気の混合比  $Q_v$

図 4.18: NICAM-LETKF 解析値の北半球 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $90^{\circ}\text{N}$ ) 250 hPa における RMSE (対真値) である。期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 31 日 12Z までである。アンサンブルサイズは 40。水平方向の局所化スケールは 500 km に固定。(a) ジオポテンシャル高度 Z [m], (b) 気温 T [K], (c) 東西風 U [m/s], (d) 水蒸気の混合比  $Q_v$  [g/kg].

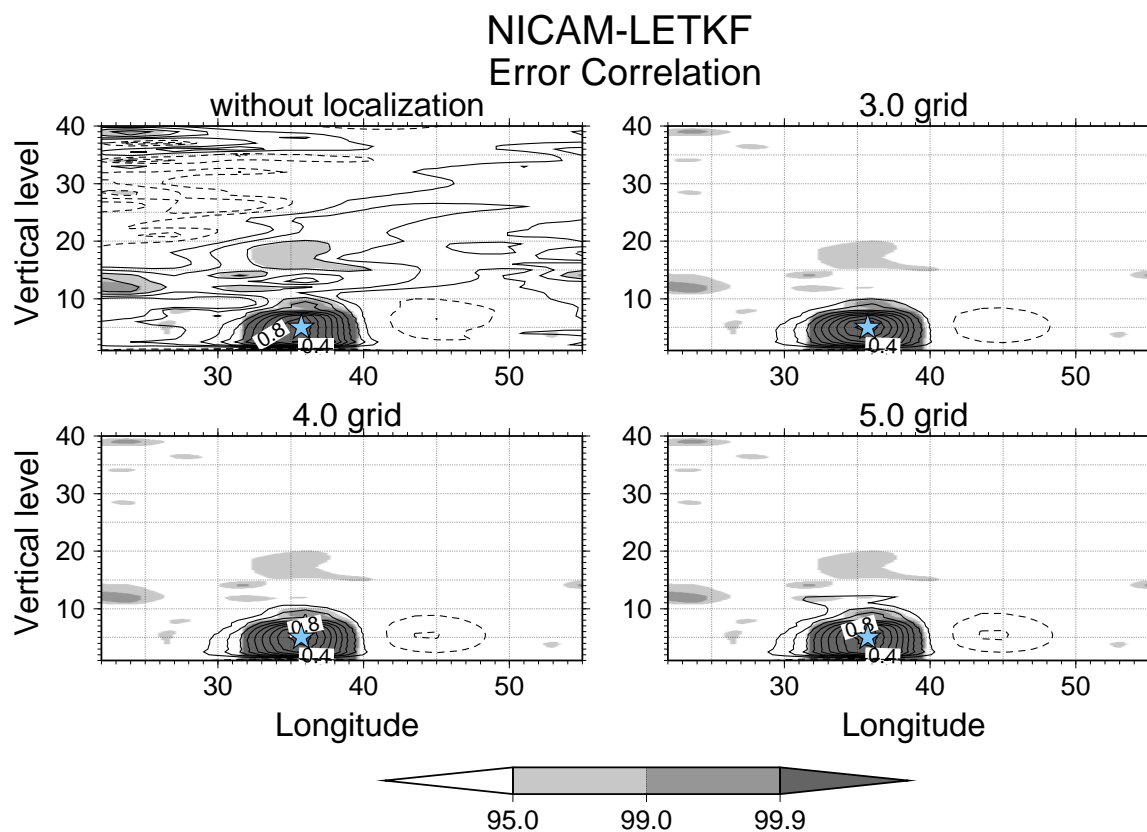


図 4.19: 2007 年 1 月 31 日 12Z の水平風  $V_1$  の鉛直誤差相関図で、予報誤差共分散行列の 1 成分を見ている。領域は、 $22^{\circ}\text{N}$ – $55^{\circ}\text{N}$ ,  $180^{\circ}\text{E}$ , 鉛直軸はモデル面で、0 はモデル最下層である。アンサンブルメンバーは 40。左上の図は局所化なし、右上の図は局所化スケール 5.0-grid の局所化、左下の図は局所化スケール 4.0-grid の局所化、右下の図は局所化スケール 3.0-grid の局所化。は相関の基準点である。等値線は 0.1, 破線は負の相関を表し、シェードは統計的に優位な領域である。局所化は、予報誤差共分散行列そのものに局所化関数かけた。

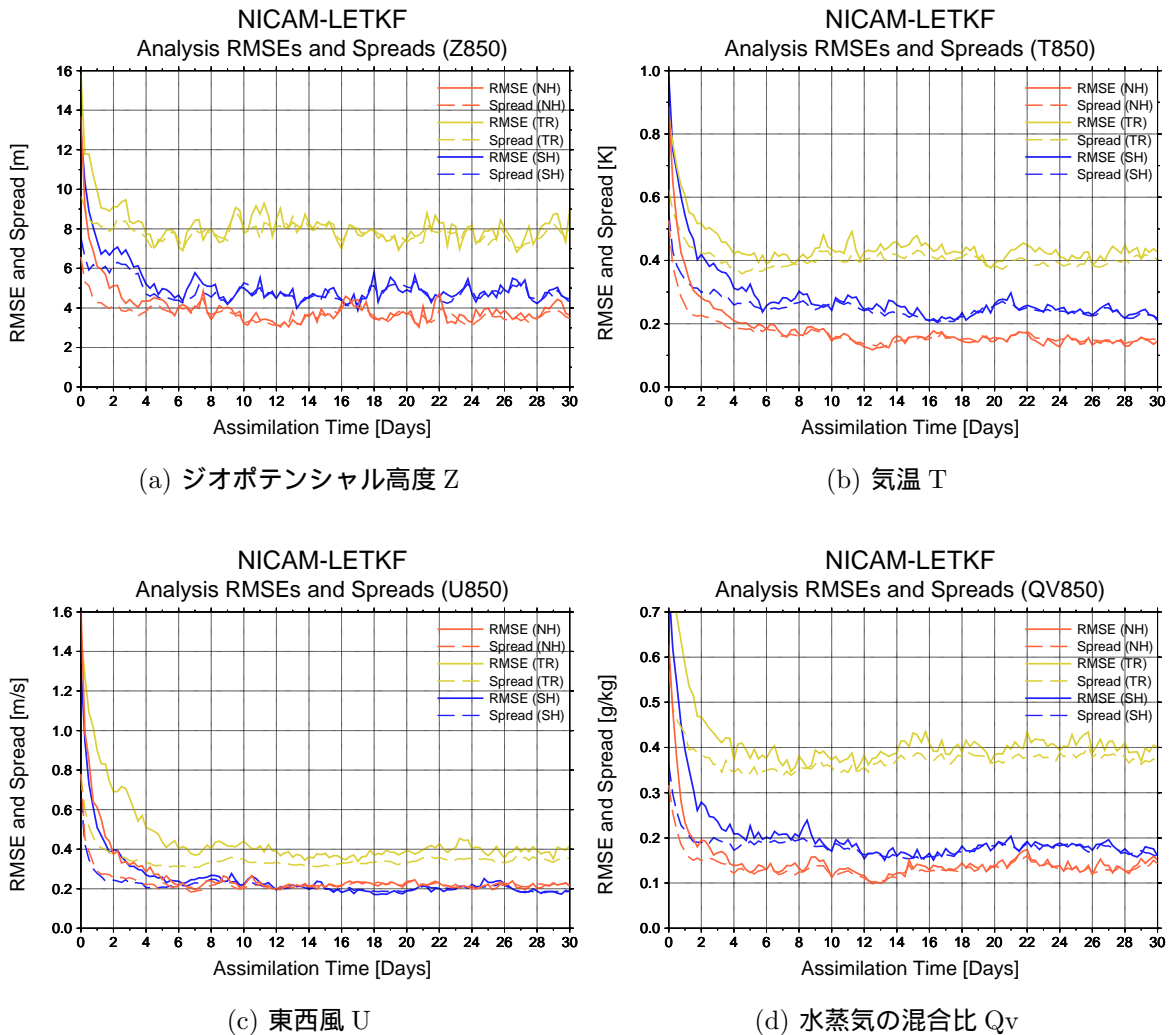


図 4.20: NICAM-LETKF CNTL 実験解析値の 850 hPa における RMSE (対真値) で, 期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 31 日 12Z までである. 赤線は北半球 (20°N–90°N), 黄色線は熱帯 (20°N–20°S), 青線は南半球 (20°S–90°S) を表し, 実線は解析 RMSE, 破線は解析アンサンブルスプレッドを表す. アンサンブルサイズは 40. 局所化スケールは水平方向 500 km, 鉛直方向は南北半球 (30N-90N, 30S-90S) は 4.0-grid, 熱帯 (20N-20S) は 3.0-grid で, その間は線形内挿で補間している. (a) ジオポテンシャル高度 Z [m], (b) 気温 T [K], (c) 東西風 U [m/s], (d) 水蒸気の混合比 Qv [g/kg].

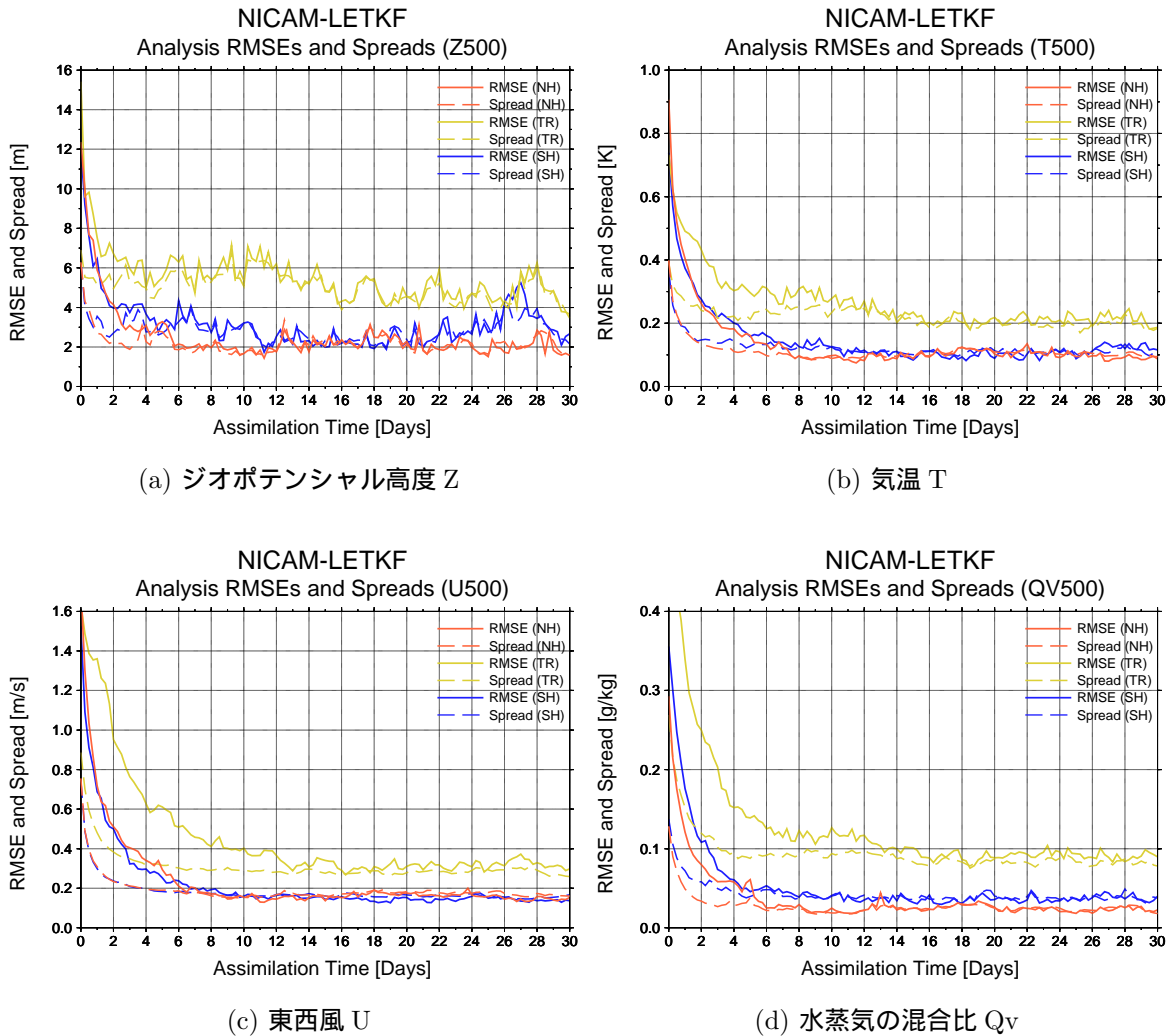


図 4.21: NICAM-LETKF CNTL 実験解析値の 850 hPa における RMSE (対真値) で, 期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 31 日 12Z までである. 赤線は北半球 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $90^{\circ}\text{N}$ ), 黄色線は熱帯 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $20^{\circ}\text{S}$ ), 青線は南半球 ( $20^{\circ}\text{S}$ – $90^{\circ}\text{S}$ ) を表し, 実線は解析 RMSE, 破線は解析アンサンブルスプレッドを表す. NICAM-LETKF の設定は, 4.20 と同じ. (a) ジオポテンシャル高度 Z [m], (b) 気温 T [K], (c) 東西風 U [m/s], (d) 水蒸気の混合比  $Q_v$  [g/kg].



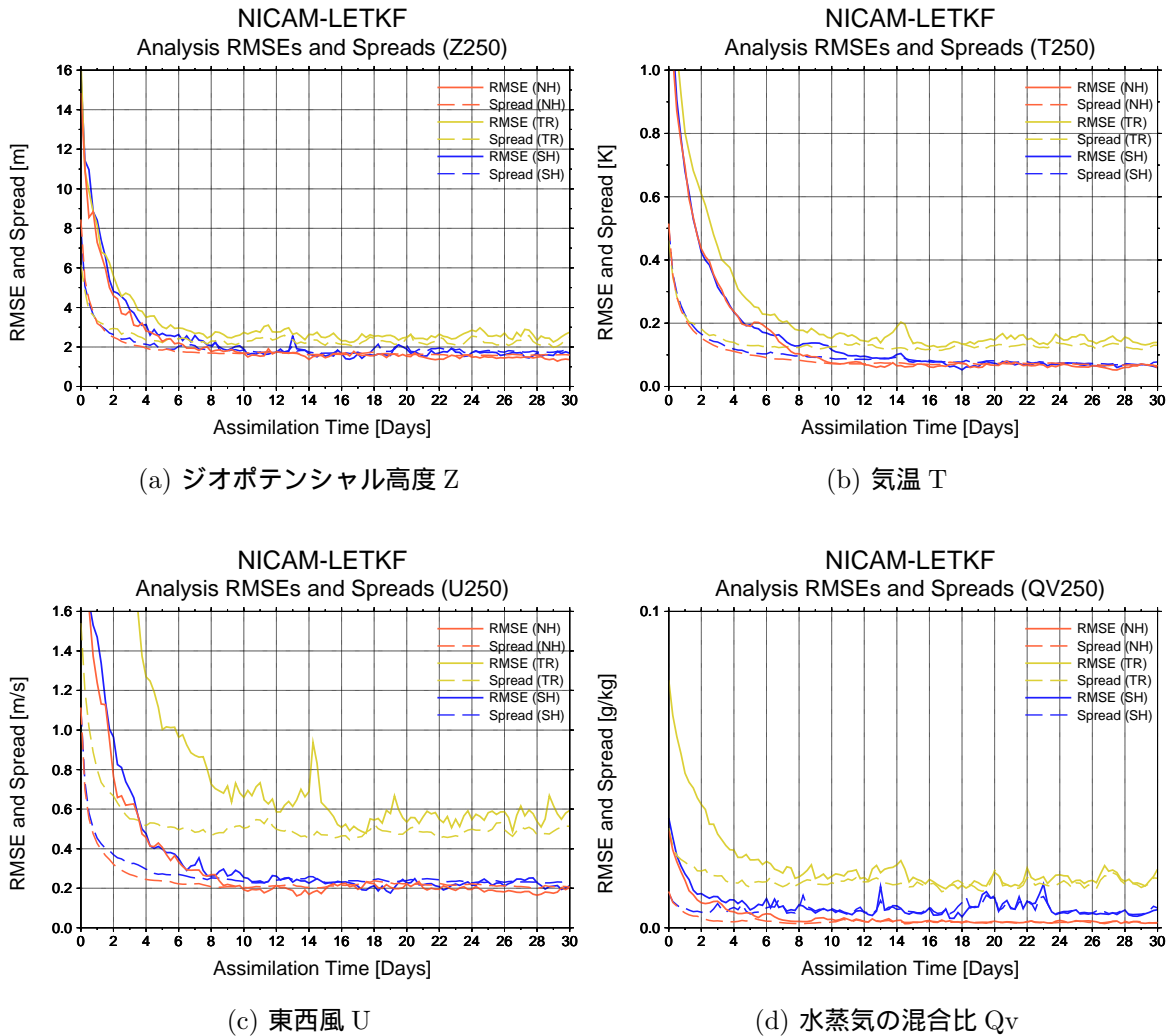
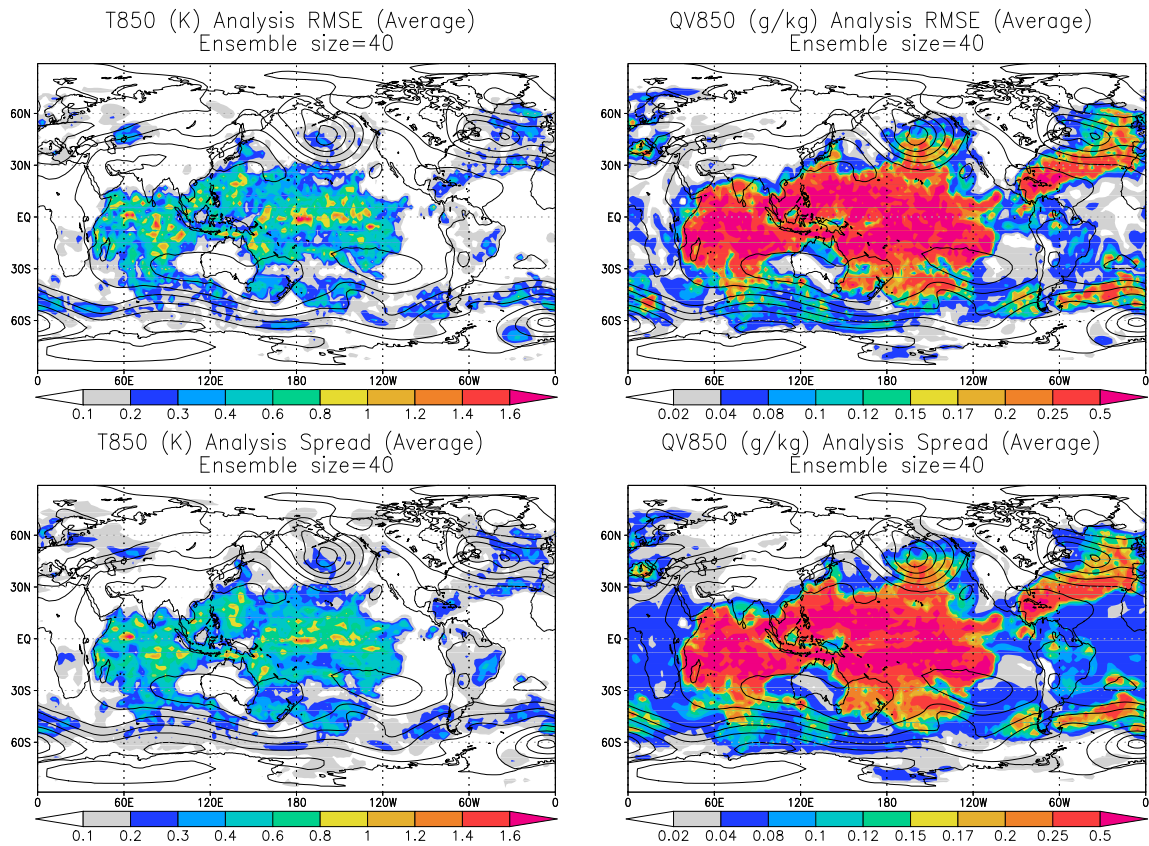


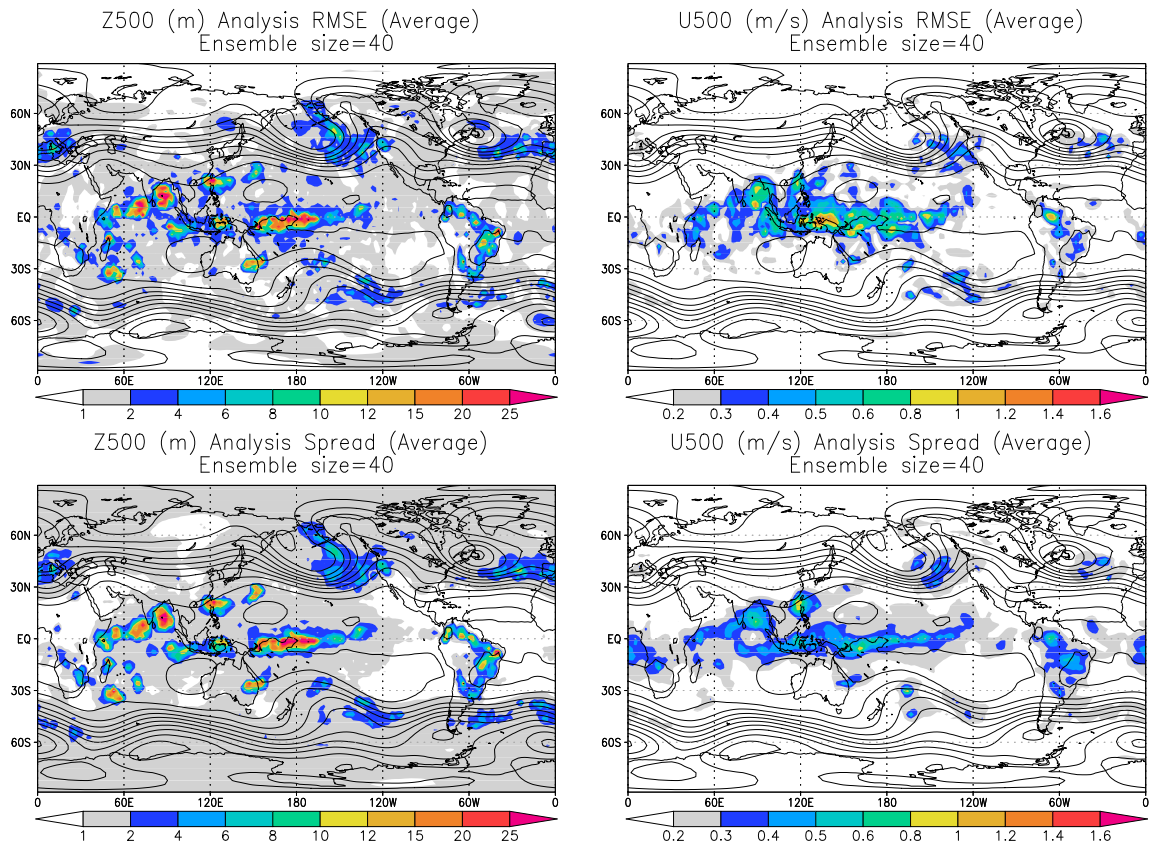
図 4.22: NICAM-LETKF CNTL 実験解析値の 850 hPa における RMSE (対真値) で, 期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 31 日 12Z までである. 赤線は北半球 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $90^{\circ}\text{N}$ ), 黄色線は熱帯 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $20^{\circ}\text{S}$ ), 青線は南半球 ( $20^{\circ}\text{S}$ – $90^{\circ}\text{S}$ ) を表し, 実線は解析 RMSE, 破線は解析アンサンブルスプレッドを表す. NICAM-LETKF の設定は, 4.20 と同じ. (a) ジオポテンシャル高度 Z [m], (b) 気温 T [K], (c) 東西風 U [m/s], (d) 水蒸気の混合比  $Q_v$  [g/kg].



(a) 気温 T

(b) 水蒸気の混合比  $Q_v$

図 4.23: NICAM-LETKF CNTL 実験の 850 hPa における気温の解析 RMSE (左上図) とそのアンサンブルスプレッド (左下図), および水蒸気の混合比の解析 RMSE (右上図) とそのアンサンブルスプレッド (右下図) である. 期間は 2007 年 1 月 16 日 00Z から 2007 年 1 月 17 日 18Z までの平均である. 実線は 850 hPa ジオポテンシャル高度, カラーは RMSE およびアンサンブルスプレッドである. NICAM-LETKF の設定は, 図 4.20 と同じ. (a) 気温 T [K], (b) 水蒸気の混合比  $Q_v$  [g/kg].



(a) ジオポテンシャル高度 Z

(b) 東西風 U

図 4.24: NICAM-LETKF CNTL 実験の 500 hPa におけるジオポテンシャル高度の解析 RMSE (左上図) とそのアンサンブルスプレッド (左下図), および東西風の解析 RMSE (右上図) とそのアンサンブルスプレッド (右下図) である。期間は 2007 年 1 月 16 日 00Z から 2007 年 1 月 17 日 18Z までの平均である。実線は 850 hPa ジオポテンシャル高度, カラーは RMSE およびアンサンブルスプレッドである。NICAM-LETKF の設定は, 図 4.20 と同じ。(a) ジオポテンシャル高度 Z [m], (b) 東西風 U [m/s].

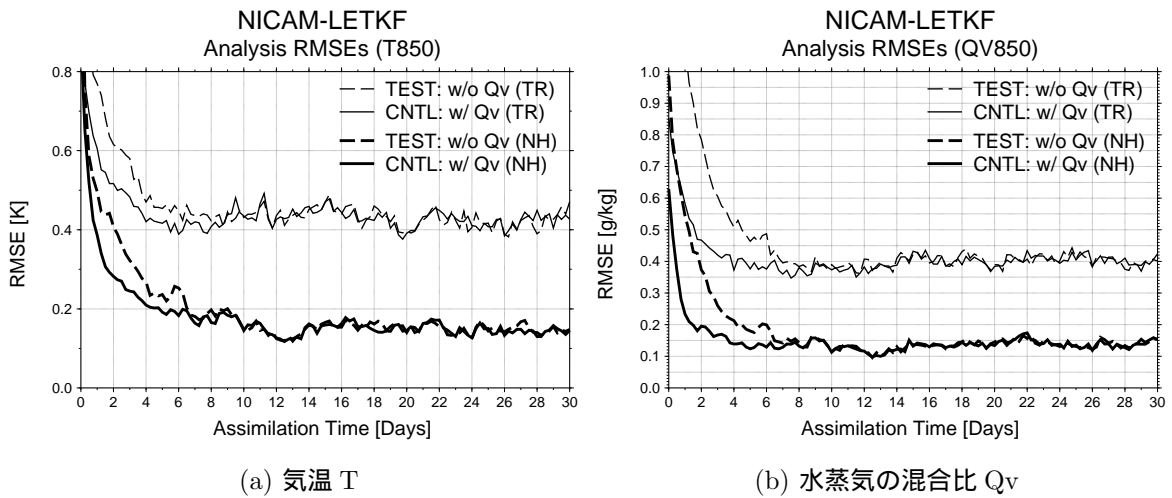


図 4.25: NICAM-LETKF CNTL 実験および TEST 実験の解析値の 850 hPa における RMSE (対真値) で, 期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 31 日 12Z までである. 太線は北半球 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $90^{\circ}\text{N}$ ), 細線は熱帯 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $20^{\circ}\text{S}$ ) を表し, 実線は CNTL 実験, 破線は TEST 実験を表す. アンサンブルサイズは 40. 局所化スケールは水平方向 500 km, 鉛直方向は南北半球 ( $30^{\circ}\text{N}$ – $90^{\circ}\text{N}$ ,  $30^{\circ}\text{S}$ – $90^{\circ}\text{S}$ ) は 4.0-grid, 熱帯 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $20^{\circ}\text{S}$ ) は 3.0-grid で, その間は線形内挿で補間している. (a) 気温 T [K], (b) 水蒸気の混合比  $Q_v$  [g/kg].

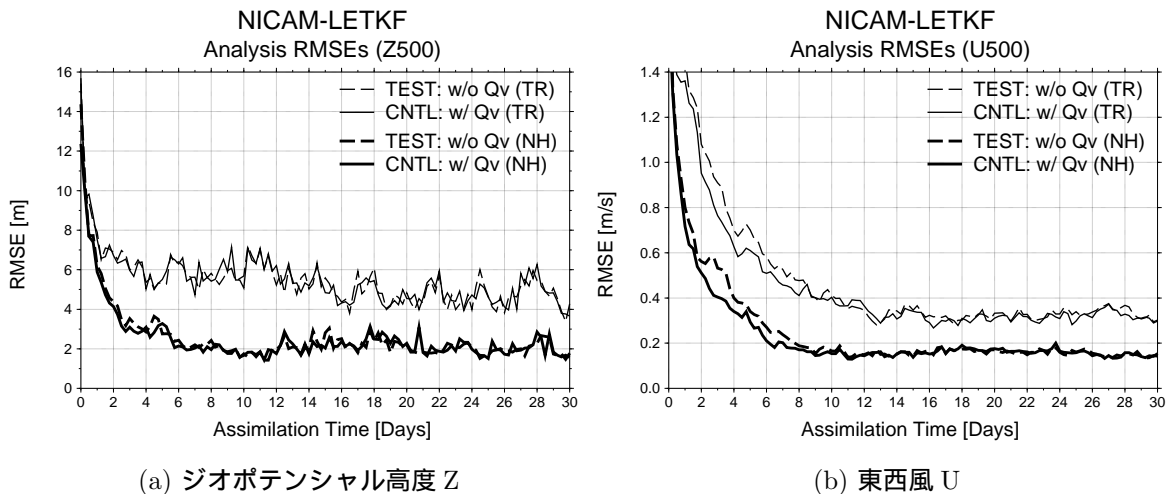


図 4.26: NICAM-LETKF CNTL 実験および TEST 実験の解析値の 850 hPa における RMSE (対真値) で, 期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 31 日 12Z までである. 図の見方は上図 4.25 と同じ. (a) ジオポテンシャル高度 Z [m], (b) 東西風 U [m/s].

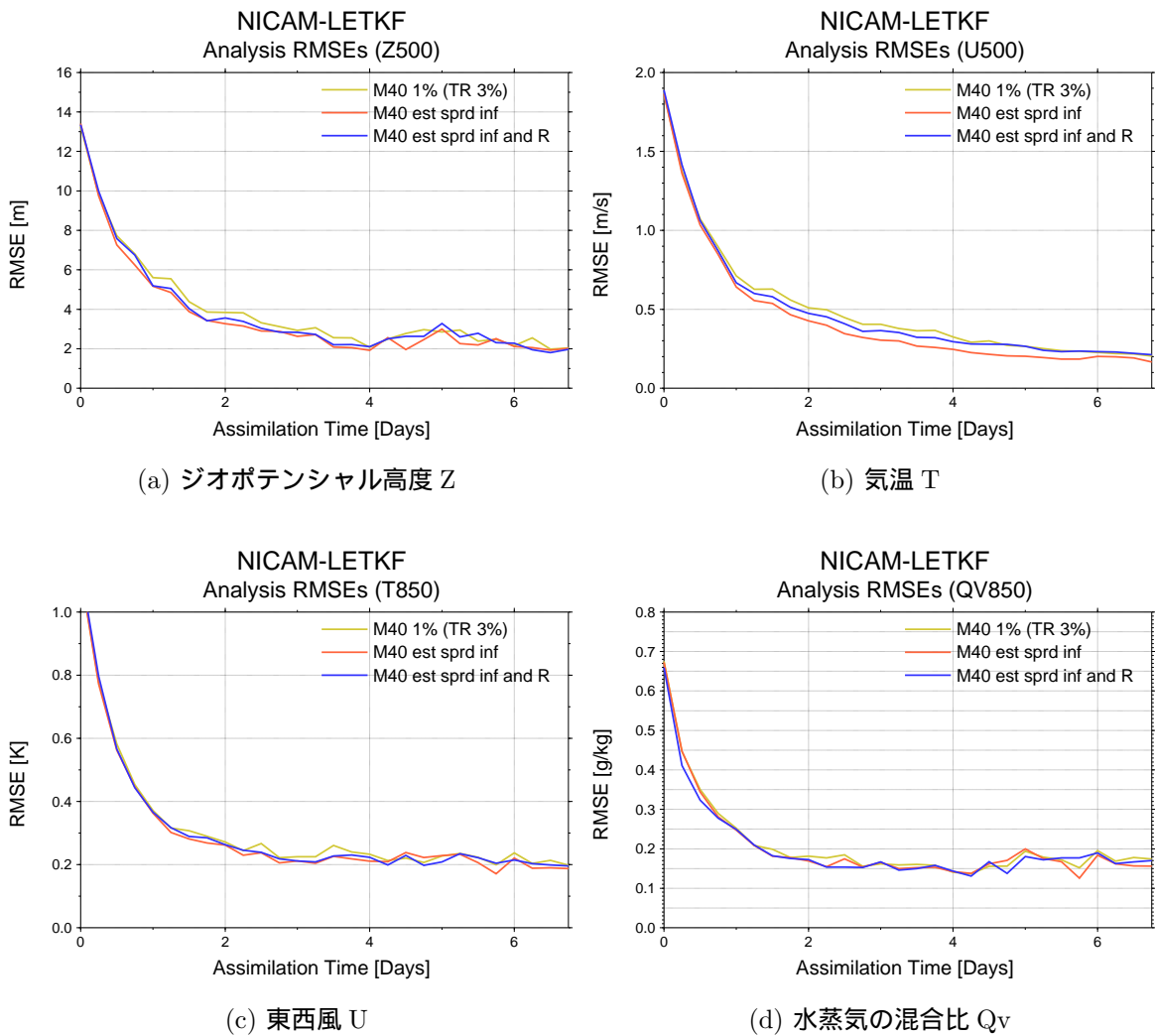


図 4.27: 動的推定法を用いた NICAM-LETkf の北半球 (20°N–90°N) 解析 RMSE (対真値) の時系列で, 期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 8 日 06Z までである. 黄色線は動的推定なし, 赤線は膨張係数を動的推定, 青線は膨張係数および観測誤差を動的推定した NICAM-LETkf の RMSE を表している. アンサンブルサイズは 40. 局所化スケールは水平方向 500 km, 鉛直方向は南北半球 (30N-90N, 30S-90S) は 4.0-grid, 熱帯 (20N-20S) は 3.0-grid で, その間は線形内挿で補間している. (a) 500 hPa ジオポテンシャル高度 Z [m], (b) 500 hPa 東西風 U [m/s], (c) 850 hPa 気温 T [K], (d) 850 hPa 水蒸気の混合比 Qv [g/kg].

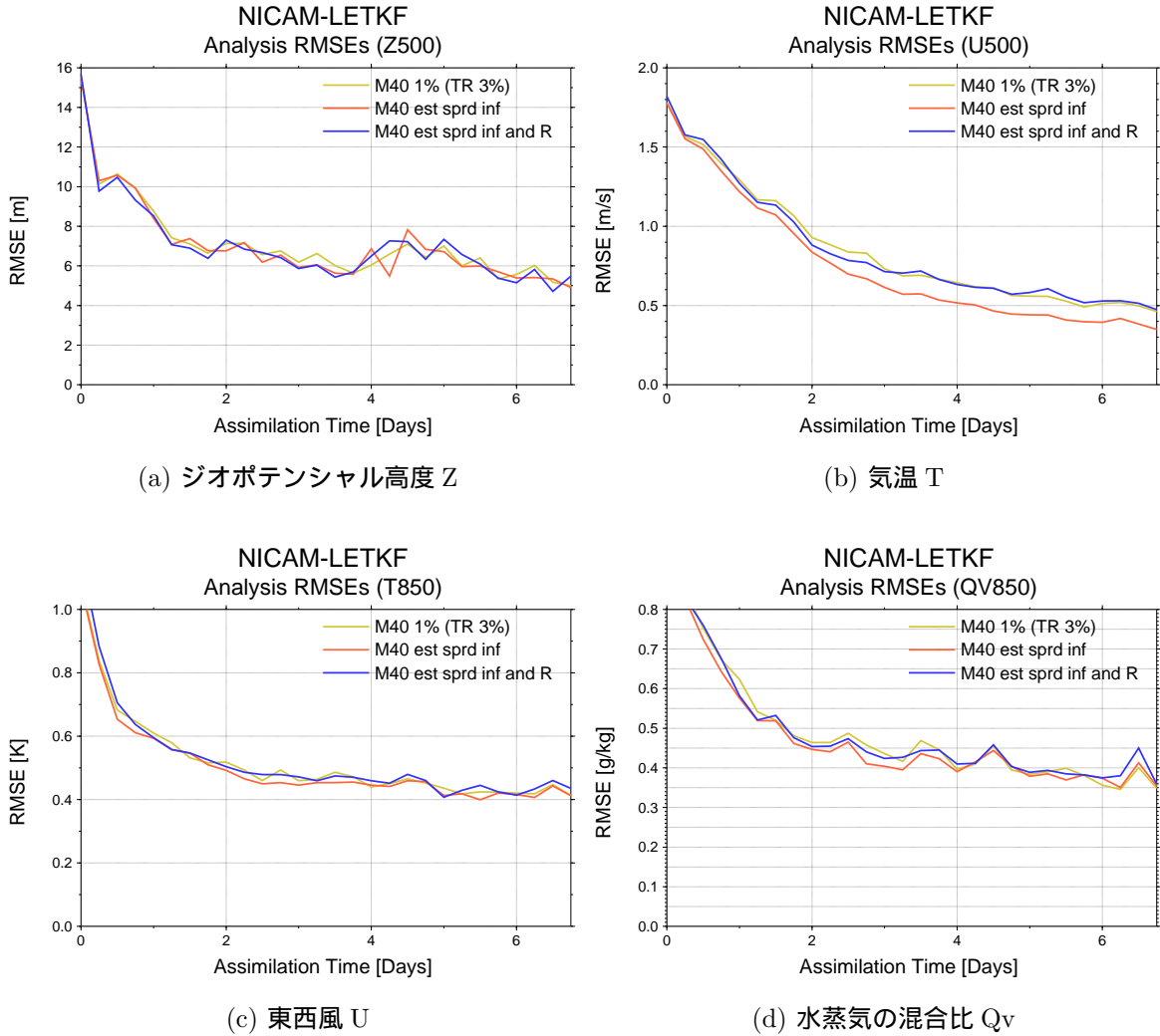


図 4.28: 動的推定法を用いた NICAM-LETKF の熱帯 熱帯 ( $20^{\circ}\text{N}$ – $20^{\circ}\text{S}$ ) 解析 RMSE (対真値) の時系列で, 期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 8 日 06Z までである. 黄色線は動的推定なし, 赤線は膨張係数を動的推定, 青線は膨張係数および観測誤差を動的推定した NICAM-LETKF の RMSE を表している. NICAM-LETKF の設定は, 図 4.27 と同じである. (a) 500 hPa ジオポテンシャル高度 Z [m], (b) 500 hPa 東西風 U [m/s], (c) 850 hPa 気温 T [K], (d) 850 hPa 水蒸気の混合比  $Q_v$  [g/kg].

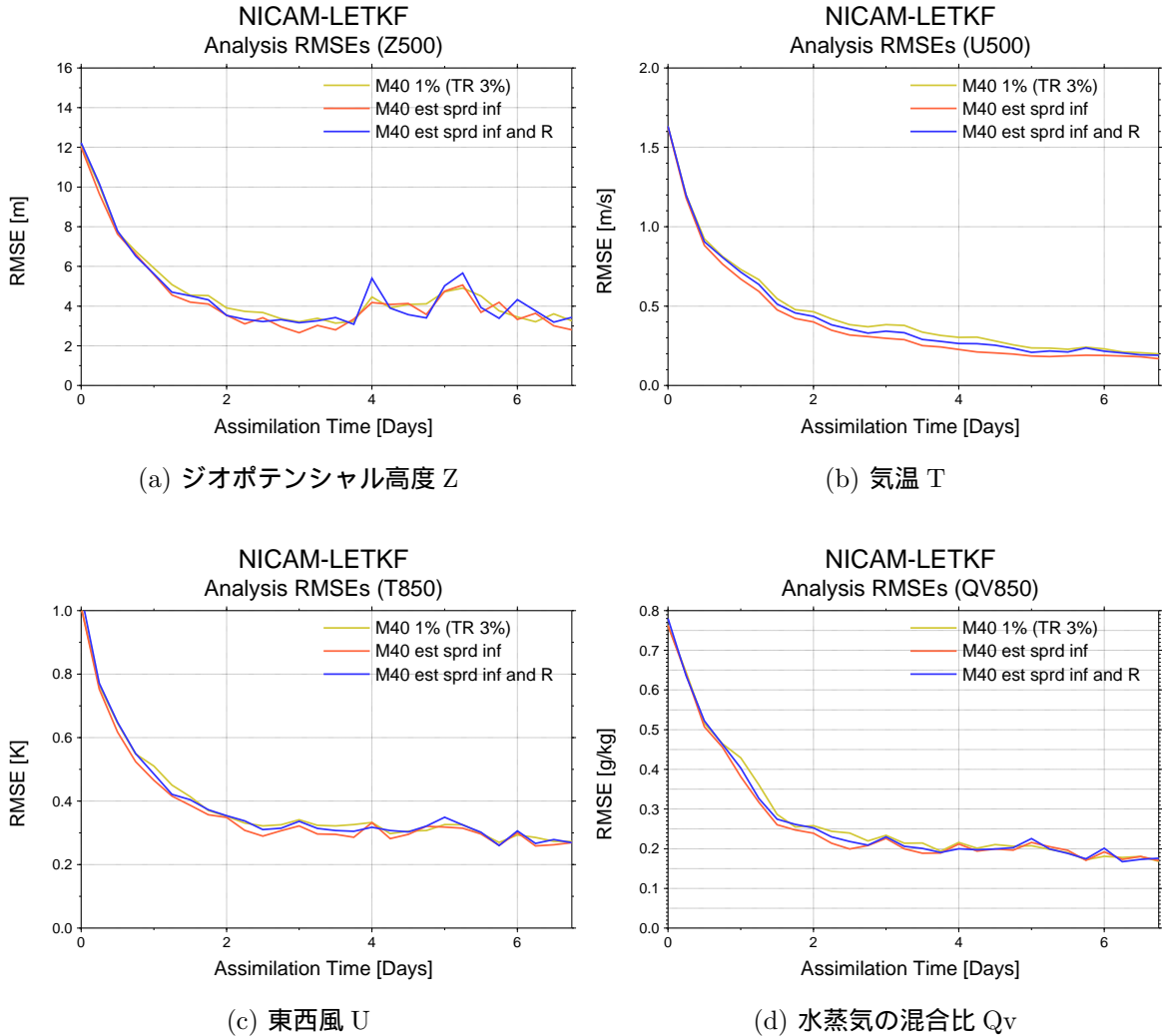


図 4.29: 動的推定法を用いた NICAM-LETKF の南半球 (20°S–90°S) 解析 RMSE (対真値) の時系列で、期間は 2007 年 1 月 1 日 12Z から 2007 年 1 月 8 日 06Z までである。黄色線は動的推定なし、赤線は膨張係数を動的推定、青線は膨張係数および観測誤差を動的推定した NICAM-LETKF の RMSE を表している。NICAM-LETKF の設定は、図 4.27 と同じである。(a) 500 hPa ジオポテンシャル高度 Z [m], (b) 500 hPa 東西風 U [m/s], (c) 850 hPa 気温 T [K], (d) 850 hPa 水蒸気の混合比 Qv [g/kg].



## 観測誤差

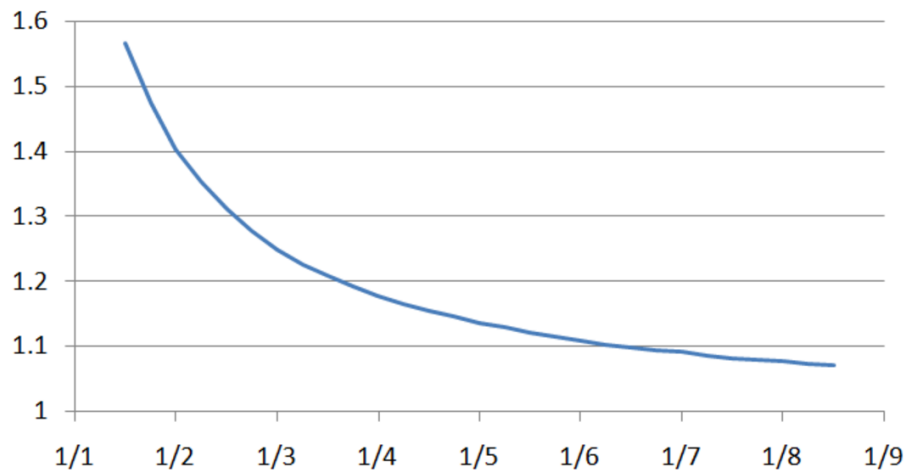


図 4.30: 動的に推定されたモデル最下層の気圧の観測誤差の時系列である．期間は2007年1月1日12Zから2007年1月8日06Zまでである．真の観測誤差は1.0 hPaである．

## NICAM-LETKF Observation error

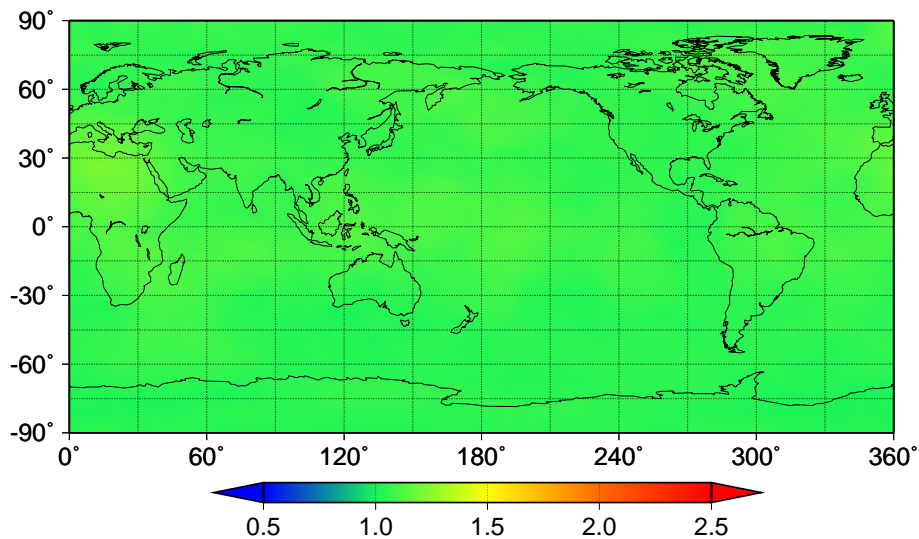


図 4.31: 動的に推定されたモデル最下層の気圧の観測誤差の空間分布である．日付は2007年1月8日00Zである．真の観測誤差は1.0 hPaである．



## 第5章 結論

本研究では、まず、力学的不安定の弱い順圧 S-model に full rank の EKF, EnKF を適応した S-model-EKF と S-model-EnKF を、モデル誤差を含まないパーフェクトモデルを仮定した実験を行うことで、両者を比較した。この際、S-model-EKF と S-model-EnKF はモデルの基本的な自由度の観測を直接同化している。その結果、S-model-EKF と S-model-EnKF の解析誤差は、観測誤差を大幅に下回り、データ同化は成功した。さらに、S-model-EnKF は S-model-EKF を上回る同化性能を持っていることが示された。そして S-model-EnKF は、アンサンブルサイズを 20 から 50 に大きくすることで大幅に RMSE は改善し、100 以上にすることで、RMSE は収束した。

一方、データ同化を実空間で行う S-model-LETKF を構築し、局所化の影響を調査した。その際の観測は、スペクトル空間から実空間にリトリーブして得られたものである。その結果、S-model-LETKF の解析誤差共分散行列の固有値スペクトルは、スペクトル空間の観測を同化する S-model-EnKF に収束しなかった。しかし、局所化を行わない S-model-LETKF の解析誤差共分散行列の第 2 固有ベクトルが、S-model-EnKF の解析誤差共分散行列の第 1 固有ベクトルにほぼ一致するなど、共通点も見られた。また、S-model-LETKF の解析誤差は、観測誤差を下回った。アンサンブルサイズを 20 から 410 まで変化させても、S-model-LETKF の解析誤差に大きな差はなく、小さいアンサンブルサイズであっても局所化を用いることで、S-model-LETKF は安定して動作した。さらに、アンサンブルサイズが 410 の場合は、局所化を行わずとも S-model-LETKF は安定して動作し、局所化を用いた S-model-LETKF の解析誤差を下回った。しかし、スペクトル空間の観測を直接同化する S-model-EnKF には収束しなかった。

上記 S-model-EKF と S-model-EnKF を、NCEP/NCAR 再解析を観測値として同化する実験を行うことで比較した。この際、S-model-EKF と S-model-EnKF はモデルの基本的な自由度の観測を直接同化している。その結果、S-model-EKF とアンサンブルサイズが 250 以上の S-model-EnKF の解析誤差は、観測誤差を下回り、データ同化は

成功した。さらに、S-model-EnKF は S-model-EKF を上回る同化性能を持っていることが示された。そして S-model-EnKF 様々な場で様々な場では、アンサンブルサイズを 200 から 250 に大きくすることで大幅に RMSE は改善し、300 以上にすることで、RMSE は収束した。

次に、本研究では、全休非静力学モデル NICAM に LETKF を適応した NICAM-LETKF を構築し、パーフェクトモデル実験のもと、NICAM-LETKF の基本的な評価を行った。その結果、アンサンブルサイズは 20 であっても安定して動作し、解析誤差を観測誤差より小さくすることに成功した。アンサンブルサイズを 40 にまで増やすことで、さらに解析誤差を小さくすることができたが、解析誤差は局所化サイズに大きく左右されることもわかった。アンサンブルスプレッドは、解析 RMSE に一致し、NICAM-LETKF は解析誤差を適切に反映した初期摂動を作成していることが示された。

最適な局所化サイズを求めた後、水蒸気の混合比を同化する CNTL 実験とそれを同化しない TEST 実験を行った結果、同化サイクル初期では CNTL 実験の方が RMSE が小さい。しかし、同化サイクルを繰り返し水蒸気と相関のある観測を同化することによって、TEST 実験の RMSE は CNTL 実験の RMSE にほぼ一致した。

# 謝辞

本研究を進めるにあたって、指導教員である筑波大学計算科学研究センター (CCS) 田中博教授には、研究手法、結果に対する考察などについて終始適切な御指導を賜り、心より感謝しております。気象庁数値予報課の三好建正氏には、学会、打ち合わせなどの様々な場でアンサンブル・カルマンフィルタについて適切なコメントを頂きましたこと深く感謝いたします。本研究で使用したリアルタイム予報バージョンのNICAMを提供して頂いた、東京大学気候システム研究センター (CCSR) 佐藤正樹准教授に感謝の意を表します。気象研究所/地球科学技術総合推進機構 松枝未遠研究員には、研究を進めるにあたり数多くの貴重なアドバイス・コメント・議論をして頂き、誠にありがとうございました。また、筑波大学研究員井上知栄氏、同大学陸域環境研究センターの大庭雅道准研究員、同大学大学院生命環境科学研究科の寺崎康児氏、加藤真悟氏、栗林正俊氏、北海道大学大学院環境科学院の小山博司氏、前筑波大学大学院環境科学研究科の鈴木一步氏および同研究室の皆様には、ゼミ、学会および様々な場で多くの貴重なアドバイスを頂きました。さらに、同大学生命環境科学研究科の木村富士男教授、林陽生教授、上野健一准教授、植田宏昭講師、日下博幸講師および大学院生の皆様には、大気分野ゼミ、中間発表および最終発表の場で貴重な御意見、御助言を頂きました。最後に、共に修士論文作業を進めた同大学生命環境科学研究科大気分野の修士2年の皆様、ともに机を並べて学んだ修士1年の皆様および同大学地球科学専攻気候学・気象学分野4年生の皆様には、時折良き相談相手となって頂き心から感謝いたします。

本論文は以上の皆様のご協力により完成させることができました。心より深く感謝いたします。

尚、本研究で用いた主な図は、The GMT System (Wessel and Smith, 1991) および Grid Analysis and Display System (GrADS; Doty and Kinter 1992) にて作図しました。

## 参考文献

- Anderson, J. L., 2001: An ensemble adjustment Kalman filter for data assimilation, *Mon. Wea. Rev.*, **129**, 2884–2903.
- Anderson, J. L., 2007: Exploring the need for localization in ensemble data assimilation using a hierarchical ensemble filter. *Physica D*, **230**, 99–111.
- Arakawa, A., 2004: The cumulus parameterization problem: past present and future, *J. Clim.*, **17**, 2493.
- Baek, Seung-Jong, B. R. Hunt, E. Kalnay, E. Ott, and I. Szunyogh, 2006: Local ensemble Kalman filtering in the presence of model bias. *Tellus*, **58A**, 293–306.
- Bishop, C. H., B. J. Etherton, and S. J. Majumdar, 2001: Adaptive sampling with the ensemble transform Kalman Filter. Part I: Theoretical aspects, *Mon. Wea. Rev.*, **129**, 420–436.
- Bouttier, F. and P. Courtier, 1999: *Data assimilation concepts and methods*. Meteorological Training Course Lecture Series, ECMWF, 75pp.
- Buizza, R. and T. N. Palmer, 1995: The singular-vector structure of the atmospheric global circulation. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 1434–1456.
- Buizza, R., M. Miller, and T. N. Palmer, 1999: Stochastic representation of model uncertainties in the ECMWF Ensemble Prediction System. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125**, 2887–2908.

- Cane, M. A., A. Kaplan, R. N. Miller, B. tang, E. C. Hackert, and A. J. Busalacchi, 1996: Mapping tropical Pacific sea level: Data assimilation via a reduced state space kalman filter. *J. Geophys. Res.*, **101** (C10), 22,599–22,617.
- Dee, D. P., 1995: On-line estimation of error covariance parameters for Atmospheric data assimilation. *Mon. Wea. Rev.*, **123**, 1128–1145.
- Desroziers G., L. Berre, B. Chapnik, and P. Poli 2005: Diagnosis of observation, background and analysis error statistics in observation space. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **131**, 3385–3396.
- Eliassen, A. 1954: *Provisional report on calculation of spatial covariance and autocorrelation of the pressure field. No. 5*, Videnskaps-Akademiets Institutt for Vaer-Og Klimaforsking, Oslo. (reprinted in Bengtsson et al. 1981, pp. 319–330).
- Evensen, G., 1994: Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. *J. Geophys. Res.*, **99C5**, 10143–10162.
- Fertig, E., J. Harlim, and B. R. Hunt, 2007: A comparative study of 4D-Var and a 4D ensemble Kalman filter: Perfect model simulations with Lorenz-96. *Tellus*, **59A**, 96–100.
- Fukumori I. and P. Malanotte-Rizzoli, 1995: An approximate Kalman filter for ocean data assimilation: An example with an idealized Guls Stream model. *J. Geophys. Res.*, **100** (C4), 6777–6793.
- Gandin, L. S. 1963: *Objective analysis of meteorological fields*, Gidrometeorologicheskoe Izdatelstvo, Leningrad (in Russian), English traslation by Israeli Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1965.
- Gaspari, G., and S. E. Cohn, 1999: Construction of correlation functions in two and three dimensions. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125**, 723–757.

- Gilchrist, B. and G. Cressman 1954: An experiment in objective analysis. *Tellus*, **6**, 309–318.
- Gelb, A., J.F. Kasper, R.A. Nash, C.F. Price and A. A. Sutherland, 1974: Applied optimal estimation, *The M.I.T. Press*, 374pp.
- Hamill, T. M., J. Whitakaer, and C. Snyder, 2001: Distance-dependent filtering of background error covariance estimates in an ensemble Kalman filter. *Mon. Wea. Rev.*, **129**, 2776–2790.
- Harlim, J. and B. R. Hunt, 2005: A local ensemble transform Kalman filter: an efficient scheme for assimilating atmospheric data, preprint.
- Hoffman, R. N. and E. Kalnay, 1983: Lagged average forecasting, an alternaative to Monte Carlo forecasting. *Tellus*, **35A**, 100–118.
- Houtekamer, P. L., and H. L. Mitchell, 1998: Data assimilation using an ensemble Kalman filter technique. *Mon. Wea. Rev.*, **126**, 796–811.
- Houtekamer, P. L., and H. L. Mitchell, 2001: A sequential ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation. *Mon. Wea. Rev.*, **129**, 123–137.
- Houtekamer, P. L., H. L. Mitchell, G. Pellerin, M. Buehner, M. Charron, L. Spacek, and B. Hansen 2005: Atomspheric data assimilation with an ensemble Kalman filter: Results with realobservations. *Mon. Wea. Rev.*, **133**, 604–620.
- Hubeny, K., 1953: Isotheme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotatinsellipsoids. Osterr. Verein f. Vermessungswesen, Sonderheft 13, Wien, 208 S.
- Hunt, B. R., E. Kalnay, E. J. Kostelich, E. Ott, D. J. Patil and coauthors. 2004: Four-dimensional ensemble Kalman filtering. *Tellus*, **56A**, 273–277.

- Hunt, B. R., 2005: Efficient data assimilation for spatiotemporal chaos: A local ensemble transform Kalman filter. arXiv: physics/0511236v1, 25pp.
- Hunt, B. R., E. Kostelich, and I. Syzunogh, 2007: Efficient data assimilation for spatiotemporal chaos: A local ensemble transform Kalman filter. *Physica D*, **230**, 112–126.
- Jazwinski, A. H., 1970: *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, 376pp.
- Kalman, R., 1960: A new approach to linear filtering and predicted problems. *J. Basic Eng.*, **82**, 35–45.
- Kalnay, E., H. Li, T. Miyoshi, 2007: Adaptive estimation of background and observation errors within local ensemble transform Kalman filter. 11th Symposium on IOAS-AOLS, 7.2A.
- Kalnay, E., H. Li, T. Miyoshi, S. Yang, and J. Ballabrera-poy, 2007: 4-D-Var or ensemble Kalman filter? *Tellus*, **59A**, 758–773.
- Kalnay, E., M. Kanemitsu, R. Kistler, W. Collins, D. Deaven, L. Gandin, M. Iredell, S. Saha, G. White, J. Woollen, Y. Zhu, M. Chelliah, W. Ebisuzaki, W. Higgins, J. Janowiak, K. C. Mo, C. Ropelewski, J. Wang, A. Leetmaa, R. Reynolds, R. Jenne and D. Joseph 1996: The NCEP/NCAR 40 -year reanalyssi project. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **77**, 437–471.
- Kasahara, A., 1977: Numerical integration of the global barotropic primitive equations with Hough harmonic expansions. *J. Atmos. Sci.*, **34**, 687–701.
- Kondo, K. and H. L. Tanaka, 2007: Comparison of the extended Kalman filter and the ensemble Kalman filter using the barotropic general circulation model. *J. Meteor. Soc. Japan*, accepted.

- Li, H., E. Kalnay and T. Miyoshi 2007: Simultaneous estimation of covariance inflation and observation errors within ensemble Kalman filter. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, submitted.
- Liu, H. and X. Zou, 2001: The impact of NORPEX targeted dropsondes on the analysis and 2-3-day forecasts of a landfalling Pacific winter storm using NCEP 3D-Var and 4D-Var systems. *Amer. Meteor. Soc.*, **129**, 1987–2004.
- Lorenz, E. N. 1996: Predictability: A problem partly solved. *In Proc. Predictability, ECMWF, 4-8 September 1995*.
- Matsueda M., M. Kyouda, H. L. Tanaka and T. Tsukuki, 2006: Multi-Center Grand Ensemble using three operational ensemble forecasts. *SOLA*, **2**, 33–36.
- Matsueda M., M. Kyouda, H. L. Tanaka and T. Tsukuki, 2007: Daily forecast skill of Multi-Center Grand Ensemble. *SOLA*, **3**, 29–32.
- Matsueda M., and H. L. Tanaka, 2008: Can MCGE outperform the ECMWF Ensemble?
- Miura, H., M. Satoh, T. Nasuno, A. T. Noda, and K. Oouchi, 2007: An Madden-Julian Oscillation event simulated using a global cloud-resolving model. *Science*, **318**, 1763–1765.
- Miyoshi, T. and K. Aranami 2006: Applying a Four-dimensional Kalman Filter (4D-LETKF) to the JMA Nonhydrostatic Model (NHM). *SOLA*, **2**, 128-131.
- Miyoshi, T. and E. Kalnay 2005: A technique to objectively estimate the covariance inflation parameter within ensemble Kalman filtering, unpublished manuscript.
- Miyoshi, T., E. Kalnay, and B. Hunt, 2005: Ensemble Kalman filter experiments with the Lorenz-96 model. in preparation.



- Miyoshi, T. and Y. Sato, 2007: Assimilating Satellite Radiances with a Local Ensemble Transform Kalman Filter (LETKF) Applied to the JMA Global Model (GSM). *SOLA*, **3**, 37–40.
- Miyoshi, T., S. Yamane, and T. Enomoto, 2007a: The AFES-LETKF experimental ensemble reanalysis: ALERA. *SOLA*, **3**, 45–48.
- Miyoshi, T., S. Yamane, and T. Enomoto, 2007b: Localizing the error covariance by physical distances within a local ensemble transform Kalman filter (LETKF). *SOLA*, **3**, 89–92.
- Miyoshi, T., and S. Yamane 2007: Local ensemble transform Kalman filtering with an AGCM at a T159/L48 Resolution. *Mon. Wea. Rev.*, **135**, 3841–3861.
- Molteni, F., R. Buizza, T. N. Palmer, and T. Petroliagis, 1996: The ECMWF ensemble prediction system: Methodology and validation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **122**, 73–199.
- Ohfuchi, W., H. Nakamura, M. K. Yoshioka, T. Enomoto, K. Takaya, X. Peng, S. Yamane, T. Nishimura, Y. Kurihara, and K. Ninomiya, 2004: 10-km mesh meso-scale resolving simulations of the global atmosphere on the Earth Simulator: Preliminary outcomes of AFES (AGCM for the Earth Simulator). *J. Earth Simulator*, **1**, 8–34.
- Ott, E., B. R. Hunt, I. Szunyogh, A. V. Zimin, E. J. Kostelich, and coauthors., 2002: Exploiting local low dimensionality of the atmospheric dynamics for efficient Kalman filtering. ArXiv: archive/paper 020358, Available at: <http://arxiv.org/abs/physics/020358>.
- Ott, E., B. R. Hunt, I. Szunyogh, A. V. Zimin, E. J. Kostelich, and coauthors., 2004: A local ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation. *Tellus*, **56A**, 415–428.

- Palmer, T. N., R. Gelaro, J. Barkmeijer and R. Buizza 1998: Singular vectors, metrics, and adaptive observations. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 633–653.
- Panofsky, H. 1949: Objective wather-map analysis. *J. Appl. Meteor.*, **6**, 386–392.
- Parrish, D. F. and J. C. Derber, 1992: The National Meteorological Center’s spectral statistical-interpolation analysis system. *Mon. Wea. Rev.* **120**, 1747–1763.
- Patil, D. J., B. R. Hunt, E. Kalnay, J. A. Yorke, and E. Ott, 2001: Local low dimensionality of Atmospheric dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 5878–5881.
- Pham, D. T., J. Verron, and M. C. Roubaud, 1998: A singular evolutive extended Kalman filter for data assimilation in oceanography. *J. Mar. Syst.*, **16**, 323–340.
- Pham, D. T., 2001: Stochastic methods for sequential data assimilation in strongly nonlinear systems. *Mon. Wea. Rev.*, **129**, 1194–1207.
- Pierre G. and T. Jean-Noël, 2001: Impact of the digital filter as a weak constraint in the preoperational 4D-Var assimilation system of Meteo-France. *Amer. Meteor. Soc.*, **129**, 2089–2102.
- Saito, K., G. Doms, U. Schaettler, J. Steppeler, 1998: 3-D Mountain waves by the local-method of DWD and the MRI mesoscale nonhydrostatic model. *Pap. Meteorol. Geophys.*, **49**, 7–19.
- Saito, K., T. Fujita, Y. Yamada, J. Ishida, Y. Kumagai, K. Aranami, S. Ohmori, R. Nagasawa, S. Kumagai, C. Muroi, T. Kato, H. Eito and Y. Yamazaki, 2006: The operational JMA nonhydrostatic mesoscale model. *Mon. Wea. Rev.*, **134**, 1266–1298.
- Satoh, M., 2002: Conservative scheme for the compressible nonhydrostatic models with the horizontally explicit and vertically implicit time integration scheme. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 1227–1245.

- Satoh, M., 2003: Conservative scheme for a compressible nonhydrostatic model with moist processes. *Mon. Wea. Rev.*, **131**, 1033-1050.
- Satoh, M., H. Tomita, H. Miura, S. Iga, T. Nasuno, 2005: Development of a global cloud resolving model - a multi-scale structure of tropical convections. *J. Earth Simulator* **3** 11–19.
- Satoh, M., T. Matsuno, T., H. Tomita, H. Miura, T. Nasuno, S. Iga, 2008: Nonhydrostatic Icosahedral Atmospheric Model (NICAM) for global cloud resolving simulations. *Journal of Computational Physics*, the special issue on Predicting Weather, Climate and Extreme events, **227**, 3486-3514, doi:10.1016/j.jcp.2007.02.006.
- Stuhne, G. R. and W. R. Peltier, 1996: Vortex erosion and amalgamation in a new model of large scale flow on the sphere. *J. Comput. Phys.*, **128**, 58–81.
- Szunyogh, I., E. J. Kostelich, G. Gyarmati, D. J. Patil, B. R. Hunt, E. Kalnay, E. Ott, and J. A. Yorke, 2005: Assessing a local ensemble Kalman filter: Perfect model experiments with the National Centers for Environmental Prediction global model. *Tellus*, **57A**, 528–545.
- Szunyogh, I., E. J. Kostelich, G. Gyarmati, E. Kalnay, B. R. Hunt., E. Ott, E. Saterfield and J. A. Yorke, 2008: A local ensemble transform Kalman filter data assimilation system for the NCEP global model. *Tellus*, **60A**, 113–130.
- Tanaka, H. L., 1985: Global energetics analysis by expansion into three dimensional normal mode functions during the FGGE winter. *J. Meteor. Soc. Japan*, **63**, 180–200.
- Tanaka, H. L., 1991: A numerical simulation of amplification of low-frequency planetary waves and blocking formations by the up-scale energy cascade. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 2919–2935.

- Tanaka, H. L., 1998: Numerical simulation of a life-cycle of atmospheric blocking and the analysis of potential vorticity using a simple barotropic model. *J. Meteor. Soc. Japan*, **76**, 983–1008.
- Tanaka, H. L., and D. Nohara, 2001: A study of deterministic predictability for the barotropic component of the atmosphere. *Science Rep.*, **22A**, Institute Geoscience, University of Tsukuba, 45 pp.
- Tanaka, H. L., 2003: Analysis and modeling the Arctic Oscillation using a simple barotropic model with baroclinic eddy forcing. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 1359–1379.
- Tomita, H., M. Tsugawa, M. Satoh, K. Goto, 2001: Shallow water model on a modified icosahedral geodesic grid by using spring dynamics. *J. Comp. Phys.*, **174**, 579–613.
- Toth, Z. and E. Kalnay, 1993: Ensemble forecasting at NMC: The generation of perturbations. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **74**, 2317–2330.
- Toth, Z. and E. Kalnay, 1997: Ensemble forecasting at NCEP and the breeding method. *Mon. Wea. Rev.*, **125**, 3297–2330.
- Whitaker, J. S. and T.M. Hamill, 2002: Ensemble data assimilation without perturbed observations. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 1913–1924.
- Whitaker, J. S., T. M. Hamill, X. Wei, Y. Song, and Z. Toth, 2008: Ensemble data assimilation with the NCEP global forecast system. *Mon. Wea. Rev.*, **136**, 463–482.
- Zang, X., and P. Malanotte-Rizzoli, 2003: A comparison of assimilation results from the Ensemble Kalman filter and the Reduced-Rank Extended Kalman filter. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **10**, 477–491.

加藤 真悟, 2007: 順圧大気大循環モデルを用いた北極振動指数の予測実験. 筑波大学自然学類卒業論文.

近藤 圭一, 2007: 順圧大気大循環モデルによるアンサンブル・カルマンフィルタの実験. 筑波大学自然学類卒業論文.

露木 義 1997: 変分法によるデータ同化. 数値予報課報告・別冊第 43 号, 気象庁予報部, 103-165.

三好建正, 2006: アンサンブル技術の短期・中期予報への利用 ~ 激しい気象現象の予測向上を目指して ~. 数値予報課報告・別冊第 52 号, 80-99.

三好 建正, 2008: 「第 3 回アンサンブルデータ同化に関するワークショップ」参加報告. 天気, 55(7), 591-598.