順圧大気大循環モデルを用いた
北極振動指数の予測可能性

2009年1月

加　藤　真　悟

順圧大気大循環モデルを用いた
北極振動指数の予測可能性

筑波大学大学院
生命環境科学研究科
地球科学専攻
修士（理学）学位論文

加　藤　真　悟

Predictability of the Arctic Oscillation Index
Using a Barotropic General Circulation Model

Shingo Kato

Abstract

The Arctic Oscillation (AO) is one of the dominant atmospheric variabilities characterized as opposing atmospheric pressure patterns in northern middle and high latitudes. The oscillation exhibits a "positive phase" with relatively low pressure over the polar region and high pressure at midlatitudes.

In this study, we investigated whether long-term prediction of the Arctic Oscillation Index (AOI) would be possible, using some models such as a barotropic general circulation model. AOI is related to the zonal mean polar jet anomaly, and an index of the winter weather in the Northern Hemisphere. This model developed by Tanaka (1998) predicts the vertical mean component (i.e., barotropic component) of the atmosphere with an external forcing of the barotropic-baroclinic interactions. In order to correct the bias of the model, the ensemble forecast using some error averages before the initial time was performed.

As a result, it is found that AOI could be predicted exceeding two weeks by predicting the barotropic component of the atmosphere. The ensemble forecast considering the bias correction showed better results than control run, therefore it is thought to be effective to use the ensemble forecast. And the ensemble forecast with more ensemble members was skilled. On the other hand, the forecast occasionally largely varied depending on the initial value. As a cause of the bad prediction, it is thought that the model problems relate to the prediction skill because the sensitivity of the initial value is low in the barotropic general circulation model.

In order to improve the prediction skill, we need to consider another method to correct the bias of the model, and to study the mechanism of the AO in more detail.

Keyword: Arctic Oscillation, Arctic Oscillation Index, Barotropic Component, Predictability, Ensemble Forecast

目 次

Abstract **i**

表目次 **v**

図目次 **vi**

1 はじめに **1**

2 目的 **5**

3 基礎方程式系 **6**

3.1 プリミティブ方程式系 –球座標系 (θ, λ, p)– 6

3.2 線形方程式と変数分離 11

3.3 鉛直構造関数 13

3.4 水平構造関数 16

3.5 3次元ノーマルモード関数展開 19

4 使用データ **22**

5 解析方法 **23**

5.1 大気の順圧成分の抽出 23

5.2 順圧 S-Model 23

5.3 アンサンブル予報 26

5.4 状態空間モデルによる時系列の解析 28

5.4.1 状態空間モデル 28

5.4.2 カルマンフィルタによる状態の推定 28

5.4.3 平滑化のアルゴリズム 30

5.4.4 状態の長期予測 30

5.4.5 時系列の予測 31

6 結果 **33**

6.1 時系列モデルによる AOI の予測実験 33

6.2 順圧 S-Model による AOI の予測実験 34

6.2.1 大気の順圧成分からみた北極振動 34

6.2.2　1976/77 年冬の予測実験 35
6.2.3　1988/89 年冬の予測実験 36
6.2.4　アンサンブルメンバー数の違いによる予報精度 37
6.2.5　相関係数による予報の評価 37
6.2.6　期間平均した AOI を用いた予報精度の評価 38
6.2.7　AO パターンによる予報精度の違い 39
6.3　気象庁モデルによる AOI の予測実験 42

7　考察 **43**
7.1　時系列モデルによる AOI の予測 43
7.2　順圧 S-Model による AOI の予測 43
7.3　気象庁モデルによる AOI の予測 45

8　結論 **46**

謝辞 **48**

参考文献 **49**

表 目 次

1 AO マイナスの冬と AO プラスの冬における予報精度の比較 52

図 目 次

1 AO がプラスの時とマイナスの時の北半球の大気循環の模式図 . . . 53
2 1950 年から 2007 年までの 365 日移動平均を施した北極振動指数 (AOI) の時系列 54
3 1988年から2007年までの90日移動平均を施した北極振動指数(AOI) の時系列 54
4 2002 年の AOI データに状態空間モデルを適用したときの AOI の予報図（次数 5） 55
5 2002 年の AOI データに状態空間モデルを適用したときの AOI の予報図（次数 20） 55
6 2002 年の AOI データに状態空間モデルを適用したときの AOI の予報図（次数 50） 56
7 2002 年の AOI データに状態空間モデルを適用したときの AOI の予報図（次数 100） 56
8 2002 年の AOI データに状態空間モデルを適用したときの AOI の予報図（次数 250） 57
9 1977 年 1 月の順圧高度場とアノマリ 58
10 1989 年 1 月の順圧高度場とアノマリ 59
11 1976 年 11 月 1 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報 60
12 1976 年 11 月 6 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報 60
13 1976 年 11 月 11 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報 61
14 1976 年 11 月 16 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報 61
15 1976 年 11 月 21 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報 62
16 1976 年 11 月 26 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報 62
17 1988 年 11 月 1 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報 63
18 1988 年 11 月 6 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報 63
19 1988 年 11 月 11 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報 64
20 1988 年 11 月 16 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報 64
21 1988 年 11 月 21 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報 65
22 1988 年 11 月 26 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報 65
23 1988 年 11 月 1 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報（メンバー数 25） 66

24 1988年11月11日00Zを初期値としたAOIの60日予報（メンバー数25） 66
25 1988年11月21日00Zを初期値としたAOIの60日予報（メンバー数25） 67
26 1976/77年冬におけるAOIの実況と予報の相関係数 68
27 1988/89年冬におけるAOIの実況と予報の相関係数 68
28 2005/06年冬におけるAOIの実況と予報の相関係数 69
29 2006/07年冬におけるAOIの実況と予報の相関係数 69
30 1988年におけるAOIの予報成績 70
31 2000年におけるAOIの予報成績 70
32 7日平均したAOIの予報成績 71
33 14日平均したAOIの予報成績 71
34 28日平均したAOIの予報成績 72
35 56日平均したAOIの予報成績 72
36 2005年10月6日12Zを初期値としたAOIの60日予報 73
37 2005年10月13日12Zを初期値としたAOIの60日予報 73
38 2005年10月20日12Zを初期値としたAOIの60日予報 74
39 2005年10月27日12Zを初期値としたAOIの60日予報 74
40 2005年11月3日12Zを初期値としたAOIの60日予報 75
41 2005年11月10日12Zを初期値としたAOIの60日予報 75
42 2005年10月1日00Zを初期値としたAOIのP-Modelによる60日予報 76
43 1976年11月1日00Zを初期値とした60日予報のRMSEとスプレッド 76
44 2005年10月1日00Zを初期値とした60日予報のRMSEとスプレッド 77
45 2005年10月6日00Zを初期値としたAOIの60日予報 77

1　はじめに

これまで異常気象といえばエルニーニョに重点が置かれていたが、近年、「北極振動」が注目を浴びるようになった。北極振動（Arctic Oscillation; AO）とは、冬季北半球の循環で最も卓越する変動パターンであり、Thompson and Wallace (1998、以下 TW98) が初めてこの言葉を使い、研究者の間で注目されるようになった。TW98 は北緯 20 度以北の北半球域で冬季（11 月〜4 月）の月平均海面気圧偏差場の主成分分析（EOF 解析）を行い、最も卓越するモード（第 1 モード）を抽出し、それをその形状から AO と名付けた。AO は北極域の平年からの気圧偏差が負のとき、中緯度の海上を中心に正偏差となる変動で、この偏差パターンを「AO プラス」と定義する。AO がプラスのとき（図 1 左）は極域と中緯度の間の気圧差が大きく、上空のジェット気流が強まった状態になる。このとき、ヨーロッパでは偏西風の強化により温和で雨が多くなる。また、日本付近には寒気が流れ込みにくくなり、日本では暖冬となる。逆に AO がマイナスのとき（図 1 右）には、極域と中緯度の間の気圧差が小さくなり、上空のジェット気流は弱まる。つまり、偏西風が大きく蛇行した状態となり、ヨーロッパでは晴天が続く。また、日本付近には寒気が流れ込みやすくなり、日本では寒冬となる。

図 2 は 1950 年から 2007 年までの北極振動指数（以下、AOI）の時系列で、365 日移動平均を施したものである。ここで、AOI とは、前述した EOF-1 のスコアのことであり、AO の強さを表す指標である。ただし、この図の AOI は、後述する大気の順圧成分で求めている。この時系列によると、1976/77 年に正から負への急変が見られ、その後約 10 年間負の傾向を示した後、1988/89 年に急激に正の値へシフトしたことが分かる。1976/77 年と 1988/89 年の急変は「気候シフト」と呼ばれるもので、アリューシャン低気圧の強弱や北極海の海氷、北極圏の永久凍土などから、その気候シフトに関連する現象を確認することができる。また、1989 年以降、AOI の値は正から負の値へと徐々に減少する傾向を読み取ることができる。

図 3 は 1988 年から 2007 年までの北極振動指数（以下、AOI）の時系列で、90 日移動平均を施したものである。日本の冬の天候に着目すると、暖冬・寒冬と AOI の正・負は、非常によく対応していることが分かる。たとえば、AOI が大きく正に振れた 1988/89 年の冬は、日本列島は顕著な暖冬に見舞われた。また、記憶に新しい 2005 年 12 月の異常低温も、AOI 負と対応している。このように、AO (AOI) と冬季北半球の気候には密接な関係があり、AO の予測は、季節予報の観点から重要なカギであると言える。

AO の予測に関する研究を過去に遡って見てみると、成層圏との関連に着目した研究が多い。冬季の AO は、対流圏から成層圏にまで及ぶ大規模な現象である (Thompson and Wallace, 1998)。対流圏と成層圏とのつながりは以前から指摘されていたが（例えば、Kodera et al., 1996）、AO が登場してからは、その要因を成層圏に求める研究が数多くなされるようになった。Baldwin and Dunkerton (1999) によると、AO はまず成層圏に現れ、それが約 2〜3 週間の時間スケールで対流圏へ下方伝播する。また、Baldwin and Dunkerton (2001) では、対流圏への下方伝播が起こるのは成層圏の AO が強いときに限られ、このとき下部成層圏の AO と対流圏の AO は同符号を取ることが示された。これらの定性的な結果を踏まえ、次に統計モデルを用いた解析が行われた。Baldwin et al. (2003) は簡単な線形回帰モデルを用いて、月平均した AO 指数の予測を試みた。このモデルは、大気の各気圧レベルにおける現在の AO 指数を説明変数として、10 日先から 40 日先までの 1ヶ月間で平均した 1000 hPa での AO 指数を予測するものである。その結果、最適な説明変数は 150 hPa における AO 指数であるとし、下部成層圏と地表付近が密接に関係していることを定量的に示した。また、統計モデルを用いた同様の研究が Charlton et al. (2003) や Christiansen (2005) で述べられており、地表での AO 指数の予測には成層圏、特に下部成層圏の情報が重要であると指摘している。しかしながら、Mukougawa and Hirooka (2007) は、2003 年 1 月の事例解析を行い、このとき成層圏に大きな負の AO が存在したにもかかわらず、大気下層の AO 指数の予測は困難であったことを示唆した。また、AO の下方伝播の予測には、対流圏上層における波数 2 のプラネタリー波の振る舞いと帯状風分布を正しく再現することが重要であると述べている。

AO の予測可能性を成層圏に求める研究が多くを占める一方で、他の観点に着目した研究もある。Cohen (2001) では、晩秋におけるシベリアの積雪面積と、それに続く冬の AO との間には有意な正の相関関係があることを示した。一方、Kerr (2003) では、夏季における北半球全域の積雪面積が冬の AO を決定する重要な予測因子であると述べている。

また、間接的ではあるが、現業モデルを使用した研究もある。森ほか (2007) は、気象庁 1ヶ月アンサンブル数値予報データを用い、2005 年 12 月における日本付近の 500 hPa 高度偏差の予測可能性を調べた。その結果、日本付近での高度低下を予測するためには、シベリア北東部のブロッキング高気圧の予測が重要であるとしている。一方、同データを用いた前田ほか (2007) の研究では、2005 年 12 月における日本付近の偏西風異常の予測可能性について、偏西風異常の発生は予測で

きなかったものの、持続と終息は予測できたことを示した。

中期予報は、非線形流動体のカオスの壁によって妨げられ、数値予報が発達した現代においても2週間を超えて予報することは不可能とされている。しかし、大気の変動成分のうち、プラネタリー波のような動きがゆっくりでほぼ定常に近い成分だけを取り出したときの予報は、総観規模もしくはそれより小さい波動を含むときよりも予報精度がよくなる。AO は長周期変動であり順圧的な構造をもっているため、大気の順圧成分に着目することで、ある程度の予測可能性があるものと考えられる。

Tanaka (1991) は、鉛直構造関数と水平構造関数を基底にとった3次元スペクトルプリミティブ方程式で構成される新しい順圧大気大循環モデルを開発した。このモデルは、大気の順圧成分（つまり鉛直平均場）を予測するものであり、このモデルの順圧成分は鉛直構造関数 G_0 を導入することで、次の鉛直変換の式により定義される。

$$(u,\, v,\, \phi')_0^\top = \frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} (u,\, v,\, \phi')^\top G_0 \, dp$$

ここで、 u, v は風速を表し、 ϕ' はジオポテンシャルの全球平均量からの偏差量を表す。順圧モードの鉛直構造関数 G_0 は鉛直方向においてほぼ一定であり、プリミティブ方程式系の鉛直平均と等しい。この順圧大気大循環モデルは、外部強制項の正確な見積もりが非常に難しいため、外部強制項のパラメタリゼーションがカギとなる。Tanaka (1998) では、外部強制項として、地形、傾圧不安定、粘性摩擦、地表摩擦を定式化してブロッキングの数値実験などを行い、観測されるようなブロッキングのライフサイクルの再現に成功している。ブロッキング用に作られたこのモデルは、その頭文字をとって順圧 B-Model とよばれる。しかし、このパラメタリゼーションは基本的には外力の線形近似であり、観測値から得られた現実の外力に対しては完璧とはいえなかった。そこで、Tanaka and Nohara (2001) では、モデルの最適外力を過去の観測値から線形回帰により統計的に求めた。外力を統計的 (statistically) に求めているので、このモデルは順圧 S-Model という。また、Tanaka and Nohara (2001) では、外力を観測値から診断的に求めて構築した擬似パーフェクトモデルが、初期値から 100 日以上も現実大気と同じ時間発展をすることを示した。つまり、外力さえ精度よくパラメタライズできれば、順圧スペクトルモデルが予報モデルとして使えることを示唆している。完璧 (perfect) な外力を与えているので、このモデルを順圧 P-Model という。

近年の天気予報技術およびコンピュータの発達により、天気予報モデルは日々

進化を遂げている。「長期予報は当たらない」という声をよく耳にするが、数十年前は統計的予測だけで長期予報を行っていたことを考えると、予報精度の問題はあるにせよ、力学的予測ができるようになったことはめざましい進歩であると思われる。そのような中で、冬季北半球の天候を大きく左右する「AO」に焦点を当て、現段階でどれほどの予測可能性があるのかを、本研究で調べることとした。

2　目的

本研究では、北極振動指数 (AOI) の予測実験を順圧大気大循環モデルを中心に、いくつかのモデルを用いて行い、AOI の予測可能性について検証することを目的とする。

まずはじめに、統計モデル（時系列モデル）を用いて、過去の AOI データから将来の AOI が予測できるかどうかを検証した。

次に、順圧大気大循環モデルを用いて、AOI が大きく正または負に振れた年を対象に AOI の長期予測を行い、予報精度をさまざまな視点から検証した。

最後に、気象庁 1ヶ月アンサンブル予報データを用いて、AOI の時系列図を作成し、その予測可能性を調べた。

3　基礎方程式系

3.1　プリミティブ方程式系　　–球座標系 $(\theta,\ \lambda,\ p)$–

ここで使われる基礎方程式系は、球座標表現（緯度 θ 、経度 λ 、気圧 p ）で表した 3 つの予報方程式と 3 つの診断方程式から成り立つ。

・水平方向の運動方程式（予報方程式）

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \sin\theta \cdot v + \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = -\mathbf{V}\cdot\nabla u - \omega\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan\theta}{a}uv + F_u \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \sin\theta \cdot u + \frac{1}{a}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\mathbf{V}\cdot\nabla v - \omega\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan\theta}{a}uu + F_v \tag{2}$$

・熱力学の第一法則（予報方程式）

$$\frac{\partial c_p T}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla c_p T + \omega\frac{\partial c_p T}{\partial p} = \omega\alpha + Q \tag{3}$$

・質量保存則（診断方程式）

$$\frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial v\cos\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \tag{4}$$

・状態方程式（診断方程式）

$$p\alpha = RT \tag{5}$$

・静力学平衡近似の式（診断方程式）

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha \tag{6}$$

ただし、水平移流に関しては

$$\mathbf{V}\cdot\nabla(\quad) = \frac{u}{a\cos\theta}\frac{\partial(\quad)}{\partial \lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial(\quad)}{\partial \theta} \tag{7}$$

である。

上記の方程式系で用いられている記号は以下の通りである。

θ	:	緯度	ω	:	鉛直 p 速度 ($\equiv \frac{dp}{dt}$)
λ	:	経度	F_u	:	東西方向の摩擦力
p	:	気圧	F_v	:	南北方向の摩擦力
t	:	時間	Q	:	非断熱加熱率
u	:	東西風速度	Ω	:	地球の自転角速度 (7.29×10^{-5} [rad/s])
v	:	南北風速度	a	:	地球の半径 (6371.22 [km])
ϕ	:	ジオポテンシャル	c_p	:	定圧比熱 (1004 [$\mathrm{JK^{-1}kg^{-1}}$])
T	:	気温	R	:	乾燥空気の気体定数 (287.04 [$\mathrm{JK^{-1}kg^{-1}}$])
α	:	比容			

Tanaka (1991) によると、熱力学の第一法則の式 (3) に、質量保存則 (4)、状態方程式 (5)、静力学平衡近似の式 (6) を代入することで、基礎方程式系を 3 つの従属変数 (u, v, ϕ) のそれぞれの予報方程式で表すことができる。

まずはじめに、気温 T と比容 α とジオポテンシャル高度 ϕ について、以下のような摂動を考える。

$$T(\theta, \lambda, p, t) = T_0(p) + T'(\theta, \lambda, p, t) \tag{8}$$

$$\alpha(\theta, \lambda, p, t) = \alpha_0(p) + \alpha'(\theta, \lambda, p, t) \tag{9}$$

$$\phi(\theta, \lambda, p, t) = \phi_0(p) + \phi'(\theta, \lambda, p, t) \tag{10}$$

ここで、T_0, α_0, ϕ_0 はそれぞれの全球平均量で p のみの関数である。また、T', α', ϕ' はそれぞれの摂動を表し、全球平均量からの偏差量である。

さらに、診断方程式 (5), (6) も以下のように、基本場（全球平均）に関する式と、摂動に関する式とに分けることができる。

＜基本場＞

$$p\alpha_0 = RT_0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial p} = -\alpha_0 \tag{12}$$

＜摂動＞

$$p\alpha' = RT' \tag{13}$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial p} = -\alpha' \tag{14}$$

以上の式 (8)〜(14) を用いて、熱力学第一法則の式 (3) を変形する。

$$\frac{\partial c_p T}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla c_p T + \omega\frac{\partial c_p T}{\partial p} = \omega\alpha + Q \tag{15}$$

右辺第一項を左辺へ移項して、

$$c_p\frac{\partial T}{\partial t} + c_p\mathbf{V}\cdot\nabla T + c_p\omega\left(\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\alpha}{c_p}\right) = Q \tag{16}$$

式 (8), (9) より、 $T = T_0 + T'$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha'$ なので、

$$c_p\frac{\partial}{\partial t}(T_0 + T') + c_p\mathbf{V}\cdot\nabla(T_0 + T') + c_p\omega\left[\frac{\partial}{\partial p}(T_0 + T') - \frac{\alpha_0}{c_p} - \frac{\alpha'}{c_p}\right] = Q \tag{17}$$

T_0 は p のみの関数であるので、 $\dfrac{\partial T_0}{\partial t} = 0,\ \nabla T_0 = 0$ 。したがって、

$$c_p\frac{\partial T'}{\partial t} + c_p\mathbf{V}\cdot\nabla T' + c_p\omega\left(\frac{dT_0}{dp} + \frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{\alpha_0}{c_p} - \frac{\alpha'}{c_p}\right) = Q \tag{18}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla T' + \omega\left(\frac{dT_0}{dp} - \frac{\alpha_0}{c_p}\right) + \omega\left(\frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{\alpha'}{c_p}\right) = \frac{Q}{c_p} \tag{19}$$

式 (11), (13) より、 $\alpha_0 = \dfrac{RT_0}{p},\ \alpha' = \dfrac{RT'}{p}$ なので、

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla T' + \omega\left(\frac{dT_0}{dp} - \frac{RT_0}{pc_p}\right) + \omega\left(\frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{RT'}{pc_p}\right) = \frac{Q}{c_p} \tag{20}$$

ここで、全球平均気温 T_0 と、そこからの偏差量 T' との間には、 $T_0 \gg T'$ が成り立つので、左辺第 4 項における、気温の摂動の断熱変化項は無視することができる。つまり、

$$\left|\omega\frac{RT_0}{pc_p}\right| \gg \left|\omega\frac{RT'}{pc_p}\right| \tag{21}$$

である（このような近似は下部成層圏においてよく成り立つ)。よって、

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla T' + \omega\frac{\partial T'}{\partial p} + \omega\left(\frac{dT_0}{dp} - \frac{RT_0}{pc_p}\right) = \frac{Q}{c_p} \tag{22}$$

また、左辺第3項に関して、全球平均気温 T_0 を用いることで、以下のような大気の静的安定度パラメータ γ を導入することができる (Tanaka, 1985)。

$$\gamma(p) \equiv \frac{RT_0(p)}{c_p} - p\frac{dT_0(p)}{dp} \tag{23}$$

よって、

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla T' + \omega\frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{\omega}{p}\left(\frac{RT_0}{c_p} - p\frac{dT_0}{dp}\right) = \frac{Q}{c_p} \tag{24}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla T' + \omega\frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{\omega\gamma}{p} = \frac{Q}{c_p} \tag{25}$$

となる。

ここで、式 (13), (14) より、

$$T' = \frac{p\alpha'}{R} = -\frac{p}{R}\cdot\frac{\partial\phi'}{\partial p} \tag{26}$$

なので、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{p}{R}\cdot\frac{\partial\phi'}{\partial p}\right) + \mathbf{V}\cdot\nabla\left(-\frac{p}{R}\cdot\frac{\partial\phi'}{\partial p}\right) + \omega\frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{p}{R}\cdot\frac{\partial\phi'}{\partial p}\right) - \frac{\omega\gamma}{p} = \frac{Q}{c_p} \tag{27}$$

両辺に $\dfrac{p}{\gamma}$ をかけると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{p^2}{\gamma R}\cdot\frac{\partial\phi'}{\partial p}\right) - \frac{p^2}{\gamma R}\mathbf{V}\cdot\nabla\frac{\partial\phi'}{\partial p} - \frac{\omega p}{\gamma}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{R}\cdot\frac{\partial\phi'}{\partial p}\right) - \omega = \frac{pQ}{c_p\gamma} \tag{28}$$

さらに、両辺を p で微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p^2}{\gamma R}\cdot\frac{\partial\phi'}{\partial p}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{p^2}{\gamma R}\mathbf{V}\cdot\nabla\frac{\partial\phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{R}\cdot\frac{\partial\phi'}{\partial p}\right)\right] - \frac{\partial\omega}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{pQ}{c_p\gamma}\right) \tag{29}$$

ここで、式 (29) の第3項に、質量保存則 (4) を適用すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p^2}{\gamma R}\cdot\frac{\partial\phi'}{\partial p}\right)\right] + \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial v\cos\theta}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{p^2}{\gamma R}\mathbf{V}\cdot\nabla\frac{\partial\phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{R}\cdot\frac{\partial\phi'}{\partial p}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{pQ}{c_p\gamma}\right) \tag{30}$$

以上のように、熱力学第一法則の式 (3) から、気温 T と比容 α を消去し、摂動ジオポテンシャル ϕ' に関しての予報方程式 (30) を導くことができた。これで、3

つの従属変数 $(u,\, v,\, \phi')$ に対して、3 つの予報方程式 (1), (2), (30) が存在するので、解を一意的に求めることができる。

これら 3 つの予報方程式 (1), (2), (30) は、以下のような簡単な行列表示でまとめることができる (Tanaka, 1991)。

$$\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{LU} = \mathbf{N} + \mathbf{F} \tag{31}$$

式 (31) の各項の意味は以下のとおりである。
U : 従属変数ベクトル

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi' \end{pmatrix} \tag{32}$$

M : 線形演算子

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial p}\frac{p^2}{\gamma R}\frac{\partial}{\partial p} \end{pmatrix} \tag{33}$$

L : 線形演算子

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega\sin\theta & \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} \\ 2\Omega\sin\theta & 0 & \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} & \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial()\cos\theta}{\partial\theta} & 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

N : 非線形項からなるベクトル

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\mathbf{V}\cdot\nabla u - \omega\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan\theta}{a}uv \\ -\mathbf{V}\cdot\nabla v - \omega\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan\theta}{a}uu \\ \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{p^2}{\gamma R}\mathbf{V}\cdot\nabla\frac{\partial\phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{R}\frac{\partial\phi'}{\partial p}\right)\right] \end{pmatrix} \tag{35}$$

F : 外部強制項からなるベクトル

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_u \\ F_v \\ \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{pQ}{c_p\gamma}\right) \end{pmatrix} \tag{36}$$

モデルの基礎方程式系は式 (31) のようなベクトル方程式で構成されていて、時間変化項に含まれる従属変数ベクトル **U** を、他の 3 つの項（線形項 : **LU**、非線形項 : **N**、外部強制項 : **F**）のバランスから予測するようなモデルであるといえる。

3.2　線形方程式と変数分離

プリミティブ方程式系 (31) は非線形連立編微分方程式であるが、はじめに、静止大気を基本場に選び、そこに微小擾乱が重なっているものとして方程式を摂動法により線形化し ($\mathbf{N} = 0$)、さらに、摩擦・非断熱加熱項の外部強制項がないとする ($\mathbf{F} = 0$)。このとき、線形微分方程式は以下のようになる。

$$\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L}\mathbf{U} = 0 \tag{37}$$

ここで、変数ベクトルを $\mathbf{U} = G_m(p)\mathbf{U}_m(\lambda, \theta, t)$ のように鉛直方向のみに依存した関数 $G_m(p)$ と水平方向と時間に依存した変数 $\mathbf{U}_m(\lambda, \theta, t)$ に変数分離して、式 (37) に代入すると、

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial p}\frac{p^2}{\gamma R}\frac{\partial}{\partial p} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}u_m(\theta,\ \lambda,\ t)G_m(p) \\ \frac{\partial}{\partial t}v_m(\theta,\ \lambda,\ t)G_m(p) \\ \frac{\partial}{\partial t}\phi'_m(\theta,\ \lambda,\ t)G_m(p) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega\sin\theta & \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} \\ 2\Omega\sin\theta & 0 & \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} & \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial()\cos\theta}{\partial\theta} & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_m(\theta,\ \lambda,\ t)G_m(p) \\ v_m(\theta,\ \lambda,\ t)G_m(p) \\ \phi'_m(\theta,\ \lambda,\ t)G_m(p) \end{pmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{38}$$

＜第一成分＞

$$\frac{\partial}{\partial t}u_m G_m(p) - 2\Omega\sin\theta\cdot v_m G_m(p) + \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\phi'_m G_m(p) = 0$$

$$\therefore\quad \frac{\partial u_m}{\partial t} - 2\Omega\sin\theta\cdot v_m + \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial\phi'_m}{\partial\lambda} = 0 \tag{39}$$

＜第二成分＞

$$\frac{\partial}{\partial t}v_m G_m(p) + 2\Omega\sin\theta\cdot u_m G_m(p) + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}\phi'_m G_m(p) = 0$$

$$\therefore\quad \frac{\partial v_m}{\partial t} + 2\Omega\sin\theta\cdot u_m + \frac{1}{a}\frac{\partial\phi'_m}{\partial\theta} = 0 \tag{40}$$

＜第三成分＞

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p^2}{\gamma R}\frac{\partial}{\partial p}\phi'_m G_m(p)\right)\right]+\frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}u_m G_m(p)+\frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}v_m G_m(p)\cos\theta=0$$

$$-\frac{\partial\phi'_m}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p^2}{\gamma R}\frac{\partial}{\partial p}G_m(p)\right)\right]+\frac{G_m(p)}{a\cos\theta}\frac{\partial u_m}{\partial\lambda}+\frac{G_m(p)}{a\cos\theta}\frac{\partial v_m\cos\theta}{\partial\theta}=0$$

両辺を $G_m(p)$ 、 $\dfrac{\partial\phi'_m}{\partial t}$ で割って、

$$-\frac{1}{G_m(p)}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p^2}{\gamma R}\frac{\partial}{\partial p}G_m(p)\right)+\frac{1}{\frac{\partial\phi'_m}{\partial t}}\left(\frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial u_m}{\partial\lambda}+\frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial v_m\cos\theta}{\partial\theta}\right)=0$$

$$\underbrace{-\frac{1}{G_m(p)}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p^2}{\gamma R}\frac{\partial}{\partial p}G_m(p)\right)}_{p\text{ のみの関数}}=\underbrace{-\frac{1}{\frac{\partial\phi'_m}{\partial t}}\left(\frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial u_m}{\partial\lambda}+\frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial v_m\cos\theta}{\partial\theta}\right)}_{\theta,\,\lambda,\,t\text{ の関数}} \tag{41}$$

式 (41) の左辺は p のみの関数、右辺は θ, λ, t の関数である。よって、式 (41) が成り立つのは、両辺が定数のときのみに限られる。

そこで、等価深度 h_m (equivalent height) を用いて、

$$-\frac{1}{G_m(p)}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p^2}{\gamma R}\frac{\partial}{\partial p}G_m(p)\right)=\frac{1}{gh_m} \tag{42}$$

とすると、

$$\frac{1}{gh_m}+\frac{1}{\frac{\partial\phi'_m}{\partial t}}\left(\frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial u_m}{\partial\lambda}+\frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial v_m\cos\theta}{\partial\theta}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{\partial\phi'_m}{\partial t}+gh_m\left(\frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial u_m}{\partial\lambda}+\frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial v_m\cos\theta}{\partial\theta}\right)=0 \tag{43}$$

このように、水平方向と鉛直方向に変数分離することで、線形プリミティブ方程式系から鉛直構造方程式 (42) と水平構造方程式 (39)、(40)、(43) を導くことができる。鉛直構造方程式の解は鉛直構造関数、水平構造方程式の解は水平構造関数という。以下、その詳細について説明する。

3.3　鉛直構造関数

鉛直構造方程式 (42) を解くには上下の境界条件が必要であるが、それらは以下で与えられる。

$$(u,\, v,\, w) = 0, \quad at \quad p = p_s, \quad and \quad \frac{1}{p_s}\int_0^{p_s} K + A\, dp < \infty \tag{44}$$

ここで、$w = dz/dt$ であり下端で風がなく、$K + A$ は運動エネルギーと有効位置エネルギーの和であり、変数の 2 次の量の積分が有限という特徴が上端の境界条件となる。ただし、$p = 0$ の極限は特異点となるため、有限の高度（例えば $p = 0.1$ hPa) で $\omega = 0$ とすることも可能である。これにより、鉛直構造方程式 (42) は Sturm-Liouville タイプの境界値問題となり、有限要素法、あるいはガラーキン法 (Galerkin method) により解くことができる（Tanaka, 1985、図参照）。その固有値は実数、固有解 $G_m(p)$ は以下の内積の下で正規直交系をなす。

$$< G_m(p),\, G_n(p) >= \frac{1}{p_s}\int_0^{p_s} G_m(p)G_n(p)\, dp = \delta_{mn} \tag{45}$$

ここで、添字 m, n は異なる固有ベクトルを意味し、 δ_{mn} はクロネッカーのデルタ、 p_s は平均地表気圧を示す。

このような鉛直構造関数 $G_m(p)$ の正規直交性を利用することで、気圧 p の任意の関数 $f(p)$ に関して、次の鉛直変換 (vertical transform) を導くことができる。

$$\begin{aligned} f(p) &= \sum_{m=0}^{\infty} f_m G_m(p) \qquad (46)\\ &= f_0G_0(p) + f_1G_1(p) + \cdots + f_mG_m(p) + \cdots \end{aligned}$$

ここで、 f_m は第 m 鉛直モードの鉛直変換係数である。

両辺に $G_m(p)$ をかけて、 p について 0 から p_s まで積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{p_s} f(p)G_m(p)\, dp = \int_0^{p_s} (f_0G_0(p)G_m(p) + f_1G_1(p)G_m(p) + \\ \cdots + f_mG_m(p)G_m(p) + \cdots)\, dp \end{aligned} \tag{47}$$

$$\frac{1}{p_s}\int_0^{p_s} f(p)G_m(p)\, dp = f_m \cdot \underbrace{\frac{1}{p_s}\int_0^{p_s} G_m(p)G_m(p)\, dp}_{1} \tag{48}$$

よって、

$$f_m = \frac{1}{p_s}\int_0^{p_s} f(p)G_m(p)\,dp \tag{49}$$

この鉛直変換を用いて $\mathbf{U}$ を展開すると、

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} &= \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi' \end{pmatrix} \qquad : \ \mathbf{U}\text{ は }\theta,\,\lambda,\,p,\,t\text{ の関数} && (50)\\
&= \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \phi'_0 \end{pmatrix} G_0(p) + \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \phi'_1 \end{pmatrix} G_1(p) + \cdots + \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ \phi'_m \end{pmatrix} G_m(p) + \cdots && (51)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ \phi'_m \end{pmatrix} G_m(p) && (52)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{U}_m G_m(p) \qquad : \ \mathbf{U}_m\text{ は }\theta,\,\lambda,\,t\text{ の関数} && (53)
\end{aligned}$$

ここで、展開係数は以下で得られる。

$$\mathbf{U}_m = <\mathbf{U},\,G_m(p)> = \frac{1}{p_s}\int_0^{p_s} \mathbf{U}\,G_m(p)\,dp \tag{54}$$

また、添字 m は鉛直モード (vertical mode number) を意味する。

- $m \geq 1$: 傾圧モード（内部モード） ⋯ 第 m モードは鉛直方向に m 個の節をもつ
- $m = 0$: 順圧モード（外部モード） ⋯ 鉛直方向に節をもたず、鉛直方向には値がほとんど変化しない（鉛直平均場）

本研究で使用した順圧スペクトルモデルは、鉛直モード $m = 0$ の順圧モードだけを考慮したモデルであり、現実大気を鉛直方向に平均した大気特性をみるモデルである。また、式 (23) 中の静的安定度パラメータ γ は、1978 年 12 月から 1979

年 11 月までの、第 1 回 GARP (Global Atmospheric Research Program) 全球実験 (First GARP Global Experiment, FGGE) 期間中の平均気温データをもとに算出した。求めた順圧モードの等価深度 h_0 は、 $h_0 = 9728.4\mathrm{m}$ である。

3.4　水平構造関数

鉛直方向に変数分離したあとの第 m モードの時間・水平方向に関する方程式である式 (39)、(40) および (43) は行列表示で、

$$\mathbf{M}_m \frac{\partial \mathbf{U}_m}{\partial t} + \mathbf{L}\mathbf{U}_m = 0 \tag{55}$$

と書ける。ここで、

$$\mathbf{M}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{gh_m} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U}_m = \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ \phi'_m \end{pmatrix} \tag{56}$$

である。

また、従属変数 $\mathbf{U}_m$ と方程式系全体に次元をもたせるために、以下のようなスケール行列 $\mathbf{X}_m$ と $\mathbf{Y}_m$ を導入する。

$$\mathbf{X}_m = \begin{pmatrix} \sqrt{gh_m} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{gh_m} & 0 \\ 0 & 0 & gh_m \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Y}_m = \begin{pmatrix} 2\Omega\sqrt{gh_m} & 0 & 0 \\ 0 & 2\Omega\sqrt{gh_m} & 0 \\ 0 & 0 & 2\Omega \end{pmatrix} \tag{57}$$

これらを用いて式 (55) を変形すると、

$$(\mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{M}_m\mathbf{X}_m)\mathbf{M}_m\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{X}_m^{-1}\mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{L}\mathbf{X}_m)(\mathbf{X}_m^{-1}\mathbf{U}_m) = 0 \tag{58}$$

ここで、

$$\mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{M}_m\mathbf{X}_m = \frac{1}{2\Omega}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{59}$$

なので、無次元時間 $\tau(\equiv 2\Omega t)$ を導入することで、

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{X}_m^{-1}\mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{L}\mathbf{X}_m)(\mathbf{X}_m^{-1}\mathbf{U}_m) = 0 \tag{60}$$

となる。

式 (60) は、水平構造方程式、またはラプラス潮汐方程式と呼ばれる。この解は、水平構造関数、またはハフ調和関数と呼ばれ $\mathbf{H}_{nlm}$ と表す。ここで、 $\mathbf{H}_{nlm}$ は、第 m 鉛直モードに相当する水平ノーマルモード（つまり自由振動）を表し、添字の n は東西波数 (zanal wave number) 、 l は南北波数 (meridional wave number) を

意味する。式 (60) の解 $\mathbf{H}_{nlm}$ は、振動モード nlm に対応する無次元化固有振動数 σ_{nlm} とともに、固有値問題を解くことで求められる。

Kasahara and Puri (1981) によると、式 (60) の解 $\mathbf{U}_m$ は、 $\mathbf{H}_{nlm}$ を用いることで、次のように変数分離することができる。

$$\mathbf{U}_m(\lambda,\,\theta,\,\tau) = \mathbf{X}_m\mathbf{H}_{nlm}(\lambda,\,\theta)\mathrm{exp}(-i\sigma_{nlm}\tau) \tag{61}$$

この式を水平構造方程式 (60) に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\mathbf{X}_m^{-1}(\mathbf{X}_m\mathbf{H}_{nlm}\mathrm{exp}(-i\sigma_{nlm}\tau))\right]+(\mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{L}\mathbf{X}_m)(\mathbf{X}_m^{-1}(\mathbf{X}_m\mathbf{H}_{nlm}\mathrm{exp}(-i\sigma_{nlm}\tau))) = 0$$

$$\therefore\quad -i\sigma_{nlm}\mathbf{H}_{nlm}(\lambda,\,\theta) + (\mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{L}\mathbf{X}_m)\mathbf{H}_{nlm}(\lambda,\,\theta) = 0 \tag{62}$$

ここで、水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda,\,\theta)$ は、南北構造を記述するハフベクトル関数 $\mathbf{\Theta}_{nlm}$ と、東西波動を表す複素三角関数 $\exp(in\lambda)$ とのテンソル積として、以下のように表される。

$$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda,\,\theta) = \mathbf{\Theta}_{nlm}(\theta)\exp(in\lambda) \tag{63}$$

$$= \begin{pmatrix} U_{nlm}(\theta) \\ -iV_{nlm}(\theta) \\ Z_{nlm}(\theta) \end{pmatrix}\exp(in\lambda) \tag{64}$$

水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}$ は次の直交条件を満たす。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\mathbf{H}_{nlm}\cdot\mathbf{H}^*_{n'l'm}\cos\theta\,d\lambda d\theta = \delta_{nn'}\delta_{ll'} \tag{65}$$

ここで、アスタリスクは複素共役を意味し、また、 nlm と $n'l'm$ は異なるモードを意味する。この関係から、次のフーリエハフ変換 (Fourier-Hough transform) が導かれる。

第 m 鉛直モードに相当する物理空間における任意のベクトル関数を $\mathbf{W}_m(\lambda,\,\theta,\,\tau)$ とすると、

$$\mathbf{W}_m(\lambda,\,\theta,\,\tau) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{nlm}(\tau)\mathbf{H}_{nlm}(\lambda,\,\theta) \tag{66}$$

と書くことができる。ここで、 w_{nlm} は、フーリエハフ変換係数である。

式 (66) の両辺に $\mathbf{H}^*_{nlm}(\lambda,\,\theta)$ をかけ、以下で定義される内積

$$\langle\mathbf{W}_m,\,\mathbf{H}_{nlm}\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(\mathbf{W}_m\cdot\mathbf{H}^*_{nlm})\cos\theta\,d\lambda d\theta \tag{67}$$

を作用させることで、

$$w_{nlm}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\pi} \mathbf{W}_m(\lambda,\, \theta,\, \tau) \cdot \mathbf{H}^{*}_{nlm}(\lambda,\, \theta) \cos\theta \, d\lambda d\theta \qquad (68)$$

を導くことができる。

式 (60) に、このフーリエハフ変換を施すと、

$$\frac{d}{d\tau} w_{nlm}(\tau) + i\sigma_{nlm} w_{nlm}(\tau) = 0 \qquad (69)$$

となる。

この式によると、固有振動数 σ_{nlm} は実数なので、左辺第 2 項目の線形項は波動の位相のみを表現し、波の振幅は変化させないことを示している。

3.5　3次元ノーマルモード関数展開

ここでは、鉛直構造関数 $G_m(p)$ と水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda,\theta)$ を結合させ、静止大気を基本状態とした3次元ノーマルモード関数 $\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda,\theta,p)$ を構成し、3次元ノーマルモード関数展開を用いて、プリミティブ方程式 (31) の3次元スペクトル表記を導く。

$\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda,\theta,p)$ は、 $G_m(p)$ と $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda,\theta)$ とのテンソル積で定義される。

$$
\begin{aligned}
\Pi_{nlm}(\lambda,\theta,p) &= G_m(p)\mathbf{H}_{nlm}(\lambda,\theta) &(70)\\
&= G_m(p)\mathbf{\Theta}_{nlm}(\theta)\exp(in\lambda) &(71)
\end{aligned}
$$

この3次元ノーマルモード関数は、以下で定義される内積のもとで直交条件を満たすことが示されている (Tanaka and Sun, 1990) 。

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{\Pi}_{nlm}, \mathbf{\Pi}_{n'l'm'} \rangle &= \frac{1}{2\pi p_s}\int_0^{p_s}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \mathbf{\Pi}_{nlm}\mathbf{\Pi}^*_{n'l'm'}\cos\theta\, d\lambda d\theta dp &(72)\\
&= \delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'} &(73)
\end{aligned}
$$

この3次元ノーマルモード関数の直交性を利用することで、式 (31) におけるベクトル $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$ に関して、次のように波数展開することができる (Tanaka and Kung, 1989) 。

$$
\mathbf{U}(\lambda,\theta,p,\tau) = \sum_{n=-N}^{N}\sum_{l=0}^{L}\sum_{m=0}^{M} w_{nlm}(\tau)\mathbf{X}_m\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda,\theta,p) \tag{74}
$$

$$
\mathbf{F}(\lambda,\theta,p,\tau) = \sum_{n=-N}^{N}\sum_{l=0}^{L}\sum_{m=0}^{M} f_{nlm}(\tau)\mathbf{Y}_m\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda,\theta,p) \tag{75}
$$

ここで、 $w_{nlm}(\tau)$, $f_{nlm}(\tau)$ はそれぞれ、従属変数ベクトル $\mathbf{U}$ と、外部強制項ベクトル $\mathbf{F}$ に関しての展開係数（3次元ノーマルモード展開係数）であり、時間 τ のみの関数である。添字の nlm は、順に東西波数 n 、南北波数 l 、鉛直波数 m を表しており、それぞれ、波数 N, L, M で切断されている。

式 (31) と $\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda,\theta,p)$ の内積をとると、

$$
\left\langle \mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{LU} - \mathbf{N} - \mathbf{F},\, \mathbf{Y}_m^{-1}\Pi_{nlm} \right\rangle = 0 \tag{76}
$$

となる。
この式に、式 (74), (75) の関係式を用いると、

$$
\begin{aligned}
& \left\langle \mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{LU} - \mathbf{N} - \mathbf{F},\, \mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{\Pi}_{nlm} \right\rangle \\
= \; & \left\langle \mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t},\, \mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{\Pi}_{nlm} \right\rangle + \left\langle \mathbf{LU},\, \mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{\Pi}_{nlm} \right\rangle \\
& \qquad - \left\langle \mathbf{N},\, \mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{\Pi}_{nlm} \right\rangle - \left\langle \mathbf{F},\, \mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{\Pi}_{nlm} \right\rangle = 0
\end{aligned}
\tag{77}
$$

よって、

$$
\frac{d}{d\tau} w_{nlm} + i\sigma_{nlm} w_{nlm} = -i \sum_{n'l'm'}^{K} \sum_{n''l''m''}^{K} r_{nlmn'l'm'n''l''m''} w_{n'l'm'} w_{n''l''m''} + f_{nlm}
$$

となる。
ここで、

$$
\begin{cases}
nlm & \longrightarrow & i \\
n'l'm' & \longrightarrow & j \\
n''l''m'' & \longrightarrow & k
\end{cases}
$$

とすると、

$$
\frac{d}{d\tau} w_i + i\sigma_i w_i = -i \sum_{j=1}^{K} \sum_{k=1}^{K} r_{ijk} w_j w_k + f_i, \quad i = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\, K \tag{78}
$$

と書くことができる。

以上のように、外部強制項を伴った連立常微分方程式として、スペクトル表示によるプリミティブ方程式を記述することができる。
なお、式 (78) 中の記号の意味は、以下のとおりである。

- K : 全波数 $(= (2N+1)(L+1)(M+1))$
- σ_i : 静止大気を基本状態とした水平構造方程式（ラプラス潮汐方程式）(60) の固有値問題より得られる無次元の固有振動数であり、潮汐振動数と呼ばれる
- r_{ijk} : 非線形の波 - 波相互作用 (wave-wave interaction) あるいは、帯状 - 波相互作用 (zonal-wave interaction) に関しての相互作用係数 (interaction coefficients) であり、すべての波数間の相互作用を示した係数であり、実数である

以上により、順圧成分と傾圧成分からなる鉛直構造関数 $G_m(p)$ 、ロスビー波と重力波モードからなる水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ の両方を用いることで、プリミティブ方程式系をスペクトル表示 (78) で表すことができる。

4　使用データ

本研究で使用したデータは、NCEP (National Center for Environmental Prediction) /NCAR (National Center for Atmospheric Research) の全球解析データであり、詳細は以下のとおりである。

- 水平グリッド間隔：$2.5^\circ \times 2.5^\circ$
- 鉛直グリッド間隔：1000, 925, 850, 700, 600, 500, 400, 300, 250, 200, 150, 100, 70, 50, 30, 20, 10 hPa の 17 層
- 気象要素：水平風 $\mathbf{V} = (u, v)$ 、ジオポテンシャル ϕ
- 期間：1950 年 1 月 1 日〜2007 年 12 月 31 日
- 時間：0000Z, 0600Z, 1200Z, 1800Z

5　解析方法

5.1　大気の順圧成分の抽出

本研究で用いた順圧スペクトルモデル (Tanaka, 1998) は、大気の順圧成分のみを取り出したモデルである。大気の順圧成分は、式 (78) において、プリミティブ方程式 (31) と鉛直モード $m = 0$ の 3 次元ノーマルモード関数の内積をとることで抽出できる。

$$\left\langle \mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L}\mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F},\ \mathbf{Y}_0^{-1}\mathbf{\Pi}_{nl0} \right\rangle = 0 \tag{79}$$

これをスペクトル表示すると、

$$\frac{d}{d\tau}w_i + i\sigma_i w_i = -i\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} r_{ijk}w_j w_k + f_i, \quad i = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\, K \tag{80}$$

となる。ここで、 K はモデルにおける全波数を意味する。本研究では、東西波数は $n = 0, 1, \ldots, 20$ で、南北波数は $l = 0, 1, \ldots, 20$ の赤道対称モードのみで切断し、方程式系を構成する。

式 (79) において、プリミティブ方程式の線形項は、鉛直構造関数 G_m の直交性により順圧成分のみが残る。ここで、非線形項 $\mathbf{N}$ の ω を含む項は、便宜上外部強制項 $\mathbf{F}$ に含める。また、順圧－傾圧相互作用も $\mathbf{F}$ に含まれる。よって、順圧成分のプリミティブ方程式 (79) を成分表示すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega\sin\theta\cdot v + \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial \phi'}{\partial \lambda} = -\mathbf{V}\cdot\nabla u + \frac{\tan\theta}{a}uv + F_u \tag{81}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega\sin\theta\cdot u + \frac{1}{a}\frac{\partial \phi'}{\partial \theta} = -\mathbf{V}\cdot\nabla v - \frac{\tan\theta}{a}uu + F_v \tag{82}$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} = -\mathbf{V}\cdot\nabla\phi' - gh_0\nabla\cdot\mathbf{V} + F_z \tag{83}$$

となる。ただし、右辺の発散項はスケーリングにより線形化した。以上より、大気の順圧成分に関するプリミティブ方程式として、式 (81), (82), (83) が得られた。

5.2　順圧 S-Model

式 (80) を時間積分することで、ある時刻の従属変数 w_i が求まることになるが、式 (80) 中の物理過程としての外力 f_i の定式化は容易ではない。なお、任意の初期

値から診断的に得たパーフェクトな外力を与え続けて時間積分した場合、初期値から 100 日以上も現実大気とまったく同じ変動をすることが Tanaka and Nohara (2001) で示されているので、外力 f_i を、従属変数 w_i と時間 τ の関数としていかに精度よくパラメタライズできるかがカギとなる。

これまでの同様のモデルでは、外力 f_i として、地形、傾圧不安定、粘性摩擦、地表摩擦を定式化してブロッキングの数値実験などを行い、観測されるようなブロッキングのライフサイクルの再現に成功している（Tanaka 1991, 1998）。外力を個々の物理過程の寄せ集めで構築したこのモデルを順圧 B-Model をいう。順圧 B-Model は、内在する力学不安定が弱いためカオス性が極めて弱く、初期値に多少の誤差を加えても同じブロッキングが再現されるという特徴がある (Tanaka and Nohara, 2001) 。しかし、地形効果の導入だけでは、気候値の再現性が充分とは言えず、定常プラネタリー波のトラフやリッジの再現にバイアスが残った。順圧大気の気候値を改善するには、海陸の熱的コントラストによる強制のパラメタリゼーションが必要となった。しかし、海陸の熱的コントラストは大気の傾圧場を強制し、それが力学的な相互作用でめぐりめぐって順圧場に影響するため、その定式化は容易ではない。

そこで本研究では、定式化された外力項の代わりに、観測データから統計的に算出した最適外力を用いるモデル (Tanaka and Nohara, 2001) を基に、外力 f_i を状態変数 w_i を用いて以下のように重回帰した。

$$f_i = \tilde{f}_i + \mathbf{A}_{ij} w_j + \mathbf{B}_{ij} w_j^* + \epsilon_i \tag{84}$$

ここで、 $\tilde{f}_i$ は f_i の気候値で時間のみの周期関数、また、アスタリスクは複素共役であり、残差 ϵ_i のノルムを最小化するように、未知のシステム行列 $\mathbf{A}_{ij}, \mathbf{B}_{ij}$ を観測データから、以下の回帰式で求めた。

$$\begin{pmatrix} A_R + B_R & -A_I + B_I \\ A_I + B_I & A_R - B_R \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} f'_R \\ f'_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^{\top}} \; \overline{\begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^{\top}}^{-1} \tag{85}$$

ここで、$\overline{(\quad)}$ は時間平均、 f'_i は f_i のアノマリー、 $(\quad)^{\top}$ は転置行列、$(\quad)^{-1}$ は逆行列であり、状態変数、外力、システム行列をそれぞれ実部と虚部に分けて実空間で計算した。ただし、東西波数 0 の虚部を除く必要がある。右辺を計算し、左辺の成分を解くことで、残差 ϵ_i のノルムを最小化するようなシステム行列 $\mathbf{A}_{ij}, \mathbf{B}_{ij}$ が確定する。

観測データとして、本研究では1950年〜1999年の50年間の冬季のNCEP/NCAR再解析データを用いた。1日4回の観測データから状態変数 w_i を求め、日変化を除去してからモデルのタイムステップに時間内挿し、式(80)から順圧大気の外力 f_i を診断的に算出する。力学過程の計算精度は1%以下の誤差の範囲で表現されていることから、残差として得られた外力 f_i の値は充分に意味のある値と考えられる。こうして得られた50年分の外力 f_i のデータから、気候値 $\tilde{f}_i$ とアノマリ f_i' を計算する。このアノマリ f_i' を状態変数 w_i で回帰することで、式(84)のようにシステム行列 $\mathbf{A}_{ij}, \mathbf{B}_{ij}$ を順次決定することができる。このように、観測データからモデルの最適外力を統計的 (Statistical) に求めていることから、式(84)で表される外力 f_i を用いるモデルを順圧 S-Model と呼ぶ。

順圧 S-Model の詳細についてはTanaka and Nohara (2001) に書かれているが、現実大気の順圧成分の予報を行った結果、このモデルは月平均で約8日の予報能力を持つことが示され、長周期変動の力学的解明に充分使える順圧大気大循環モデルであるということが言えた。

ところがこのモデルでは、統計的処理のためか、予報誤差の最大要因となる傾圧不安定波の増幅が弱いという特徴があり、このままの順圧 S-Model では AO の再現はできなかった (岡田、2003)。そこで本研究では、順圧 B-Model のように、傾圧不安定などの物理過程を再導入し、以下のように外力 f_i をパラメタライズした。

$$f_i = \tilde{f}_i + \mathbf{A}_{ij}w_j + \mathbf{B}_{ij}w_j^* + (BC)_{ij}w_i + (DF)_{ij}w_i + (DZ)_{ij}w_j + (DE)_{ij}w_i \quad (86)$$

上式の右辺第三項以下は次のとおりである。

$$\begin{cases} (BC)_{ij}w_i & : \text{傾圧不安定} \\ (DF)_{ij}w_i & : \text{粘性摩擦} \\ (DZ)_{ij}w_j & : \text{帯状地表摩擦} \\ (DE)_{ij}w_i & : \text{エクマン摩擦} \end{cases}$$

以上のように、外力 f_i を状態変数 w の関数として表現することができた。予報の各ステップにおいて、w に応じて f_i が決定し、次のステップの w_i を求めることができる。これを繰り返すことで、初期時刻からある時間後の w_i を求めることができる。

5.3　アンサンブル予報

式 (86) のように外力 f_i をパラメタライズした結果、モデルの長期的（50 年）なバイアス（系統的誤差）は取り除かれたものの、このままではモデルによる短期的（1ヶ月）なバイアスが生じることが考えられる。そこで本研究では、式 (86) で求められた f_i をそのまま用いたもの（コントロールラン）と、モデルバイアスを考慮したもの（摂動ラン）によるアンサンブル予報を行った。

以下、モデルバイアスを考慮したアンサンブル予報について述べる。初期時刻から S-Model を 6 時間積分し、その予報値を w_f 、また、初期時刻から 6 時間後の真の値（本研究では解析値を代用）を w_a とすると、予報値と真の値の誤差 Δw は、

$$\Delta w = w_f - w_a \tag{87}$$

と書ける。

よって、単位時間あたりのモデル誤差 ϵ は、

$$\epsilon = \frac{\Delta w}{\Delta t} \tag{88}$$

となる。なお、本研究では $\Delta t = 6$ である。

この ϵ を モデルが算出する外力 f から差し引くことによって、順圧 P-Model に対応するようなモデルバイアスの修正が可能となる。

$$f' = f - \epsilon \tag{89}$$

ここで、 f' はバイアス修正後の外力を表す。この f' を使って時間積分を行うことにより、モデルバイアスを考慮した w を求めることができる。したがって、各ステップごとに正確な ϵ が手に入れば、正確な予報ができることになる。

しかし、このようにして求めた ϵ は初期値によって変化するうえに、将来の真の値は分からないため、正確な ϵ を事前に知ることはできない。そこで本研究では、ϵ として、初期値直前のある一定期間の平均値 $\bar{\epsilon}$ を用い、それを各予報ステップにおいて、

$$f' = f - \bar{\epsilon} \tag{90}$$

のように f から差し引いた。平均する期間を変えることで、式 (90) において異なる f' の値が手に入る。これらを用いることで、アンサンブル予報を構築した。

本研究で行ったアンサンブル予報の手順をまとめると、以下のようになる。

1. 初期値直前 60 日間の ϵ の値を求める（1 日につき 4 回、計 240 個の ϵ が手に入る）。具体的には、ある時刻の解析値から順圧 S-Model を使って 6 時間予報をし、単位時間あたりの誤差 ϵ を求める。これを繰り返すことで、計 240 個の ϵ が求まる。

2. 求めた ϵ を使って、初期値直前のある一定期間での平均値 $\bar{\epsilon}$ を求める。平均する期間を変えることで、アンサンブルメンバー数を増やした。

3. その $\bar{\epsilon}$ を、各予報ステップにおいて式 (90) のように外力に加え、バイアス補正をした上で w の予報値を求める。

5.4 状態空間モデルによる時系列の解析

時系列解析で用いられるさまざまなモデルを状態空間モデルによって統一的に取り扱うことができる。時系列解析の多くの問題が、状態空間モデルの状態推定の問題として定式化できる。本節では、状態推定を逐次的に効率よく行うためのカルマンフィルタおよび平滑化のアルゴリズムを示し、時系列の長期予測、補間およびパラメータ推定への応用を示す。

5.4.1 状態空間モデル

y_n を l 変量の時系列とする。このとき、この時系列を表現する次のようなモデルを「状態空間モデル」と呼ぶ。

$$x_n = F_n x_{n-1} + G_n v_n \tag{91}$$

$$y_n = H_n x_n + w_n \tag{92}$$

ここで、x_n は直接には観測できない k 次元のベクトルで、「状態」と呼ばれる。v_n はシステムノイズあるいは状態ノイズと呼ばれ、平均ベクトル 0、分散共分散行列 Q_n に従う m 次元の正規白色雑音である。一方、w_n は観測ノイズと呼ばれ、平均ベクトル 0、分散共分散行列 R_n に従う l 次元の正規白色雑音とする。F_n, G_n, H_n はそれぞれ、$k \times k,\ k \times m,\ l \times k$ の行列である。時系列解析で用いられる線形モデルの多くはこの状態空間モデルの形で表現し、統一的に取り扱うことができる。

状態空間モデルは次のように 2 通りの解釈ができる。まず、式 (92) の観測モデルを時系列 y_n が観測される仕組みを表現する回帰モデルと考えると、状態 x_n はその回帰係数となる。このとき、式 (91) のシステムモデルは、その回帰係数の時間的な変化の様子を表現するモデルとなる。一方、状態ベクトル x_n を推定すべき信号と考えると、システムモデルは信号の発生メカニズムを表すモデル、観測モデルはその信号を実際に観測するとき信号が変換され、ノイズが加わる様子を表している。

5.4.2 カルマンフィルタによる状態の推定

状態空間モデルに関連して重要な問題は、時系列 y_n の観測値に基づいて、状態 x_n の推定を行うことである。以下の節で示すように、時系列の予測、補間などが

この状態推定を利用することによって統一的に実現できる。

以下では、観測値 $Y_j = \{y_1, \cdots, y_j\}$ に基づいて、時刻 n における状態 x_n の推定を行う問題を考えることにする。とくに、$j < n$ の場合は、観測区間より先の将来の状態を推定する問題で、「予測」と呼ばれる。$j = n$ の場合は、観測区間の最終時点すなわち現在の状態を推定する問題で、「フィルタ」と呼ばれる。また、$j > n$ の場合は、現在までの観測値に基づいて過去の状態の推定を行う問題で、「平滑化」と呼ばれる。

これらの状態推定の問題に答えるためには、観測値 Y_j が与えられた下での状態 x_n の条件付き分布 $p(x_n|Y_j)$ を求めればよい。ところが、式 (91)、式 (92) の状態空間モデルは線形モデルであり、しかも v_n, w_n および x_0 がすべて正規分布に従うので、これらの条件付き分布は正規分布となる。したがって、状態空間モデルの状態推定の問題を考えるためには、条件付き分布を規定する平均ベクトルと分散共分散行列だけを求めればよい。一般に、観測値 $\{y_1, \cdots, y_j\}$ が与えられた下での状態 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ の条件付き同時分布を求めるためには莫大な計算量を要する。ところが状態空間モデルに対しては、逐次的な計算アルゴリズムによって、状態 x_n の条件付き周辺分布をきわめて効率的に計算できる。これが「カルマンフィルタ」と呼ばれるアルゴリズムである。

以下では、状態 x_n の条件付き平均と分散共分散行列を

$$\begin{aligned} x_{n|j} &\equiv E(x_n|Y_j) \\ V_{n|j} &\equiv E(x_n - x_{n|j})(x_n - x_{n|j})^t \end{aligned} \tag{93}$$

と表すことにする。ただし、カルマンフィルタで直接取り扱うのは、$j = n-1$ の場合（1 期先予測）と $j = n$ の場合（フィルタ）である。以下のアルゴリズムが示すように、1 期先予測とフィルタを交互に繰り返すことにより、これらを順次求めることができる。

＜1 期先予測＞

$$\begin{aligned} x_{n|n-1} &= F_n x_{n-1|n-1} \\ V_{n|n-1} &= F_n V_{n-1|n-1} F_n^t + G_n Q_n G_n^t \end{aligned} \tag{94}$$

＜フィルタ＞

$$\begin{aligned} K_n &= V_{n|n-1}H_n^t(H_nV_{n|n-1}H_n^t + R_n)^{-1} \\ x_{n|n} &= x_{n|n-1} + K_n(y_n - H_nx_{n|n-1}) \\ V_{n|n} &= (I - K_nH_n)V_{n|n-1} \end{aligned} \tag{95}$$

1 期先予測のアルゴリズムでは、x_n の予測値（平均）ベクトル $x_{n|n-1}$ は、x_{n-1} のフィルタ $x_{n-1|n-1}$ に推移行列 F_n を掛けるだけでよい。また、その分散共分散行列 $V_{n|n-1}$ は 2 項からなり、第 1 項は F_n による変換の影響、第 2 項はシステムノイズ v_n の影響を表す。

フィルタリングのアルゴリズムでは、まずカルマンゲインと呼ばれる K_n が求められる。また、$y_n - H_nx_{n|n-1}$ は y_n の予測誤差、$H_nV_{n|n-1}H_n^t + R_n$ はその分散共分散行列である。このとき、x_n のフィルタの平均ベクトルは、予測ベクトル $x_{n|n-1}$ と予測誤差にカルマンゲインを掛けたものの和として求められる。

5.4.3 平滑化のアルゴリズム

平滑化の問題は、時系列 $Y_N = \{y_1, \cdots, y_N\}$ が与えられたとき、途中の状態 x_n を推定する問題である。この平滑化に関しても、カルマンフィルタと同様に、「固定区間平滑化」と呼ばれるアルゴリズムがある。フィルタが時刻 n までの観測値だけを用いて x_n を推定しているのに対し、平滑化のアルゴリズムは得られているすべての観測値を用いて推定を行っている。したがって、平滑化を行えば、一般にフィルタよりも精度のよい状態推定が行えることになる。

＜固定区間平滑化＞

$$\begin{aligned} A_n &= V_{n|n}F_{n+1}^tV_{n+1|n}^{-1} \\ x_{n|N} &= x_{n|n} + A_n(x_{n+1|N} - x_{n+1|n}) \\ V_{n|N} &= V_{n|n} + A_n(V_{n+1|N} - V_{n+1|n})A_n^t \end{aligned} \tag{96}$$

5.4.4 状態の長期予測

カルマンフィルタのアルゴリズムは、直接的には 1 期先予測の方法だけを与えているが、これを繰り返すことにより長期予測も行うことができる。時系列 $Y_N =$

$\{y_1, \cdots, y_N\}$ に基づいて j 期先の状態 $x_{n+j} (j > 1)$ を推定する長期予測の問題を考えることにしよう。

まず、カルマンフィルタによって、x_{n+1} の 1 期先予測の平均 $x_{n+1|n}$ および分散共分散行列 $V_{n+1|n}$ が求められる。ここで、観測値 y_{n+1} は得られないことを考慮すると、形式的に $Y_{n+1} = Y_n$ が成り立つものとみなして計算を続ければよいことが分かる。この場合、明らかに $x_{n+1|n+1} = x_{n+1|n}, V_{n+1|n+1} = V_{n+1|n}$ が成り立つ。したがって、カルマンフィルタの $n+1$ 期に対する 1 期先予測アルゴリズムから、

$$\begin{aligned} x_{n+2|n} &= F_{n+2} x_{n+1|n} \\ V_{n+2|n} &= F_{n+2} V_{n+1|n} F_{n+2}^t + G_{n+2} Q_{n+2} G_{n+2}^t \end{aligned} \tag{97}$$

が得られる。これは、2 期先予測のためには、y_{n+1} に対するフィルタのアルゴリズムを省略し、予測のステップだけを実行すればよいことを示している。

一般に、Y_n に基づいて j 期先までの長期予測を行うためには、$Y_n = Y_{n+1} = \cdots = Y_{n+j}$ が成り立つことから、次のように予測のステップだけを k 回繰り返せばよいことが分かる。以上をまとめると、時刻 n までの観測値 Y_n に基づいて $x_{n+1}, \cdots, x_{n+j}$ を予測するためのアルゴリズムは次のようになる。

＜長期予測＞　$i = 1, \cdots, j$ について、

$$\begin{aligned} x_{n+i|n} &= F_{n+i} x_{n+i-1|n} \\ V_{n+i|n} &= F_{n+i} V_{n+i-1|n} F_{n+i}^t + G_{n+i} Q_{n+i} G_{n+i}^t \end{aligned} \tag{98}$$

5.4.5　時系列の予測

以上の方法で求めた状態 x_n の予測を用いて、時系列の予測が直ちに実現できる。すなわち、状態 x_n と時系列 y_n の関係が観測モデル (92) により与えられているので、Y_n が与えられたときの y_{n+j} の平均と分散共分散行列を $y_{n+j|n} \equiv \mathrm{E}(y_{n+j}|Y_n), d_{n+j|n} \equiv \mathrm{Cov}(y_{n+j}|Y_n)$ と表すことにすると、

$$\begin{aligned} y_{n+j|n} &= \mathrm{E}(H_{n+j} x_{n+j} + w_{n+j}|Y_n) \\ &= H_{n+j} x_{n+j|n} \end{aligned} \tag{99}$$

$$
\begin{aligned}
d_{n+j|n} &= \mathrm{Cov}(H_{n+j}x_{n+j} + w_{n+j}|Y_n) \\
&= H_{n+j}\mathrm{Cov}(x_{n+j}|Y_n)H_{n+j}^t + H_{n+j}\mathrm{Cov}(x_{n+j},\, w_{n+j}|Y_n) \\
&\qquad + \mathrm{Cov}(w_{n+j},\, x_{n+j}|Y_n)H_{n+j}^t + \mathrm{Cov}(w_{n+j}|Y_n) \\
&= H_{n+j}V_{n+j|n}H_{n+j}^t + R_{n+j}
\end{aligned}
\tag{100}
$$

が得られる。このように、時系列の観測値 Y_n に基づく y_{n+j} の予測分布は、平均 $y_{n+j|n}$、分散共分散行列 $d_{n+j|n}$ の正規分布となり、それらは式 (99), (100) により簡単に求められる。このとき、y_{n+j} の予測値は $y_{n+j|n}$、また、その標準偏差は $(d_{n+j|n})^{1/2}$ で与えられることになる。なお、時系列の 1 期先予測 $y_{n|n-1}$, $d_{n|n-1}$ はカルマンフィルタ (95) ですでに求められており、フィルタリングのアルゴリズムの中で利用されていることに注意しておく。

6　結果

6.1　時系列モデルによる AOI の予測実験

本節では、過去の AOI データのみを用いて将来の AOI が予測できるかどうかを調べた結果を示す。使用したモデルは、前述した「状態空間モデル」である。

図 4 は、2002 年の AOI データに状態空間モデルを適用したときの AOI の予報図である。図中の赤実線より右側の実線が予報を表し、太実線は平均値、細実線は $\pm\sigma$ の値である。また、丸印は実況値を表す。なお、モデルの次数は 5 である。これを見ると、予報の早い段階で AOI が一定値となってしまい、丸印で示された実況値のような変動がまったく予測できていない。

次に、図 5 は、先ほどの図 4 よりもモデルの次数を増やしたものであり、次数は 20 である。これを見ると、予報の初期段階においてわずかながら AOI が変動する様子が見てとれるが、予報期間後半においては先ほどと同様、一定値に収束してしまい、予報ができていない。

さらにモデルの次数を 50、100、250 と増やしていったものが図 6〜8 である。これらの図を見ると、モデルの次数が増えるにしたがって、AOI が変動する様子が予報期間後半になっても見られるようになる。特に、モデルの次数を 250 まで上げた図 8 では、日々の値は正確に予測できていないものの、AOI の傾向（一旦下がって上昇し、0 付近を遷移する）はある程度予測できている。

6.2 順圧 S-Model による AOI の予測実験

本節では、順圧 S-Model を用いて AOI の予測を行い、出力された予報を様々な角度から検証した結果を示す。

6.2.1 大気の順圧成分からみた北極振動

結果を示す前に、まずは大気の順圧成分からみた北極振動がどのようなものかを、日本における過去の寒冬年・暖冬年を例に述べてみたいと思う。

図 9 は、1977 年 1 月の月平均した順圧高度場とアノマリを描いたものである。図中のコンターは順圧高度、シェードはアノマリを示す。1976/77 年冬の日本列島は厳しい寒さとなり、1 月〜2 月を中心に著しい低温となった。各地域の気温（平年差）は、北日本：−2.1 ℃、東日本：−1.6 ℃、西日本：−1.9 ℃、南西諸島：−0.9 ℃と、全国的にみても厳しい冬であったことが分かる。ここ数十年をみても、1, 2 位を争うほどの寒冬であった。図 9 を見ると、北極域は正偏差、中緯度域は負偏差が分布し、きれいな「AO マイナス」となっている。特に北極域は平年に比べて 400 m 以上も高度が高くなっていることが分かる。この図が月平均したものであることを考えると、北極上空にほぼ毎日のように高気圧が居座っていたのがうかがえる。また、中緯度域に目を移すと、ヨーロッパから太平洋にかけて帯状に低気圧偏差が分布しており、日本列島も北日本を中心にその中に入っている。シベリアからアリューシャン列島付近にかけては閉じた等高度線で示される低気圧があり、この影響で日本付近の冬型の気圧配置が強まり、幾度となく寒波がもたらされたものと考えられる。

一方、図 10 は、1989 年 1 月の月平均した順圧高度場とアノマリを描いたものである。1988/89 年冬の日本は顕著な暖冬となり、1 月〜2 月を中心に著しい高温となった。各地域の気温（平年差）は、北日本 : +1.6 ℃、東日本 : +1.2 ℃、西日本 : +1.2 ℃、南西諸島：+0.5 ℃と、全国的にみても暖かな冬であったことが分かる。図 10 を見ると、図 9 とは対照的に北極域が負偏差、中緯度域が正偏差となっており、「AO プラス」がはっきりと見てとれる。北極域では平年に比べて 400 m 以上も高度が低くなっている場所があるのに対して、中緯度では高気圧偏差が強まり、日本も顕著な高気圧偏差の中に入っている。

6.2.2　1976/77 年冬の予測実験

ここでは、AOI が大きく負へ振れ、日本では顕著な寒冬となった 1976/77 年冬の事例について示す。

図 11 は、1976 年 7 月から 1977 年 3 月までの、順圧成分で定義した AOI の時間変化と、丸印で示した 1976 年 11 月 1 日 00Z を初期値を初期値とした、順圧 S-Model による 60 日予測の合成図である。図中の細実線は AOI の実況、破線はコントロールラン、点線は初期値直前のモデルバイアスを考慮した摂動ラン、そして、太実線は 8 メンバーのアンサンブル平均を示している。これを見ると、初期値直後の AOI の低下をどのメンバーとも予測できていない。また、予報では初期値から約 10 日後にピークをむかえ、その後は低下傾向となるが、実況ほど深く落ち込んでいないことが分かる。さらに、初期値直前のモデルバイアスを考慮したメンバーの成績は思わしくなく、この中ではコントロールランが最も精度よく予報できていた。

次に、初期値を 1976 年 11 月 6 日 00Z としたときの予報結果が図 12 である。なお、図の見方は図 11 と同じである。これを見ると、5 日前を初期値としたときと同じく、初期値直後の AOI の低下を予測できていない。また、モデルバイアスを考慮した予報もコントロールランよりも悪くなっている。しかし、予報後半の AOI の急激な低下に対して、実況どおりの予報はできていないが、落ち込みのピークはほとんどのメンバーが正確に予測できていることが分かる。

さらに初期値を 5 日進めた図 13 では、初期値直後の AOI の上昇を正確に予測できていることが分かる。また、12 月中旬頃から下降に転じる流れもだいたい予測できており、アンサンブル予報の効果も出ている。しかしこれまでと同じく、予報期間後半の下降のピークは正確に予報できていない。

しかし、初期値をさらに進め、1976 年 11 月 16 日 00Z としたときの図 14 を見ると、予報期間後半（12 月下旬）の AOI の急激な低下をほぼ正確に予測できているメンバーがあることが分かる。また、破線で示したコントロールランよりも太実線で示したアンサンブル平均のほうが精度よく予報できており、モデルバイアス修正の効果が出ているといえる。

図 15 は、1976 年 11 月 21 日 00Z を初期値とした AOI の予測結果である。これを見ると、初期値から約 10 日は、どのメンバーとも正確に予報できている。また、その後は、コントロールランだけは大きく外してしまうが、モデルバイアスを考慮したメンバーは全体的に低下傾向を示し、よく予報できているといえる。また、

12月末に低下のピークをむかえ、その後急上昇するといった遷移も、アンサンブル平均を見るとしっかりと予測できている。

最後に、1976年11月26日00Zを初期値とした図16においては、先ほどの11月21日00Zを初期値とした予報と同様、コントロールランよりもアンサンブル平均のほうが予報精度がよい。全体的にAOIがマイナスに遷移するという傾向は予測できているものの、5日前の初期値に比べ精度が悪くなっている。

6.2.3　1988/89年冬の予測実験

ここでは、AOIが大きく正へ振れ、日本では顕著な暖冬となった1988/89年冬の事例について示す。

図17は、1988年7月から1989年3月までの、順圧成分で定義したAOIの時間変化と、丸印で示した1988年11月1日00Zを初期値とした、順圧S-Modelによる60日予測の合成図である。なお、図の見方は図11と同じである。これを見ると、AOIが予報期間前半（11月上旬〜中旬）に上昇してピークをむかえ、その後下降するという傾向を、モデルはしっかりと予測している。12月前半においては実況よりもかなり下回ってしまったが、その後の上昇傾向も予測することができている。

次に、図18は、1988年11月6日00Zを初期値としたAOIの予測結果である。これを見ると、60日先までかなり実況に近い予報ができているといえる。特に期間の後半については、実況とほとんど変わらない予報をしているメンバーもあった。

さらに初期値を5日進めた図19においては、5日前を初期値としたときと同様、期間全体を通してかなり精度のよい予報ができている。特に、コントロールランではしっかりと予測できていないAOIの上昇も、モデルバイアスを考慮したメンバーではしっかりと予測している。

しかし、図20で示したように、初期値を1988年11月16日00Zとすると、先ほどまでの結果と比べて予報精度は落ちている。特に、期間前半の予測がしっかりとできていない。ただ、期間後半のAOI上昇の傾向は、完全とはいえないまでも予測できていることが分かる。

1988年11月21日00Zを初期値とした図21では、期間前半のプラスの状態は予測できているが、1月中旬の急激な上昇は、精度よく予測できていない。また、先ほどまでと比べて、メンバー間のばらつきが、期間後半を中心に大きくなっている。

1988 年 11 月 21 日 00Z を初期値とした図 22 も同様の結果となった。すなわち、期間前半の AOI の遷移は非常によく予測できているが、1 月になるとモデルはマイナスへ遷移する予報となり、1 月中旬の急激な上昇を予測できていない。

6.2.4 アンサンブルメンバー数の違いによる予報精度

次に、アンサンブルメンバー数によって予報精度に影響が出るのかどうかを調べた。具体的には、式 (90) で示した ϵ において平均する日数を変えることで、メンバー数を 7 から 25 へと増やした。ここでは、1988/89 年冬の事例について結果を示す。

図 23 は、1988 年 11 月 1 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報である。図中の細実線は実況値、破線はコントロールラン、点線は摂動ラン、太実線はアンサンブル平均を表す。なお、アンサンブルメンバー数は 25 である。これを見ると、AOI が一度マイナスへ振れ、その後大きく上昇する様子がかなり正確に予測できていることが分かる。特に、予報期間後半になっても、実況とほとんど変わらない。メンバー数が 7 の図 17 と比較すると、予報期間後半の予報精度が大きく改善されていることが分かる。

同様に、図 24 は、1988 年 11 月 11 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報、図 25 は、1988 年 11 月 21 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報である。特に、図 25 では、メンバー数が 7 の場合に比べ、予報期間後半の予報精度が劇的に改善していることが分かる。

6.2.5 相関係数による予報の評価

前節までは、予報精度の評価が定性的なものにとどまっていた。そこで本節では、予報精度の評価を定量的に行った結果を示す。具体的には、前節までと同様の方法で AOI の予報を行い、各予報時間に対して、実況と予報の相関係数を計算した。前節では 1988/89 年冬のみの結果を示したが、本節では 1976/77 年冬、2005/06 年冬および 2006/07 年冬を追加した。また、統計的な結果を得るために、それぞれの年において 11/1 から 1 日ごとに初期値を変え、12/31 まで計 61 事例の予報実験を行った。計算した相関係数は、61 事例の平均値を用いている。以下、その結果を述べる。

図 26 は、1976/77 年冬における AOI の実況と予報の相関を表したものである。横軸に予報日数、縦軸に相関係数をとってあり、値が 1 に近いほど予報成績がよ

いことを示している。図中の青実線はコントロールラン、赤実線は計 25 メンバーのアンサンブル平均、赤破線は計 7 メンバーのアンサンブル平均、黒破線は持続予報を表している。図を見ると、相関係数の値は、予報日数が長くなるにつれて急速に減衰している。しかし、減衰のスピードは、コントロールランのほうがアンサンブル平均よりもわずかながら遅いことが分かる。なお、アンサンブル予報におけるメンバー数の違いはほとんど見られなかった。

図 27 は、1988/89 年冬における AOI の実況と予報の相関を表したものである。図の見方は図 26 と同じである。これを見ると、先ほどと同様、コントロールランのほうがアンサンブル平均よりも減衰のスピードが遅く、また、アンサンブル予報におけるメンバー数の違いはほとんど見られなかった。先ほどと大きく違うのは、相関係数の値が予報期間後半になっても 0.4 以上あることである。

図 28 は、2005/06 年冬における AOI の実況と予報の相関を表したものである。図の見方は図 26 と同じである。先の 2 事例とは異なり、5 日予報付近において、アンサンブル予報のほうがコントロールランよりも高い相関係数を示していた。また、アンサンブル予報におけるメンバー数の違いも明瞭に見られ、多くのメンバーを用いたほうが相関係数が高かった。

2006/07 年冬における AOI の実況と予報の相関を表した図 29 も、図 28 と似たような特徴を示した。つまり、コントロールランに比べてアンサンブル予報のほうが予報成績がよく、さらに、メンバー数を多く用いたほうが予報成績がよかった。

6.2.6　期間平均した AOI を用いた予報精度の評価

前節では、各予報時間における AOI の実況と予報の相関係数を求めたが、各予報時間に対する評価では細かい変動を見ることになり、どうしても誤差が大きくなってしまう。また、長期予報の観点からは、あくまで平均的な場の情報が分かればよいので、予報時間ごとの評価は適切ではないと考えられる。

そこで本節では、AOI の予報の評価について、「AOI が振れる（遷移する）方向が合っていれば、予報ができたものとする」という立場をとることにした。具体的には、ある期間（たとえば、14 日間）で平均した AOI を用い、それを同期間で平均した実況値と比較した。評価方法は前節と同様で、11/1 から 12/31 までの計 61 事例の結果を用い、相関係数を算出した。また、予報結果が視覚的に分かるように、横軸に実況値、縦軸に予報値をとった散布図も作成した。

図 30 は、1988 年 11 月と 12 月における AOI の予報成績を表した散布図である。

横軸に実況値、縦軸に予報値をとり、56 日平均した AOI を図中にプロットしている。また、白抜きしたシンボルはコントロールラン、黒で塗りつぶしたシンボルは 25 メンバーのアンサンブル平均を示しており、また、丸で示されたものは 1988 年 11 月を初期値としたときの予報、四角で示されたものは 1988 年 12 月を初期値としたときの予報である。ここで、図中に示された実線上に値がプロットされれば、AOI の正確な予報ができていたということになる。なお、図の右下に書かれている数値は、実況と予報の相関係数である。図を見ると、程度の差こそあれ、全体的に直線に近い場所にプロットされていることが分かる。詳しくみると、丸で示した 11 月を初期値とした予報のほうが、四角で示した 12 月を初期値とした予報よりも相関係数の値が高いことが分かる。つまり、1988 年 11 月を初期値とする予報は、12 月に比べてうまくいっていたことを意味する。また、コントロールランとアンサンブル平均の予報結果の違いに着目すると、黒で塗りつぶしたアンサンブル平均の相関係数のほうが、白抜きで表されたコントロールランの相関係数よりも値が大きいことが分かる。つまり、1988 年においては、アンサンブル予報の効果が出ていたといえる。

一方、図 31 は、2000 年 11 月と 12 月における AOI の予報成績を表した散布図である。なお、図の見方は、図 30 と同じである。これを見ると、先ほどの 1988 年の結果とは対照的に、プロットされた値は直線からかなり離れた場所にある。つまり、予報があまりうまくいっていないことを意味する。相関係数を見てみると、白抜きで示したコントロールランの値は 0 付近と、ほとんど実況と予報の相関がないことが分かる。しかし、黒で塗りつぶしたアンサンブル平均のほうは 0.5 以上と、先ほどと同様に、アンサンブル予報の効果が出ていた。

6.2.7　AO パターンによる予報精度の違い

前節では、期間平均した AOI を用いて予報精度を議論したが、年によって予報結果に大きなバラツキがあること、また、平均する日数が 56 日とあまり適切でなかったこと、といった問題点が挙げられる。

そこで本節では、年ごとに予報精度を議論するのではなく、AO のパターンごと、つまり、AO がプラスの年とマイナスの年に分けて、それぞれの年で予報精度がどう異なるのかを検証した結果を示す。また、平均する AOI の日数も、7 日間や 14 日間など、いろいろ変えて実験してみた。なお、対象とした年は、1988/89 年冬、1992/93 年冬、2006/07 年冬（いずれも AO プラスの年）と、2000/01 年冬、

2002/03 年冬、2005/06 年冬（いずれも AO マイナスの年）の計 6 事例である。

図 32 は、7 日平均した AOI の予報成績である。これを見ると、AO マイナスおよびプラスの年どちらも、直線に非常に近いところに値がプロットされており、よく予報できていたといえる。相関係数の値を見ても、両者の年に目立った差はない。

図 33 は、14 日平均した AOI の予報成績である。図 32 と比べてややバラツキが大きくなっているが、それでも直線に近い場所にプロットされている。詳しく見ると、白抜きで示した AO プラスの年は、コントロールランおよびアンサンブル平均ともに相関係数が 0.7 以上となっているが、AO マイナスの年におけるコントロールランの相関係数がやや低くなっていることが分かる。

図 34 は、28 日平均した AOI の予報成績である。先ほどまでと比べて、明瞭な違いが見られるようになった。詳しく見ると、AO プラスの年は、依然として相関係数が 0.7 以上と高い値を保っているが、AO マイナスの年は、コントロールランが約 0、アンサンブル平均が 0.3 強と、かなり低い値となっている。図を見ても、AO マイナスのほうは値が大きくばらついていることが分かる。

さらに、図 35 は、56 日平均した AOI の予報成績である。平均日数をここまで長くすると、AO プラスの年の予報結果も悪くなってくるが、それでも相関係数は 0.3 以上あることが分かる。一方、AO マイナスの年については、先ほどと同様、実況と予報の相関がほとんどない。

以上の結果をまとめたものが、表 1 である。表中の値は実況と予報の相関係数であり、上 2 段が AO マイナスの年の予報結果、下 2 段が AO プラスの年の予報結果となる。また、それぞれの年において、上段にコントロールラン、下段にアンサンブル平均の結果を載せてある。表の最上段に書かれている数字は、平均した AOI の日数である。これを見ると、7 日平均の予報においては、どちらの年も相関係数が高く、予報精度がよかったことがいえる。14 日平均の予報に対する相関係数も高い値を保っているが、AO マイナスの年については、21 日平均の予報から急激に低くなった。その後、56 日平均の予報まで低い値をとり続けており、予報精度が悪かったことを示している。一方、AO プラスの年については、AO マイナスの冬に急激に予報精度が悪くなった 21 日平均の予報に対しても相関係数は 0.8 近くあり、42 日平均の予報に対しても 0.6 以上という高い値を示していた。コントロールランとアンサンブル平均の違いを見てみると、AO プラスの年は明瞭な違いは認められなかったが、AO マイナスの年は、ほぼすべての事例に対して、アンサンブル平均のほうが高い相関係数をとっていた。このことはつまり、AO プラスの年はアンサンブル予報の効果は出ていないが、AO マイナスの年はアンサンブル

予報の効果が出ていたということを意味する。

6.3　気象庁モデルによる AOI の予測実験

本節では、気象庁1ヶ月アンサンブルデータを用いて AOI の予測実験を行った結果を示す。予報対象は、12 月を中心に記録的な低温を記録した 2005/06 年冬である。なお、EOF は、1950 年から 2000 年までの 12 月の月平均海面更正気圧（データは NCEP/NCAR ）に対して施している。

ここで、気象庁の 1 か月アンサンブル予報について簡単に述べておく。1 か月アンサンブル予報は毎週 1 回（金曜日の午後）に発表され、約 4 週間先までの予報を行っている。初期値メンバーの作成は BGM (Breeding of Growing Mode) 法 (Toth and Kalnay, 1993) によって行われており、週間アンサンブル予報と同じ作成法である。ここで BGM 法とは、誤差が成長する擾乱（成長モード）を実際に現業に用いる数値予報モデル自身の中で自然に生育 (breeding) させ、その成分を初期値（解析値）に重ねることにより、アンサンブルメンバーの一つの初期値を作る方法である。日本語では「成長モード生育法」とよばれている。実際の予報作業では、毎週水曜日 12Z に 13 個のメンバーから、また、翌日の木曜日 12Z に同じく 13 個のメンバーから、それぞれ 34 日先まで時間積分を行っている。

以上のように作られた 1 か月アンサンブル予報のうち、海面更正気圧の予報データを用いて、AOI の予測実験を試みた。なお、上で述べたように、1 か月アンサンブル予報は 2 回にわたって行われ、それぞれの初期値に対して 13 個の予報しか手に入らない。今回は 26 メンバーすべての予報を見たかったため、初期値を木曜日に統一し、水曜日を初期値としたときの 13 メンバーについては 1 日後（木曜日）の予報値を初期値とみなした。

図 36〜41 が、予測実験の結果である。縦軸は AOI、横軸は初期値からの日数を示している。また、図中の実線が実況、破線が摂動ランである。

これを見ると、どの初期値に対しても、初期値から数日間はかなり精度のよい予報ができていることが分かる。しかし、その後はばらつき始め、特に図 40 や図 41 を見ると、予報期間の後半を中心にかなり大きくばらついており、12 月の AO マイナスを予測できているとは言えない。

今回の結果を見る限りでは、気象庁のモデルでは、初期値から数日間は非常に精度のよい予報ができるが、予報期間の後半は大きくばらついてしまうという特徴があると言える。

7　考察

7.1　時系列モデルによる AOI の予測

過去の AOI データを用いて将来の AOI が予測できるかどうかを、状態空間モデルを使って検証した。本研究では 2002 年の AOI データを用いて、2003 年の AOI 予測を行った。結果として、モデルの次数が増えるにしたがい、実況のような細かい変動が予測できたわけだが、これは単なる「偶然」である可能性が高いように思われる。確かに過去、特に直近の AOI は将来の AOI に少なからず影響を及ぼすであろうが、AOI データのみで将来の予測ができるとは考えにくい。今回は 1 事例しか示していないが、同様の方法で他の年に適用した場合、実況とは大きくかけ離れた予測結果が出てしまう可能性は大いにあると考えられる。

しかし、見方を変えると、過去の AOI データのみで将来の AOI 予測ができたということは、たとえ偶然であったにしろ、評価されるべきであろう。そして、AOI データではなく、たとえば過去の予報誤差に状態空間モデルを適用し、将来の予報誤差を見積もることができれば、力学モデルに「モデルバイアス」があった場合、それがうまく打ち消され、予報精度が改善する可能性があると考えられる。

7.2　順圧 S-Model による AOI の予測

過去、AOI が大きく正または負に振れた年を対象に、順圧 S-Model による予測実験を行った。予報においては、過去のモデルバイアスを考慮したアンサンブル予報を導入した。その結果、図 23 や図 25 に見られるように予報精度が大きく改善した例もあったが、そうではないときもあった。

定量的に予報精度を評価するため、相関係数を用いた結果を図 26〜29 に示した。これによると、年によるバラツキがかなり大きく、相関係数も予報時間とともに急速に減少していった。しかし、長期予報の観点からは、あくまで「平均的な場」が重要であり、日ごとの予報成績を 2 週間以上先まで比較することは、あまり適切でないと考えられる。

そこで次に、ある期間平均した AOI を用いて予報精度を比較することを試みた。この方法は、ある一定期間の AOI の傾向、つまり、AOI が今後正に振れるか、負に振れるかといった予測ができていたかどうかを検証する目的で、理にかなっているといえる。検証の結果、AO プラスの年においては 1ヶ月先まで高い予報精度

を保つことが分かった。一方、AO マイナスの年では、2 週間を超える予報はかなり難しいことが分かった。こうした結果の要因の一つとして、「ブロッキング高気圧」の存在が考えられる。AO マイナス時は偏西風が南北に大きく蛇行し、所々にブロッキング高気圧が発生していることが多い。一方、AO プラスの時は、極渦を取りまくように偏西風が強まっているため、ブロッキング高気圧が発生することは少ない。現在の天気予報では、ブロッキング高気圧を予測することはかなり難しいとされている。このため、この予測の難しさが AO マイナス時の予報精度の低さにつながったのではないかと推測される。

予報精度が悪くなる原因として、1 つは初期値の問題、もう 1 つはモデルの問題が考えられる。図 42 は、順圧 P-Model を用いて正確な外力を与えたときの AOI の 60 日予報である。図中の細実線が実況、太実線が予報を表す。両方の線が重なっていることから、60 日間にわたり正確な予報ができていることが分かる。したがって、今回の場合、初期値の問題よりはモデルの問題のほうが大きいと思われる。

これを解消するため、今回は外力の誤差を考慮したアンサンブル予報を同時に行った。その結果、モデルバイアスがうまく修正されて予報精度が格段によくなっているときもあれば、実況とは正反対の予報を示すこともあった。この原因としては、モデルバイアスの修正に「平均値」を使っているためだと考えられる。各予報ステップで同じ値を用いて修正しているため、実際はもっと大きな修正が必要なところを小さめに見積もってしまい（あるいはその逆）、その誤差が時間とともに発展していき、結果として予報精度が悪くなってしまうのではないかと思われる。したがって、予報ステップごとに考慮するモデルバイアスの値を、何らかの関数の形で与えることができれば、よりよい予報ができるのではないかと期待される。図 43、44 は、スプレッドと RMSE (Root Mean Square Error) の関係を表している。ここで、スプレッドとはメンバー間の予報のばらつき具合を表すもので、スプレッドが小さいほど、メンバー間のばらつきが小さく、スプレッドが大きいほど、メンバー間のばらつきが大きいことを示す。一方、RMSE とは、予報誤差の標準的な大きさを表す指数で、値が小さく 0 に近いほど予報精度が高いことを示す。アンサンブル予報では、このスプレッドと RMSE の比が 1 対 1 に対応していることが好ましいとされている。しかし、今回の予測実験では、スプレッドは RMSE の 5 割以下程度であった。このことは、アンサンブルメンバーが予報誤差の大きさを大きく下回った予報をしている、つまり、各メンバー間のばらつきは小さいものの、実況値とは大きくかけ離れた予報をしているということを意味する。このことからも、外力のパラメタライズがあまりうまく行えていない（ア

ンサンブル予報の方法があまり好ましくない）ということが言える。ただ、順圧 S-Model は大気のカオス性がきわめてよく抑えられたモデルであるため、スプレッドが広がらないのは、ある意味当然であると思われる。

7.3 気象庁モデルによる AOI の予測

気象庁 1ヶ月アンサンブル予報データを用いて、2005/06 年冬の AOI の予測を行った。図 40 は、2005 年 11 月 3 日 12Z を初期値とした気象庁 1ヶ月アンサンブル予報モデルによる AOI の予測である。これを見ると、AOI がマイナスへ遷移していくようすが予測できていない。初期値および予報期間が違うため単純な比較はできないが、順圧 S-Model では、図 45 で示されるように、10 月の時点から AOI がマイナスへ遷移していくようすが予測できていた。しかし、11 月を初期値としたときの予報では、順圧 S-Model においてもあまり精度のよい予報ができていなかった（図省略）。このことから、2005 年 11 月は、予報しにくい大気の場であったのではないかと推測される。

8　結論

本研究では、北半球の冬の天候に大きな影響を与える AO の予測可能性について、いくつかのモデルを用いて検証した。

まず、最も簡単なモデルとして、状態空間モデルを用いて、過去のデータから将来を予測できないかどうかを調べた。今回は、1 年分の AOI データを用いて、それに引き続く AOI の予測を試みた。その結果、モデルの次数が小さいと、予報の早い段階で AOI が一定値となってしまい、実況に見られる変動がまったく予測できなかったが、モデルの次数を増やすにつれ、AOI が変動するようすが予報期間後半にかけても見られるようになった。しかし、細かい部分の変動はほとんど予測できておらず、過去の AOI データのみから将来の AOI を予測することは困難であるといえる。

次に、大気の順圧成分を予測する順圧大気大循環モデルを用いて、AOI の長期予測を試みた。具体的には、AOI が大きく正または負に振れた年を対象にし、AOI が正または負に遷移していくようすが捉えられているかどうかを調べた。また、予報においては、モデルバイアスを考慮したアンサンブル予報を導入し、コントロールランとの違いやメンバー数による違いなども検証した。その結果、AO がプラスの年は、AO がマイナスの年に比べて予報精度が高かった。特に、AO がプラスの年は、1ヶ月先の予報に対しても相関係数が 0.7 以上と非常に高い値を示した。一方、AO がマイナスの年については、2 週間を超える予報は難しいことが示唆されたが、アンサンブル予報を導入することにより、予報精度を高めることができた。なお、AO プラスの年においては、アンサンブル予報の導入は、明瞭な効果を示さなかった。AO マイナスの年における予報精度が低かった要因の一つとして、ブロッキング高気圧の予測の困難さが挙げられる。また、アンサンブル予報の効果を高めるためには、摂動の与え方をさらに工夫する必要があると考えられる。

最後に、気象庁1ヶ月アンサンブル予報データを用いて、2005/06 年冬の AOI 予測を行い、その予測可能性を調べた。その結果、AOI がマイナスへ遷移していくようすが予測できていなかった。これに対し、順圧 S-Model では、10 月の時点から AOI がマイナスへ遷移していくようすが予測できていた。しかし、11 月を初期値とすると、順圧 S-Model の予測精度は悪くなった。このことから、2005 年 11 月は予報しにくい大気場であったのではないかと推測される。

以上をまとめると、AO の予測可能性について、初期値によるばらつきはあるものの、2 週間を超えて予測できる可能性があることが示された。今後、さらに予報

精度を高めるためには、より詳細な AO のメカニズム解明が必要であると考えられる。また、さまざまなモデルの予報結果、特に途中のプロセスを詳細に解析することにより、メカニズム解明への足がかりが見つかるかもしれないと思われる。

謝辞

本研究を進めるにあたって、指導教員である筑波大学計算科学研究センター田中博教授には、終始適切なご指導、ご鞭撻を賜りました。ここに深く感謝いたします。

また、同大学生命環境科学研究科の寺崎康児さんには、ゼミなどを通じて多くの貴重なアドバイスを頂きました。深く感謝いたします。

さらに、同大学生命環境科学研究科の木村富士男教授、林陽生教授、上野健一助教授、植田宏昭講師、日下博幸講師には、分野ゼミや最終発表の場で、貴重なご意見を頂き、ありがとうございました。

最後に、同大学の大学院生の先輩方、共に修士論文製作を進めた気候学・気象学専攻の友人、そして何より、私を大学院まで進学させてくれた家族に、深く感謝の意を表します。

なお、本研究で用いた図は、The GMT System (Wessel and Smith, 1991) にて作成した。

参考文献

Baldwin, M. P. and T. J. Dunkerton, 1999: Propagation of the Arctic Oscillation from the stratosphere to the troposphere. *J. Geophys. Res.*, **104**, 30937–30946.

Baldwin, M. P. and T. J. Dunkerton, 2001: Stratospheric harbingers of anomalous weather regimes. *Science*, **294**, 581–584.

Baldwin, M. P., D. B. Stephenson, D. W. J. Thompson, T. J. Dunkerton, A. J. Charlton, and A. O'Neill, 2003: Stratospheric memory and skill of extended-range weather forecasts. *Science*, **301**, 636–640.

Charlton, A. J., A. O'Neill, D. B. Stephenson, W. A. Lahoz, and M. P. Baldwin, 2003: Can knowledge of the state of the stratosphere be used to improve statistical forecasts of the troposphere? *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **129**, 3205–3224.

Christiansen, B., 2005: Downward propagation and statistical forecast of near-surface weather. *J. Geophys. Res.*, **110**, doi:10.1029/2004JD005431.

Cohen, J., K. Saito, and D. Entekhabi, 2001: The role of the Siberian high in Northern Hemisphere climate variability. *Geophys. Res. Lett.*, **28**, 2, 299–302.

Kasahara, A. and K. Puri, 1981: Spectral representation of three-dimentional global data expansion in normal mode functions. *Mon. Wea. Rev.*, **109**, 37–51.

Kerr, R. A., 2003: Can northern snow foretell next winter's weather? *Science*, **300**, 1865–1866.

Kodera, K., M. Chiba, H. Koide, A. Kitoh, and Y. Nikaidou, 1996: Interannual variability of the winter stratosphere and troposphere in the Northern Hemisphere. *J. Meteor. Soc. Japan*, **74**, 365–382.

Mukougawa, H. and T. Hirooka, 2007: Predictability of the downward migration of the Northern Annular Mode: A case study for January 2003. *J. Meteor. Soc. Japan*, **85**, 6, 861–870.

Tanaka, H. L., 1985: Global energetics analysis by expansion into three-dimensional normal mode function during the FGGE winter. *J. Meteor. Soc. Japan*, **63**, 180–200.

Tanaka, H. L., 1991: A numerical simulation of amplification of low-frequency planetary waves and blocking formations by the upscale energy cascade. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 2919–2935.

Tanaka, H. L., 1998: Numerical simulation of a life-cycle of atmosphere blocking and the analysis of potential vorticity using a simple barotropic model. *J. Meteor. Soc. Japan*, **76**, 983–1008.

Tanaka, H. L. and E. C. Kung, 1989: A study of low-frequency unstable planetary waves in realistic zonal and zonally varying basic states. *Tellus*, **41A**, 179–199.

Tanaka, H. L. and D. Nohara, 2001: A Study of Deterministic Predictability for the Barotropic Component of the Atmosphere. *Science Reports, Institute of Geoscience, University of Tsukuba*, **22A**, 1–21.

Tanaka, H. L. and S. Sun, 1990: A study of baroclinic energy source for large-scale atmospheric normal modes. *J. Atmos. Sci.*, **47**, 2674–2695.

Thompson, D. W. and J. M. Wallace, 1998: The Arctic oscillation signature in the wintertime geopotential height and temoerature field. *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 1297–1300.

Toth, Z. and E. Kalnay, 1997: Ensemble forecasting at NCEP and the breeding method. *Mon. Wea. Rev.*, **125**, 3297–3319.

前田修平, 佐藤均, 2007: 2005 年 12 月の偏西風の異常とその 1 か月アンサンブル数値予報. 気象研究ノート, **216**, 211–220.

森正人, 小山博司, 渡部雅浩, 2007: 2005 年 12 月の「北極振動」の励起と予測可能性. 気象研究ノート, **216**, 221–239.

岡田亮, 2003: 順圧大気大循環モデルによる北極振動（AO）の数値実験. 筑波大学生命環境科学研究科修士論文.

表 1: AO マイナスの冬と AO プラスの冬における予報精度の比較。表中の値は、実況と予報の相関係数である。

		7 日	14 日	21 日	28 日	42 日	56 日
AO －	Ctrl	0.93	0.58	0.10	0.00	0.00	0.03
	EM	0.94	0.76	0.55	0.34	0.11	-0.02
AO ＋	Ctrl	0.86	0.72	0.79	0.79	0.61	0.36
	EM	0.86	0.72	0.77	0.78	0.63	0.33

図 1: AO がプラスの時とマイナスの時の偏西風ジェット気流（矢印）と各地の気温偏差（暖冷）および気圧偏差（高低）の分布図。

（http://www.jamstec.go.jp/frcgc/jp/report/2004/jan/tanaka.html より）

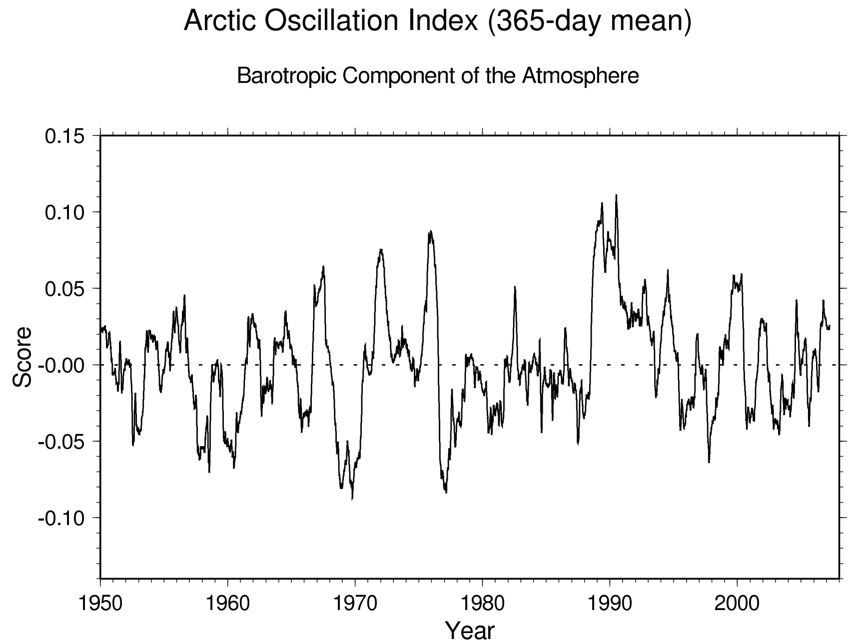

図 2: 1950 年から 2007 年までの北極振動指数 (AOI) の時系列で、365 日移動平均を施したもの。ただし、この AOI は大気の順圧成分で定義した値である。

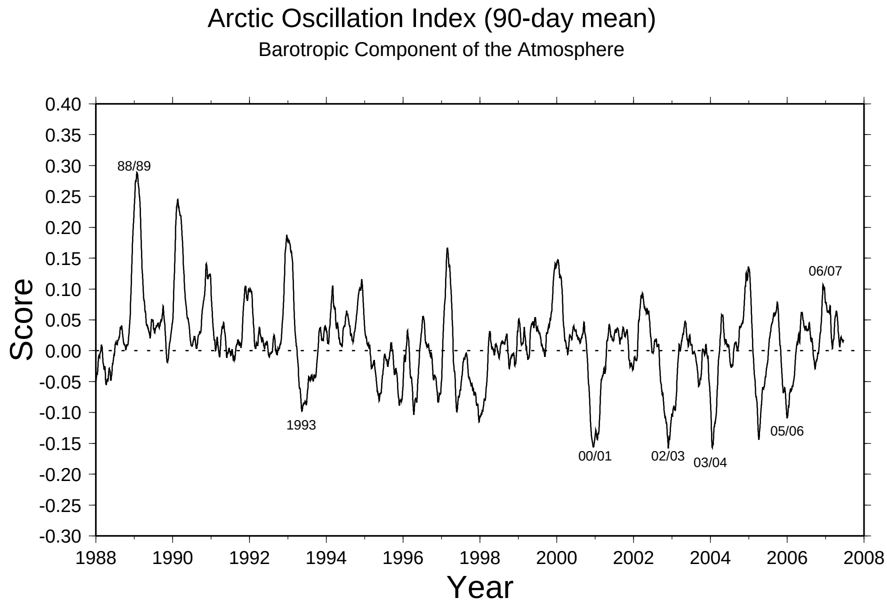

図 3: 1988 年から 2007 年までの北極振動指数 (AOI) の時系列で、90 日移動平均を施したもの。ただし、この AOI は大気の順圧成分で定義した値である。

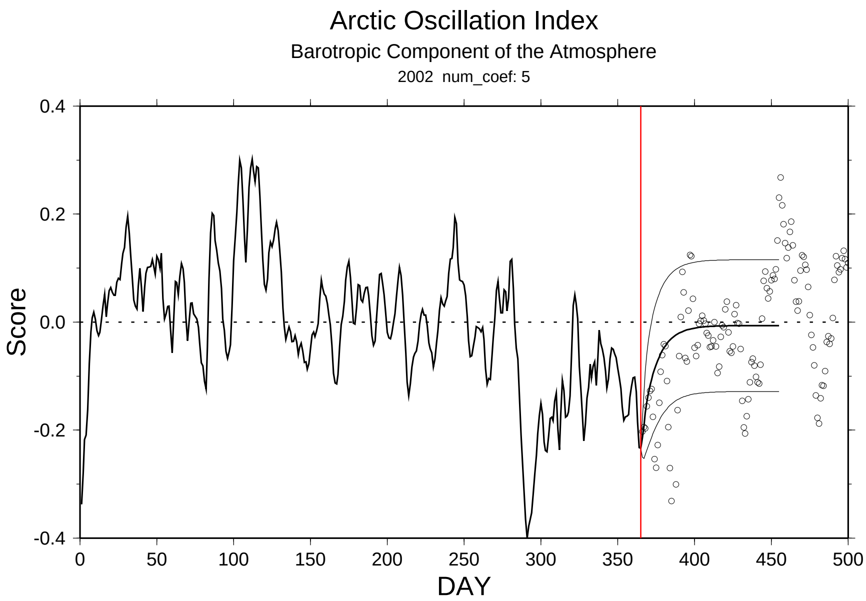

図 4: 2002 年の AOI データに状態空間モデルを適用したときの AOI の予報図。赤実線より右側の実線が予報を表し、太実線は平均値、細実線は $\pm\sigma$ の値である。また、丸印は実況値を表す。なお、モデルの次数は 5 である。

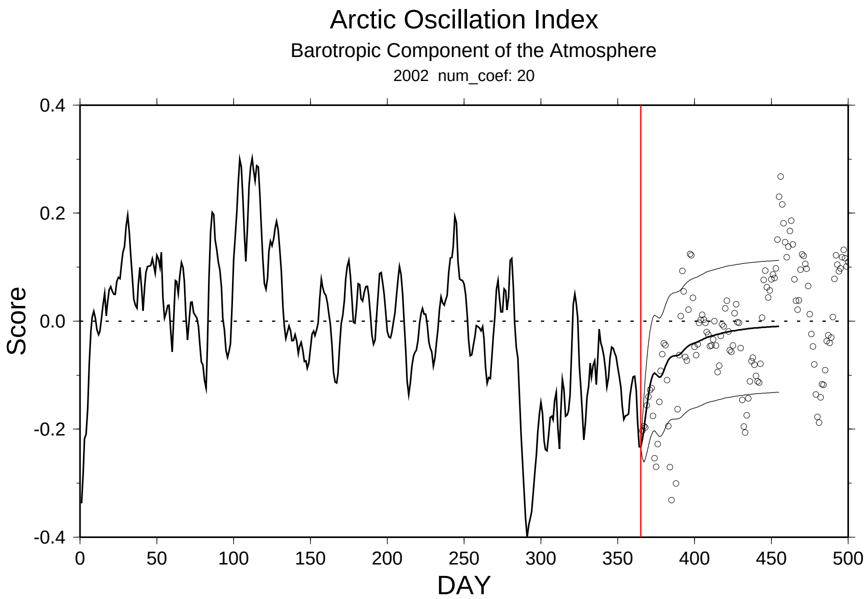

図 5: 図 4 と同じ。ただし、モデルの次数は 20 である。

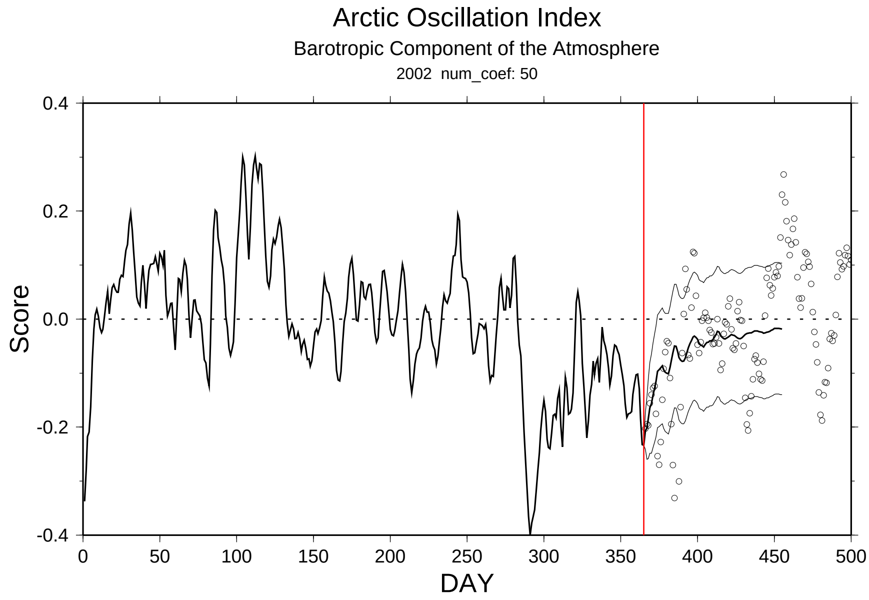

図 6: 図 4 と同じ。ただし、モデルの次数は 50 である。

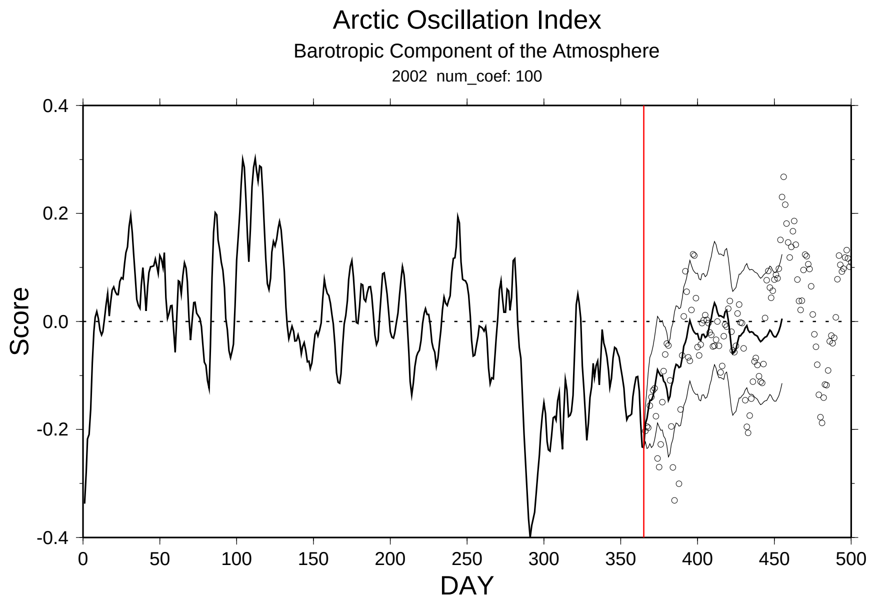

図 7: 図 4 と同じ。ただし、モデルの次数は 100 である。

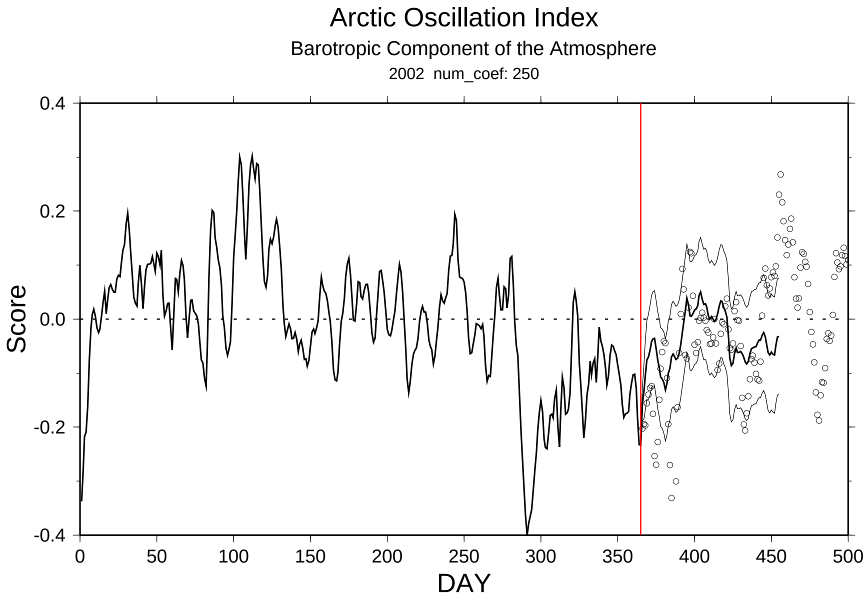

図 8: 図 4 と同じ。ただし、モデルの次数は 250 である。

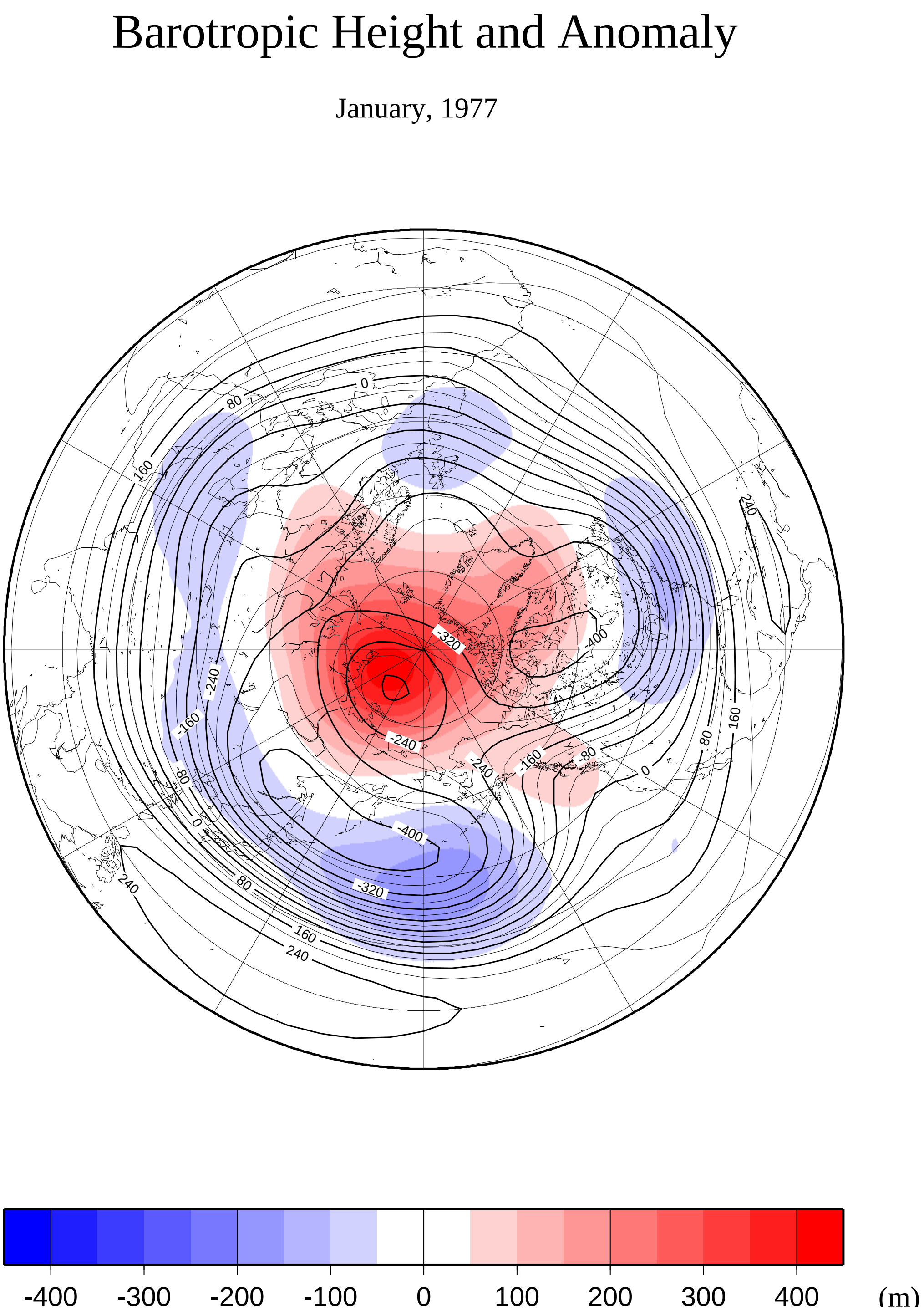

図 9: 1977 年 1 月の順圧高度場とアノマリ。コンターは順圧高度、シェードはアノマリを示す。

Barotropic Height and Anomaly

January, 1989

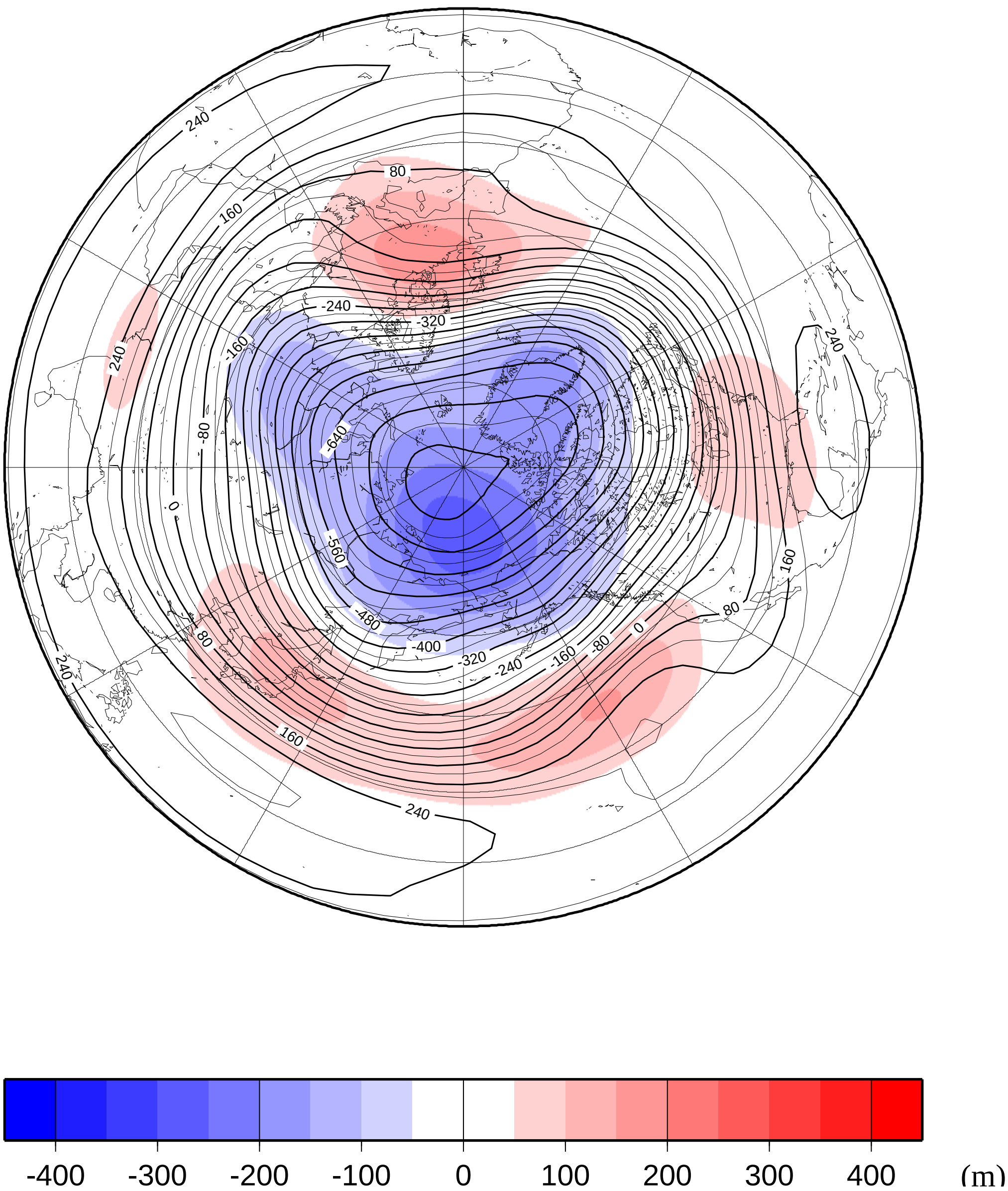

図 10: 1989 年 1 月の順圧高度場とアノマリ。図の見方は図 9 と同じ。

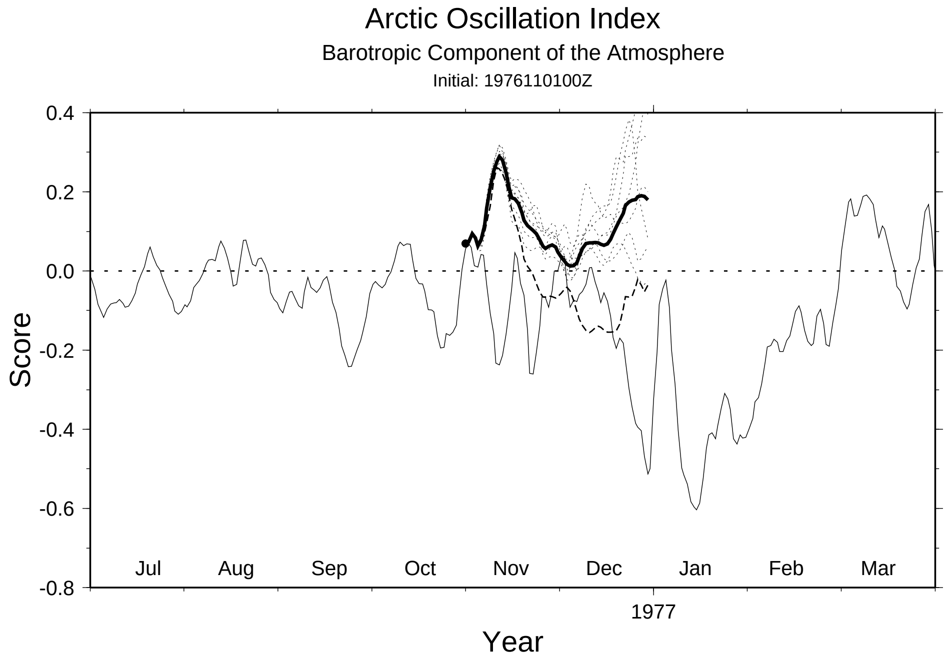

図 11: 1976 年 11 月 1 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報。黒丸は初期値、細実線は実況、破線はコントロールラン、点線は摂動ラン、太実線はアンサンブル平均を示す。

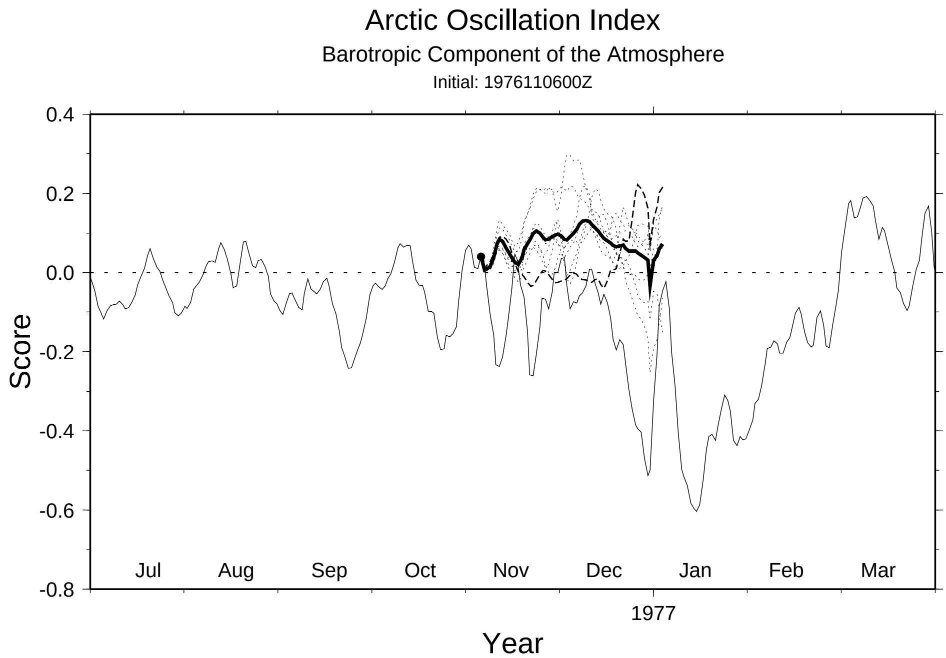

図 12: 1976 年 11 月 6 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 11 と同じ。

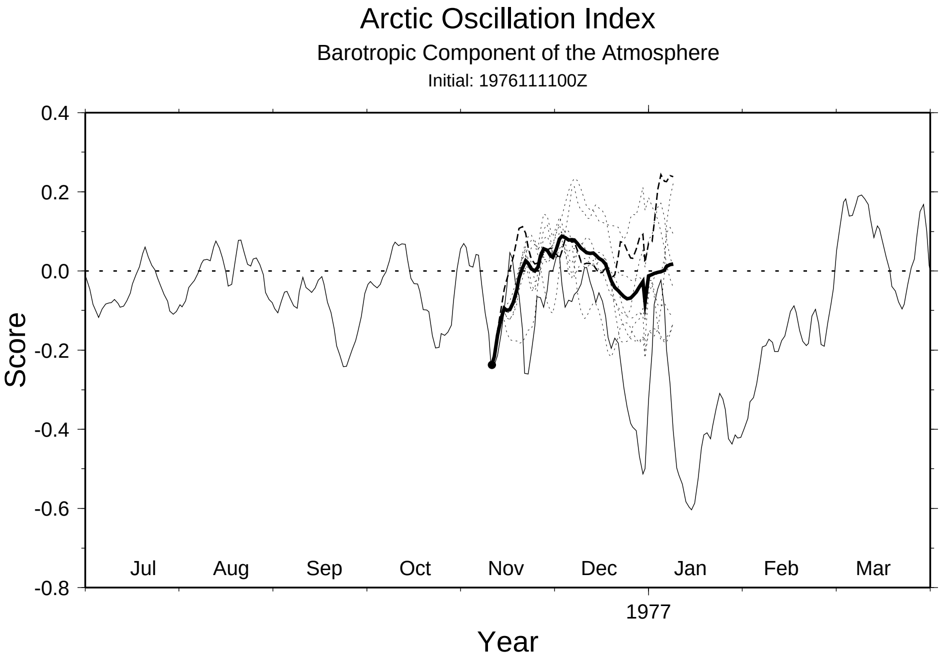

図 13: 1976 年 11 月 11 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 11 と同じ。

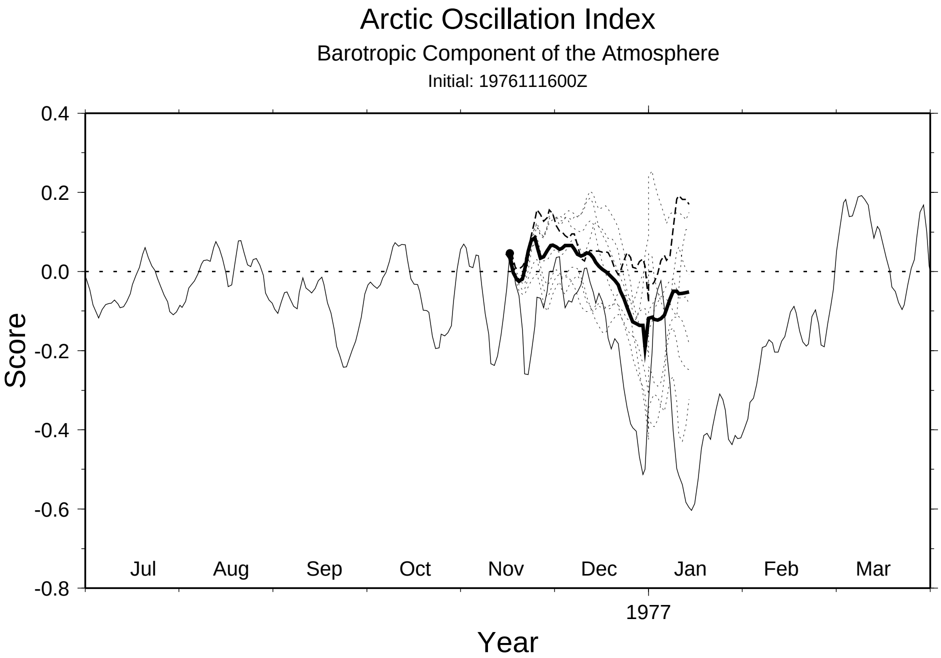

図 14: 1976 年 11 月 16 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 11 と同じ。

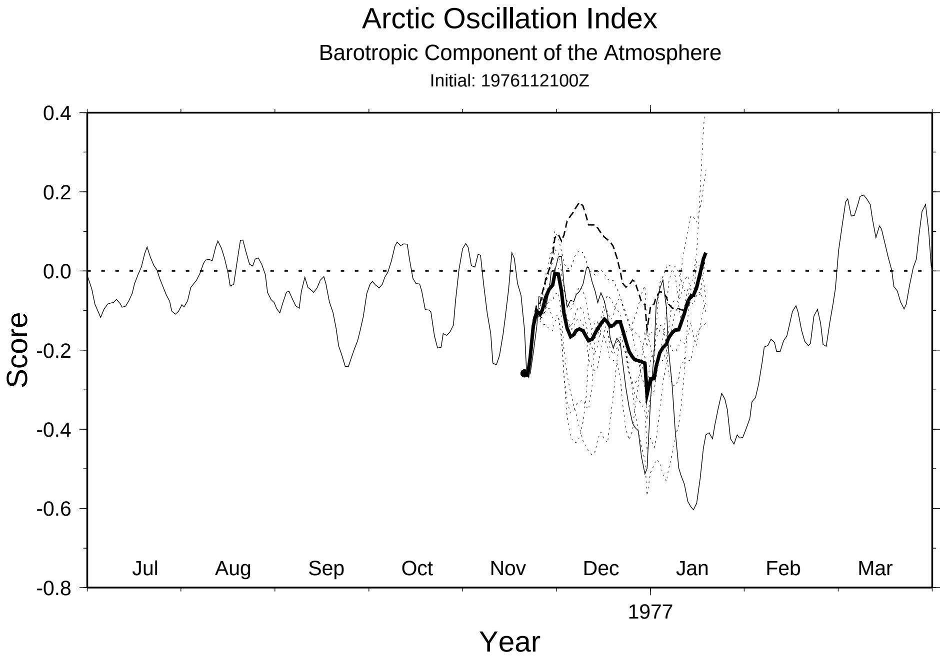

図 15: 1976 年 11 月 21 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 11 と同じ。

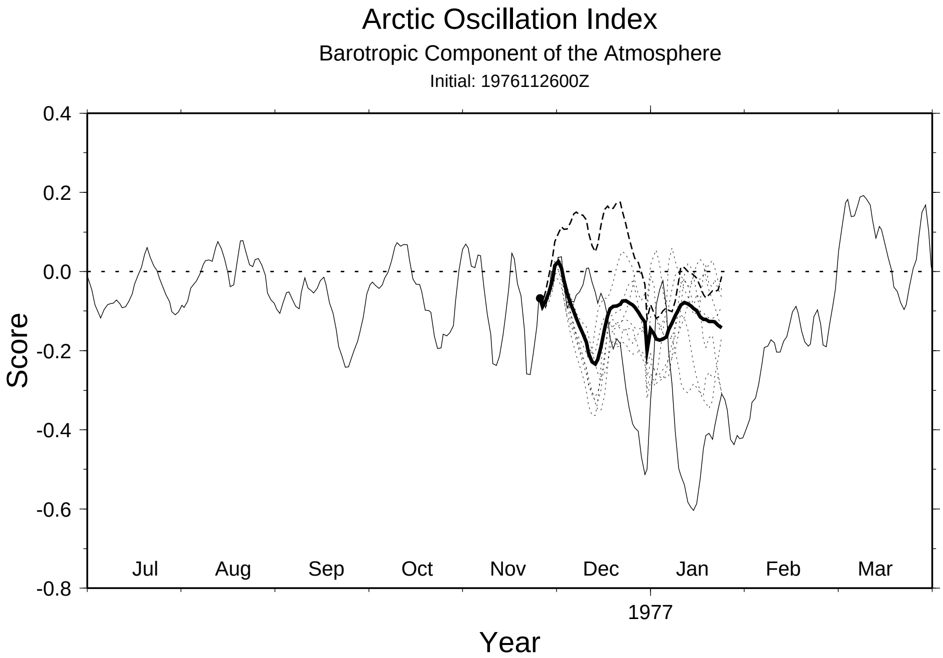

図 16: 1976 年 11 月 26 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 11 と同じ。

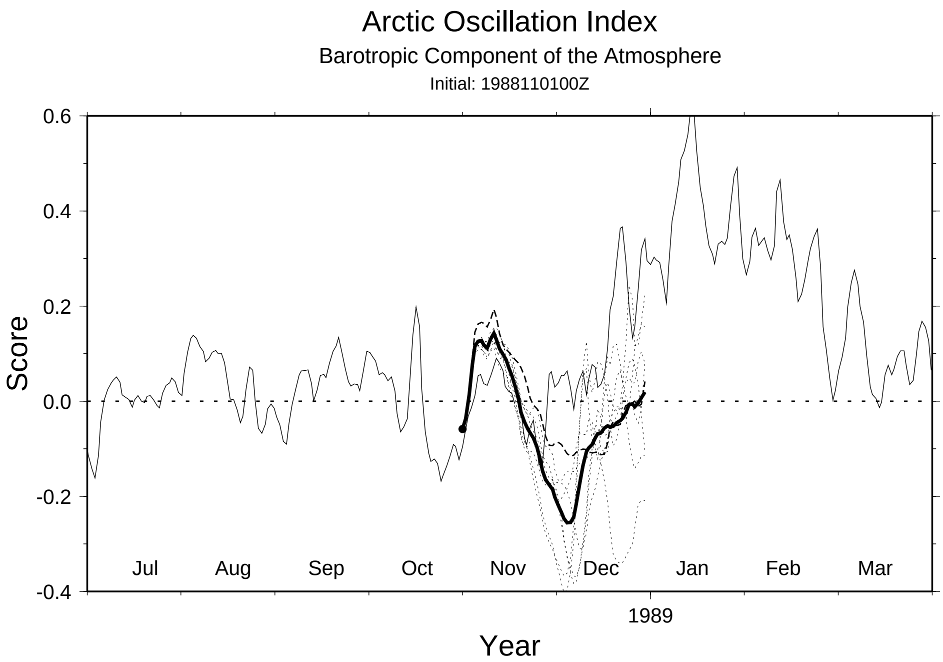

図 17: 1988 年 11 月 1 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 11 と同じ。

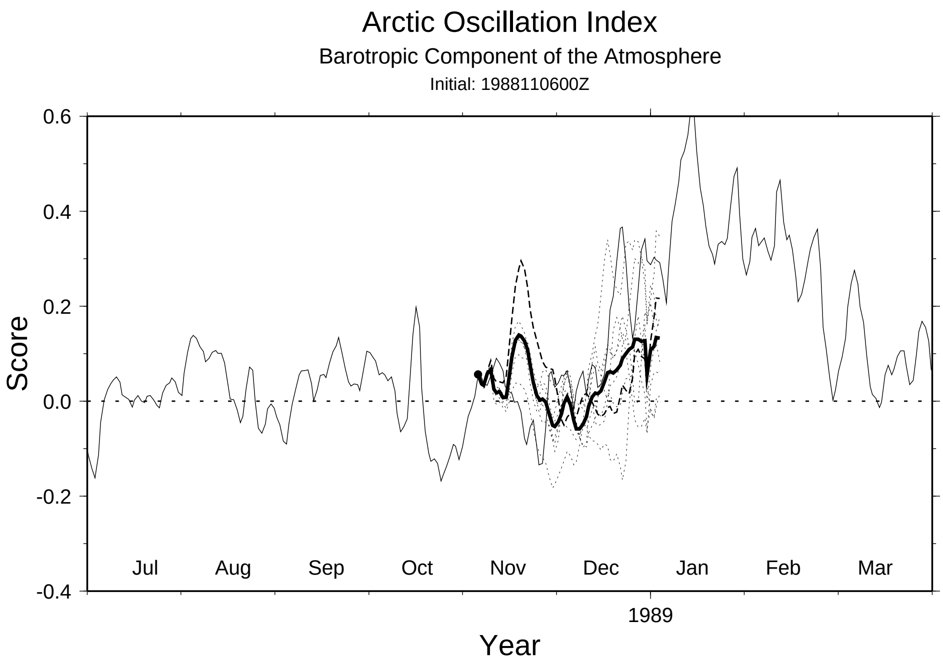

図 18: 1988 年 11 月 6 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 11 と同じ。

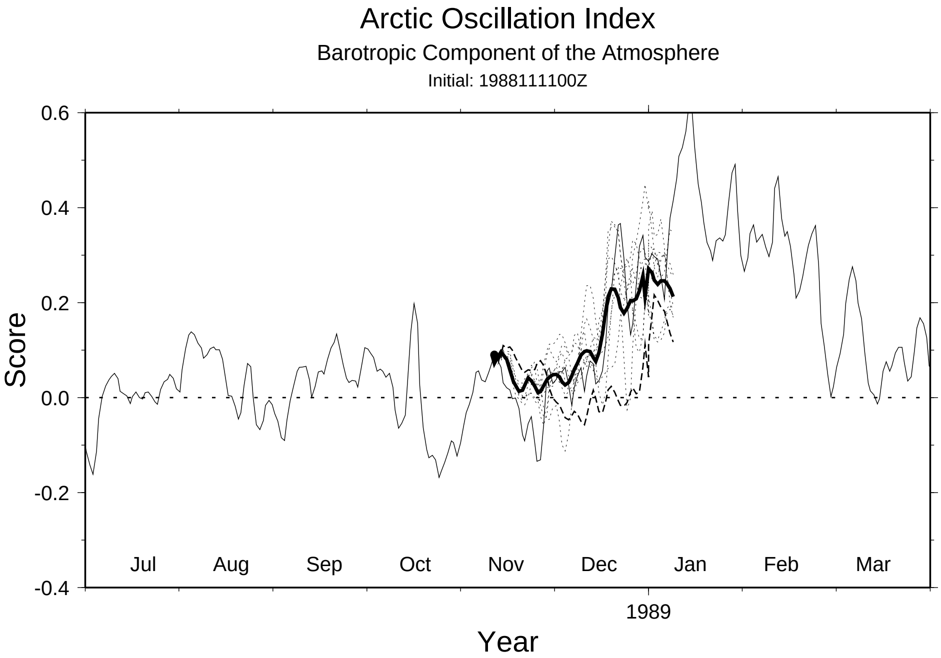

図 19: 1988 年 11 月 11 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 11 と同じ。

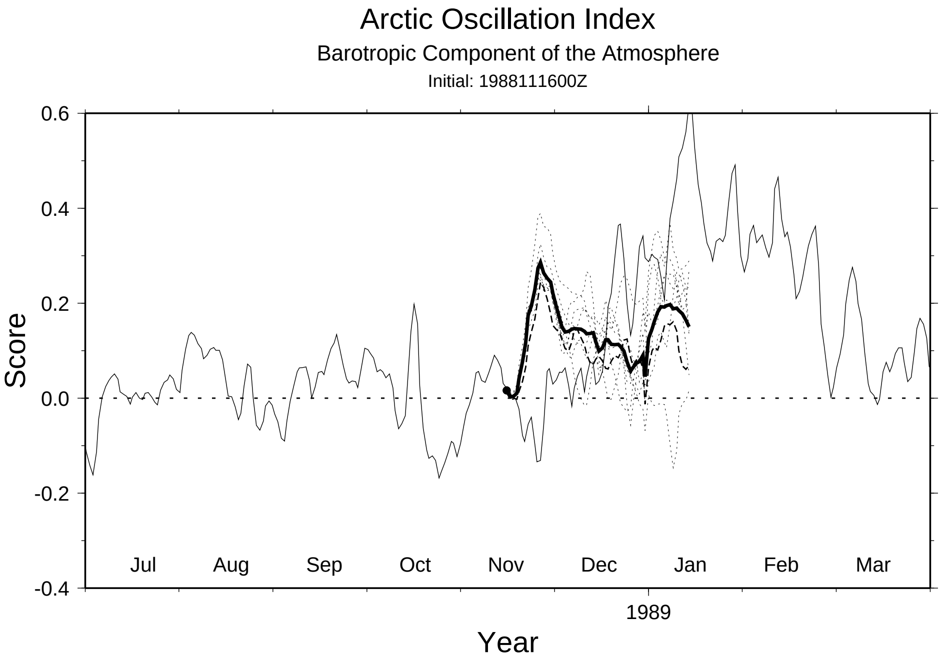

図 20: 1988 年 11 月 16 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 11 と同じ。

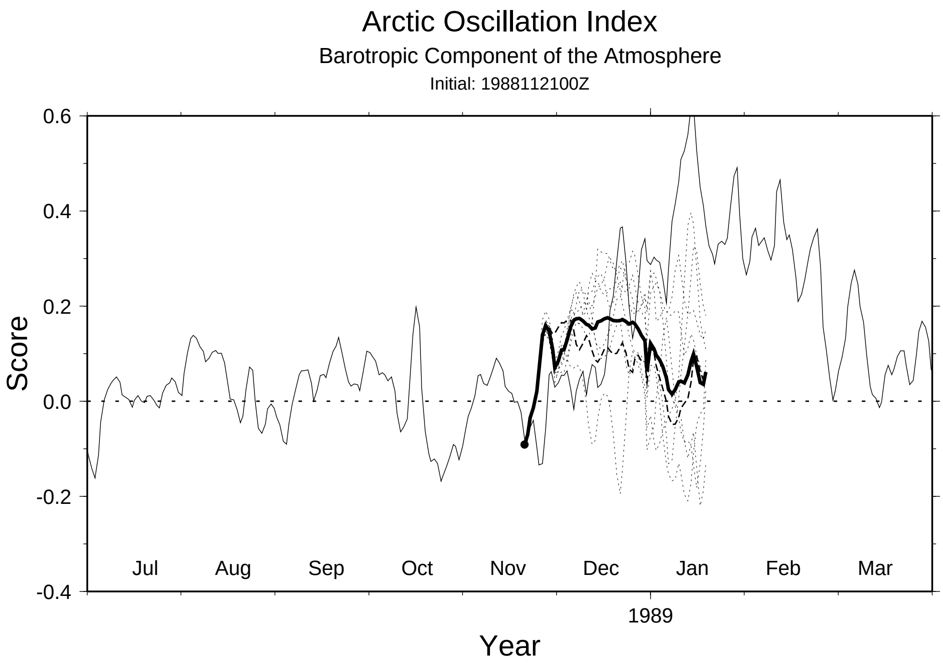

図 21: 1988 年 11 月 21 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 11 と同じ。

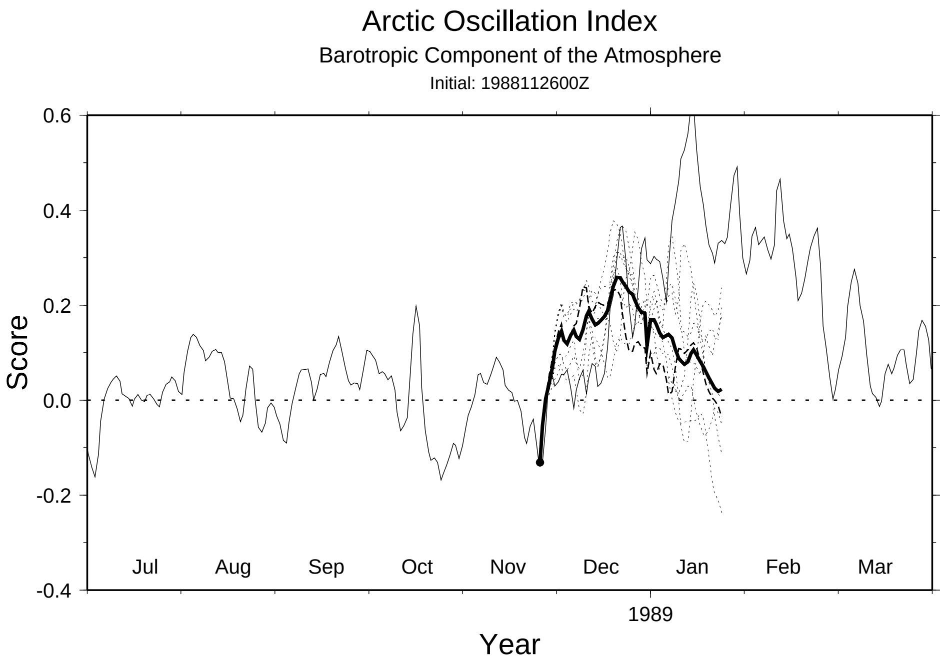

図 22: 1988 年 11 月 26 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 11 と同じ。

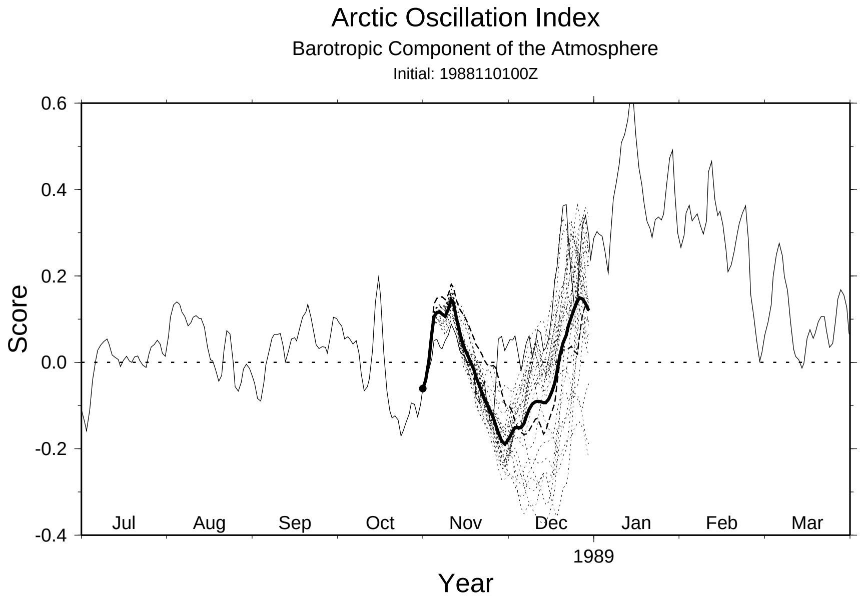

図 23: 1988 年 11 月 1 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報。ただし、この AOI は大気の順圧成分で定義した値である。黒丸は初期値、細実線は実況値、破線はコントロールラン、点線は摂動ラン、太実線はアンサンブル平均を表す。なお、メンバー数は 25 である。

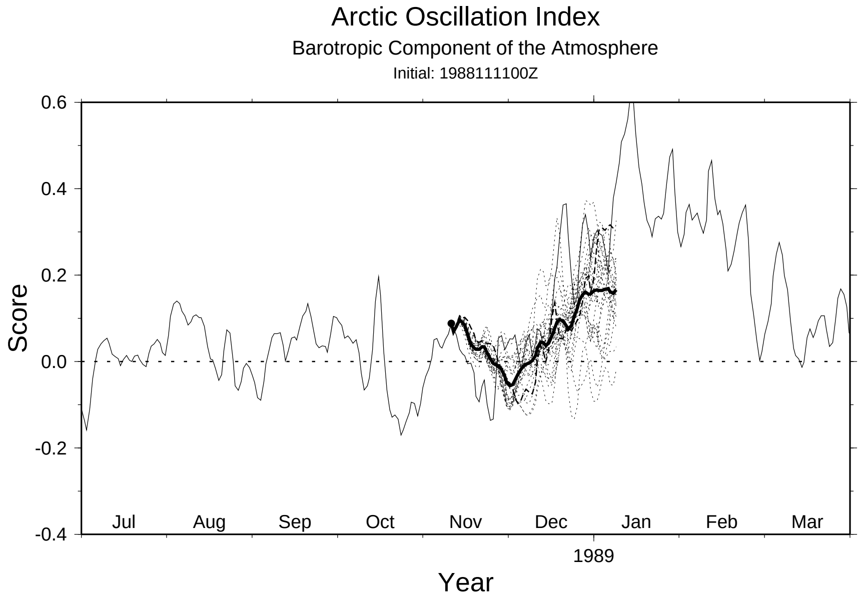

図 24: 図 23 と同じ。ただし、初期値を 1988 年 11 月 11 日としている。

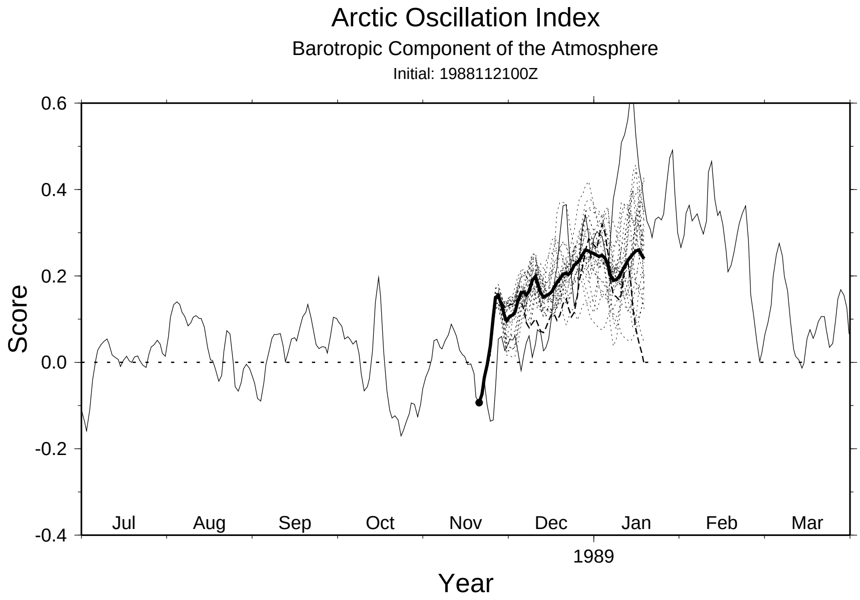

図 25: 図 23 と同じ。ただし、初期値を 1988 年 11 月 21 日としている。

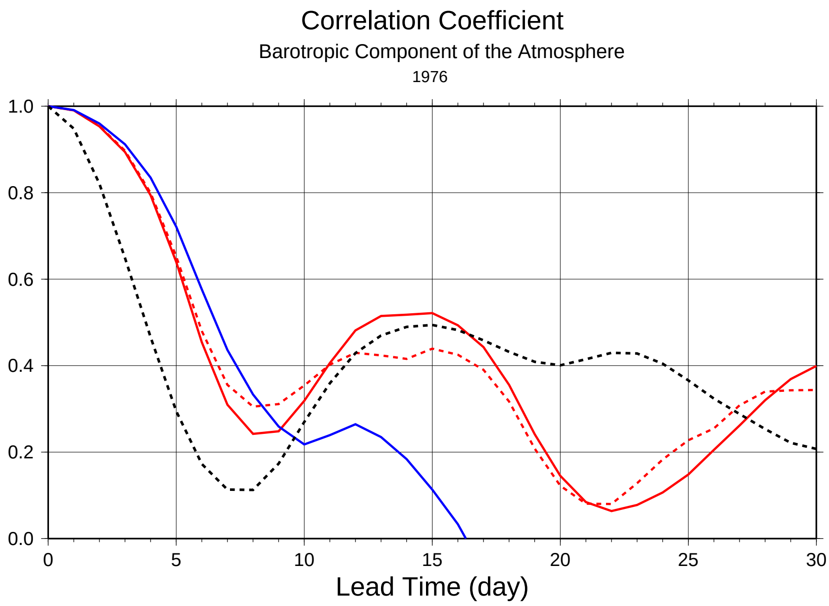

図 26: 1976/77 年冬における AOI の実況と予報の相関係数。横軸が予報日数、縦軸が相関係数であり、値は計 61 事例を平均したものである。青実線はコントロールラン、赤実線は計 25 メンバーのアンサンブル平均、赤破線は計 7 メンバーのアンサンブル平均、黒破線は持続予報を表す。

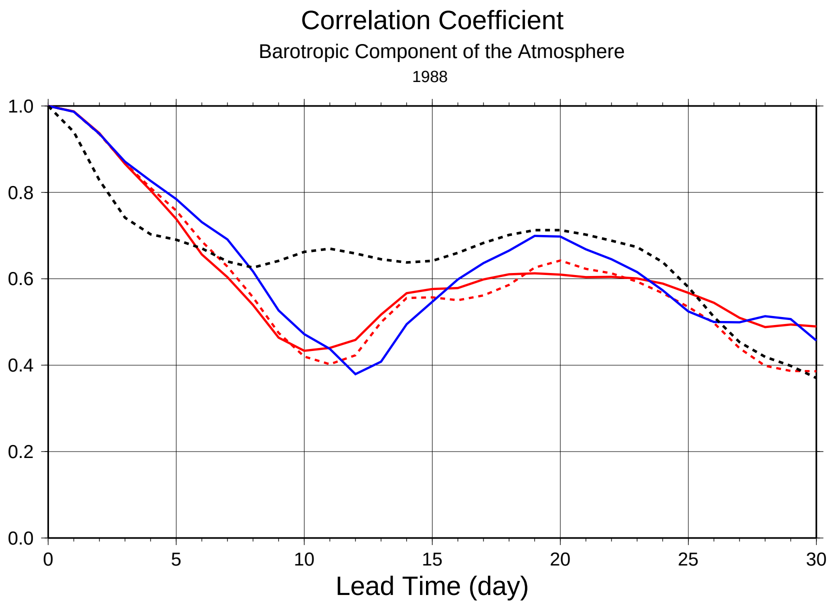

図 27: 図 26 と同じ。ただし、1988/89 年冬について描いている。

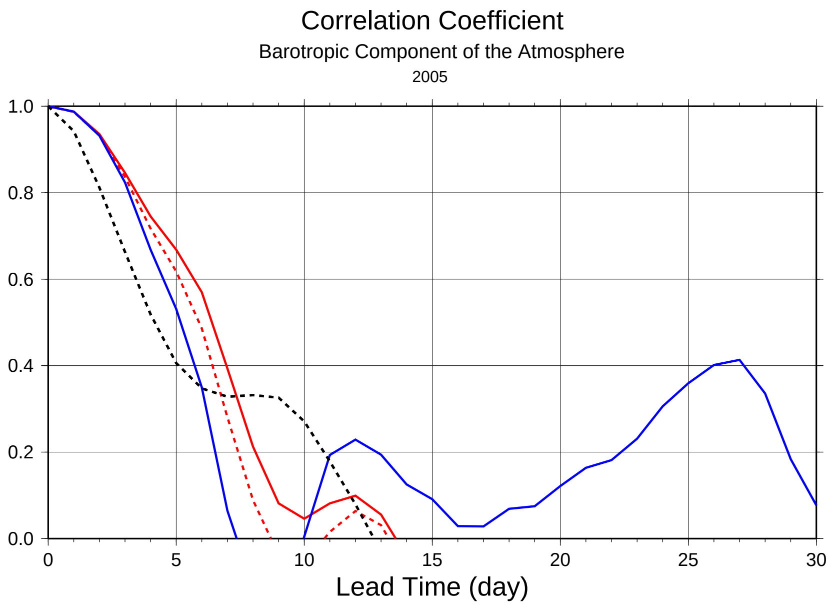

図 28: 図 26 と同じ。ただし、2005/06 年冬について描いている。

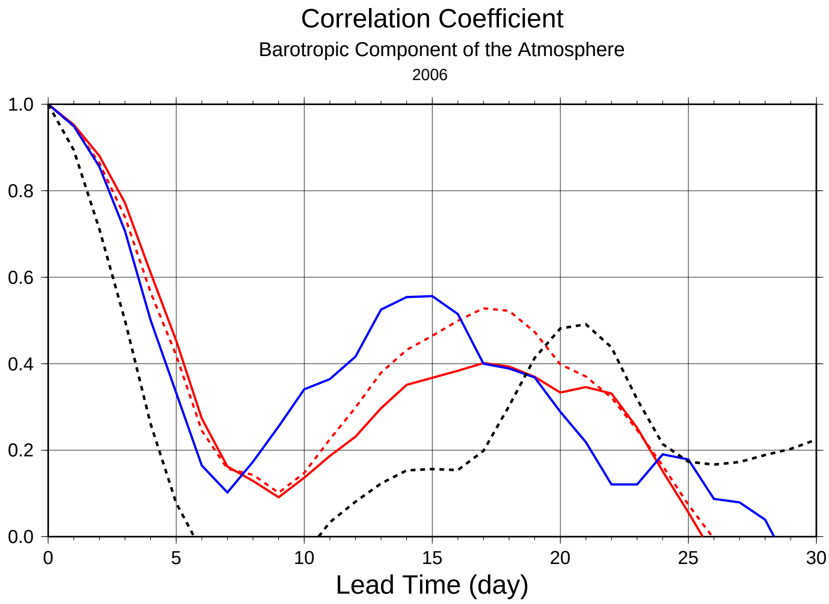

図 29: 図 26 と同じ。ただし、2006/07 年冬について描いている。

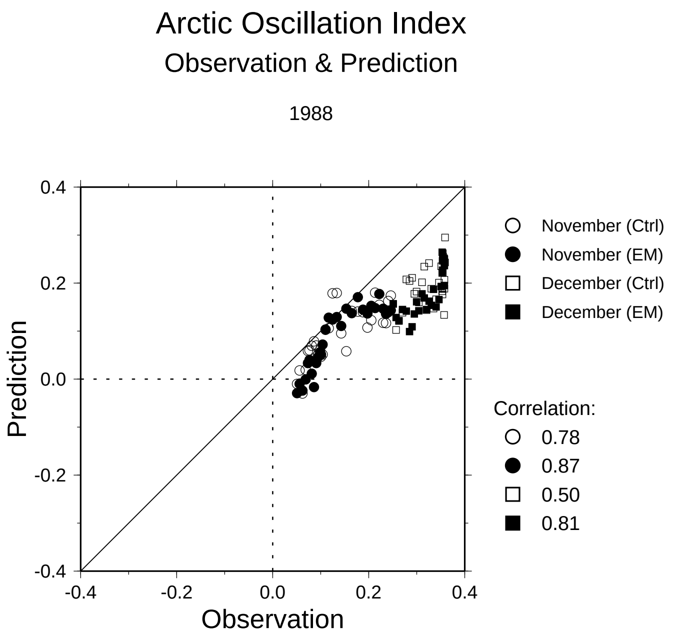

図 30: 1988 年における AOI の予報成績。横軸に実況値、縦軸に予報値をとり、11 月と 12 月における日々の予報をプロットしている。ただし、プロットした値は 56 日平均した AOI である。また、白抜きしたシンボルはコントロールラン、黒で塗りつぶしたシンボルはアンサンブル平均（計 25 メンバー）である。右下に書かれた値は、観測値と予報値の相関係数を表す。

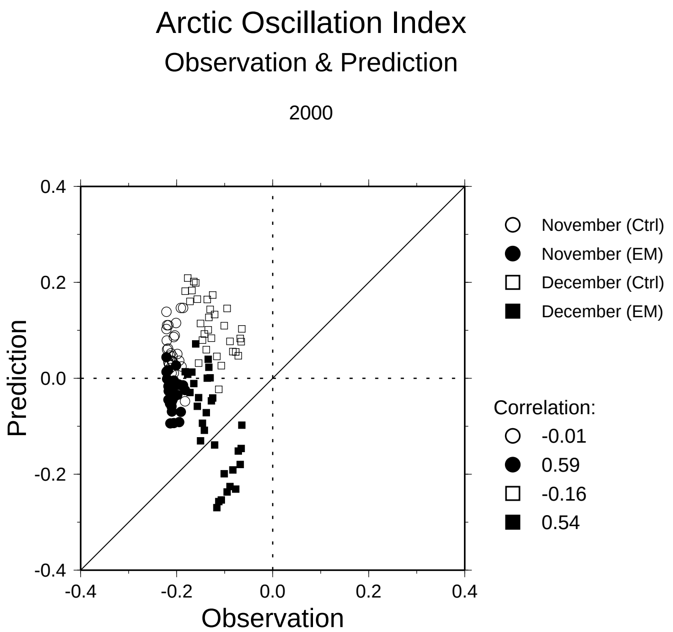

図 31: 図 30 と同じ。ただし、2000 年の予報成績である。

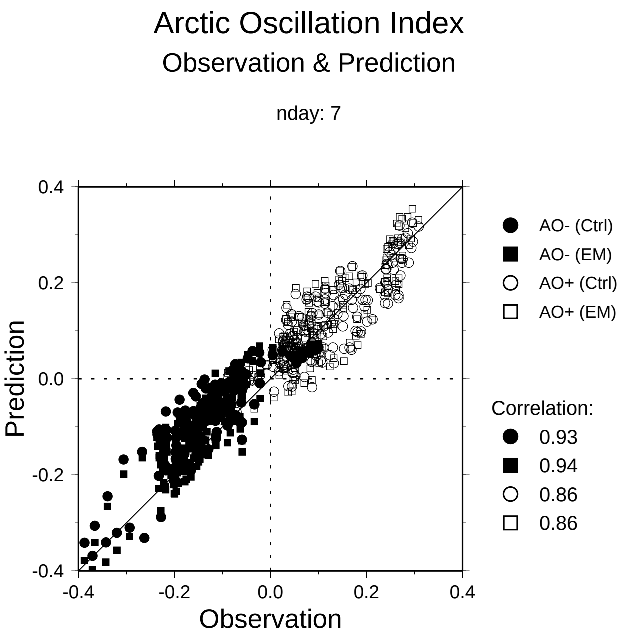

図 32: 7 日平均した AOI の予報成績。横軸に実況値、縦軸に予報値をとり、それぞれ 7 日平均した値をプロットしている。黒で塗りつぶしたシンボルは AO マイナスの年、白抜きのシンボルは AO プラスの年の結果である。また、丸で示したシンボルはコントロールラン、四角で示したシンボルはアンサンブル平均の結果を表す。なお、図の右下に書かれた値は、実況と予報の相関係数である。

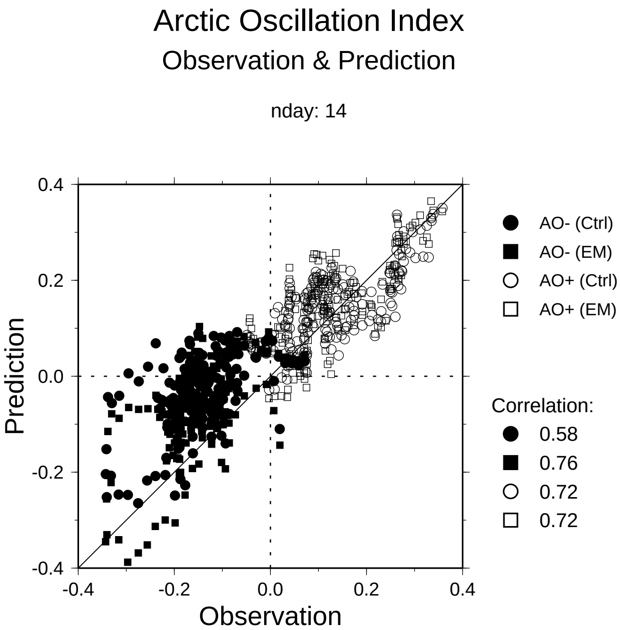

図 33: 図 32 と同じ。ただし、プロットした値は 14 日平均したものである。

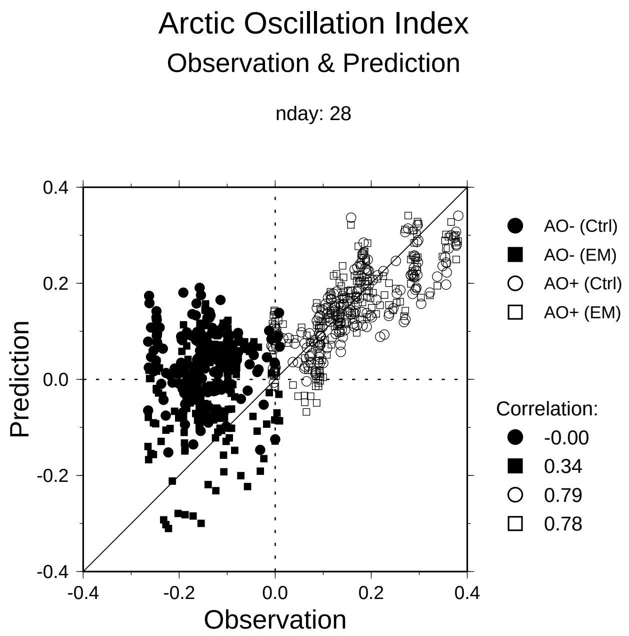

図 34: 図 32 と同じ。ただし、プロットした値は 28 日平均したものである。

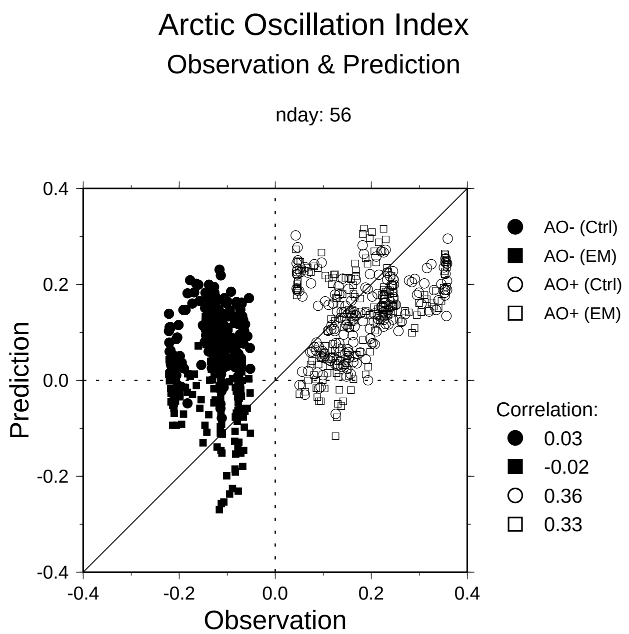

図 35: 図 32 と同じ。ただし、プロットした値は 56 日平均したものである。

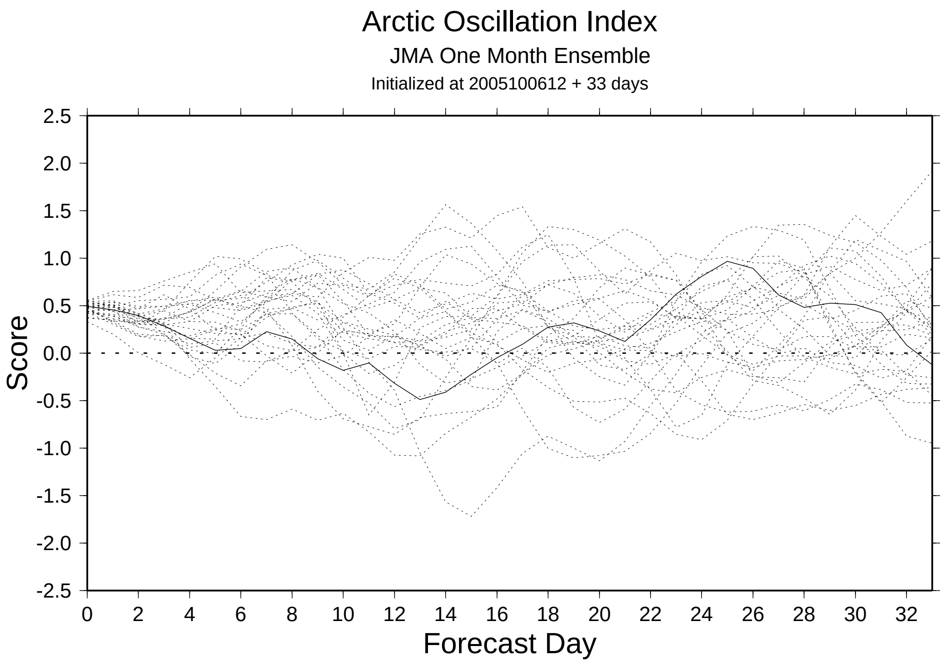

図 36: 2005 年 10 月 6 日 12Z を初期値とした AOI の 60 日予報。実線が実況、破線が摂動ランを表す。

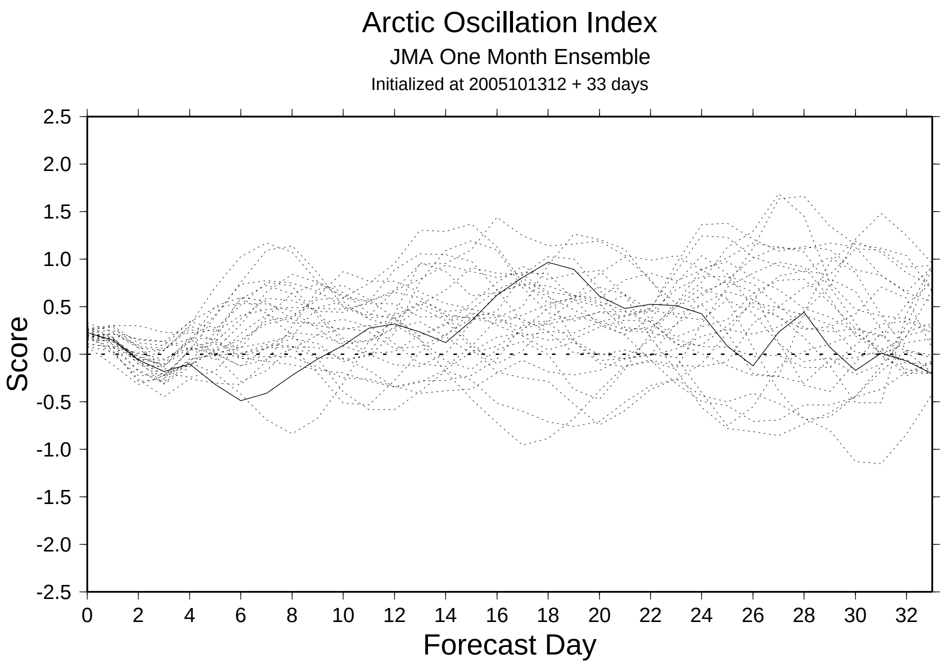

図 37: 2005 年 10 月 13 日 12Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 36 と同じ。

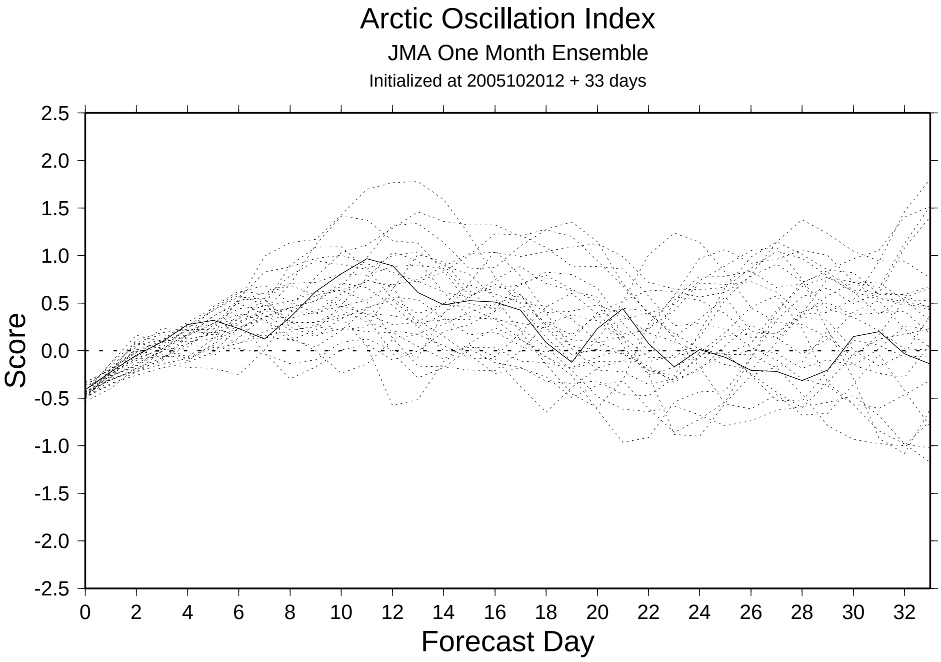

図 38: 2005 年 10 月 20 日 12Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 36 と同じ。

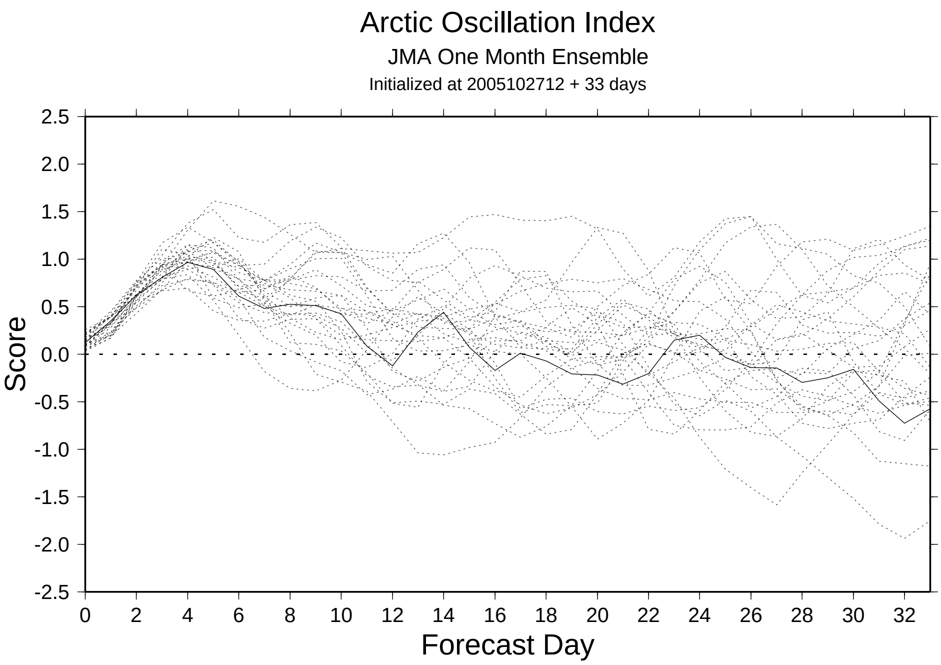

図 39: 2005 年 10 月 27 日 12Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 36 と同じ。

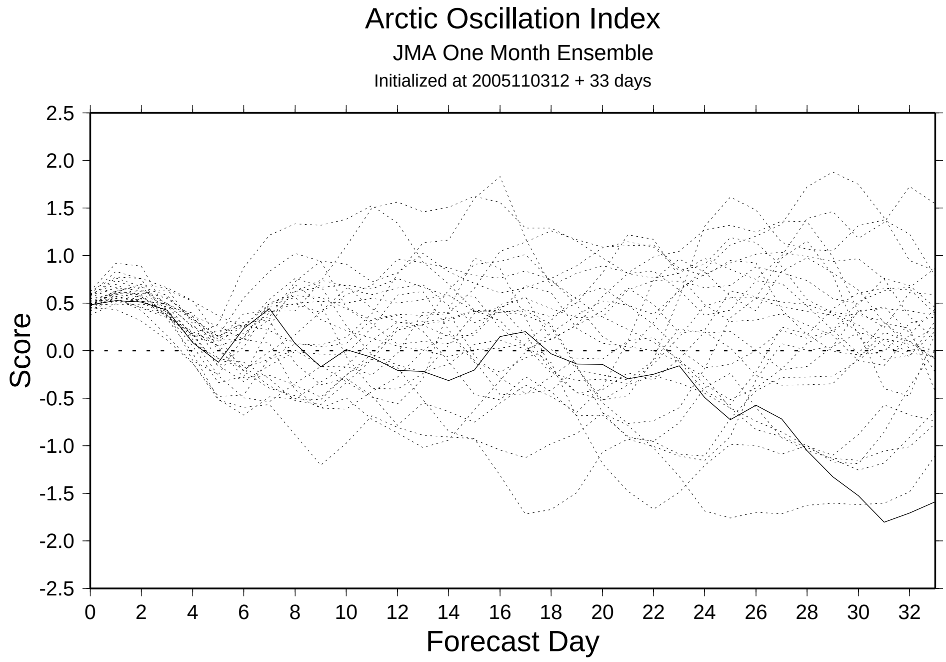

図 40: 2005 年 11 月 3 日 12Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 36 と同じ。

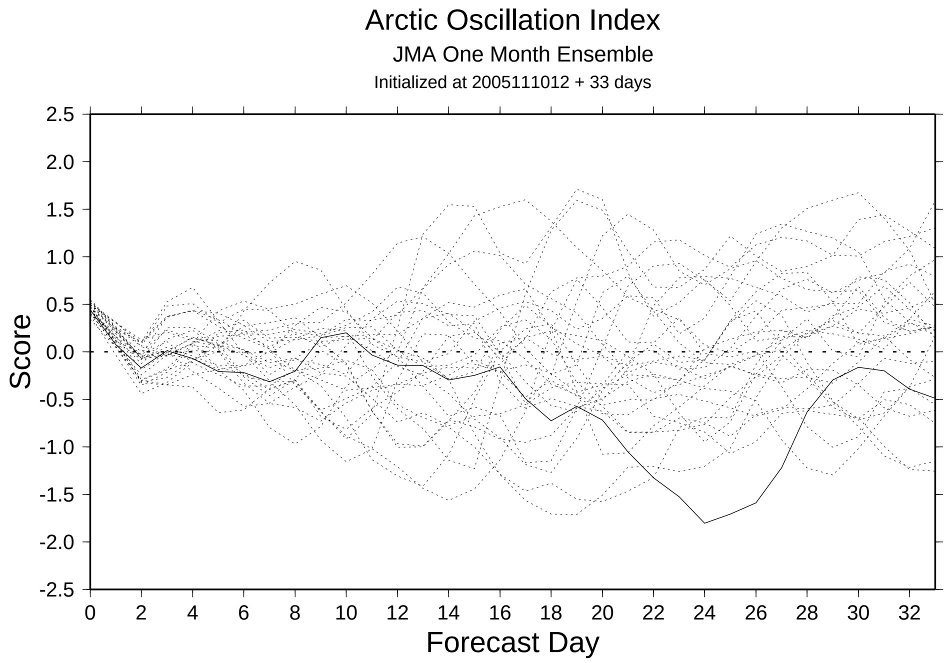

図 41: 2005 年 11 月 10 日 12Z を初期値とした AOI の 60 日予報。図の見方は図 36 と同じ。

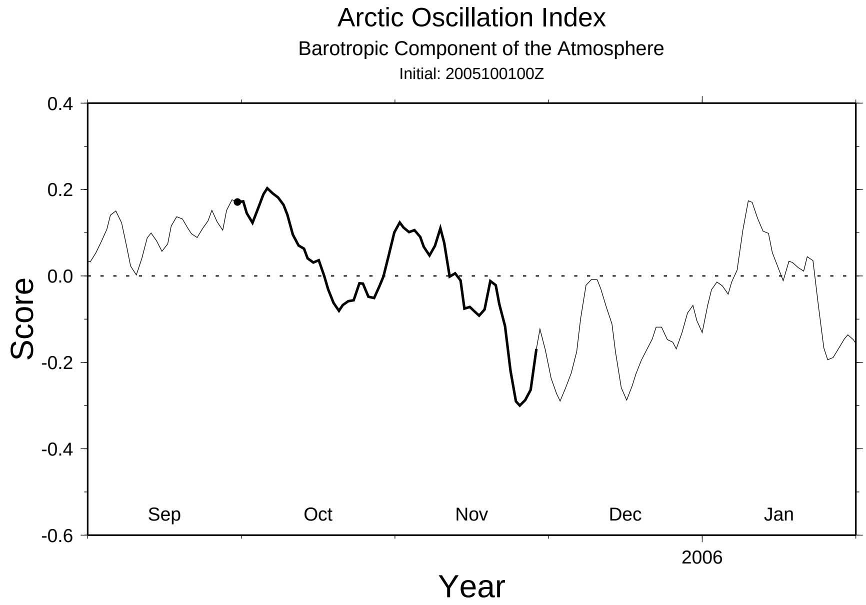

図 42: 2005 年 10 月 1 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報。ただし、正確な外力を与えている。細実線が実況、太実線が予報を表す。予報が実況に極めてよく合っているため、細実線と太実線が重なっている。

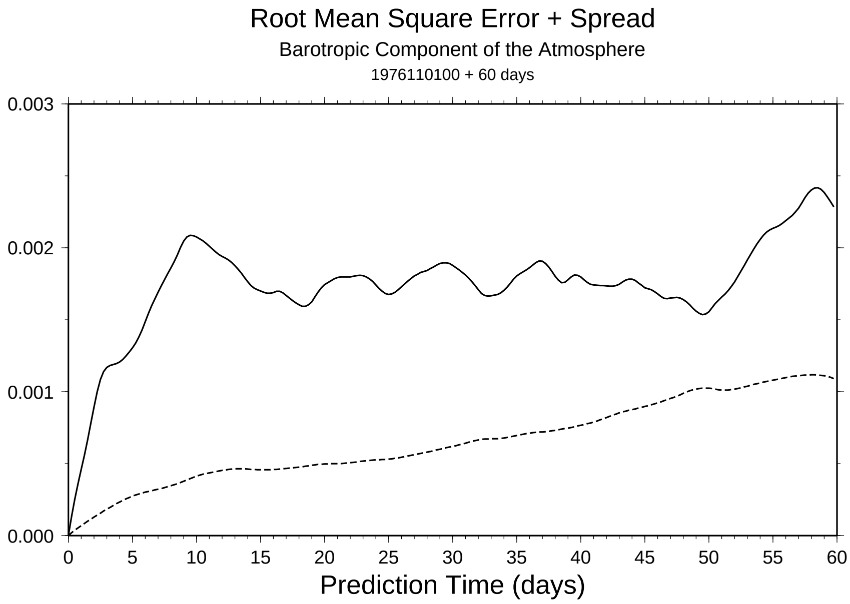

図 43: 1976 年 11 月 1 日 00Z を初期値とした 60 日予報の RMSE とスプレッド。実線が RMSE、破線がスプレッドを表す。

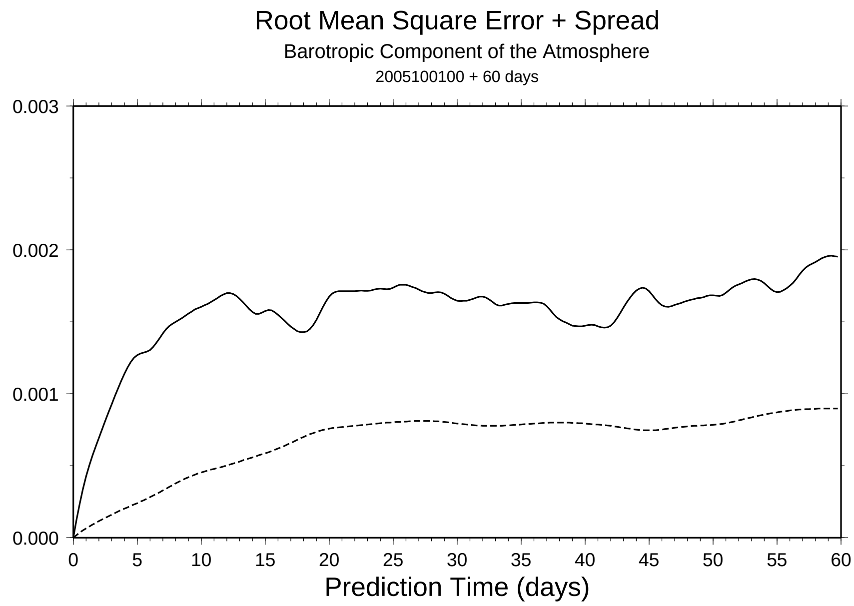

図 44: 図 43 と同じ。ただし、2005 年 10 月 1 日 00Z を初期値としている。

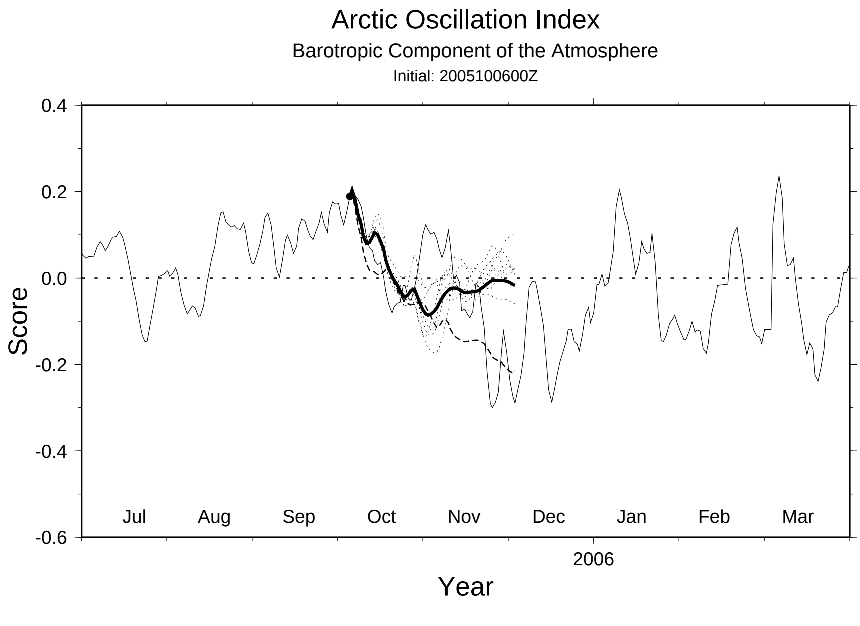

図 45: 2005 年 10 月 6 日 00Z を初期値とした AOI の 60 日予報。細実線は実況値、破線はコントロールラン、点線は摂動ラン、太実線はアンサンブル平均を示す。