

平成 18 年度

Rhines スケールでのエネルギーの蓄積による ブロッキングの数値再現実験

筑波大学大学院
生命環境科学研究科
地球環境科学専攻

修士 (地球環境科学) 学位論文

井尾 展悠

Rhines スケールでのエネルギーの蓄積による ブロッキングの数値実験

井尾 展悠

Abstract

In this study we conducted numerical experiments of blocking formation using a barotropic S-model developed in the University of Tsukuba, starting from observed initial conditions. The data used in this study are four-times daily NCEP/NCAR reanalysis for 51 years. We examine the barotropic component of the atmosphere in order to clarify low-frequency variabilities. The energy of atmospheric blocking is accumulated at the spherical Rhines scale C_R exceeding the Rossby wave saturation theory (Tanaka and Terasaki 2006). It is said that the energy level at C_R exceeds the saturation level of Rossby waves when a blocking occurs. We conduct numerical experiments to verify this theory by developing the model inserted Wave Maker that assumes baroclinic instability to certain mode (Growth-model). We select initial data for this experiments, firstly random initial date, secondarily 20 blockings listed in Watarai and Tanaka (2002).

As a result, we find that a blocking occurs in the simulation during 40 days for each random initial date. Both of the configurations, i.e, Ω and dipole type, are created in the simulation. For the simulation targeted on the 20 blockings, the Growth-model creates the blocking that is not shown by the normal S-model. It is also shown that the simulation is different from the observal data on the point of onset time and persistence. Therefore, we support the theory of atmospheric blocking caused by the saturation theory by conducting numerical simulations.

Key words

Atmospheric blocking, Rossby wave, baroclinic instability, spherical Rhines scale

目次

Abstract	i
List of Tables	iv
List of Figures	v
1 序	1
1.1 はじめに	1
1.2 Tanaka and Terasaki (2006) におけるブロッキング形成理論	2
1.3 本研究の目的	2
2 使用データ	3
3 モデルの概要	4
3.1 基礎方程式系	4
3.2 プリミティブ方程式系の導出	8
3.2.1 基礎方程式系の線形化	8
3.2.2 鉛直構造関数	10
3.2.3 水平構造関数	13
3.2.4 3次元ノーマルモード関数展開	16
3.3 エネルギー関係式	19
3.4 順圧プリミティブスペクトルモデルの設定	21
3.4.1 モデル方程式系	21
3.4.2 Growth モデル	22
4 実験概要	24
4.1 実験1：ランダムに選んだ初期値による数値実験	24
4.2 実験2：ブロッキングの数値予報	24
4.3 Zonal Index による評価	25
5 結果	26
5.1 実験1の結果	26
5.1.1 1990年1月12日00GMTおよびその関連の事例	26
5.1.2 5.1.1. 以外の事例	27
5.2 実験2の結果	28
5.2.1 1990年2月24日12GMTのブロッキングを対象とした事例	28
5.2.2 1989年1月24日00GMTのブロッキングを対象とした事例	29

6	考察	31
6.1	ブロッキング形成理論との対応性	31
6.2	実験 1 と実験 2 の結果の相違	31
7	結論	33
	Acknowledgements	34

表 目 次

1	北太平洋および北大西洋ブロックの典型を選別した 20 例 (Watarai and Tanaka (2002) より抜粋)	37
---	---	----

図 目 次

1	2次元平面におけるロスビー波砕波の模式図	38
2	球面 Rhines 比 R_i の分布図	39
3	位相空間における順圧エネルギーのアノマリー値	40
4	続き.	41
5	NCEP/NCAR 冬季データにおける順圧大気の 51 年間平均値エネルギー スペクトル図	42
6	実験 1: NCEP/NCAR 実況値 1990 年 1 月 12 日 00GMT~1 月 18 日 00GMT の天気図	43
7	実験 1: NCEP/NCAR 実況値 1990 年 1 月 20 日 00GMT~1 月 26 日 00GMT の天気図	44
8	実験 1: 1990 年 1 月 12 日初期値による Normal S-model run(1)	45
9	実験 1: 1990 年 1 月 12 日初期値による Normal S-model run(2)	46
10	実験 1: 1990 年 1 月 12 日 00GMT 初期値の Normal S-model run におけるエ ネルギースペクトル図	47
11	実験 1: 1990 年 1 月 12 日 00GMT 初期値による Normal S-model run におけ る帯状エネルギー図	48
12	実験 1: 1990 年 1 月 12 日初期値による Growth-model run(1)	49
13	実験 1: 1990 年 1 月 12 日初期値による Growth-model run(2)	50
14	実験 1: 1990 年 1 月 12 日 00GMT 初期値による Growth-model run(3)	51
15	実験 1: 1990 年 1 月 12 日 00GMT 初期値の Growth-model run によるエネ ルギースペクトル図	52
16	実験 1: 1990 年 1 月 12 日初期値の Growth-run による帯状流エネルギー図	53
17	実験 1: 1990 年 1 月 12 日 00GMT 初期値による Growth-model run における 順圧高度場 (1)	54
18	実験 1: 1990 年 1 月 12 日 00GMT 初期値による Growth-model run における 順圧高度場 (2)	55
19	実験 1: 1990 年 1 月 12 日初期値による Growth-model run における順圧高度 場 (3)	56
20	実験 1: 1990 年 1 月 4 日 00GMT 初期値の Growth-model run における順圧 高度場 (1). 東西波数 3, 南北モード 5 を e-folding time = 4.5 day で増幅さ せている.	57
21	実験 1: 1990 年 1 月 4 日 00GMT 初期値の Growth-model run における順圧 高度場 (2)	58

22	実験 1:1990 年 1 月 4 日 00GMT 初期値の Growth-model run における順圧高度場 (3)	59
23	実験 1:1990 年 1 月 18 日 00GMT 初期値の Growth-model run における順圧高度場 (1)	60
24	実験 1:1990 年 1 月 18 日 00GMT 初期値の Growth-model run における順圧高度場 (2)	61
25	実験 1:1990 年 1 月 18 日 00GMT 初期値の Growth-model run における順圧高度場 (3)	62
26	実験 1:1990 年 1 月 18 日 00GMT 初期値の Growth-model run における順圧高度場 (4)	63
27	実験 2:1996 年 2 月 24 日 12GMT (Onset) と 1996 年 3 月 1 日 00GMT (Mature) の順圧高度場	64
28	実験 2:1996 年 2 月 19 日 12GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および両者の差の順圧高度場	65
29	実験 2:1996 年 2 月 19 日 12GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および差の順圧高度場	66
30	実験 2:1996 年 2 月 19 日 12GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および差の順圧高度場	67
31	実験 2:1996 年 2 月 19 日 12GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および差の順圧高度場	68
32	実験 2:1996 年 2 月 19 日 12GMT 初期値の Normal S-model run によるエネルギースペクトル図	69
33	実験 2:1996 年 2 月 19 日 12GMT 初期値の Growth-model run によるエネルギースペクトル図	70
34	実験 2:Zonal Index による評価	71
35	実験 2:1996 年 2 月 19 日 12GMT 初期値のエネルギー時系列図	72
36	実験 2:1989 年 1 月 29 日 00GMT (Onset) と 1989 年 2 月 1 日 12GMT (Mature) のブロッキングの順圧高度場	73
37	実験 2:1989 年 1 月 24 日 00GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および両者の差の順圧高度場	74
38	実験 2:1989 年 1 月 24 日 00GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および差の順圧高度場	75
39	実験 2:1989 年 1 月 24 日 00GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および差の順圧高度場	76
40	実験 2:1989 年 1 月 24 日 00GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および差の順圧高度場	77

41	実験 2:1989 年 1 月 24 日 00GMT 初期値による S-model run のエネルギー スペクトル図	78
42	実験 2:1989 年 1 月 24 日 00GMT 初期値による Growth-model run のエネ ルギースペクトル図	79
43	実験 2:Zonal Index による評価 (太平洋域)	80
44	実験 2:Zonal Index による評価 (大西洋域)	81
45	実験 2:1989 年 1 月 24 日 00GMT 初期値によるエネルギー時系列図	82

1 序

1.1 はじめに

対流圏中高緯度で観測されるブロッキング現象は、一週間から長くて一ヶ月ほどの持続性をもつため、異常気象の1つとみなされており (例えば Tanaka and Milcovich, 1990), ブロッキングの生成のメカニズムの解明, 数値モデルによる予測は大きな課題である. 近年の大気大循環モデルの発展により, ブロッキングの再現性は向上しているが, ブロッキング開始や持続の予測において問題があるとされている (Colucci and Baumhefner, 1998). この原因としては, モデル分解能 (Traction, 1990), アンサンブル初期値の問題 (Colucci and Baumhefner, 1998) 等が挙げられている. 特に水平分解能に関しては, ブロッキングに限らず一般的な予報スキルにおいても, 水平分解能が細くなるほど高くなることが知られている. Traction (1990) では, R40 と R80 の二種類の水平分解能の予報実験の比較を行い, R40 ではできなかった3日前のブロッキングの予測が R80 のモデルでは可能であったと報告している.

一方, ブロッキングの生成のメカニズムについては, 移動性高低気圧が影響を及ぼしていると初期のブロッキング研究者によって示唆されていた (Rex, 1950). 後に力学的に研究され, ブロッキングパターンの基本場が移動性擾乱による渦度移流によって維持されることが示された. この高低気圧擾乱によるブロッキングへの正のフィードバック効果は, 多くの研究者によって検証された (Mullen, 1987; Nakamura and Wallace, 1990; Tanaka, 1991). これらはブロッキングの形成過程において, 傾圧過程が重要な役割を担っていることを示唆している. Tanaka (1998) では, 総観規模波動の励起メカニズムを取り入れた R20 程度の簡単な順圧大気モデルを用いてブロッキングのライフサイクルを再現できることを示した.

Tanaka and Kung (1988) は, 3次元ノーマルモード解析を行い, ブロッキングの前兆として, 総観規模の傾圧エネルギーから順圧エネルギーへ向かうエネルギー流がみられることを示した. また Tanaka and Terasaki (2006) では, Watarai and Tanaka (2002) で定義された北太平洋, 北大西洋ブロッキング 20 例に 3次元ノーマルモード解析を行い, 波数空間において球面 Rhines scale に過剰にエネルギーが蓄積されることを示した.

1.2 Tanaka and Terasaki (2006)におけるブロッキング形成理論

ブロッキング形成において、ロスビー波の砕波は重要である。Garcia (1991) によれば、ポテンシャルボルティシティ q に対して $\partial q / \partial y < 0$ がロスビー波砕波の条件であるという (図 1)。このことは、砕波と同時に位相空間におけるエネルギー飽和スペクトルに従うことを示している (図 5)。図 2 は 3 次元ノーマルモード関数で定義されたプリミティブ方程式のスペクトル表示における非線形項と線形項の比

$$R_i = \frac{|\sum_{ij} r_{ijk} w_j w_k|}{|\sigma_i w_i|} \quad (1)$$

の分布図であり、球面 Rhines 比と呼ばれる。ここで $R_i = 1$ となる時のスケール (Tanaka and Terasaki (2006) の C_R) を、特に球面 Rhines scale と呼び、ブロッキング形成時に重要な値となる。

図 3,4 は、位相空間における順圧エネルギーのアノマリー値を示している。北太平洋ブロッキング 10 事例のコンポジットおよび北大西洋ブロッキング 10 例のアノマリー値のコンポジットを対象としており、球面 Rhines scale に過剰にエネルギーが蓄積されている。

1.3 本研究の目的

Tanaka and Terasaki (2006) によって示されたブロッキング形成理論に基づき、数値モデルによってブロッキングの形成を行う。すなわち、球面 Rhines scale にエネルギーが過剰に蓄積されることによってブロッキングが形成されるという仮説を検証することを目的とした。この検証実験のために Tanaka and Nohara (2001) に詳しい順圧 S-model を使用した。ただし、本研究では Tanaka (1998) で用いられた傾圧不安定を想定する WM (Wave Maker) を導入し、不安定波を励起させるようにした。

2 使用データ

本研究では, NCEP/NCAR (National Center for Environmental Prediction and National Center for Atmospheric Research) Reanalysis Data を使用した (Kalnay et al. 1996).

NCEP/NCAR Reanalysis Data は, 1948 年 1 月 1 日から現在に至るまでのデータを保有しており, オンライン上で閲覧及び入手可能な全球解析データである.

(<http://www.cdc.noaa.gov/cdc/data.ncep.reanalysis.html>)

- 期間:

1950 年 1 月 1 日 ~ 1999 年 12 月 31 日

- 時間間隔:

Four time daily (0000Z, 0600Z, 1200Z, 1800Z)

- 状態変数:

u [ms^{-1}] 東西風

v [ms^{-1}] 南北風

ϕ [gpm] ジオポテンシャル

- 格子間隔:

2.5° longitude \times 2.5° latitude

- 鉛直気圧:

1000, 925, 850, 700, 600, 500, 400, 300, 250, 200, 150, 100, 70, 50, 30, 20, 10 [hPa]

3 モデルの概要

本研究では、Tanaka (1991;1998) に基づく球座標系順圧プリミティブスペクトルモデルを用いた。本章では、まずプリミティブ方程式系に3次元ノーマルモード関数 (three-dimensional normal mode functions, 以下 3-D NMFs) の直交性を適用して、スペクトル表示を導出する。そしてスペクトル表示された方程式系におけるエネルギー関係式を導く。また順圧モデルに関する詳細についても述べる。

3.1 基礎方程式系

本研究で用いた数値モデルの基礎方程式系である球座標系 (λ, θ, p) のプリミティブ方程式系は、水平方向の運動方程式, 熱力学第一法則, 連続の式, 状態方程式, 静力学平衡近似の式からなる (小倉, 1978)。

- 水平方向の運動方程式 (予報方程式)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \sin\theta v + \frac{1}{a \cos\theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan\theta}{a} uv + F_u \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \sin\theta u + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan\theta}{a} uv + F_v \quad (3)$$

- 熱力学第一法則 (予報方程式)

$$\frac{\partial c_p T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla c_p T + \omega \left(\frac{c_p T}{\partial p} - \alpha \right) = Q \quad (4)$$

- 連続の式 (診断方程式)

$$\frac{1}{a \cos\theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos\theta} \frac{\partial v \cos\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (5)$$

- 状態方程式 (診断方程式)

$$p\alpha = RT \quad (6)$$

- 静力学平衡近似の式 (診断方程式)

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha \quad (7)$$

ただし,

$$\mathbf{V} = (u, v)$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla = \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

である.

式 (1)~(6) 中の記号は以下の通りである.

λ : 経度	ω : 鉛直 p 速度 ($= dp/dt$)
θ : 緯度	F_u : 東西方向の摩擦力
p : 気圧	F_v : 南北方向の摩擦力
t : 時間	Q : 非断熱加熱
u : 東西風速度	Ω : 地球自転角速度 ($7.292 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$)
v : 南北風速度	a : 地球半径 (63712.2km)
ϕ : ジオポテンシャル	R : 乾燥空気の気体定数 ($287.04 \text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$)
T : 気温	c_p : 定圧比熱 ($1004 \text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$)
α : 比容	

3つの方程式 (1)~(3) で, 3つの従属変数(u, v, ϕ)のみを表すために, 熱力学第一法則の式 (3) 中の従属変数である気温 T と比容 α を, 診断方程式 (4)~(6) を用いて消去する.

ここで気温 T と比容 α とジオポテンシャル ϕ について, 以下のような摂動を定義する.

$$T(\lambda, \theta, p, t) = T_0(p) + T'(\lambda, \theta, p, t) \quad (8)$$

$$\alpha(\lambda, \theta, p, t) = \alpha_0(p) + \alpha'(\lambda, \theta, p, t) \quad (9)$$

$$\phi(\lambda, \theta, p, t) = \phi_0(p) + \phi'(\lambda, \theta, p, t) \quad (10)$$

ここで $T_0(p), \alpha_0, \phi_0$ はそれぞれ, 全球平均の気温, 全球平均の比容, 全球平均のジオポテンシャルであり, すべて気圧 p のみの関数である. また T', α', ϕ' はそれぞれ摂動の気温, 摂動の比容, 摂動のジオポテンシャルであり, 全球平均からの偏差である.

これを考慮すると診断方程式 (5), (6) は基本場についての診断方程式と, 摂動についての診断方程式に分けることができる.

$$p\alpha_0 = RT_0 \quad (11)$$

$$\frac{d\phi_0}{dp} = -\alpha_0 \quad (12)$$

$$p\alpha' = RT' \quad (13)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial p} = -\alpha' \quad (14)$$

以上の式 (7)~(13) を, 熱力学第一法則の式 (3) に代入する.

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T' + \omega \left(\frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{RT'}{pc_p} \right) + \omega \left(\frac{dT_0}{dp} - \frac{RT_0}{pc_p} \right) = \frac{Q}{C_p}$$

(15)

ただし, 全球平均気温 T_0 の時間変化および水平空間変化はないものとした.

ここで, 全球平均気温 T_0 とその偏差 T' との関係は $T_0 \gg T'$ なので, 式 (14) において左辺第 3 項の摂動気温の断熱変化項は無視することができる.

$$\omega \frac{RT_0}{pc_p} \gg \omega \frac{RT'}{pc_p} \quad (16)$$

この近似は, 下部成層圏においてよく成り立っている (Holton, 1975).

式 (14) の第 4 項を整理するため, 大気の安定度パラメータ $\gamma(p)$ を次のように定義する (Tanaka, 1985).

$$\gamma(p) = \frac{RT_0(p)}{c_p} - p \frac{dT_0(p)}{dp} \quad (17)$$

式 (15), (16) を用いて式 (14) を整理すると式 (17) になる.

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T' + \omega \frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{\omega \gamma}{p} = \frac{Q}{C_p} \quad (18)$$

式 (12), (13) より,

$$T' = \frac{p\alpha'}{R} = -\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p}$$

これを式 (17) に代入して,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \frac{p}{R} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} - \omega \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \frac{\omega \gamma}{p} = \frac{Q}{c_p} \quad (19)$$

を得る. 式 (18) の両辺に p/γ をかけて,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[-\left(\frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \phi' \right) \right] - \frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} - \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \omega = \frac{pQ}{c_p \gamma} \quad (20)$$

となる. 式 (19) によって, 熱力学第一法則の式 (3) を従属変数 ϕ' だけの方程式にすることができた. 方程式 (1), (2), (19) は閉じているが, 連続の式 (4) を組み込むために, 式 (19) の両辺を p で微分して左辺第 4 項に式 (4) を代入する.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[-\left(\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi' \right] + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ & = -\frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{pQ}{c_p \gamma} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

また有効位置エネルギー $A = \frac{1}{2} \frac{p^2}{R\gamma} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right)^2$ の保存性

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla + \omega \frac{\partial}{\partial p} \right) A = 0 \quad (22)$$

より, 式 (20) 中の大気安定パラメータ $\gamma(p)$ の p 依存性を無視する.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[- \left(\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi' \right] + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ &= - \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \omega p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{pQ}{c_p \gamma} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

以上より, 熱力学第一法則の式 (3) から気温 T と比容 α を消去し, 摂動ジオポテンシャル ϕ' についての予報方程式を導いた. 3つの従属変数 (u, v, ϕ') に対して, 閉じた3つの予報方程式 (1), (2), (22) が存在するので, この方程式系で解を一意に求めることができる.

Tanaka (1985) によると, これらの予報方程式 (1), (2), (22) から成るプリミティブ方程式系は, 以下のように簡単に行列表記できる.

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{N} + \mathbf{F} \quad (24)$$

尚, 式 (23) 以降は ϕ' を ϕ と表記することにする. τ は無次元化された時間であり, $\tau = 2\Omega t$ である. 式 (23) の各記号は以下の通りである.

●**U**: 従属変数ベクトル

$$\mathbf{U} = (u, v, \phi)^T \quad (25)$$

●**M, L**: 線形演算子

$$\mathbf{M} = 2\Omega \text{diag} \left(1, 1, -\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \right) \quad (26)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \sin \theta & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ 2\Omega \sin \theta & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

●**N**: 非線形項ベクトル

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv \\ -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + \omega p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (28)$$

●**F**: 外部強制項からなるベクトル

$$\mathbf{F} = \left(F_u, F_v, \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{pQ}{c_p \gamma} \right) \right)^T \quad (29)$$

ただし,

$diag()$: 対角行列

$()^T$: 転置行列

とする.

3.2 プリミティブ方程式系の導出

3.2.1 基礎方程式系の線形化

3次元ノーマルモード関数の定義にあたり, まず大気の静止 (基本) 状態を考慮する.

式 (23) の基礎方程式系の基本状態として, 断熱かつ摩擦なし, つまり $(\mathbf{F}=\mathbf{0})$ の静止大気 $((\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi}))=0$ を考え, そこに微小擾乱 (u', v') を与える. このとき式 (23) の非線形演算子 \mathbf{N} は,

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) u' - \omega \frac{\partial}{\partial p} u' + \frac{\tan \theta}{a} u' v' \\ -\left(\frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) v' - \omega \frac{\partial}{\partial p} v' - \frac{\tan \theta}{a} u' u' \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{R\gamma} \left(\frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \omega p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] \end{pmatrix}$$

2次以上の摂動項を無視すると, 結局 $\mathbf{N}=\mathbf{0}$ となり, 式 (23) を線形化した基本状態は以下のように表せる.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial \tau} + \mathbf{L} \mathbf{U}' &= 0 \\ \mathbf{U}' &= (u', v', \phi')^T \end{aligned} \quad (30)$$

これ以降は簡単のため, $\mathbf{U}' = (u', v', \phi')$ を $\mathbf{U} = (u, v, \phi)$ と略記する. このベクトル方程式 (29) において, 鉛直構造関数 $G_m(p)$ を導入して, 鉛直方向と水平方向に変数分離を行う.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\lambda, \theta, p, \tau) &= (u, v, \phi)^T \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (u_m, v_m, \phi_m)^T G_m(p) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{U}_m(\lambda, \theta, \tau) G_m(p) \end{aligned} \quad (31)$$

ここで, 添字の m は鉛直モード番号 (vertical mode number) を意味する. これを式 (29) に代入し, 分離された各変数に関する方程式を導く. ここではジオポテンシャル成分 (\mathbf{U} の第3成分) を例に説明する.

第 m 鉛直モードのみの方程式について表すと,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} (\phi_m G_m) \right] + \frac{G_m}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{G_m}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (32)$$

ここで ϕ_m は (λ, θ, t) の関数で p には依存しないことを考慮して,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[-\phi_m \frac{1}{G_m} \frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m}{dp} \right] + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (33)$$

また p の時間依存性はないので,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \frac{1}{G_m} \frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m}{dp} &= \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \left(\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} \right)^{-1} &= G_m \left(\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m}{dp} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (34)$$

式 (33) の左辺は λ, θ, t のみに依存し, 右辺は p のみに依存する. 等号が恒等的に成立するには両辺が定数でなくてはならない. この分離定数を $-gh_m$ と置くことにより, 以下の二つの方程式を得る.

$$\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m}{dp} + \frac{1}{gh_m} G_m = 0 \quad (35)$$

$$\frac{1}{gh_m} \frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (36)$$

常微分方程式 (34) を鉛直構造方程式 (vertical structure equation) と呼ぶ. また水平風成分についても同様に鉛直構造関数を導入して,

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v_m + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi_m}{\partial \lambda} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u_m + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi_m}{\partial \theta} = 0 \quad (38)$$

と導ける. 式 (35), (36), (37) をまとめて水平構造方程式 (horizontal structure equation) と呼ぶ. ここで分離定数中の h_m は距離の次元 (L) をもち, 鉛直構造方程式 (34) の固有関数である鉛直構造関数 $G_m(p)$ に対応する固有値として求まる. また, 水平構造方程式 (35) は, 流体層の厚さ h_m の線形浅水方程式系と同じ形であることから, h_m は等価深度 (equivalent height) の意味をもつ.

3.2.2 鉛直構造関数

ここでは前節で導いた鉛直構造方程式 (34) の解であり, 3次元ノーマルモード関数を構成する鉛直構造関数 $G_m(p)$ の導出と, 鉛直構造関数 $G_m(p)$ を用いた鉛直方向の波数展開について述べる. まず鉛直構造方程式 (34) を次のように整理する.

$$\mathbf{L} \left[G_m(p) \right] + \frac{1}{gh_m} G_m(p) = 0 \quad (39)$$

ただし,

$$\mathbf{L} = \frac{d}{dp} \frac{\beta}{R} \frac{d}{dp} = \frac{\beta}{R} \frac{d^2}{dp^2} + \frac{1}{R} \frac{d\beta}{dp} \frac{d}{dp}$$

$$\beta(p) = \frac{p^2}{\gamma(p)}$$

とする. 今, 次の境界条件が存在する.

$$\omega \rightarrow 0, \text{ as } p \rightarrow 0 \quad (40)$$

$$(u, v, w) = 0, \text{ at } p = p_s \quad (41)$$

(39) は上部境界において質量が保存される条件を示し, (40) は下部境界において速度がゼロであるという条件を示している.

以上の境界条件 (39), (40) は以下の手順で, 鉛直構造関数に関する境界条件 (42), (45) に書き換えられる. まず熱力学第一法則の式 (19) を線形化して,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \omega = 0 \quad (42)$$

上部境界の場合, 式 (42) に対して境界条件 (40) を考慮し, 式 (30) を代入することによって鉛直構造関数を導入すると,

$$\frac{dG_m(p)}{dp} \rightarrow 0, \text{ as } p \rightarrow 0 \quad (43)$$

という上部境界条件を得る.

下部境界条件の場合, 境界条件 (41) より,

$$gw = \frac{d\phi'}{dt} \Big|_{p=p_s} = \left[\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi' + \omega \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right]_{p=p_s} = 0 \quad (44)$$

また状態方程式 (5), 静力学平衡近似の式 (6), 地表水平移流項が 0 であることを考慮して,

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} \Big|_{p=p_s} - \omega \frac{RT_s}{p_s} = 0 \quad (45)$$

となる (T_s は地表気圧 p_s に対応する気温). ここで式 (41) と式 (44) で ω を消去して, 鉛直構造関数を導入すると式 (45) を得る.

$$\frac{dG_m(p)}{dp} + \frac{\gamma}{pT} G_m(p) = 0, \text{ at } p = p_s \quad (46)$$

鉛直構造方程式 (38) は同次型境界条件 (42), (45) の下で, Sturum-Liuville 型の境界値問題として解くことができる. これが $G_m(p) = 0$ 以外の解 (自明でない解) をもつとき, その解は与えられた方程式 (38) および境界条件 (42), (45) の固有関数であり, この固有関数 $G_m(p)$ が存在するような h_m の値は, その固有関数に対する固有値となる.

この固有値問題については, 有限要素法あるいは Galerkin 法により解を数値的に算出することができる (Tanaka, 1985). 本研究では Kasahara (1984) による Galerkin 法を用いて鉛直構造を求める. まず鉛直構造関数を Legendre 多項式 $P_i(p)$ により級数展開する.

$$G_m(p) = \sum_{i=0}^{J-1} a_i P_i(p) \quad (47)$$

J は自然数である. Legendre 多項式は直交性をもつ.

$$\frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} P_i(p) P_j(p) dp = \delta_{ij} \quad (48)$$

a_i を以下のように求める.

$$\int_0^{p_s} \left(\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m(p)}{dp} + \frac{1}{gh_m} G_m(p) \right) P_j(p) dp = 0 \quad (49)$$

に (46) を代入して,

$$\int_0^{p_s} \left(\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{d}{dp} \sum_{i=0}^{J-1} a_i P_i(p) \right) P_j(p) dp + \frac{1}{gh_m} \sum_{i=0}^{J-1} a_i P_i(p) P_j(p) dp = 0 \quad (50)$$

式 (47) の Legendre 多項式の直交性より,

$$\sum_{i=0}^{J-1} a_i \int_0^{p_s} \left(\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{d}{dp} P_i(p) \right) P_j(p) dp + \frac{1}{gh_m} p_s a_j = 0 \quad (51)$$

境界条件 (42), (45) に (46) を適用すると,

$$\left. \frac{dP_i(p)}{dp} \right|_{p \rightarrow 0} \rightarrow 0, \text{ as } p \rightarrow 0 \quad (52)$$

$$\left. \frac{dP_i(p)}{dp} \right|_{p \rightarrow 0} + \frac{\gamma(p_s)}{T_0(p_s)} P_i(p_s) = 0, \text{ at } p = p_s \quad (53)$$

となる. これを考慮して式 (50) を整理すると,

$$\sum_{i=0}^{J-1} \mathbf{K}_{ij} a_i = \frac{1}{gh_m} a_j \quad (54)$$

ただし,

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{p_s^2}{RT_0(p_s)} P_i(p_s) P_j(p_s) + \int_0^{p_s} dp \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dP_i(p)}{dp} \frac{dP_j(p)}{dp} \quad (55)$$

とする. 式 (53) の固有値問題を解くことにより, 固有値 h_m と固有関数 a_i が求まり, 式 (46) に代入することにより鉛直構造関数 $G_m(p)$ が求まる. この解を求めるためには, 式 (54) で全球平均気温 $T_0(p)$ の値が必要となる.

このようにして得られた鉛直構造関数 $G_m(p)$ が正規直交関数であるならば, これを基底に物理量を鉛直方向に波数展開できる. Sturm-Liouville 型の境界値の解は直交性をもつという特徴があるが, ここでは確認のため鉛直構造関数が直交性をもつことを示しておく.

$$\int_0^s G_{m'} \mathbf{L} \left[G_m \right] dp = \frac{\beta}{R} G_{m'} \frac{dG_m}{dp} \Big|_{p=0}^{p_s} - \int_0^{p_s} \frac{\beta}{R} \frac{dG_m}{dp} \frac{dG_{m'}}{dp} dp \quad (56)$$

$$\int_0^s G_m \mathbf{L} \left[G_{m'} \right] dp = \frac{\beta}{R} G_m \frac{dG_{m'}}{dp} \Big|_{p=0}^{p_s} - \int_0^{p_s} \frac{\beta}{R} \frac{dG_m}{dp} \frac{dG_{m'}}{dp} dp \quad (57)$$

式 (55) と (56) を辺々ひいて,

$$\int_0^s \left(G_{m'} \mathbf{L} \left[G_m \right] - G_m \mathbf{L} \left[G_{m'} \right] \right) dp = \left[G_{m'} \frac{\beta}{R} \frac{dG_m}{dp} - G_m \frac{\beta}{R} \frac{dG_{m'}}{dp} \right]_{p=0}^{p=p_s} \quad (58)$$

鉛直構造方程式 (38) より,

$$\mathbf{L} \left[G_m(p) \right] = -\frac{1}{gh_m} G_m(p) \quad (59)$$

$$\mathbf{L} \left[G_{m'}(p) \right] = -\frac{1}{gh_{m'}} G_{m'}(p) \quad (60)$$

それぞれを式 (57) に代入して境界条件 (42), (45) を考慮すると,

$$\frac{1}{g} \frac{h_m - h_{m'}}{h_m h_{m'}} \int_0^s G_m(p) G_{m'}(p) dp = \left[G_{m'} \frac{\beta}{R} \frac{dG_m}{dp} - G_m \frac{\beta}{R} \frac{dG_{m'}}{dp} \right]_{p=0}^{p_s} \quad (61)$$

$$= 0 \quad (62)$$

式 (60) より $h_m \neq h_{m'}$ のときに鉛直構造関数が直交関係を成立させることが示された. $G_m(p)$ は適当な定数をかけて正規化することによって次の正規直交関係を得る.

$$\frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} G_m(p) G_{m'}(p) dp = \delta_{mm'} \quad (63)$$

以上の鉛直構造関数 $G_m(p)$ の正規直交性により, 気圧 p の任意の関数 $f(p)$ について, 次の鉛直変換を導くことができる.

$$f(p) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m G_m(p) \quad (64)$$

$$f(m) = \frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} f(p) G_m(p) dp \quad (65)$$

ここで f_m は第 m 鉛直モードの鉛直変換係数である.

鉛直モード $m = 0$ は順圧 (barotropic) モード, または外部 (external) モードといい, 鉛直方向に節をもたず, ほとんど全層で一定のまま変化しないモードである. これに対して鉛直モード $m \geq 1$ は傾圧 (baroclinic) モード, または内部 (internal) モードといい, m 番目のモードに関しては鉛直方向に m 個の節をもつ.

本研究で用いた順圧スペクトルモデルは, 鉛直モード $m = 0$ の順圧モードだけを考慮したモデルであり, 鉛直方向に平均した大気の特性を考慮するのに適したモデルであるといえる. 順圧モード $m = 0$ における等価深度 h_0 は 9728.4 m である.

3.2.3 水平構造関数

本節では, 鉛直構造関数 $G_m(p)$ とともに 3 次元ノーマルモード関数を構成する水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ を導出し, 水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ を用いた水平方向の波数展開について述べる.

前節で, 第 m 鉛直モードの鉛直構造関数の固有値として得た等価深度 h_m を用いて, 水平構造方程式 (35), (36), (37) を解く. ここで式 (35), (36), (37) を,

$$\mathbf{M}_m \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U}_m + \mathbf{L} \mathbf{U}_m = 0 \quad (66)$$

と行列表記する. 添字の m は第 m 鉛直モードを意味する. ただし,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m &= 2\Omega \text{diag}\left(1, 1, \frac{1}{gh_m}\right) \\ \mathbf{U}_m &= (u_m, v_m, \phi_m)^T \end{aligned}$$

である. ここで次のスケール行列 $\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m$ を導入する.

$$\mathbf{X}_m = \text{diag}(\sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, gh_m) \quad (67)$$

$$\mathbf{Y}_m = 2\Omega \text{diag}(\sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, 1) \quad (68)$$

これらを式 (64) に以下のように作用させる.

$$(\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) = 0 \quad (69)$$

ここで

$$\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m = \text{diag}(1, 1, 1) \quad (70)$$

だから, 式 (67) は

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m)(\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) = 0 \quad (71)$$

と書ける. 尚,

$$\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta & \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ \sin \theta & 0 & \alpha_m \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (72)$$

である. 式 (70) 中の α_m は次のように定義した笠原パラメータと呼ばれるものである.

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{gh_m}}{2\Omega a} \quad (73)$$

このことは, 浅水方程式の 4 つの惑星パラメータ (g : 重力, h_m 等価深度, Ω : 地球の自転角速度, a :) が, 唯一の惑星固有パラメータ α_m だけであらわせることを示している (Tanaka, 1985).

式 (69) は時間 τ の線形システムであるから次のように解を仮定して, 水平方向成分と時間成分とに変数分離することができる.

$$\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m(\lambda, \theta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) e^{-i\sigma_{nlm}\tau} \quad (74)$$

$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ は水平構造関数 (horizontal structure function), または Hough 関数と呼ばれる. Hough 関数は第 m 鉛直モードに相当する水平ノーマルモード, すなわち水平自由振動を意味し, 経度 λ と緯度 θ の関数である. 添字の n は東西波数, l は南北モード番号を示している.

式 (72) を水平構造方程式 (69) に代入して,

$$-i\sigma_{nlm} \mathbf{H}_{nlm} + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) \mathbf{H}_{nlm} = 0 \quad (75)$$

この固有値問題を解くことで固有関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ と, 対応する固有値 σ_{nlm} を求めることができる. 式 (69) は緯度 λ について線形であるから, Hough ベクトル関数 $\Theta_{nlm}(\theta)$ を用いて $\text{textbf{H}}_{nlm}(\lambda, \theta)$ を次のように経度依存と緯度依存とに変数分離できる.

$$\text{textbf{H}}_{nlm}(\lambda, \theta) = \Theta_{nlm}(\theta) e^{in\lambda} \quad (76)$$

ただし,

$$\Theta_{nlm}(\theta) = \begin{pmatrix} U_{nlm}(\theta) \\ -iV_{nlm}(\theta) \\ Z_{nlm}(\theta) \end{pmatrix} \quad (77)$$

とする. 南北風成分に関しては位相を $\pi/2$ だけずらすために $i = \sqrt{-1}$ がかけられている. 南北モードは 3 種類の異なるモードから構成される. 一つは低周波の西進ロスビーモード (Rossby mode) l_r で, 残りの二つは高周波の西進, 及び東進する重力波モード (gravity mode) l_{wg}, l_{eq} である.

Swarztrauber and Kasahara (1985) によると, 水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ は球面調和関数展開の和として得られる. この方法で求められる水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ が正規直交性をもつならば, これを基底にして波数展開することができる. 水平構造関数が直交関数であることが以下のように示される.

経度と緯度に関する内積は以下のように表される.

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm'} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\mathbf{U}_{nlm} \mathbf{U}_{n'l'm'}^* + \mathbf{V}_{nlm} \mathbf{V}_{n'l'm'}^* + Z_{nlm} Z_{n'l'm'}^*) e^{-i(\sigma_{nlm} - \sigma_{n'l'm'}^*)\lambda} \cos \theta d\lambda d\theta \quad (78)$$

アスタリスクは複素共役を意味し, nlm と $n'l'm$ は東西波数と南北モード番号の異なるモードを示している. 式 (73) の線形演算子 $\mathbf{L}_m = \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m$ は非対称のエルミート行列であるため, 次の関係 (skew-self adjoint) が成立する.

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{L}_m \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle + \langle \mathbf{L}_m \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle \quad (79)$$

式 (77) に式 (73) を代入して,

$$(\sigma_{nlm} - \sigma_{n'l'm}^*) \langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0 \quad (80)$$

を得る. 式 (78) から以下の二つの条件が課せられる.

- $n = n'$ かつ $l = l'$ のとき

$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle$ は線形浅水方程式系の全エネルギーに比例する量であり, 決してゼロにならない. よって式 (78) を満たすためには $\sigma_{nlm} = \sigma_{n'l'm}^*$ である必要があり, 従って σ_{nlm} はじっすうでなくてはならない.

- それ以外のとき

$\sigma_{nlm} \neq \sigma_{n'l'm}^*$ であれば, 式 (78) を満たすためには $\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0$ が成り立つ必要がある. すなわち固有関数 σ_{nlm} に相当する固有関数 \mathbf{H}_{nlm} が, 固有振動数 $\sigma_{n'o'm}$ に相当する固有関数 $\mathbf{H}_{n'l'm}$ と直交関係にあることを示している.

以上の二つの条件から, 任意のモード nlm について, 下の正規直交関係が成立する.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_{nlm} \cdot \mathbf{H}_{n'l'm}^* \cos \theta d\lambda d\theta \\ &= \sigma_{nn'} \sigma_{ll'} \end{aligned} \quad (81)$$

以上の水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ の直交性から, 次のフーリエ-ハフ変換が導かれる.

第 m 鉛直モードに相当する物理空間において, λ, θ, τ を変数とする任意のベクトル関数を $\mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau)$ とすると,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{nlm}(\tau) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \\ a_{nlm}(\tau) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau) \cdot \mathbf{H}_{nlm}^*(\lambda, \theta) \cos \theta d\lambda d\theta\end{aligned}\quad (82)$$

となる.

3.2.4 3次元ノーマルモード関数展開

ここでは, 3.2.2 と 3.2.3 で扱った鉛直構造関数と水平構造関数を結合させ, 3次元ノーマルモード関数 $\Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p)$ を構成し, 式 (23) を展開する. 3次元ノーマルモード関数 $\Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p)$ は鉛直構造関数 $G_m(p)$ と水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ とのテンソル積であり, 以下のように定義される.

$$\begin{aligned}\Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) &= G_m(p) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \\ &= G_m(p) \Theta_{nlm}(\theta) e^{in\lambda}\end{aligned}\quad (83)$$

この3次元ノーマルモード関数も以下に示す内積の下で, 直交関係を満たす.

$$\begin{aligned}\langle \Pi_{nlm}, \Pi_{n'l'm'} \rangle &= \frac{1}{4\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \Pi_{nlm} \cdot \Pi_{n'l'm'}^* \cos \theta d\lambda d\theta dp \\ &= \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}\end{aligned}\quad (84)$$

この関係により, 3次元ノーマルモード関数展開が導かれる. 式 (23) 中の \mathbf{U} と \mathbf{N} と \mathbf{F} は3次元ノーマルモード関数によって次のように展開される.

$$\mathbf{U}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^m w_{nlm}(\tau) \mathbf{X}_m \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (85)$$

$$\mathbf{N}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^m n_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (86)$$

$$\mathbf{F}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^m f_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (87)$$

ここで $w_{nlm}, n_{nlm}(\tau), f_{nlm}$ はそれぞれ, 従属変数ベクトル \mathbf{U} , 非線形演算子 \mathbf{N} , 外部強制ベクトル \mathbf{F} についての展開係数である. 各々時間 τ のみの関数である.

式 (23) と 3次元ノーマルモード関数との内積を次のようにとり, スペクトル表記を導く.

$$\left\langle \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} + \mathbf{L} \mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F}, \mathbf{Y}_m^{-1} \Pi_{nlm} \right\rangle = 0 \quad (88)$$

計算過程が複雑な非線形演算子の内積を計算しておく. 尚, これ以降は3重添字 $nlm, n'l'm', n''l''m''$ をそれぞれ i, j, k と表記することにし, i で表示される波数は $n_i l_i m_i$, j で表示される波数は $n_j l_j m_j$, k で表示される波数は $n_k l_k m_k$ と書いて区別することにする.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}, \mathbf{Y}_{m_i}^{-1} \Pi_i \rangle &= \frac{1}{4\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} G_{m_i} e^{-in_i \lambda} \\ &\quad \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2\Omega \sqrt{gh_{m_i}}} U_i \\ \frac{1}{2\Omega \sqrt{gh_{m_i}}} (-iV_i) \\ \frac{1}{2\Omega} Z_i \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{c} -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv \\ -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + \omega p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \end{array} \right) \end{aligned} \quad (89)$$

式(84)を成分で書くと式(89)になる. この級数展開(89)を式(88)の各変数に代入する. 代入の際, 添字を j, k に変えて添字 i と区別する.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=0}^K w_i \sqrt{gh_{m_i}} U_i G_{m_i} e^{in_i \lambda} \\ v &= \sum_{i=0}^K w_i \sqrt{gh_{m_i}} (iV_i) G_{m_i} e^{in_i \lambda} \\ \phi &= \sum_{i=0}^K w_i gh_{m_i} Z_i G_{m_i} e^{in_i \lambda} \end{aligned} \quad (90)$$

また鉛直 p -速度 ω は発散と関係する事から, 以下のように $\sigma_i Z_i$ を用いた級数展開を導くことができる (田中 他, 1997). まず連続の式(4)を鉛直積分して式(89)を代入する.

$$\begin{aligned} \omega &= - \int_0^p \nabla \cdot \mathbf{V} dp \\ &= - \int_0^p \left(\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} \right) dp \\ &= - \sum_{i=0}^K \omega_i \int_0^p G_{m_i} dp \frac{\sqrt{gh_{m_i}}}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} U_i e^{in_i \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (-iV_i \cos \theta) e^{in_i \lambda} \right] \end{aligned} \quad (91)$$

ここで水平構造関数の第3成分(35)より,

$$i\sigma_i \frac{2\Omega}{\sqrt{gh_{m_i}}} Z_i e^{in_i \lambda} = \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} U_i e^{in_i \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (-iV_i \cos \theta) e^{in_i \lambda} \right] \quad (92)$$

だから, これを代入して,

$$\omega = \sum_{i=0}^K \omega_i 2\Omega \int_0^p G_{m_i} dp (-i\sigma_i Z_i) e^{in_i \lambda} \quad (93)$$

式(92)中の G_{m_i} の不定積分は鉛直構造方程式(34)を積分することによって G_{m_i} の1回微分で表現することができる.

$$\int_0^p G_{m_i} dp = - \frac{gh_{m_i}}{R\gamma} p^2 \frac{dG_{m_i}}{cp} \quad (94)$$

また式 (88) を展開する過程で現れる G_{m_i} の高次の微分は、次のように鉛直構造方程式 (34) を用いて G_{m_i} の 1 階微分で表現することができる。

$$-p \frac{d}{dp} \frac{p}{R\gamma} \frac{dG_{m_i}}{dp} = \frac{p}{R\gamma} \frac{dG_{m_i}}{dp} + \frac{G_{m_i}}{gh_{m_i}} \quad (95)$$

式 (92),(93),(94) を式 (88) に代入する。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}, \mathbf{Y}_{m_i}^{-1} \Pi_i \rangle &= -i \sum_{j=0}^K \sum_{k=0}^K w_j w_k \frac{1}{4\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \\ &\left(\begin{array}{c} U_i \\ V_i \\ Z_i \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{ccc} P_1 \left(\frac{n_k U_k}{\cos \theta} + \tan \theta V_k \right) & -P_1 \frac{dU_k}{d\theta} & P_2 U_k \\ P_1 \left(\frac{n_k V_k}{\cos \theta} + \tan \theta U_k \right) & -P_1 \frac{dV_k}{d\theta} & P_2 V_k \\ P_3 \frac{n_k Z_k}{\cos \theta} & -P_3 \frac{dZ_k}{d\theta} & -P_4 Z_k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} U_j \\ V_j \\ \sigma_j Z_j \end{array} \right) \\ &\quad e^{i(-n_i+n_j+n_k)\lambda} \cos \theta d\lambda d\theta dp \end{aligned} \quad (96)$$

ただし、

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\sqrt{gh_{m_j}} \sqrt{gh_{m_k}}}{2\Omega a \sqrt{gh_{m_i}}} G_{m_i} G_{m_j} G_{m_k} \\ P_2 &= \frac{\sqrt{gh_{m_k}} gh_{m_j}}{\sqrt{gh_{m_i}} R\gamma} p^2 G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} \frac{dG_{m_k}}{dp} \\ P_3 &= \frac{\sqrt{gh_{m_i}}}{2\Omega a} G_{m_i} G_{m_j} G_{m_k} - \frac{\sqrt{gh_{m_k}} gh_{m_j}}{2\Omega a R\gamma} p^2 G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} \frac{dG_{m_k}}{dp} \\ P_4 &= G_{m_i} G_{m_j} G_{m_k} + \frac{gh_{m_k}}{R\gamma} p G_{m_i} G_{m_j} \frac{dG_{m_k}}{dp} + \frac{gh_{m_k}}{R\gamma} p G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} \frac{dG_{m_k}}{dp} \\ &\quad + \left(\frac{gh_{m_k}}{R\gamma} - 1 \right) \frac{gh_{m_j}}{R\gamma} p^2 G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} \frac{dG_{m_k}}{dp} \end{aligned} \quad (97)$$

とする。

以上より、非線形項ベクトルの内積を 3 次元ノーマルモードの 3 重積の定積分にまとめることができた。式 (95) におけるこの 3 重積分を非線形相互作用係数 r_{ijk} とおくと、式 (87) は次のようにまとめることができ、展開係数のみのプリミティブ方程式系を記述することができる。

$$\begin{aligned} \frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma w_i &= -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w_j w_k + f_i \\ i &= 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (98)$$

非線形項中の r_{ijk} は非線形の波-波相互作用 (wave-wave interaction) および、帯状-波相互作用 (zonal-wave interaction) に関する相互作用係数 (interaction coefficients) で実数である。K は全波数で、 $K=(2N+1)(L+1)(M+1)$ である。N は東西全波数, L は南北全波数, M は

鉛直全波数を示す. 厳密には $K \rightarrow \infty$ としなくてはならないが, 通常はある波数で切断して方程式系を構成する.

以上より, 順圧成分と傾圧成分からなる鉛直構造関数, ロスビーモードと重力波モードからなる水平構造関数の両方を用いることで, プリミティブ方程式系をスペクトル表示 (97) で表すことができた.

3.3 エネルギー関係式

ここでは前節で導いた 3 次元ノーマルモードを用いて, エネルギーに関する方程式を導く. まず式 (23) と $\frac{p_s}{2g}\mathbf{U}$ で内積をとり, 次のエネルギーバランス方程式を得る.

$$\frac{d}{d\tau}E_{nlm} = N_{nlm} + L_{nlm} \quad (99)$$

各項の内積を以下に示す. ただし,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{S} \int_S dS = \frac{1}{4\pi p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\lambda d\theta$$

とする.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{p_s}{2g}\mathbf{U}, \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} \right\rangle &= \frac{d}{d\tau} \frac{1}{Sg} \int_S \left[\int_0^{p_s} (K + A) dp + \frac{1}{2} \frac{p_s}{RT_s} \phi_s^2 \right] dS \\ &\equiv \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \frac{d}{d\tau} E_{nlm} \end{aligned} \quad (100)$$

地表面におけるジオポテンシャルの鉛直フラックスの発散は全球エネルギー解析において無視できるから,

$$\left\langle \frac{p_s}{2g}\mathbf{U}, \mathbf{L}\mathbf{U} \right\rangle = \frac{1}{Sg} \int_S \int_0^{p_s} \nabla \cdot \phi \mathbf{V} dp dS = 0 \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{p_s}{2g}\mathbf{U}, \mathbf{N} \right\rangle &= \frac{1}{Sg} \int_S \int_0^{p_s} \left[-\nabla \cdot (K + A) \mathbf{V} - \frac{\partial}{\partial p} (K + A) \omega \right] dp dS \\ &\quad + \frac{1}{Sg} \int_S \frac{p_s \phi_s}{\gamma} \left(-\mathbf{V} \cdot \nabla \frac{p}{R} \frac{\partial \phi}{\partial p} - \omega \frac{\partial}{\partial p} \frac{p}{R} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \Big|_{p=p_s} dS \\ &\equiv \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M N_{nlm} = 0 \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{p_s}{2g}\mathbf{U}, \mathbf{F} \right\rangle &= \frac{1}{Sg} \int_S \int_0^{p_s} \left(u F_u + v F_v + \frac{RT}{c_p \gamma} Q dp \right) dS \\ &\quad + \frac{1}{Sg} \int_S \frac{p_s \phi_s}{\gamma} Q_s dS \\ &\equiv \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M F_{nlm} \end{aligned} \quad (103)$$

ここで K は運動エネルギー, A は有効位置エネルギー, 両方の和を全エネルギー E とする.

$$\begin{aligned} E &= K + A \\ K &= \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \\ A &= \frac{1}{2} \frac{p^2}{R\gamma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right)^2 \end{aligned}$$

式 (99)~(102) 中の $\frac{p_s}{2g}$ はエネルギーの次元 $[Jm^{-2}]$ に直すための係数である. 添字の s は地表面での変数を意味する. 式 (99)~(102) のそれぞれの最右辺は, 式 (84)~(86) に対して式 (83) の 3 次元ノーマルモード関数の直交性と式 (65), (66) のスケール行列を代入することによって得られる. またここで静的安定度パラメータ γ の鉛直方向の変化は無視している (Holton, 1975).

式 (98) と (100) からわかるように基礎方程式中の線形項は w_{nlm} の大きさを変化せず波の位相変化のみを表現する項であり, エネルギーの時間変化には寄与していない. ここで式 (98) に対して断熱かつ摩擦なしの条件を仮定し 3 次元ノーマルモード関数で展開することにより, 次のエネルギー保存則を導ける (Tanaka, 1985)

$$\sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \frac{d}{d\tau} E_{nlm} = 0 \quad (104)$$

ここで,

$$E_{0lm} = \frac{1}{4} p_s h_m |w_{0lm}|^2 \quad (105)$$

$$E_{nlm} = \frac{1}{2} p_s h_m |w_{nlm}|^2 \quad (106)$$

という形で, モードごとの全エネルギーは定義される. この式 (104), (105) を時間微分して, 前節で導いたプリミティブスペクトル方程式系 (97) を代入することで次のエネルギー変換量が定義される.

$$\begin{aligned} N_{nlm} &= p_s \Omega h_m [w_{nlm}^* n_{nlm} + w_{nlm} n_{nlm}^*] \\ &= -p_s \Omega h_m \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K i r_{ijk} (w_i^* w_j w_k - w_i w_j^* w_k^*) \end{aligned} \quad (107)$$

$$F_{nlm} = p_s \Omega h_m [w_{nlm}^* f_{nlm} + w_{nlm} f_{nlm}^*] \quad (108)$$

式 (104)~(107) の関係を用いることで東西波数 n , 南北モード l , 鉛直モード m ごとに, 式 (98) における各項のエネルギースペクトルを得ることができる.

3.4 順圧プリミティブスペクトルモデルの設定

3.4.1 モデル方程式系

本件球で用いたモデルは前節までに導いたプリミティブ方程式系のスペクトル表記 (97) の鉛直モード $m = 0$ のみを考慮した順圧プリミティブスペクトルモデルである. 鉛直モード $m = 0$ だけで方程式系 (87) を閉じると

$$\left\langle \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} + \mathbf{L} \mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F}, \mathbf{Y}_0^{-1} \Pi_{nl0} \right\rangle = 0 \quad (109)$$

これをスペクトル表記すると

$$\frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma w_i = -i \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^K r_{ijk} w_j w_k + s_i \quad (110)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, K$$

ここで K は式 (97) の K とは異なり, 順圧スペクトルモデルにおける全波数を意味し, $K = (2N + 1)(L + 1)$ である. 本研究では東西波数は $n = 0, 1, \dots, 20$ で, 南北モードはロスビーモード $l_r = 0, 1, \dots, 20$ の赤道対称モード (奇数モード) で波数切断している.

右辺第一項の非線形項は, 順圧モードにおける波-波相互作用および帯状-波相互作用の効果を意味する. 残りの非線形効果には順圧-傾圧相互作用があるが, 今は順圧モードのみを考慮しているため右辺第一項の非線形項ではこの効果を表現することができない. 式 (97) における外力の順圧成分 f_i の他に順圧-傾圧相互作用の項 g_i が新たに加わってくる. 本研究では, $s_i = f_i + g_i$ を順圧大気の外力と呼ぶことにして, $s_i = s_i(\omega_i, \tau)$ のように従属変数 w_i と時間の関数としてパラメタライズを行った.

$$s_i = \tilde{s}_i + A_{ij} w_j + B_{ij} w_j^* + \epsilon_i \quad (111)$$

ここで, \tilde{s}_i は s_i の気候値, アステリスクは複素共役であり, 残差 ϵ_i のノルムを最小化するようにシステム行列 A_{ij}, B_{ij} を観測データから順次以下の回帰式で求めている (Golub and Van Loan, 1983).

$$A_{ij} = \bar{s}_i' w_j^+ \quad (112)$$

$$w_j^+ = w_k^H (w_k w_j^H)^{-1} \quad (113)$$

ここでバーは時間平均, s_i' は s_i のアノマリ, $()^H$ は共役転置行列, w_j^+ は w_j の偽逆行列である. 同様にして

$$B_{ij} = \bar{s}_i' w_j^{*+} \quad (114)$$

ここで、 ϵ_i は行列 A による第一残差である. 多くの観測値から未知のシステム行列を解くこのような問題を逆問題という (Tanaka and Nohara, 2001).

観測データとして, 本研究では 1950-1999 年の 50 年間の冬季の NCEP/NCAR 再解析データを用いた (Kalnay et al. 1996). 日に 4 回の観測データから式 (84) から状態変数 w_i を求め, 式 (109) から順圧大気の外力 s_i を診断的に算出する. 得られた 50 年分の外力 s_i のデータから, 気候値 s_i とアノマリ s'_i を計算する. 気候値としては, 日々の 50 年平均値に対し, 3ヶ月以上の周期を持つ調和波で再合成し平滑化したものを用いた. このアノマリ s'_i を状態変数 w_i で回帰することによって, 式 (110) のようにシステム行列 A_{ij}, B_{ij} を順次決定することができる. モデルを構築する際に状態変数 w_i として正 (および 0) の東西波数のみを扱うことから, 負の東西波数による回帰を共役複素数を用いて行う必要がある. 観測データから逆問題を解いてモデルの最適外力を統計的 (Statistical) にもとめていることから, このモデルを順圧 S-モデルと呼んでいる. このモデルを用いて統計的に独立な 2000 年のデータについて現実大気の予報を実際に行ったところ, このモデルは月平均で約 8 日の予報能力を持つことが示された (Tanaka and Nohara, 2001).

しかしながら, 順圧 S-モデルでは予報誤差の最大要因となる傾圧不安定波の増幅が弱いという特徴がある. これは, 相関解析によって地形効果などの準定常成分は表現できたものの, 非定常で複雑な総観規模の傾圧不安定擾乱が弱めにしか表現されないという欠点による. そこで, ブロッキングの数値実験を目的とした本研究では, 地形や海陸分布の熱的效果による基本場を再現する目的で上記のシステム行列 (AB) を導入し, さらに他の物理過程を導入した.

$$\begin{aligned} s_i = & s_i + A_{ij}w_j + B_{ij}w_j^* + (BC)_{ij}w_j \\ & + (DF)_{ij}w_j + (DZ)_{ij}w_j + (DE)_{ij}w_j \end{aligned} \quad (115)$$

ここで $(BC)_i$ は傾圧不安定波, $(DF)_i$ は拡散過程, $(DZ)_i$ は帯状風摩擦, $(DE)_i$ はエクマンパンピングを意味する. 傾圧不安定波はエネルギーを生成する項, そして拡散過程と帯状風摩擦とエクマンパンピングはエネルギーを散逸する働きがある. このパラメタライズは, 大気エネルギーが全ての波数で強制・散逸を起こすような設定である.

3.4.2 Growth モデル

本研究では, Tanaka (1998) で行われたように, 傾圧不安定を想定した WM (Wave Maker) を導入する. この傾圧不安定のパラメタライゼーションとしては 3 次元スペクトルモデル (97) 式を用い, 任意の帯状基本場に対する傾圧不安定問題を解くことで得る. 基本場

が0でないときには、平均流と波の相互作用により、その基本場のエネルギーを引き出せる構造を持つ波が不安定波として出現する。不安定解を仮定し、線形方程式の初期値問題を解けば、次のような固有問題へと帰着する。

$$\nu \xi = (\mathbf{D}_n + \mathbf{B}_n) \xi \quad (116)$$

$$\mathbf{D}_n = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_K) \quad (117)$$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^K (r_{ijk} + r_{ikj}) \bar{w}_k \quad (118)$$

ここで、 b_{ij} は行列 \mathbf{B}_n の成分で、東西、南北、鉛直の切断波数を N, L, M とすると、各東西波数 n における行列のサイズは $K = (L + 1)(M + 1)$ となる。固有値 ν が複素数のとき、その虚数部は不安定解の増幅率、実数部は振動数を表す。

波数 n の任意の状態変数 w_i を不安定波の成分 ξ_i に射影し、それに直交する成分を ϵ_i とする。

$$w_i(\tau) = a(\tau) \xi_i + \epsilon_\tau \quad (119)$$

ここで、 ξ_i のノルムは1にしておく。 ξ_i と ϵ_i が直交するという条件から

$$a(\tau) = \sum_i \xi_i^* w_i \quad (120)$$

のように簡単に振幅 $a(\tau)$ を求められるので、射影された成分 $a(\tau) \xi_i$ の増幅率分だけ成長することから、傾圧不安定のパラメタリゼーションは、各東西波数について以下となる。

$$(BC)_i = -i\nu a(\tau) \xi_i \quad (121)$$

これが傾圧不安定のパラメタリゼーションだが、Wave Maker では特にあるひとつの波を励起させるように特定させ、モデル方程式 (109) 式に代入して、

$$\frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma w_i = -i \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^K r_{ijk} w_j w_k - i\nu a(\tau) w_0 + s_i \quad (122)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, K$$

とした。WM の導入されたモデルでは、選択したある1つのノーマルモードが指数関数的に増幅する。これを Growth-model と呼ぶ。ただし、振動数成分については、傾圧不安定には各波数の位相速度の20%、WM には0%を入れた。増幅率は、その時々によって変化させた。

4 実験概要

前節までに述べた理論を前提として, 以下のような二つの実験を行った.

4.1 実験 1 : ランダムに選んだ初期値による数値実験

1. ランダムに選んだ初期値を用いて, Normal S-model を 40 日間走らせる.
2. 東西波数, 南北モードに分けた各波数のエネルギーを計算し, エネルギースペクトルをプロットする. この図から球面 Rhines scale を特定する.
3. 2. で定めた球面 Rhines scale にエネルギーが蓄積されるよう, あるひとつの波数を e-folding time の時間率で増幅させる.
4. 1. で選んだ初期値を数日間ずらし, 同様のモデル実験を行う. これによって, ブロッキングの初期値依存性を調べる.

4.2 実験 2 : ブロッキングの数値予報

1. 表 1 に示されているブロッキング事例 20 例について, それぞれの例の Onset の 5 日前に初期値を設定して, Normal S-model を 40 日間走らせる.
2. 1. 東西波数, 南北モードに分けた各波数のエネルギーを計算し, エネルギースペクトルをプロットする. この図から球面 Rhines scale を特定する.
3. 2. で定めた球面 Rhines scale にエネルギーが蓄積されるよう, あるひとつの波数を e-folding time の時間率で増幅させる.

実験 1 および実験 2 では以下の条件でモデルを設定した.

- 傾圧不安定, 粘性摩擦, 帯状地表摩擦, エクマン摩擦を含むパラメタライゼーション
- 傾圧不安定のパラメタライゼーションでは, 各波数のエネルギーが月平均帯状風基本場の全エネルギーの 10 % にあたる $1.0 \times 10^4 \text{ Jm}^{-1}$ に達した時, 停止するように制御する
- 積分間隔: 1 時間
- 出力時間: 6 時間

4.3 Zonal Index による評価

モデルで形成されたブロッキングを評価するために, Lejenäs and Okland (1983) で用いられた Zonal Index

$$I(\lambda) = \phi_{40^\circ N}(\lambda) - \phi_{60^\circ N}(\lambda)$$

を使用した. ここで, ϕ は順圧高度場の値を示す. 本研究においては, ブロッキングの形成される太平洋域を $190\text{--}220^\circ \text{W}$, 大西洋域を $0\text{--}30^\circ \text{E}$ として平均し, Zonal Index を計算した.

Zonal Index は, 普通ジェットの強さを表す指標として用いられる. 高指数であるほどジェットが強いことを意味する. ただし, ブロッキング形成時にはジェットが弱まることが知られているため, ブロッキングの Index としても使用される. 本研究においては, 実況値と Normal S-model, Growth model の三者のブロッキングの比較として用いた. これによって, ブロッキングの Onset, Mature の目安を決定した.

5 結果

実験 1 ではランダムに選んだ初期値による数値実験, 実験 2 では Watarai and Tanaka (2002) で選出された 20 パターンのブロッキングについて数値予報実験を行った (表 1).

5.1 実験 1 の結果

実験 1 では Normal S-model と, WM (Wave Maker) を追加した Growth-model を用いて比較実験を行った. この際, Growth run では砕波させるひとつの波の選択およびその波の増幅率の決定を行う必要がある. これについては, Normal S-model で計算した数値を用いて作成したエネルギースペクトル図を参照して球面 Rhines scale を確認し, Try and Error によって最も適している数値を選んでいる. 以下, 実験 1 で行った数値実験のうち, 主な事例について述べる.

5.1.1 1990 年 1 月 12 日 00GMT およびその関連の事例

- 1990 年 1 月 12 日 00GMT 初期値で東西波数 3, 南北モード 5 を e-folding time = 5 day で励起させた例

図 8,9 は, Normal S-model run で初期値 1990 年 1 月 12 日 00GMT で 40 日間計算した際の天気図である. この事例では, ブロッキングは再現されていない. 図 10 は同期間におけるエネルギースペクトル図である. 横軸は位相速度, 縦軸はエネルギーを示している. 各東西波数についてそれぞれの南北モードを結んでいる. この図では, 東西波数 1, 南北モード 5 の点でエネルギーのピークが見られる. 図 6,7 は, NCEP/NCAR データによる実況天気図であるが, ブロッキングは現れていない.

図 12,13,14 は, Growth run で計算した際の天気図である. ここでは, 東西波数 3, 南北モード 5 を e-folding time = 5 day として励起させた. 6 日目にあたる 1 月 18 日 00GMT でリッジが発達し始め, 8 日目にあたる 1 月 20 日 00GMT には大西洋にブロッキングが現れ始め, 14 日目の 1 月 26 日 00GMT で成熟する. 最終的に 18 日目にあたる 1 月 30 日 00GMT で収束することになる. 図 15 は, 同期間における Growth run のエネルギースペクトル図である. 東西波数 3, 南北モード 5 の波のエネルギーが励起され, ピークとなっていることが確認される. またエネルギーカスケードによって, 過剰なエネルギーが乱流領域および帯状流領域に遷移されている. ここでは, エネルギー飽和を示す $E = mc^2$ を優に超え, ロスビー波の砕波が行われたとみること

ができる. 図 16 は各東西波数におけるエネルギーである. 横軸が東西波数, 縦軸がエネルギーを示している. この図において, 励起させた東西波数 3 のエネルギーの卓越を確認することができる.

- 1990 年 1 月 12 日 00GMT 初期値で東西波数 2, 南北モード 5 を e-folding time = 9 day で励起させた例

図 17, 18, 19 は, Growth run において, 東西波数 2, 南北モード 5 を e-folding time = 9 day とし励起させた. 8 日目にあたる 1 月 20 日 00GMT にリッジが発達し始め, 12 日目の 1 月 24 日 00GMT には太平洋にブロッキングの Onset がみられる. 以後持続し続け, 40 日目の 2 月 21 日 00GMT において収束する. 東西波数 3, 南北モード 5 の事例では, 大西洋にブロッキングが形成されたが, 本事例においては太平洋に出現した. ブロッキングの形成において, 選択する波数によって異なることを示している.

- 1990 年 1 月 4 日 00GMT 初期値で東西波数 3, 南北モード 5 を e-folding time = 4.5 day で励起させた例

図 20, 21, 22 は 1990 年 1 月 4 日 00GMT 初期値で東西波数 3, 南北モード 5 を e-folding time = 4.5 day で励起させた際の天気図である. この初期値においては, 大西洋におけるリッジの発達 (1 月 10 日 00GMT), ブロッキングの Onset (1 月 14 日 00GMT) がみられるものの, 持続性が弱いために短命に終わる. e-folding time は 4.5 日としたが, これ以上のエネルギー増幅をさせたところオーバーフローとなった (図は省略).

- 1990 年 1 月 18 日 00GMT 初期値で東西波数 3, 南北モード 5 を e-folding time = 5 day で励起させた例

図 23, 24, 25, 26 は 1990 年 1 月 18 日 00GMT 初期値で東西波数 3, 南北モード 5 を e-folding time = 5 day で励起させた際の天気図である. 大西洋にブロッキングができる (1 月 26 日 00GMT ~ 2 月 14 日 00GMT).

5.1.2 5.1.1. 以外の事例

上記以外の事例でも同様の数値実験を行った. 煩雑になってしまうため, それらの図および説明は省略するが, およそほとんどの初期値についてブロッキングが形成された (1950 年 1 月 1 日 00GMT から形成を確認できた). 球面 Rhines scale に当たる波数を, 適切な増幅率で励起することによっておおよその再現はできる. ただし, 増幅率が高すぎたり, 球面 Rhines scale から外れた波数を励起してしまうと, モデル内でオーバーフローしてしまう.

また明らかではあるが、逆に増幅率が低すぎるとロスビー波の砕波が起こらず、ブロッキングは形成されない。このエネルギー挿入のさじ加減は、選択する初期値、波数によってまちまちであり、まったく一定ではない。しかし、正確に球面 Rhines scale に適切なエネルギーを入れれば、40 日間の間にはブロッキングが形成される。

5.2 実験 2 の結果

実験 2 では、表 1 に示されているブロッキング事例 20 例について、それぞれの例の Onset の 5 日前に初期値を設定して、各モデルを 40 日間はしらせた。本論文ではその中の顕著な 2 例について記述する。

5.2.1 1990 年 2 月 24 日 12GMT のブロッキングを対象とした事例

表 1 の一事例である 1990 年 2 月 24 日 12GMT のブロッキングを選んだ。まず、この事例における NCEP/NCAR の実況天気図を示す (図 27)。ブロッキングの Onset は 2 月 24 日 12GMT, Mature はその 4 日半後の 3 月 1 日 00GMT である。太平洋に Ω 型の巨大なブロッキングが形成されていることが確認できる。

1990 年 2 月 19 日 12GMT を初期値としたモデルシミュレーションによる天気図を示す (図 28, 29, 30, 31)。左上図が東西波数 3, 南北モード 5 を e-folding time = 9 day で励起させた Growth run, 右上図が Normal S-model run, 下図が Growth run 値から S-model run 値を引いた差の値となる。ブロッキングの再現と合わせて、それぞれ 5, 10, 15, 25 日目を示している。実況天気図のブロッキングの Onset にあたる、モデルランの 5 日目では、太平洋にリッジが形成されているものの、ブロッキングは再現されていない。この時点では Normal S-model との差異は、ほとんどない。モデルランの 10 日目では、Growth run において太平洋のリッジが発達し始め、S-model との差異も同地域において顕著に現れ始める。15 日目には、はっきりとブロッキングが形成される。Growth model の天気図で、卓越した東西波数 3 の波を確認することができる。

図 32 は同期間の Normal S-model run のエネルギースペクトル図である。東西波数 3, 南北モード 3 にエネルギーピークがみられる。図 33 は Growth run によるエネルギースペクトル図である。ここでは、励起させた東西波数 3, 南北モード 5 のエネルギーが増幅していることを確認することができる。また、逆カスケードが生じ、以前ピークであった東西波数 3, 南北モード 3 のエネルギーがさらに増えている。さらに、帯状流領域のエネルギーは全体的に下がっている。

図 34 は、それぞれ NCEP/NCAR(点線), Normal S-model run(細線), Growth run(太線)における Zonal Index を示している。NCEP/NCAR 実況値がブロッキング Onset の 5 日目から低指数に下がっていき、リッジ形成からブロッキングに発展していくことがわかる。それに対して、Normal S-model run ではリッジが発展せず、ブロッキングが形成されないことがわかる。Growth run においては、大きくリッジが発展し、ブロッキングが形成される。ただし、実況値に比べて 5 日ほどの遅れがみられる。

図 35 は、それぞれ NCEP/NCAR(点線), Normal S-model run(細線), Growth run(太線)における東西波数 3, 南北モード 5 のエネルギー時系列である。本期間では、大体 5~20 日目においてブロッキングが形成されていた。S-model run は、NCEP/NCAR 実況値に比べて全体的に低く計算されている。Growth run は、実況値により近いといっているが、後半においてかなり外してしまっている。また、Growth run の天気図において、ブロッキングは大体 12 日目あたりに形成され始めるのだが、実況値とは異なる。ちなみに、増幅率を上昇させても、Growth run によるブロッキングの Onset の日には変わらなかった (図は省略)。

5.2.2 1989 年 1 月 24 日 00GMT のブロッキングを対象とした事例

表 1 の一時例である 1989 年 1 月 24 日 00GMT のブロッキングを選んだ。この事例における NCEP/NCAR の実況天気図を示す (図 36)。この事例では、ブロッキングは大体 25 日間持続する。Mature は Onset から 2 日半たった後の 2 月 1 日 12GMT である。太平洋に Ω 型のブロッキングが形成される。

このブロッキングを再現するために、Onset から 5 日前の 1989 年 1 月 19 日 00GMT を初期値としたモデルシミュレーションによる天気図を示す。実況値の Onset に相当するモデルランの 5 日目 (図 37, 左上図が東西波数 2, 南北モード 5 を e-folding time = 8 day で励起させた Growth run, 右上図が Normal S-model run, 下図が Growth run 値から S-model run 値を引いた差の値となる) では、ブロッキングは形成されていない。しかし、太平洋において、Growth run と S-model run との差があらわれている。8 日目 (図 38) には、両者の差は顕著となり始め、Growth run で太平洋のリッジが発達し始める。それからブロッキングが成熟し、太平洋に実況値と同様の Ω 型のブロッキングを形成する (図 39)。Growth run で再現されたブロッキングは約 18 日間持続する (図 40)。

図 41 は同期間の Normal S-model run のエネルギースペクトル図である。東西波数 2, 南北モード 3 にエネルギーピークがみられる。図 42 は Growth run のエネルギースペクトル図である。励起させた東西波数 2, 南北モード 5 がエネルギーピークとなっている。東西波

数 3, 南北モード 3 のエネルギーが上昇している事に気づく.

図 43 は, NCEP/NCAR(点線), Normal S-model(細線), Growth run(太線)における Zonal Index である. NCEP/NCAR 実況値が 5 日目からリッジを形成し, ブロッキングへ発展していくことがわかる. Normal S-model では, 前半では逆にジェットを強める方向へ発展している. それに対して, Growth run では時間的な遅れがあるものの, 同様なブロッキングを形成させている.

図 44 は, 同期間における大西洋域の Zonal Index を示す. ここでは, 実況値においてジェットが強まるに対し, Normal S-model run 及び Growth run ではリッジを強めている様子がわかる.

図 45 は, NCEP/NCAR(点線), Normal S-model(細線), Growth run(太線)における東西波数 2, 南北モード 5 のエネルギー時系列である. S-model run の数値が NCEP/NCAR 実況値より低い一方, Growth run の数値はよく再現できている. しかし, 天気図の示す通り, 実況値とモデル値において, ブロッキングの Onset, Mature の日は異なっている.

6 考察

6.1 ブロッキング形成理論との対応性

本研究では, Tanaka and Terasaki (2006) のブロッキング形成理論に基づいて数値モデルを構築し, 検証を行うことが目的であった. 実験 1 の結果から, 球面 Rhines scale にエネルギーを蓄積させれば, ブロッキングが形成されることを確認した. 実況値ではみられなかったブロッキングも, ロスビー波を砕波させることによって形成されることをみた. 実験 2 の結果では, Watarai and Tanaka (2002) で定義されたブロッキング 20 例に対し, S-model でできなかったブロッキングが Growth-model では形成されることが示された. 持続性についても, 強度についても問題はなかったが, 実況値に対してブロッキングの期間のずれが確認された. このずれを訂正するため, 様々な試行 (増幅率を上昇する, 傾圧不安定波の位相速度を変える, 初期値を変える, など) をしたが, 顕著な結果にはつながらなかった.

これらの実験結果から, 理論の正当性がわかった. しかし, 現実大気では多くの要素が絡んでくるため, モデル実験では純粋な結果が得られなかったと考える.

まず初めに考えられる問題点は, ブロッキングは局所的な現象であるにも関わらず, 本研究の視点はグローバルであったことである. WM (Wave Maker) として励起させた一つのノーマルモードは全球を対象としてエネルギーを伝播する. 各々の事例において, 太平洋と大西洋のダブルブロッキングが形成されることが多くみられた. こうしたように, 実況値が示すような領域的なブロッキングと, モデルの再現するブロッキングに対して, 設定上の相違がみられる. また, 球面 Rhines scale のエネルギーの蓄積を狙ったエネルギーの入れ方も単純化されており, さらなる工夫が必要である. 先行研究の理論が示す通り, ブロッキング形成時には多大なエネルギーが蓄積される. 本研究では, 単一の波の増幅によって再現を試みたが, 現実大気場では複数存在する可能性がある.

本研究では Garcia (1991) の条件の通り, ロスビー波の飽和と砕波を同時に考えていた. このことは, これまでに見てきたように本研究のモデルでも再現されていた. ロスビー波砕波によるエネルギーカスケードおよび逆カスケードが起こることによって, ブロッキングの形成に寄与された.

6.2 実験 1 と実験 2 の結果の相違

実験 1 と実験 2 の相違は, 実況値におけるブロッキングの有無によって, 初期値を分けたことであった. 実際にモデルをはしらせると, 実験 2 のブロッキング再現実験では, ノー

マルモードの増幅率としてはおおよそ $e\text{-folding time} = 8\sim 11 \text{ day}$ であり, それより上昇させるとオーバーフローを起こしてしまう (もしくは現実大気とかけ離れてしまう). 一方実験 1 では, 増幅率として $e\text{-folding time} = 4\sim 9 \text{ day}$ 程度であり, 若干異なる*. 実験 2 の事例において実際にノーマルモードを増幅させたところ, 飽和スペクトルに達することが容易であるため, 増幅率が小さくなる.

*増幅率の倍率チューニングの設定は, 線形項と非線形項が平衡する球面 Rhines scale に適切にエネルギーが蓄積されるように選択している. これについては, 正確な値を計算することはできず, Try and Error であり, 主観的な判断となることを補記する.

7 結論

本研究では3次元ノーマルモード関数で展開された順圧プリミティブスペクトルモデルを用いて、先行研究である Tanaka and Terasaki (2006) のブロッキング形成理論を検証するために数値実験を行った。傾圧不安定により励起される波数を Wave Maker とみなし、ロスビー波砕波に伴い球面 Rhines scale にエネルギーを蓄積し、ブロッキング形成を試みた。この際、実際のブロッキングとの比較を行った。本研究で用いた順圧モデルは、筑波大学で開発された順圧 S-model である。このモデルは R20 に相当する解像度であり、力学過程としては渦粘性、地表摩擦、帯状摩擦、傾圧不安定を考慮した単純モデルである。

初期値を選択し、2通りの実験を行った。ひとつはランダムに選んだ初期値である(実験1)。もうひとつは Watarai and Tanaka (2002) の Index を採用した 20 例の初期値である。

実験1では、球面 Rhines scale にエネルギーを蓄積する際、励起させるべき波数は一通りではないことがわかった。増幅させる波数によって、ブロッキングが形成される位置が異なることがわかった。実験2では、Normal S-model では再現されなかったブロッキングも、Growth model で球面 Rhines scale にエネルギーを蓄積させることで再現できることがわかった。特に S-model でエネルギーが低く見積もられた際も、単にエネルギーを増幅させることで実況値でみられるブロッキングが形成されることは、今後の数値実験を行う際にも重要な情報である。

これらの結果は、先行研究の理論の正当性を裏付けるものである。ただし、本実験の結果を現実大気との対応を考える際には細心の注意が必要である。傾圧不安定を意識した Wave Maker は、本実験において東西波数2および3といったプラネタリースケール級の単一の波であった。これは球面 Rhines scale にエネルギーを蓄積させるために選択したもので、必ずしも現実大気においてプラネタリースケールが増幅したとは限らない。

謝辞

本研究を進めるにあたって、指導教員である筑波大学計算科学研究センター田中博教授には、終始適切な指導をして頂きました。研究内容に関して、筆者の瑣末な質問にも丁寧な対応をして頂きました。

また同大学陸域環境センターの渡来靖準研究員には大気大循環セミナー及び大学院ゼミで、貴重な御意見を数多く賜りました。

さらに同大学地球科学系の木村富士男教授、林陽生教授、上野健一助教授、日下博幸講師、植田宏昭講師の先生方、並びに大学院生の皆様には、中間発表や最終発表の場で貴重な御意見を頂きました。

最後に、共に修士論文作成を進めた気候学・気象学専攻の院2年生の皆様には、良き相談相手となって頂きました。

本論文は以上の皆様の御協力により完成させることができました。心より感謝致します。

参考文献

- [1] Colucci, S. J., and D. P. Baumhefner, 1998: Numerical prediction of the onset of blocking: A case study with forecast ensembles. *Mon. Wea. Rev.*, **126**, 773-784.
- [2] Garcia, R. R., 1991: Parametarization of planetary wave breaking in the middle atmosphere. *J. Atm. Sci.*, **48**, 1405-1419.
- [3] Golub and Van Loan., 1983: Matrix Computations. The Johns Hopkins University Press.
- [4] Holton, J. R., 1992: An Introduction to Dynamic Meteorology. Academic Press. pp507.
- [5] Kasahara, A., 1984: The linear response of a stratified global atmosphere to tropical thermal forcing. *J. Atm. Sci.*, **41**, 2217-2237.
- [6] Lejenäs and Okland, 1983: Characteristics of Northern Hemisphere blocking as determined from a long time series of obserbal data. *Tellus*, **35A**, 350-362.
- [7] Mullen, S. L., 1987: Transient eddy forcing of blocking flows. *J. Atm. Sci.*, **44**, 3-22.
- [8] Nakamura, H. and J. M. Wallace, 1990: Observed changes in baroclinic wave activity during the life cycles of low-frequency circulation anomalies. *J. Atm. Sci.*, **47**, 1100-1116.
- [9] Rex, D. F., 1950: Blocking action in the middle troposphere and its effect upon regional climate I. An aerological study of blocking action. *Tellus*, **2**, 196-211.
- [10] Tanaka, 1985: Global energetics analysis by expansion into three dimensional normal mode functions during the FGGE winter. *J. Meteor soc. Jpn*, **63**, 180-200.
- [11] Tanaka, H. L., 1991: a numerical simulation of amplification of low-frequency planetary waves and blocking formations by the upscale energy cascade. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 2919-2935.
- [12] Tanaka, H. L., 1998: Numerical simulation of a life-cycle of atmosphere blocking and the analysis of potential vorticity using a simple barotropic model. *J. Atm. Sci.*, **76**, 983-1008.

- [13] Tanaka, H. L. and E. C. Kung, 1988: Normal mode energetics of the general circulation during the FGGE year. *J. Atm. Sci.*, **45**, 3723-3736.
- [14] Tanaka, H. L. and M. F. Milkovich, 1990: A heat budget analysis of the polar troposphere in and around Alaska during the abnormal winter of 1988/89. *Mon. Wea. Rev.*, 1628-1639.
- [15] Tanaka and Nohara, 2001: A study of deterministic predictability for the barotropic component of the atmosphere. *Science Report, Inst. Geosci., Univ. of Tsukuba*, **22A**, 1-21.
- [16] Tanaka and Terasaki, 2006: Blocking Formation by an Accumulation of Barotropic Energy Exceeding the Rossby Wave Saturation Level at the Spherical Rhines scale. *J. Meteor. Soc. Japan*, **83**, 319-332.
- [17] Traction, M. S., 1990: Predictability and its relationship to scale interaction processes in blocking. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 1666-1695.
- [18] Watarai and Tanaka, 2002: Characteristics of barotropic-baroclinic interactions during a formation of atmospheric blocking. *J. Meteor. Soc. Jpn*, **80**, 387-402.
- [19] 小倉義光, 1978: 気象力学通論. 東京大学出版会. 249pp
- [20] 田中博, 早崎正光, 安成哲三, 1997: 1993/94 年夏の日本付近における異常気象の熱収支解析. 気象研究ノート, 189 号, 97-125.

表 1: 北太平洋および北大西洋ブロッキングの典型を選別した 20 例 (Watarai and Tanaka (2002) より抜粋)

North Pacific Blocking

No.	Onset time	Mature time
1	12Z 2 January 1979	00Z 5 January 1979
2	12Z 31 January 1982	00Z 7 February 1982
3	00Z 15 December 1983	00Z 23 December 1983
4	00Z 28 December 1987	00Z 2 January 1988
5	12Z 29 January 1989	12Z 1 February 1989
6	00Z 19 January 1991	12Z 25 January 1991
7	00Z 23 February 1991	00Z 26 February 1991
8	00Z 13 February 1993	12Z 17 February 1993
9	00Z 28 January 1994	00Z 1 February 1994
10	12Z 24 February 1996	00Z 1 March 1996

North Atlantic Blocking

No.	Onset time	Mature time
1	00Z 17 February 1979	12Z 18 February 1979
2	12Z 18 February 1980	00Z 23 February 1980
3	00Z 3 February 1982	12Z 11 February 1982
4	12Z 30 November 1982	00Z 3 December 1984
5	12Z 28 November 1984	00Z 15 March 1986
6	12Z 7 March 1986	12Z 15 March 1986
7	12Z 13 January 1991	12Z 16 January 1991
8	12Z 24 November 1991	12Z 5 December 1991
9	12Z 23 December 1992	00Z 28 December 1992
10	12Z 3 March 1997	00Z 10 March 1997

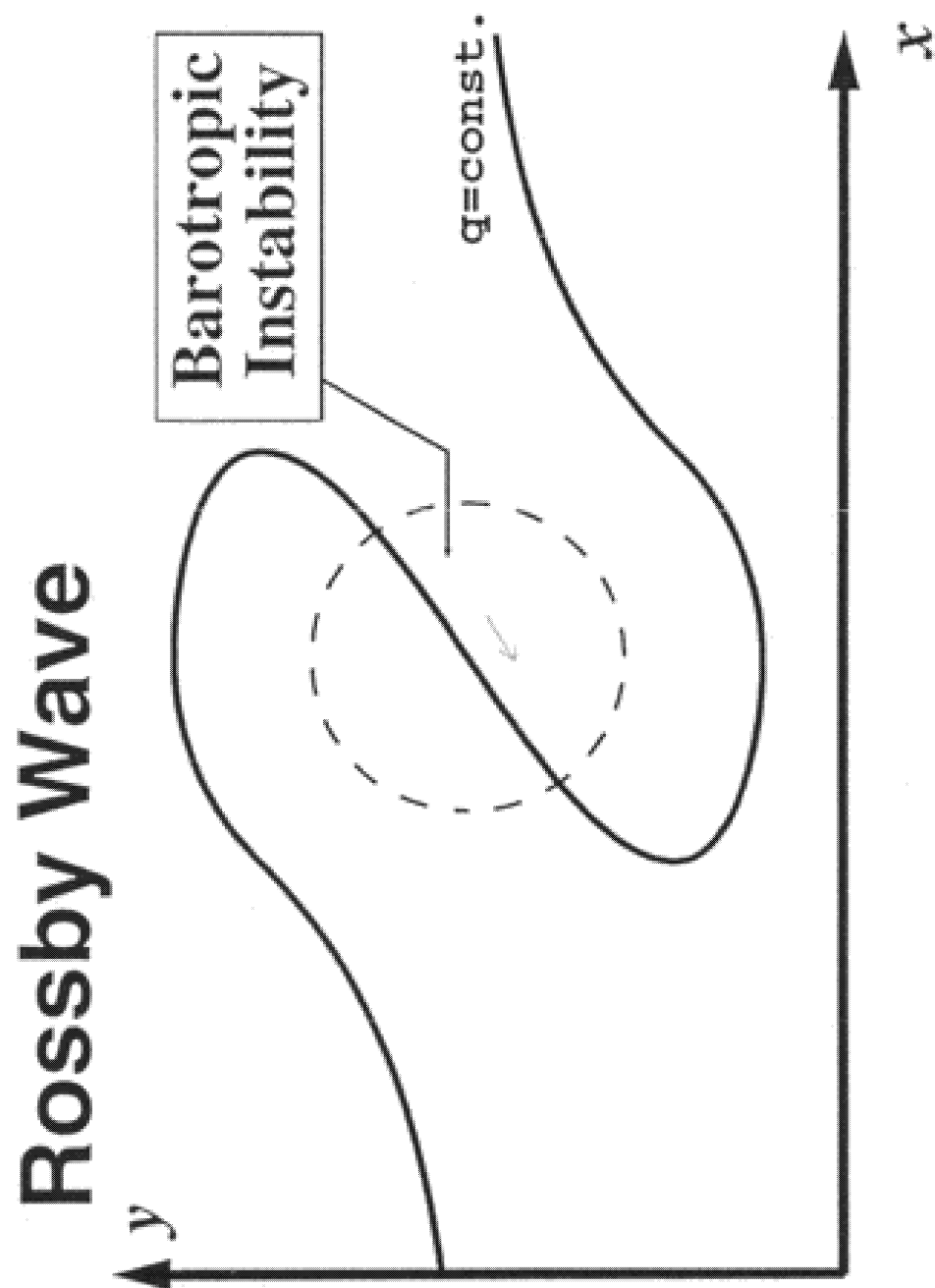


図 1: 2次元平面におけるロスビー波砕波の模式図
 コンターはポテンシャルボルティシティを示す (Tanaka and Terasaki (2006) より抜粋).

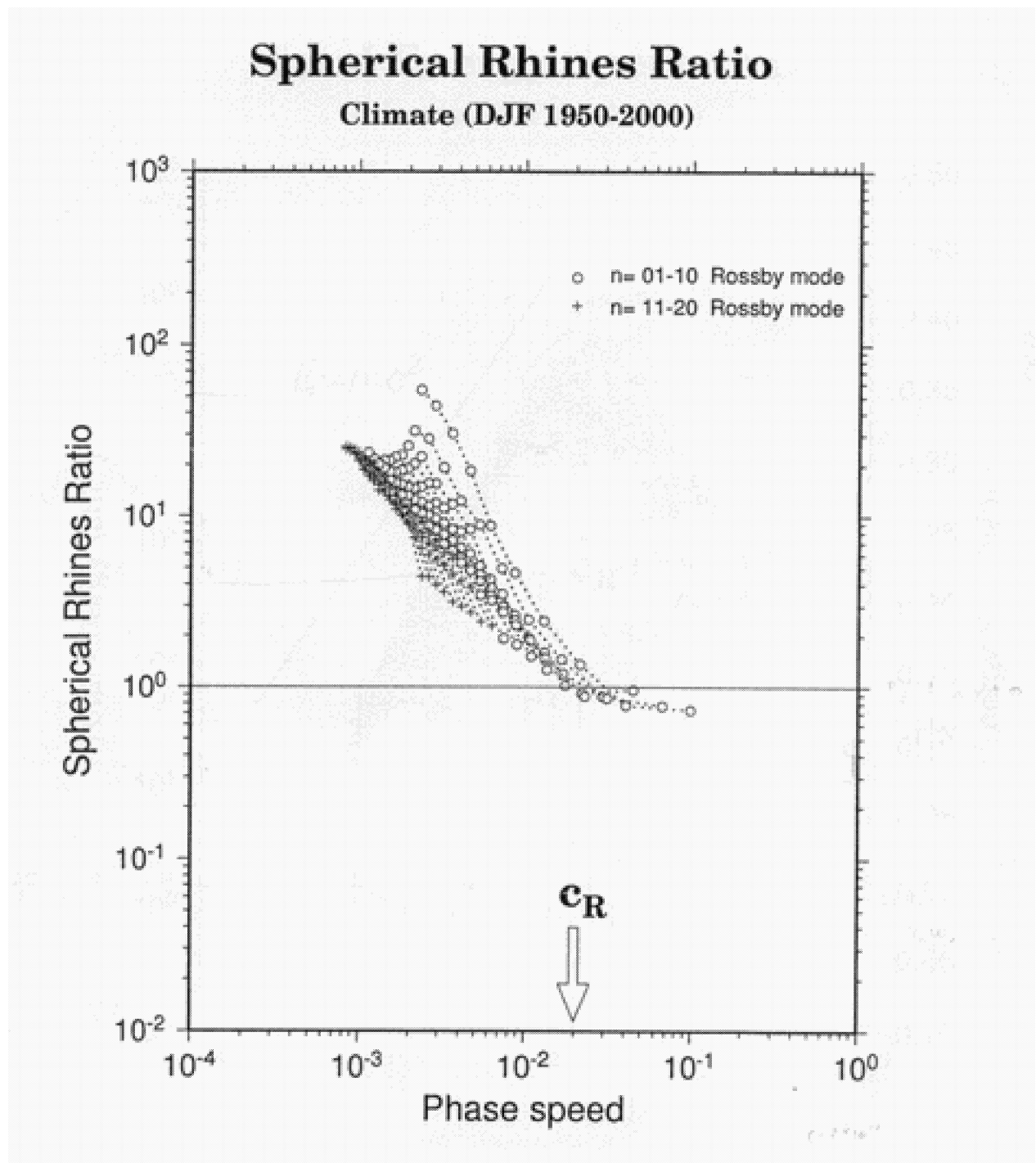


図 2: 球面 Rhines 比 R_i の分布図
 球面 Rhines 比は、非線形項と線形項の比である (Tanaka and Terasaki (2006)).

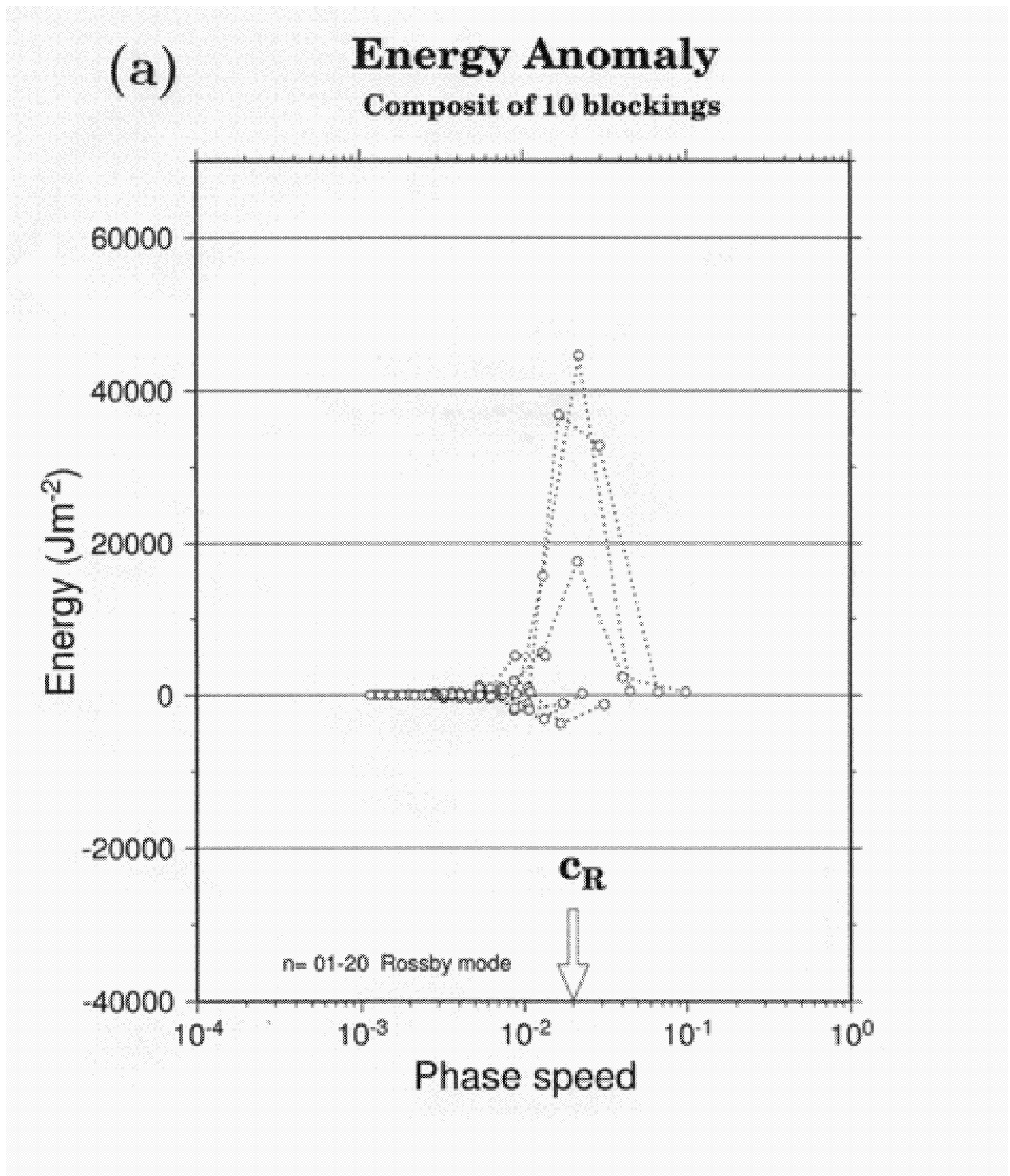


図 3: 位相空間における順圧エネルギーのアノマリー値
表 1 における (a) 北太平洋ブロッキング 10 例のコンポジットおよび (b) 北大西洋ブロッキング 10 例のコンポジットを対象としている。横軸が位相速度, 縦軸がエネルギーを示す。各東西波数に対し, 南北モードを結んでいる。 c_R は球面 Rhines scale を示す (Tanaka and Terasaki (2006))。

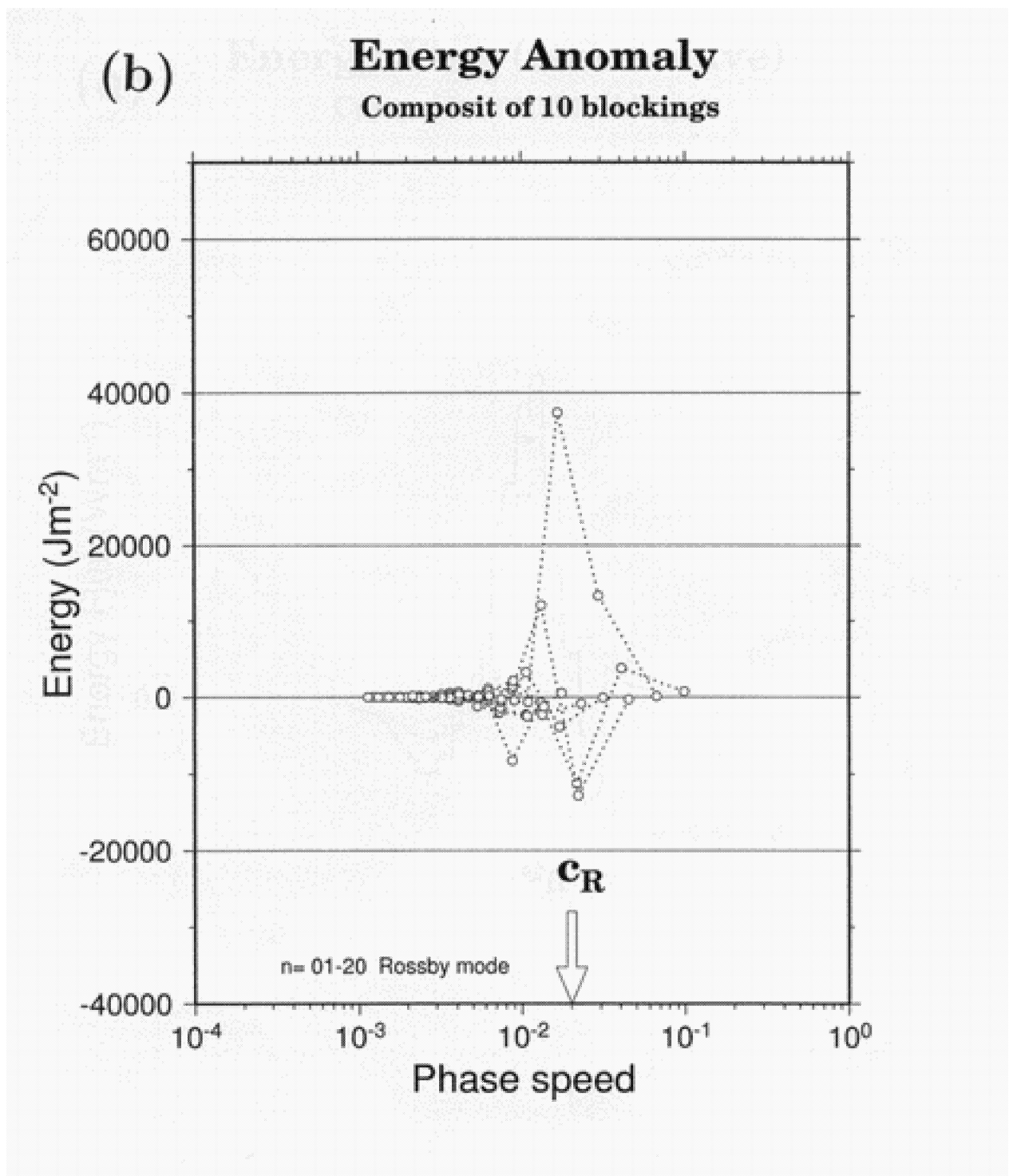


図 4: 続き.

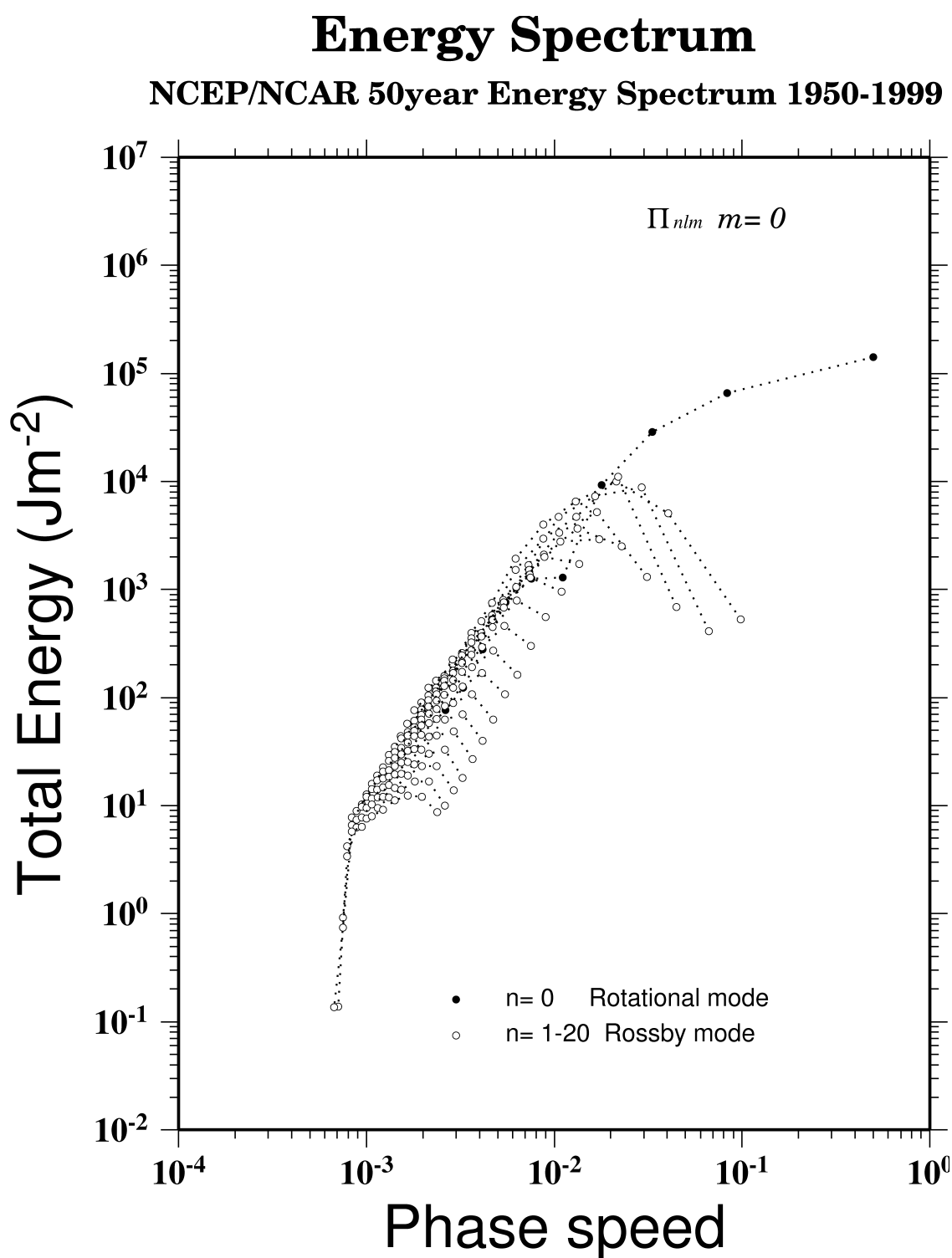
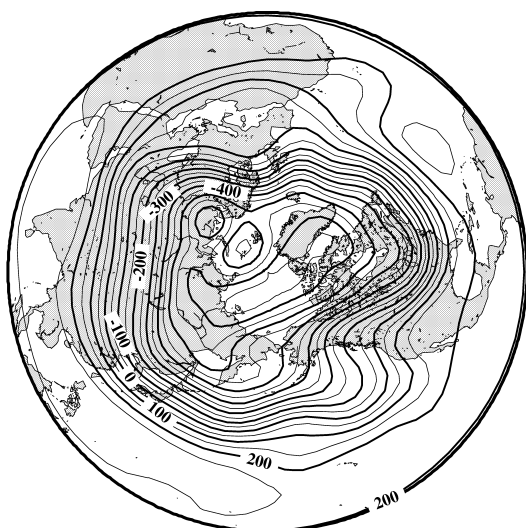


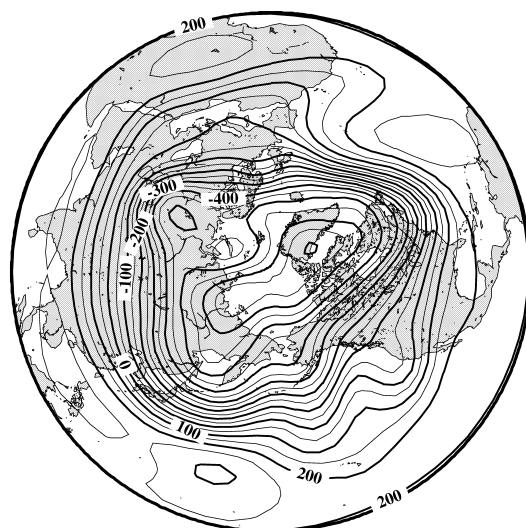
図 5: NCEP/NCAR 冬季データにおける順圧大気の 51 年間平均値エネルギースペクトル図
 図のみかたは図 3 と同様. $E=mc^2$ の飽和スペクトルを形成している.

Barotropic Height (NCEP/NCAR)

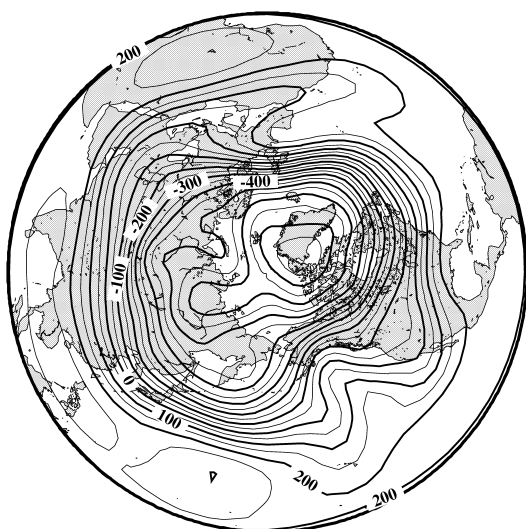
1990011200



1990011400



1990011600



1990011800

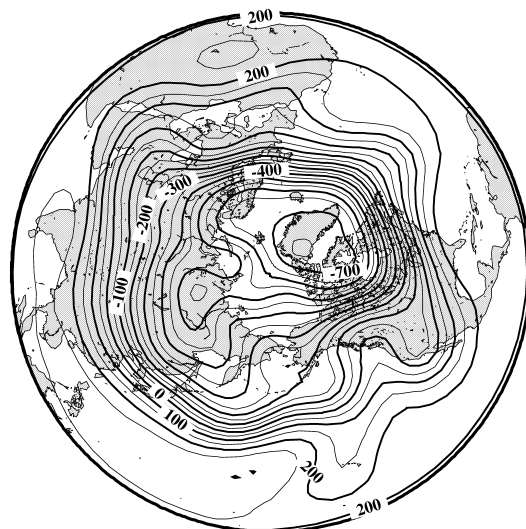
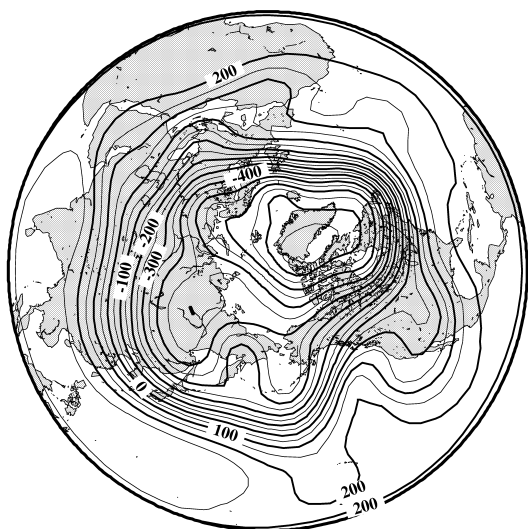


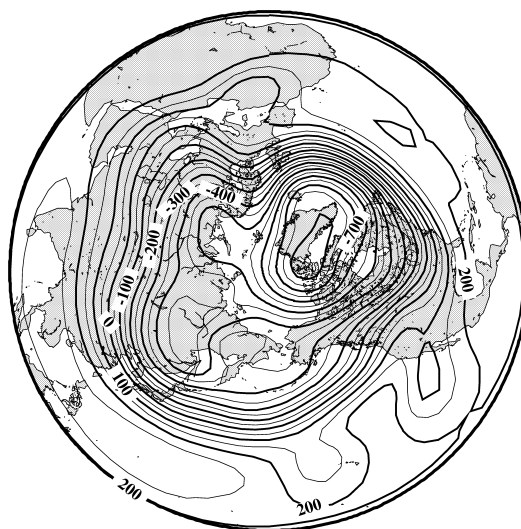
図 6: 実験 1: NCEP/NCAR 実況値 1990 年 1 月 12 日 00GMT~1 月 18 日 00GMT の天気図

Barotropic Height (NCEP/NCAR)

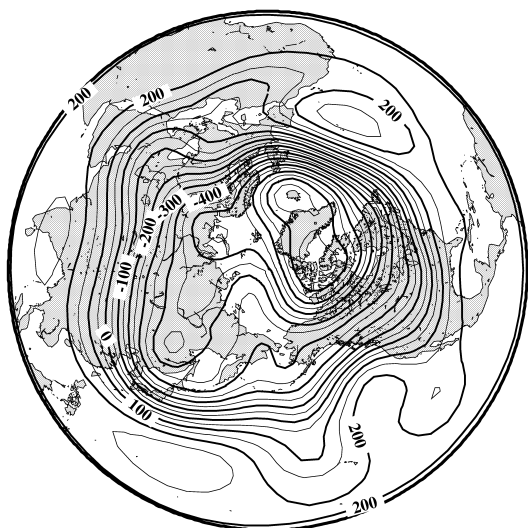
1990012000



1990012200



1990012400



1990012600

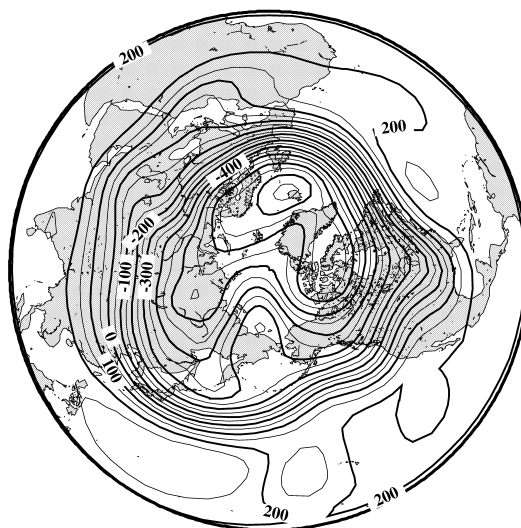
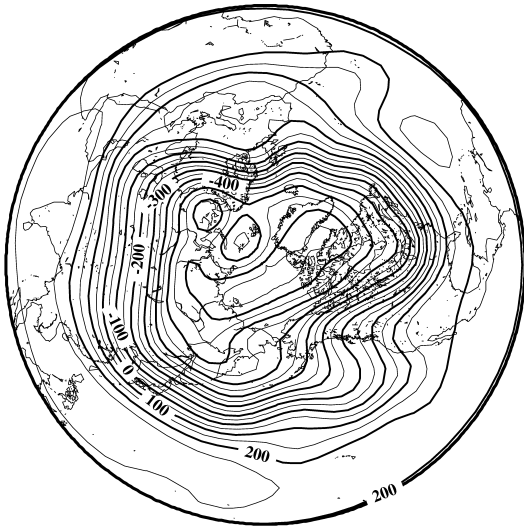


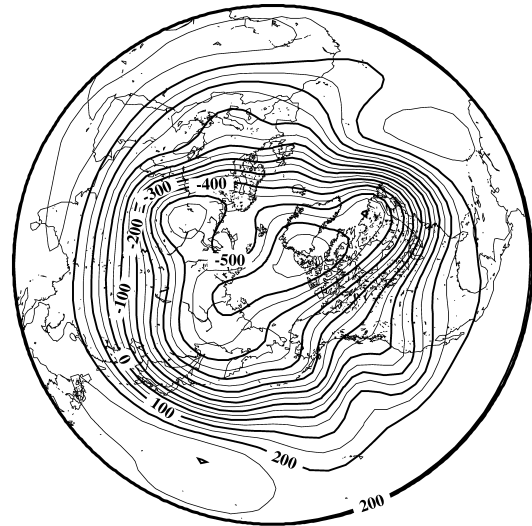
図 7: 実験 1: NCEP/NCAR 実況値 1990 年 1 月 20 日 00GMT~1 月 26 日 00GMT の天気図

Barotropic Height (S-model)

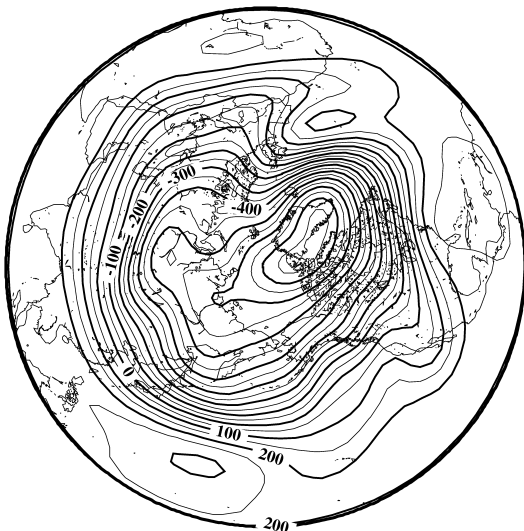
1990011200



1990011400



1990011600



1990011800

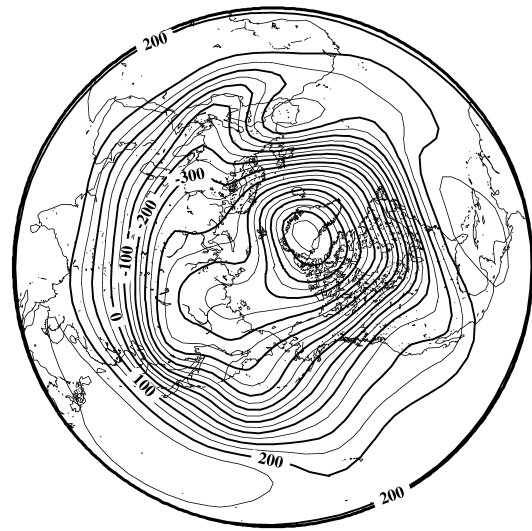
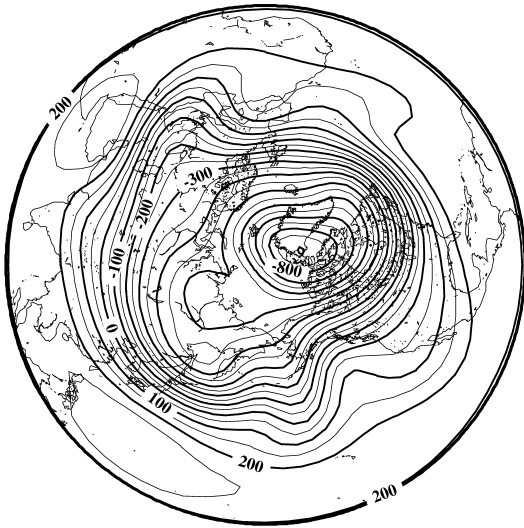


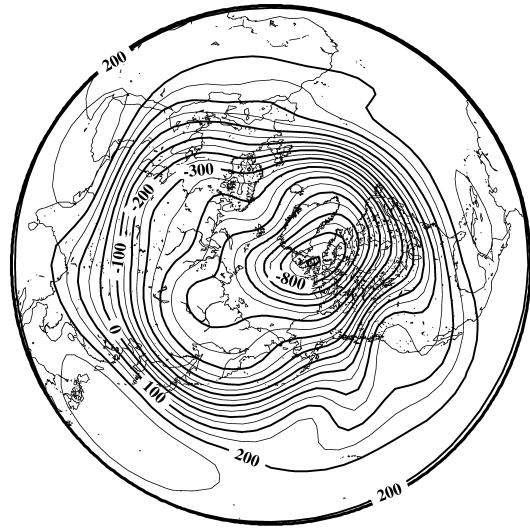
図 8: 実験 1:1990 年 1 月 12 日初期値による Normal S-model run(1)

Barotropic Height (S-model)

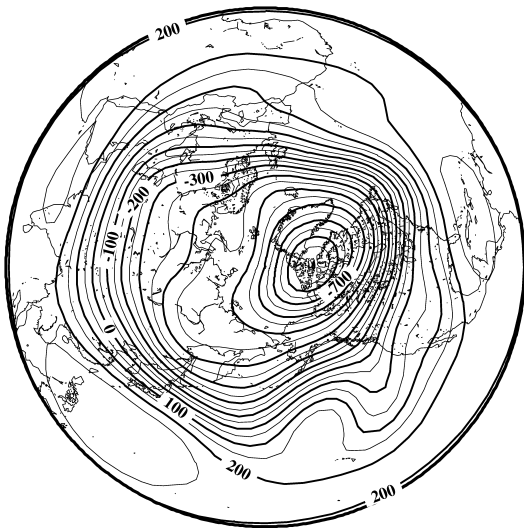
1990012000



1990012200



1990012400



1990012600

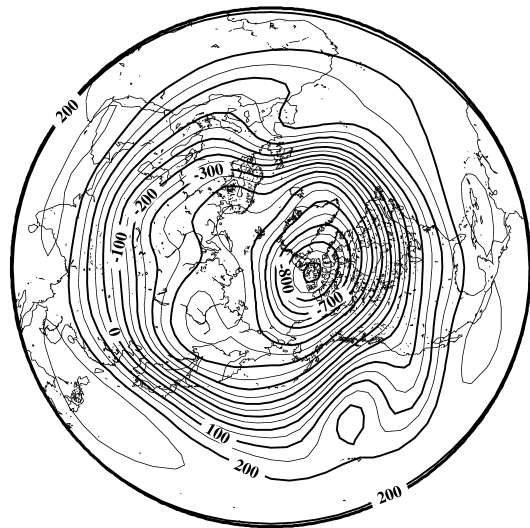


図 9: 実験 1:1990 年 1 月 12 日初期値による Normal S-model run(2)

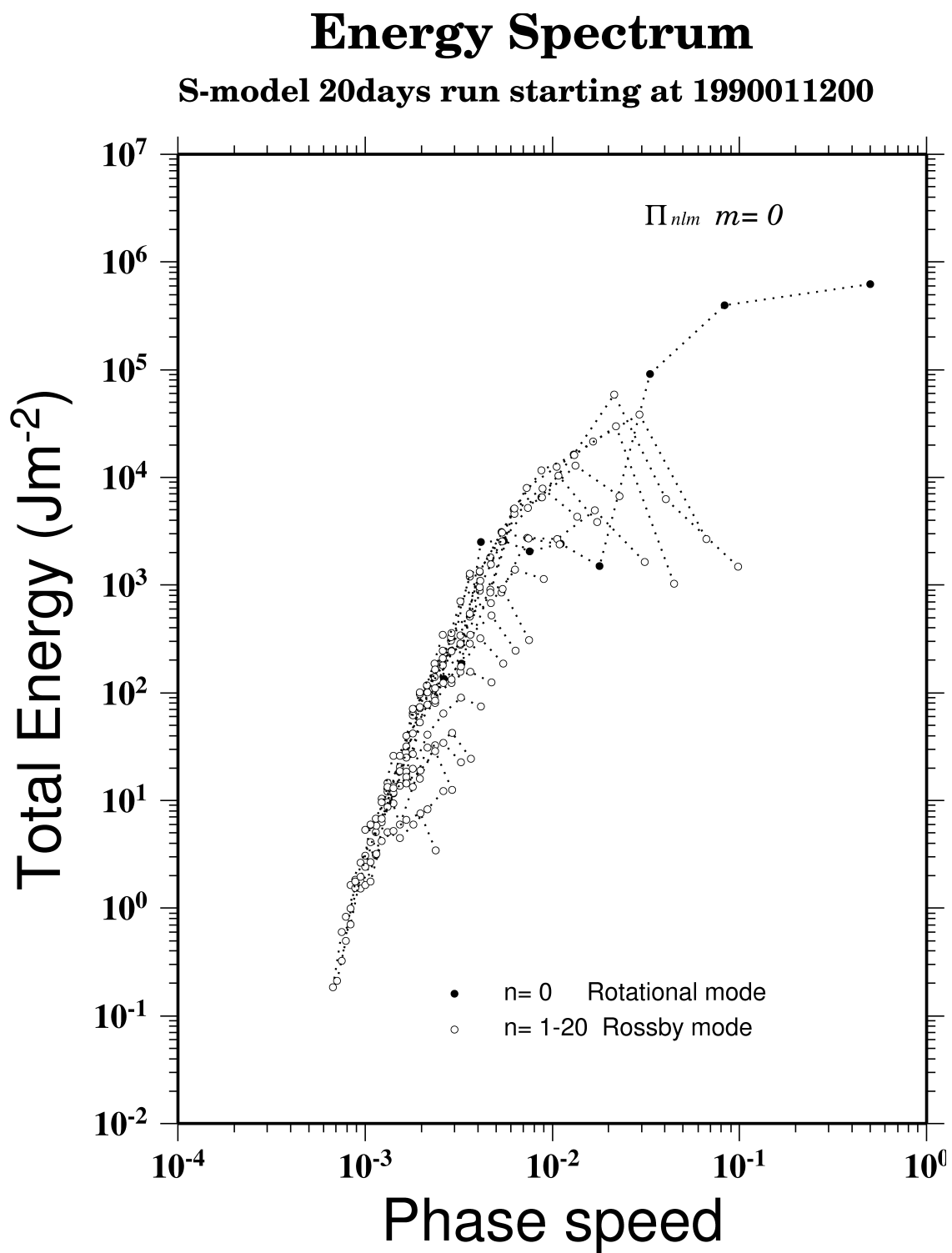


図 10: 実験 1:1990 年 1 月 12 日 00GMT 初期値の Normal S-model run におけるエネルギーースペクトル図

Zonal Energy Spectrum

20day run starting at 00Z 12 January 1990

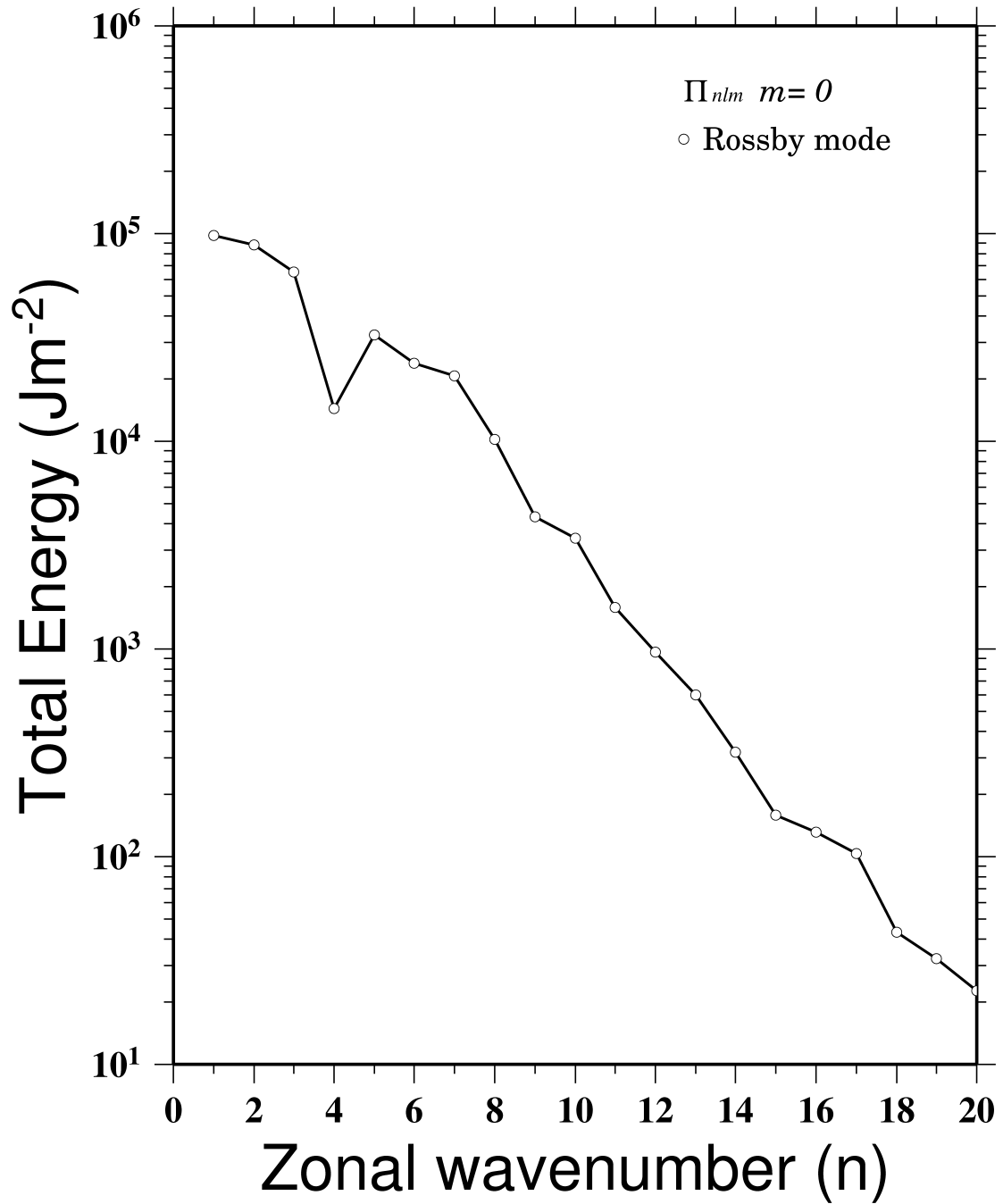
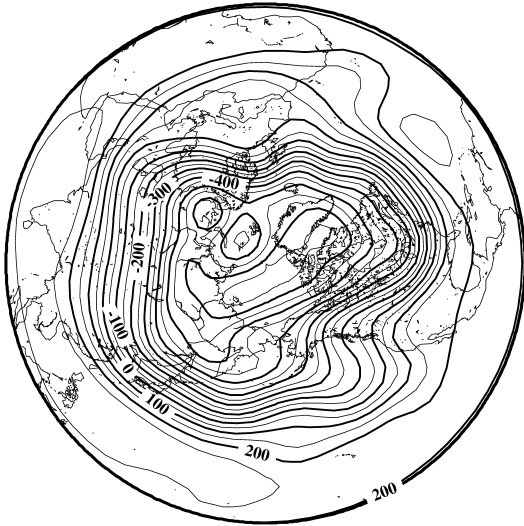


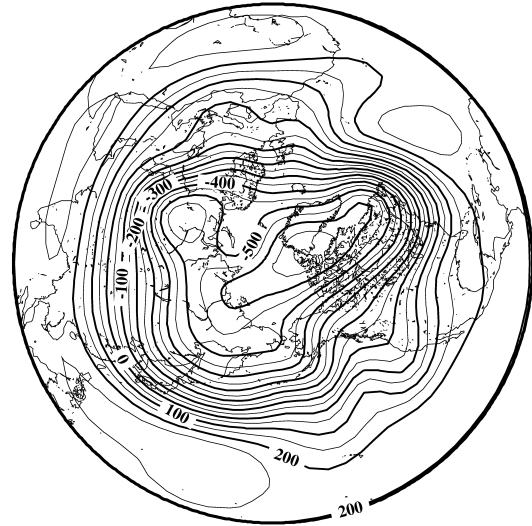
図 11: 実験 1:1990 年 1 月 12 日 00GMT 初期値による Normal S-model run における帯状エネルギー図

Barotropic Height (growth rate 5 n3l3)

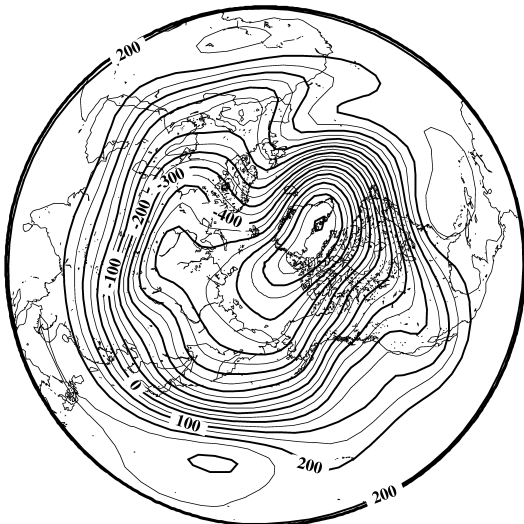
1990011200



1990011400



1990011600



1990011800

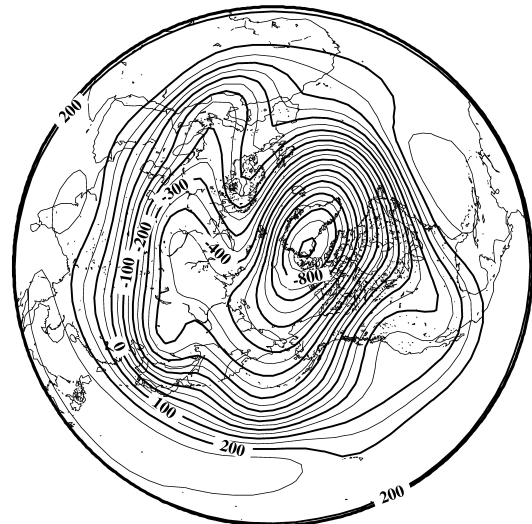
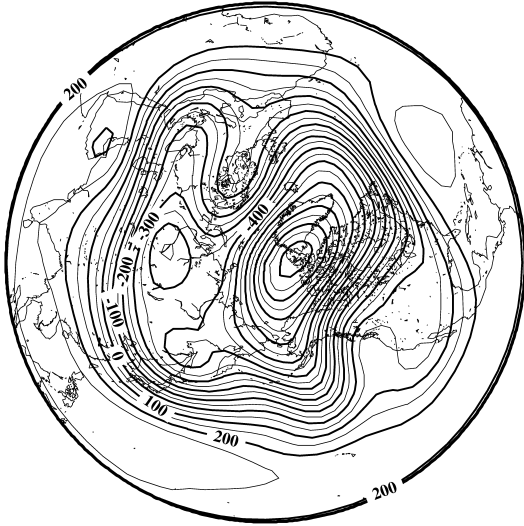


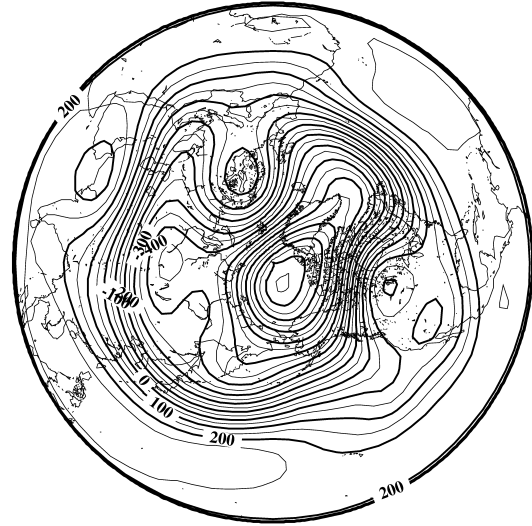
図 12: 実験 1:1990 年 1 月 12 日初期値による Growth-model run(1)
東西波数 3, 南北モード 5 を e-folding time=5 day で増幅させている。

Barotropic Height (growth rate 5 n3l3)

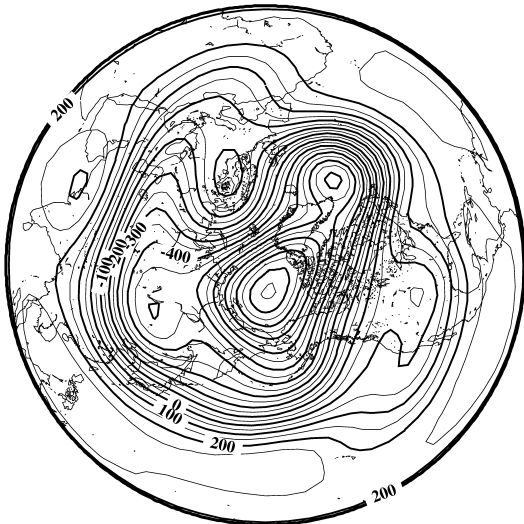
1990012000



1990012200



1990012400



1990012600

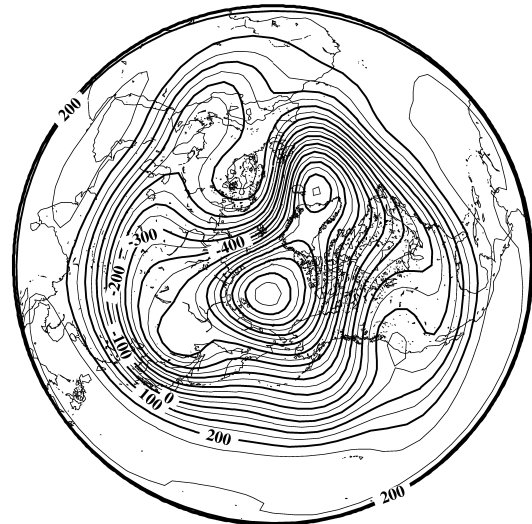
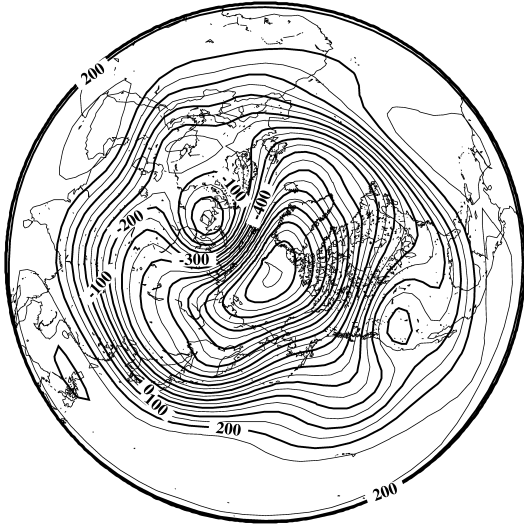


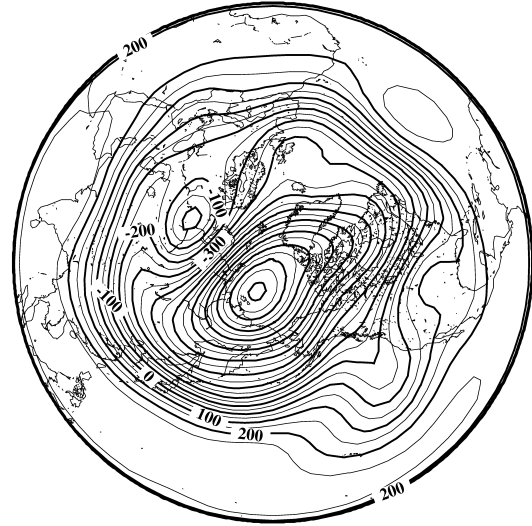
図 13: 実験 1:1990 年 1 月 12 日初期値による Growth-model run(2)
図 12 と同様.

Barotropic Height (growth rate 5 n3l3)

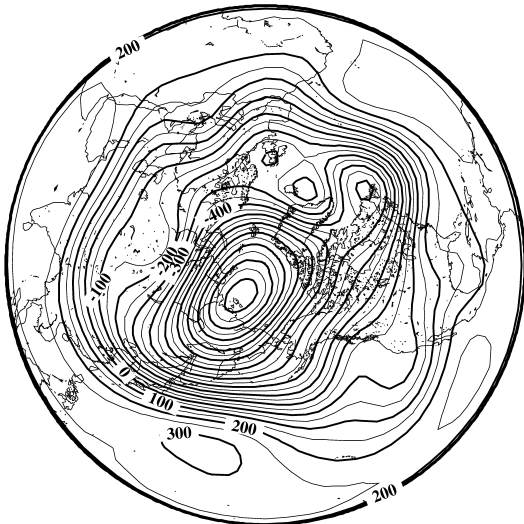
1990012800



1990013000



1990020100



1990020300

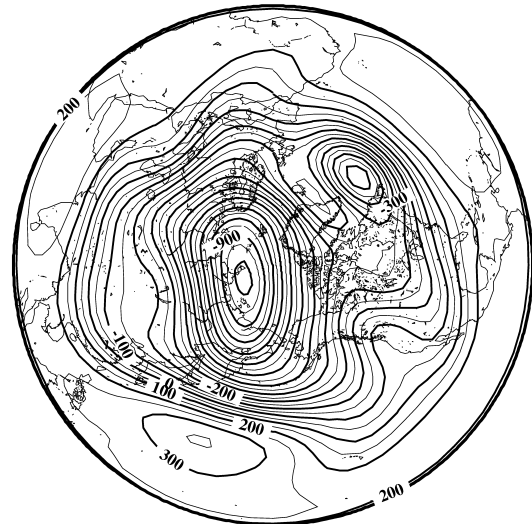


図 14: 実験 1: 1990 年 1 月 12 日 00GMT 初期値による Growth-model run(3)
図 12 と同様.

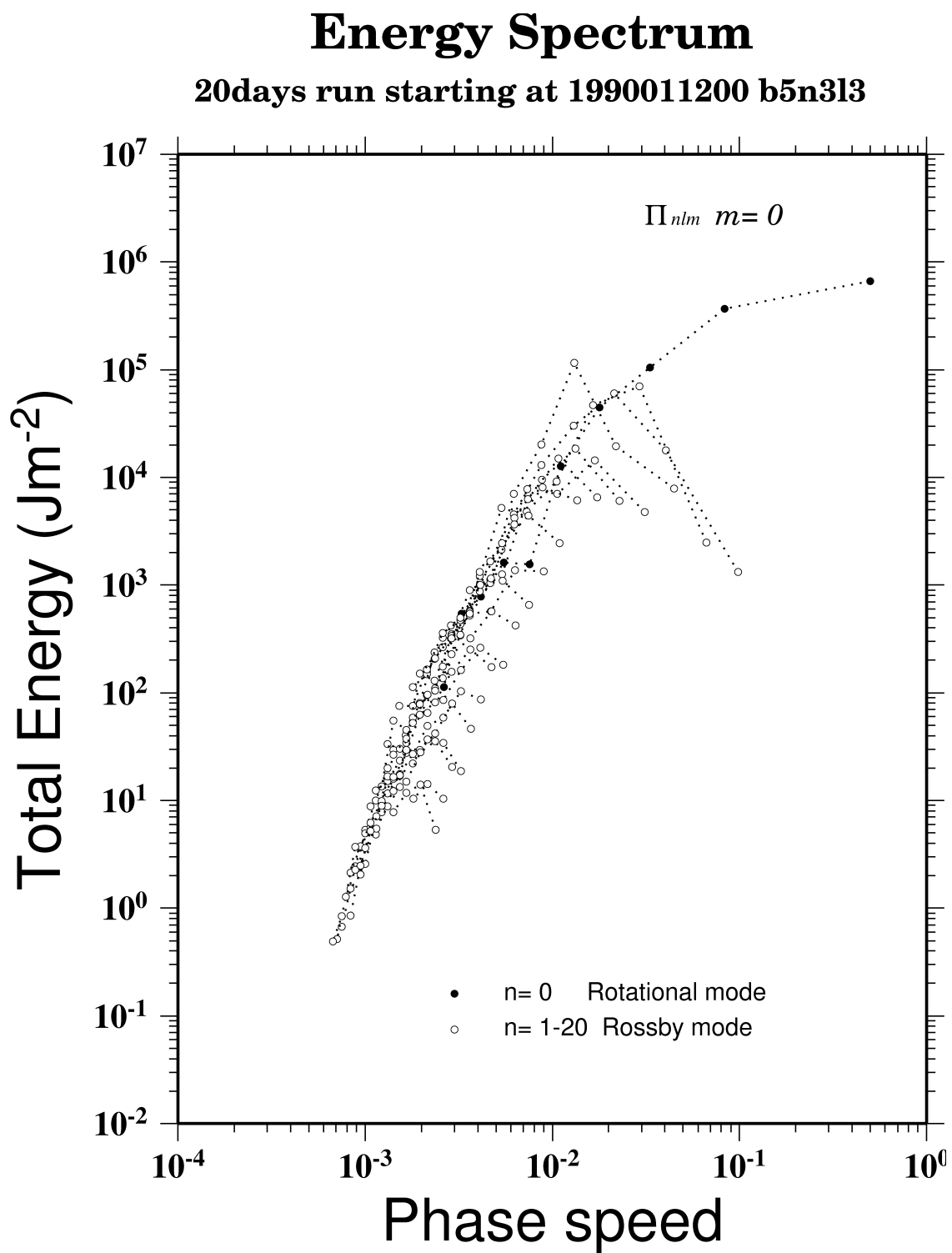


図 15: 実験 1:1990 年 1 月 12 日 00GMT 初期値の Growth-model run によるエネルギースペクトル図

Zonal Energy Spectrum

20day run starting at 00Z 12 January 1990 b5n3l3

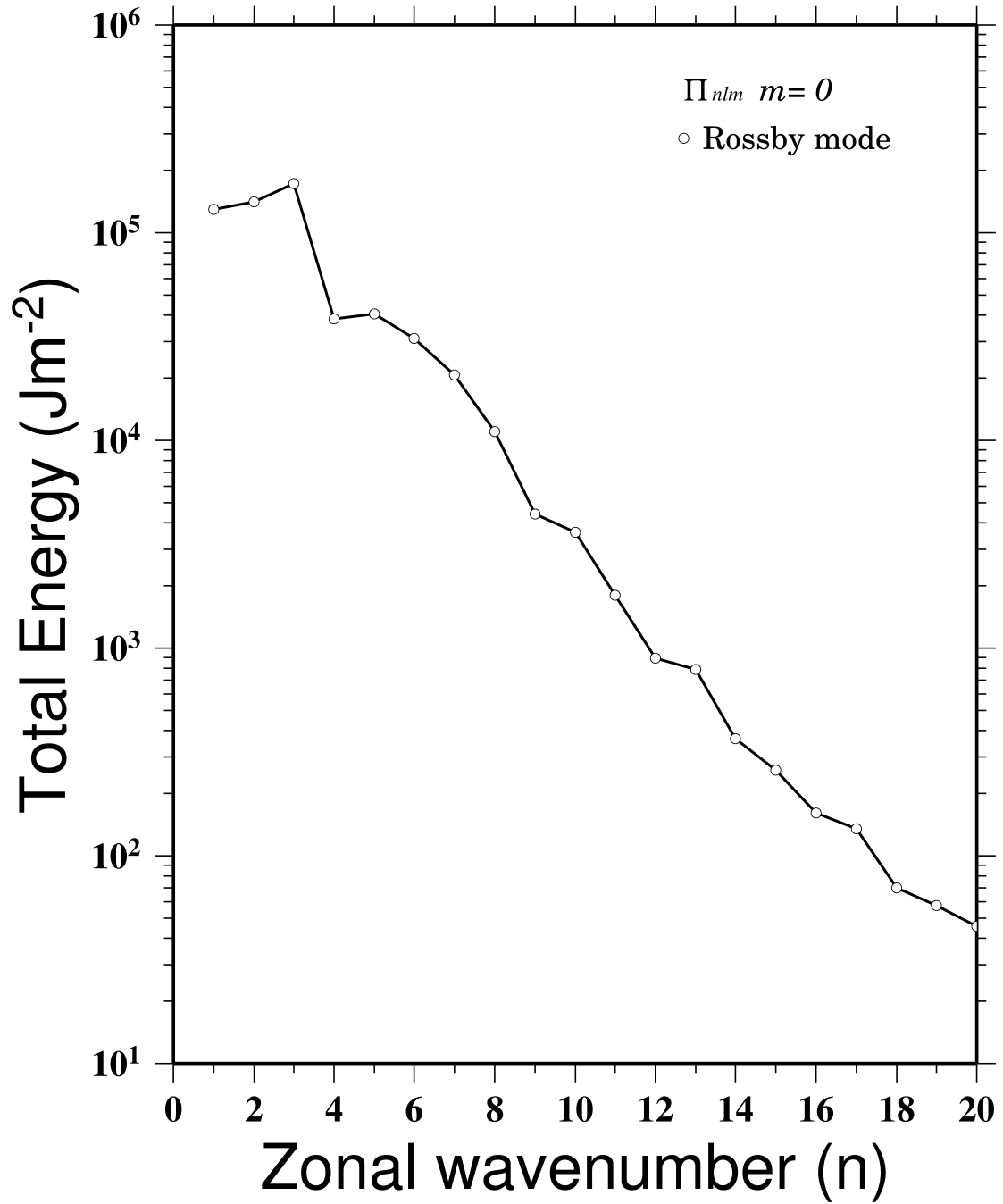
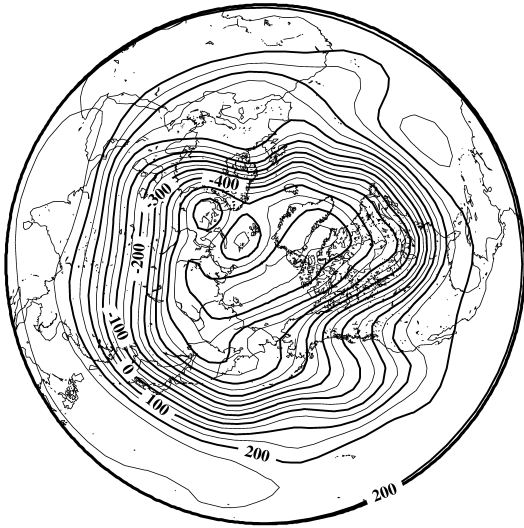


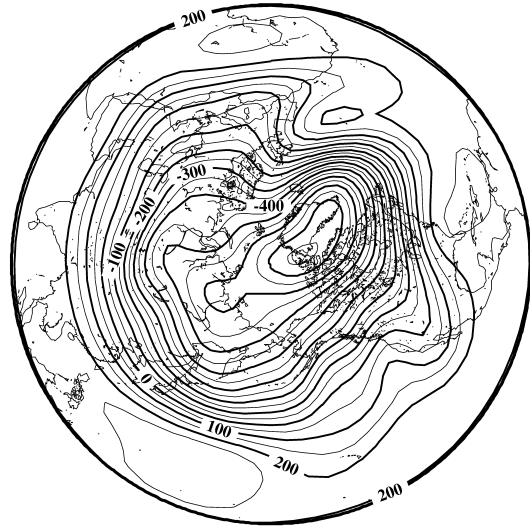
図 16: 実験 1:1990 年 1 月 12 日初期値の Growth-run による帯状流エネルギー図

Barotropic Height (growth rate 9 n2l3)

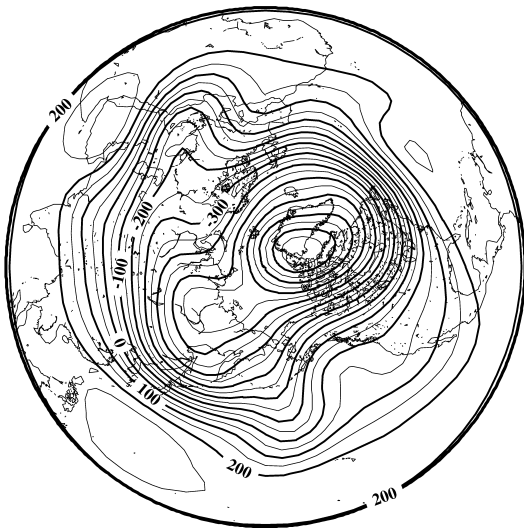
1990011200



1990011600



1990012000



1990012400

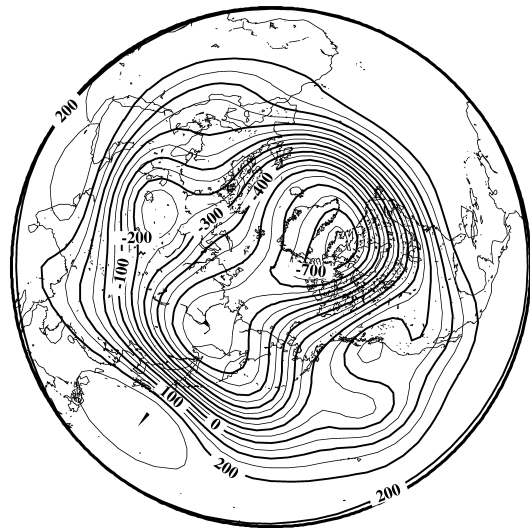
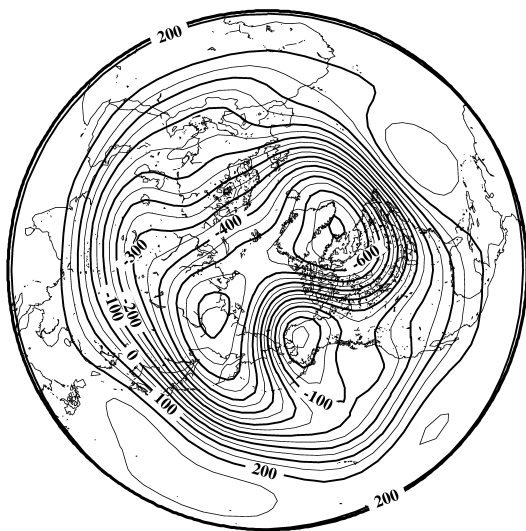


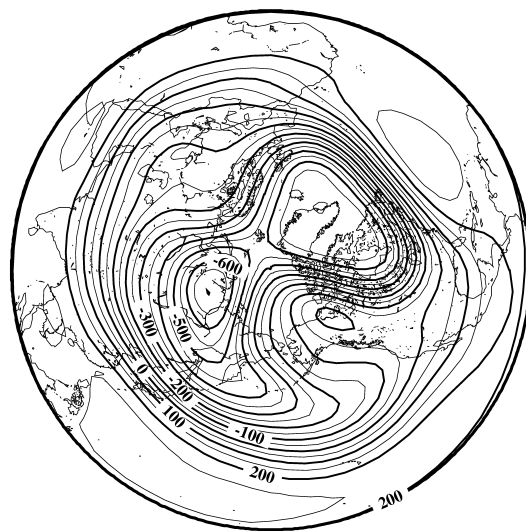
図 17: 実験 1: 1990 年 1 月 12 日 00GMT 初期値による Growth-model run における順圧高度場 (1)
東西波数 2, 南北モード 5 を e-folding time=9 day で増幅させている。

Barotropic Height (growth rate 9 n2l3)

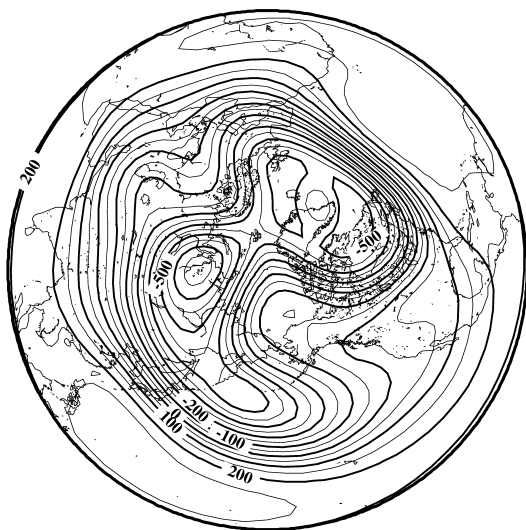
1990012800



1990020100



1990020500



1990020900

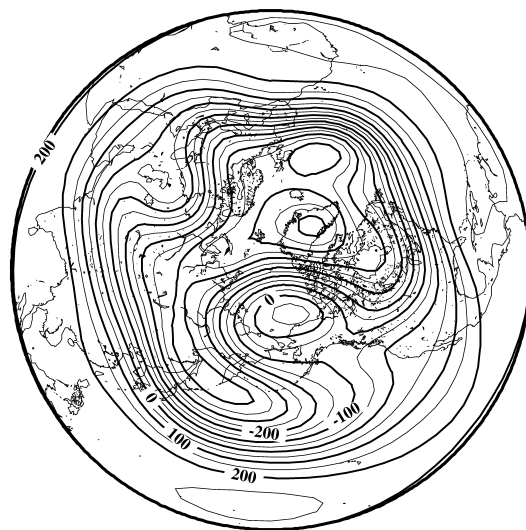
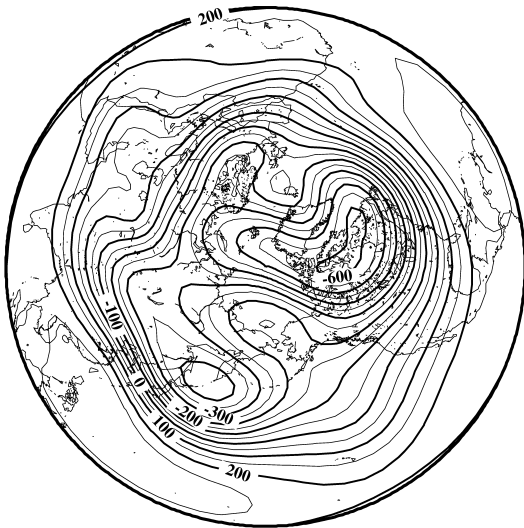


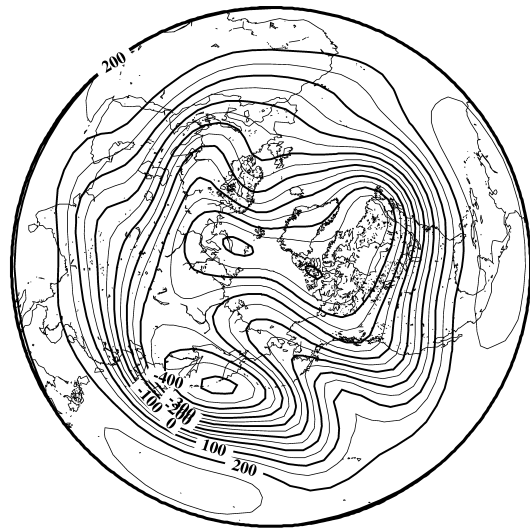
図 18: 実験 1:1990 年 1 月 12 日 00GMT 初期値による Growth-model run における順圧高度場 (2)
図 17 と同様.

Barotropic Height (growth rate 9 n2l3)

1990021300



1990021700



1990022100

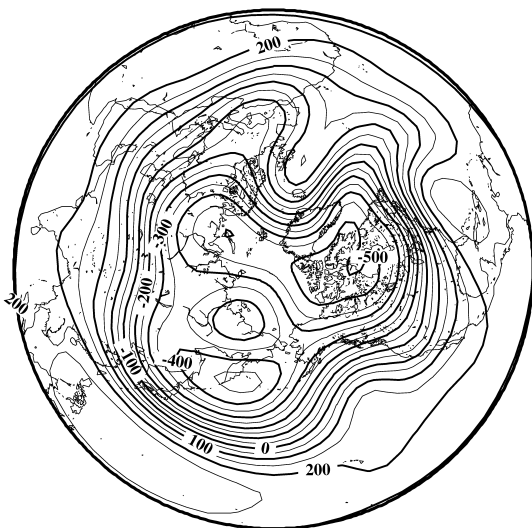


図 19: 実験 1: 1990 年 1 月 12 日初期値による Growth-model run における順圧高度場 (3)
図 17 と同様.

Barotropic Height (growth rate 4.5 n313)

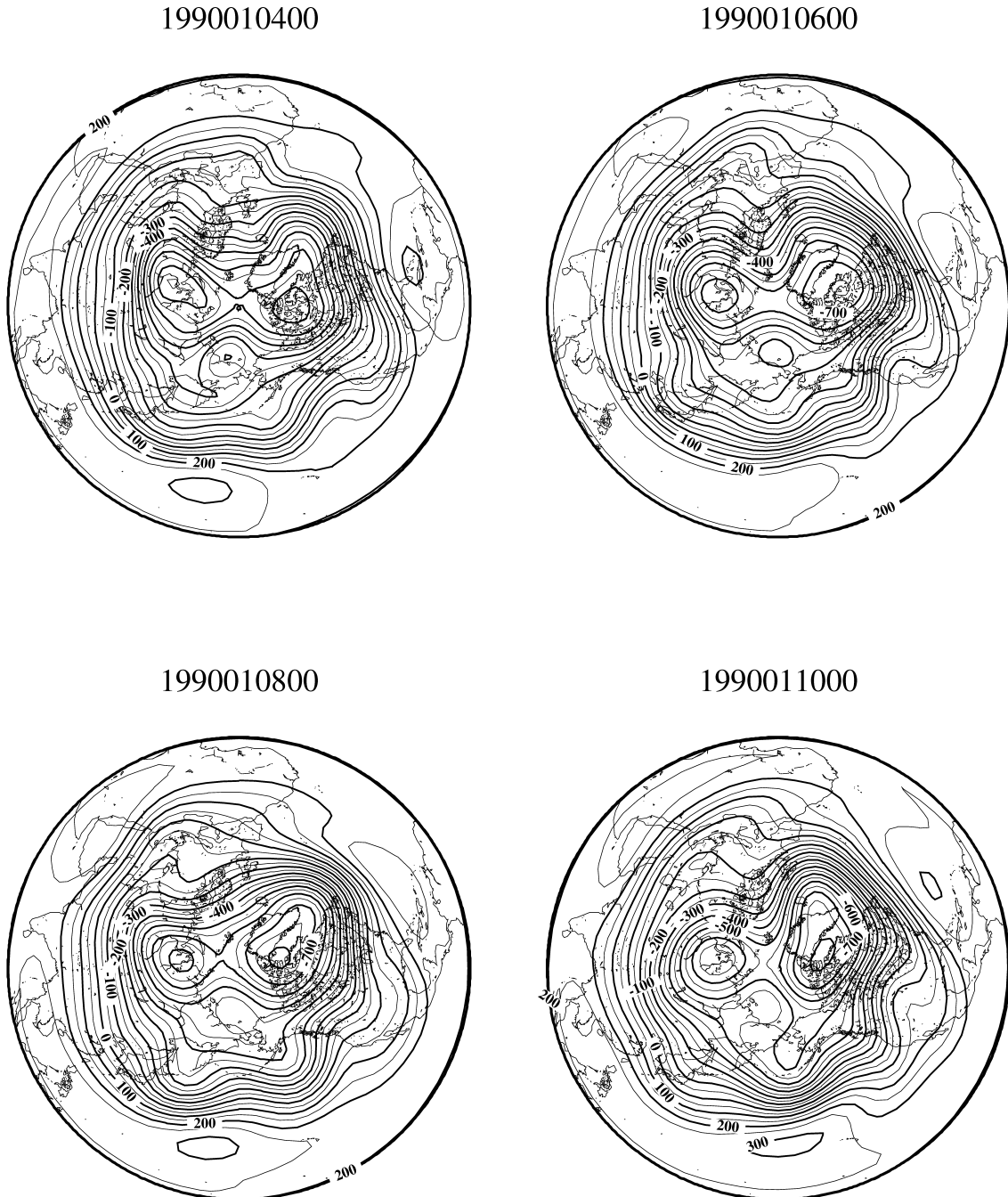
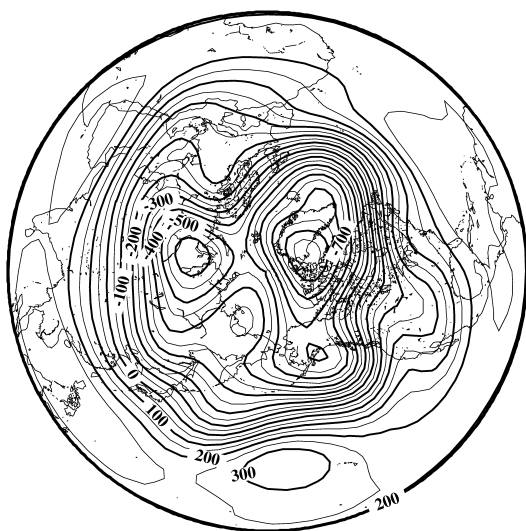


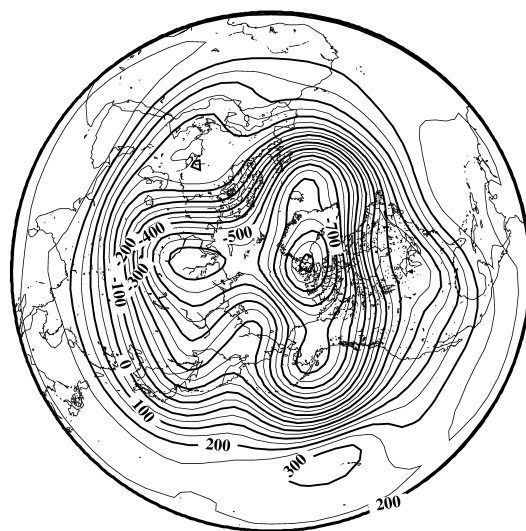
図 20: 実験 1:1990 年 1 月 4 日 00GMT 初期値の Growth-model run における順圧高度場 (1). 東西波数 3, 南北モード 5 を e-folding time = 4.5 day で増幅させている.

Barotropic Height (growth rate 4.5 n313)

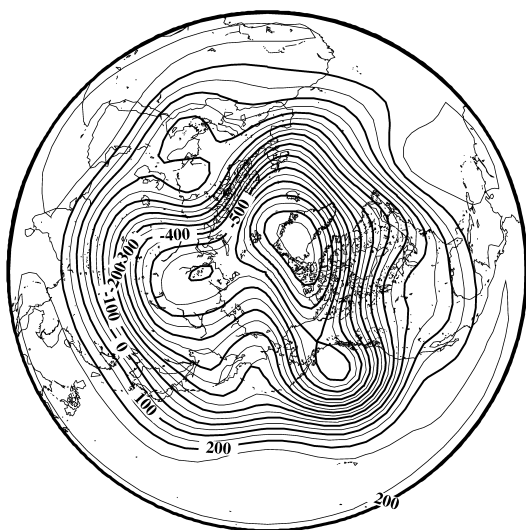
1990011200



1990011400



1990011600



1990011800

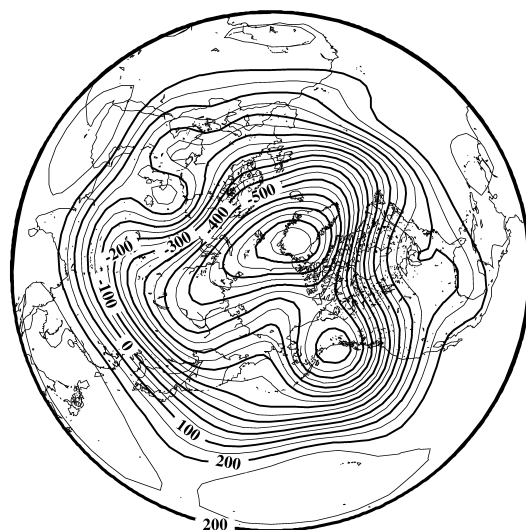
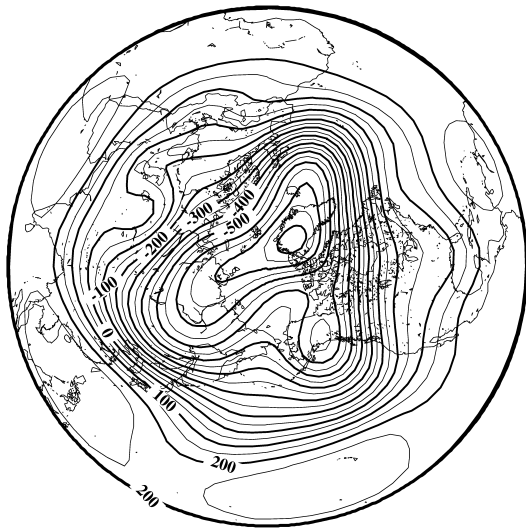


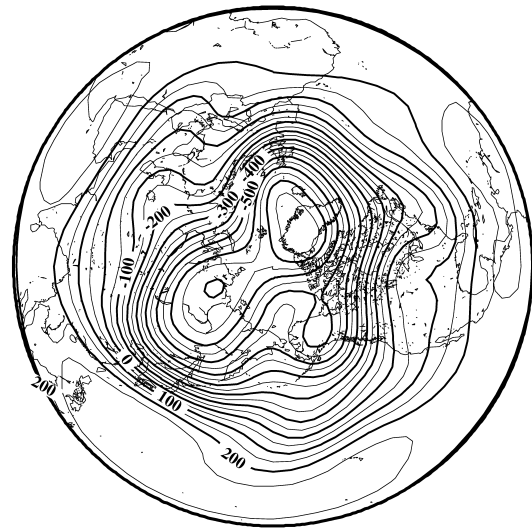
図 21: 実験 1:1990 年 1 月 4 日 00GMT 初期値の Growth-model run における順圧高度場
(2)
図 20 と同様.

Barotropic Height (growth rate 4.5 n3l3)

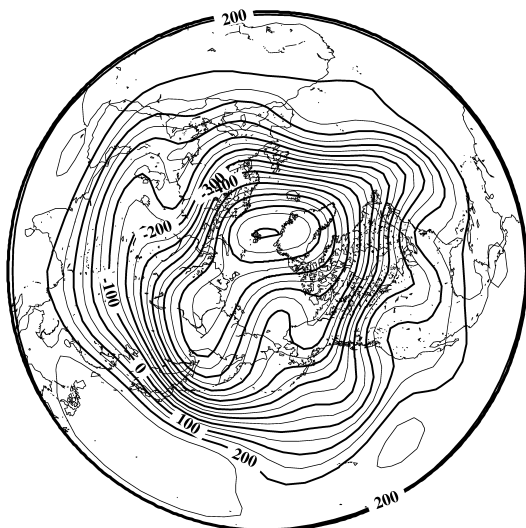
1990012000



1990012200



1990012400



1990012600

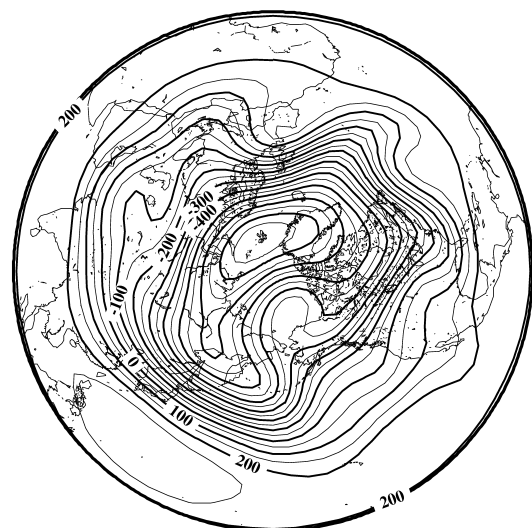


図 22: 実験 1:1990 年 1 月 4 日 00GMT 初期値の Growth-model run における順圧高度場
(3)
図 20 と同様.

Barotropic Height (growth rate 5 n3l3)

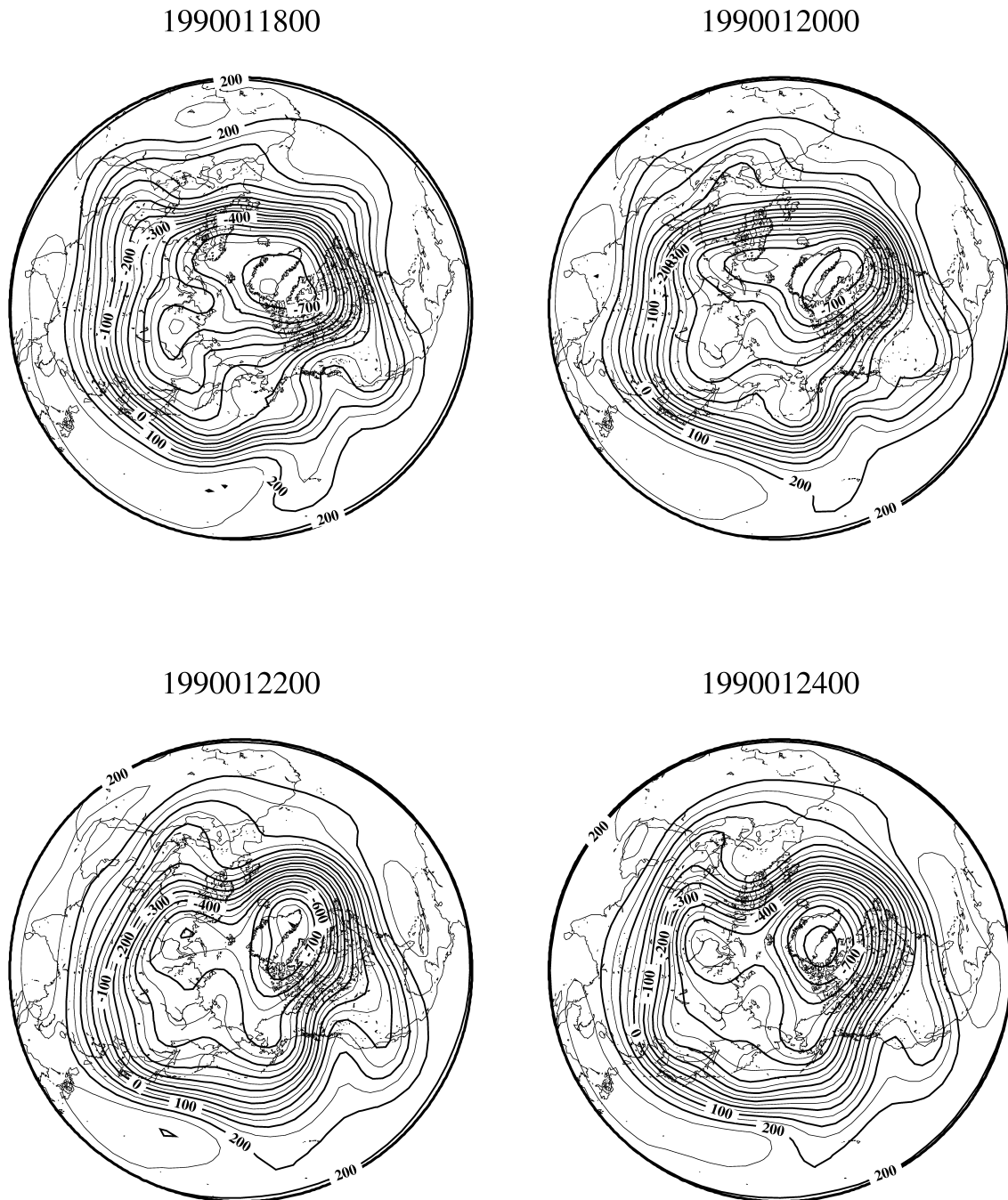
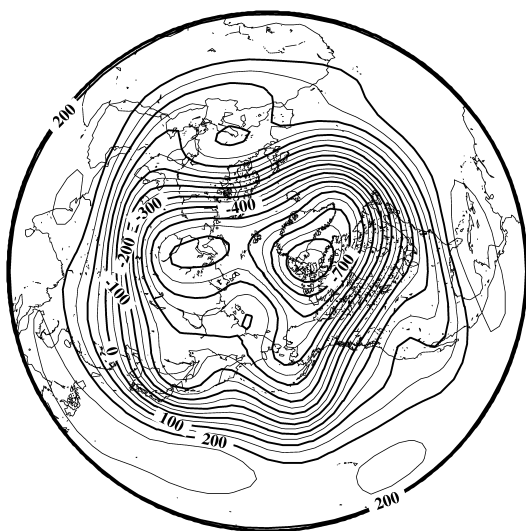


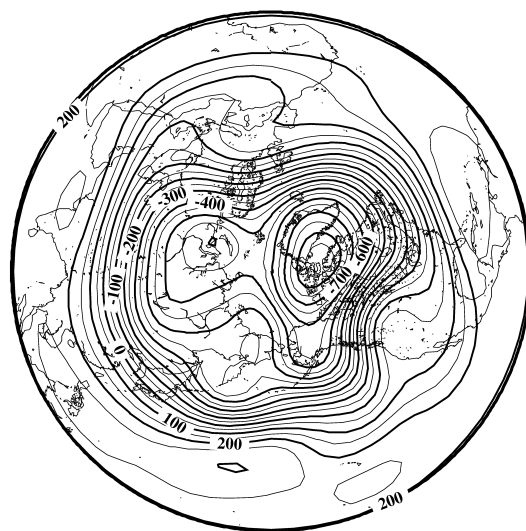
図 23: 実験 1:1990 年 1 月 18 日 00GMT 初期値の Growth-model run における順圧高度場
(1)
東西波数 3, 南北モード 5 を e-folding time = 5 day で増幅させている。

Barotropic Height (growth rate 5 n3l3)

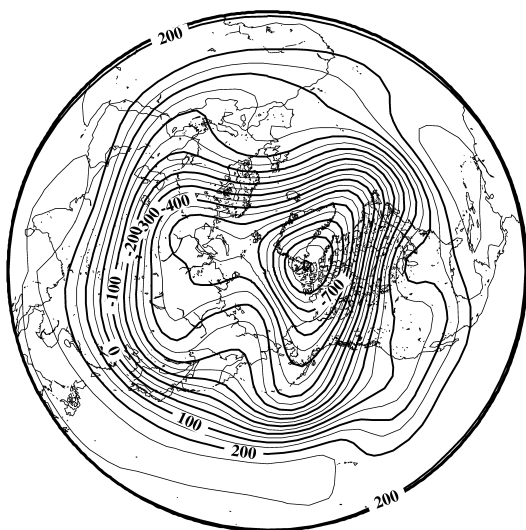
1990012600



1990012800



1990013000



1990020100

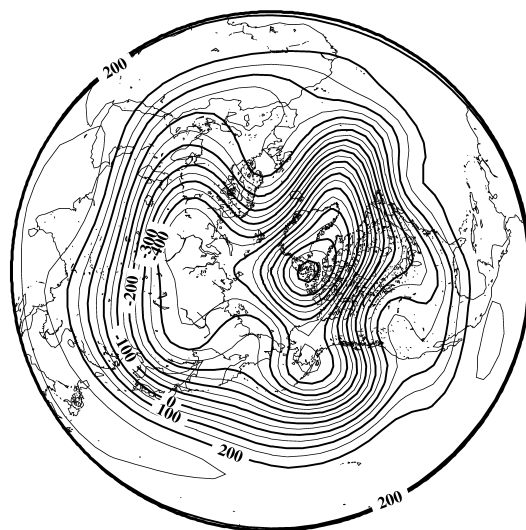
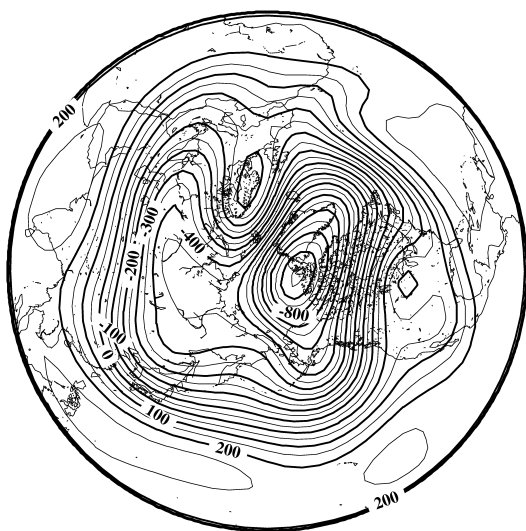


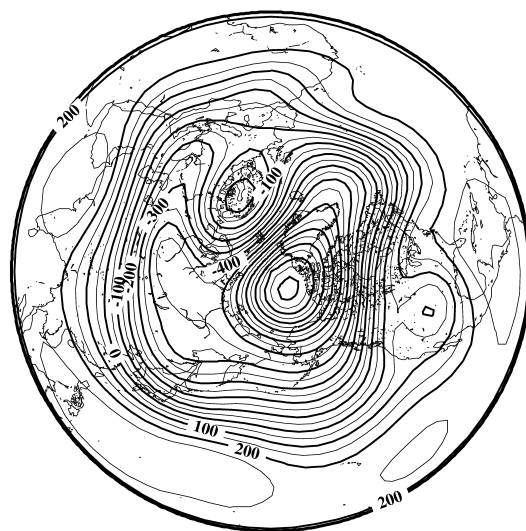
図 24: 実験 1:1990 年 1 月 18 日 00GMT 初期値の Growth-model run における順圧高度場
(2)
図 23 と同様.

Barotropic Height (growth rate 5 n3l3)

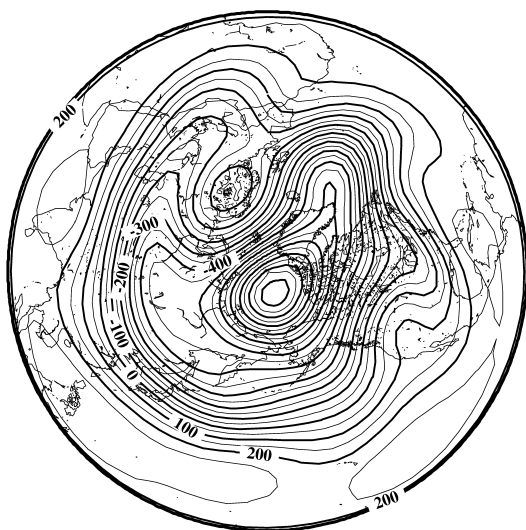
1990020300



1990020500



1990020700



1990020900

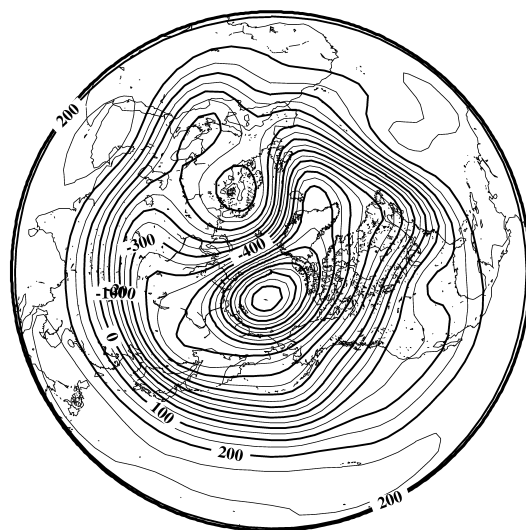
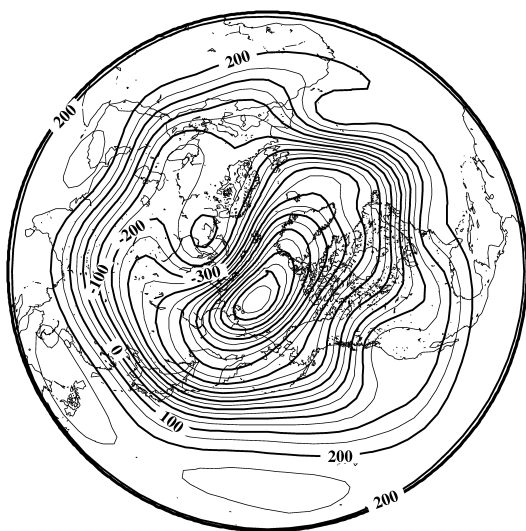


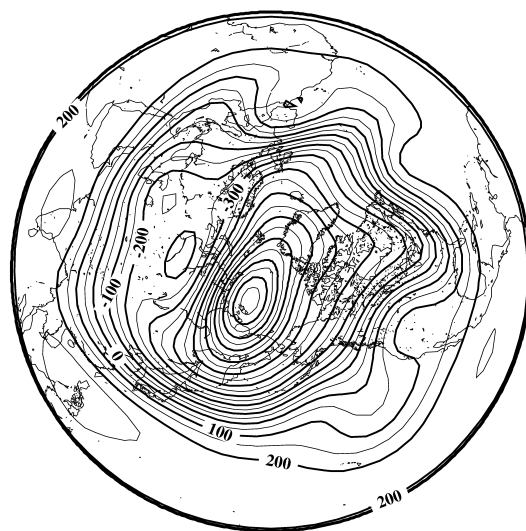
図 25: 実験 1:1990 年 1 月 18 日 00GMT 初期値の Growth-model run における順圧高度場
(3)
図 23 と同様.

Barotropic Height (growth rate 5 n3l3)

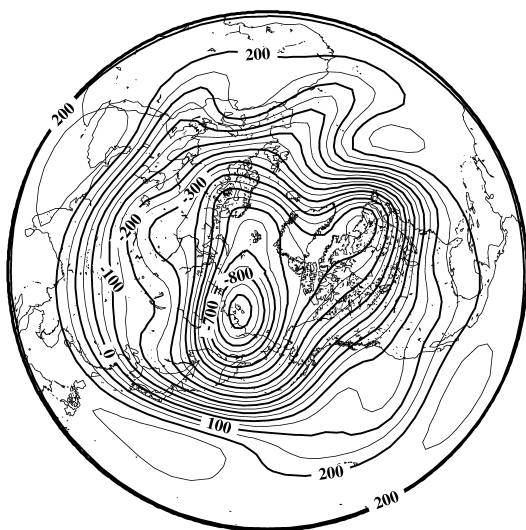
1990021100



1990021200



1990021400



1990021600

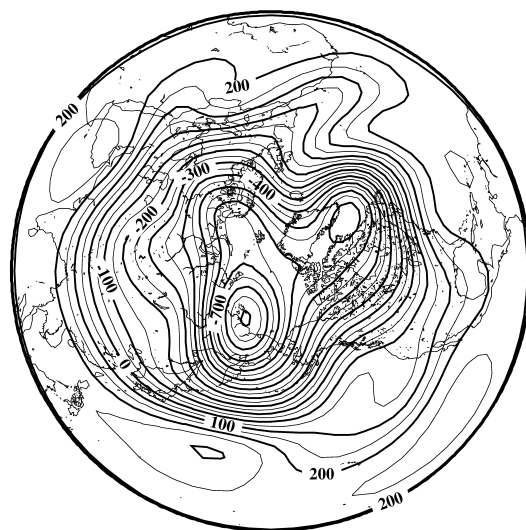
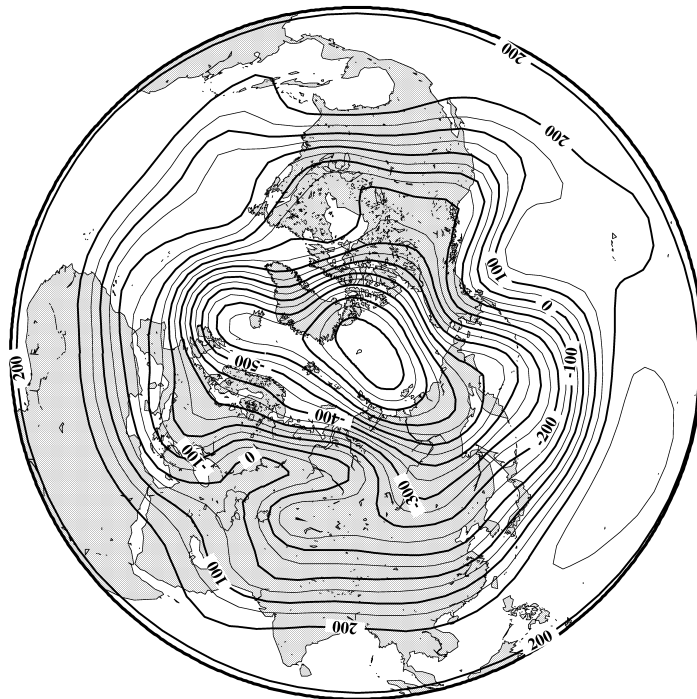


図 26: 実験 1:1990 年 1 月 18 日 00GMT 初期値の Growth-model run における順圧高度場 (4)
図 23 と同様.

12 24 February 1996



00 01 March 1996

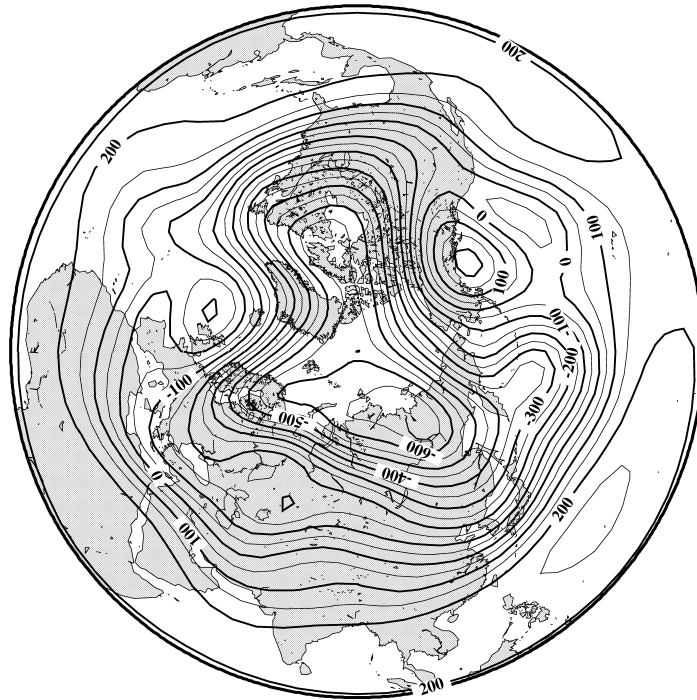


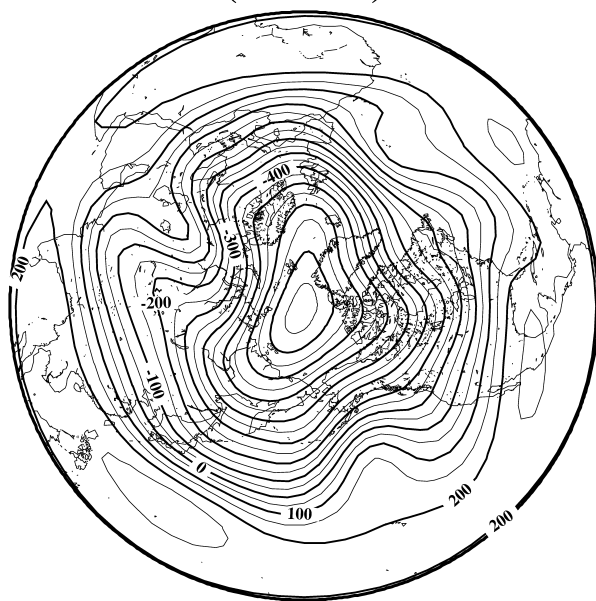
図 27: 実験 2:1996 年 2 月 24 日 12GMT (Onset) と 1996 年 3 月 1 日 00GMT (Mature) の
順圧高度場

Barotropic Height

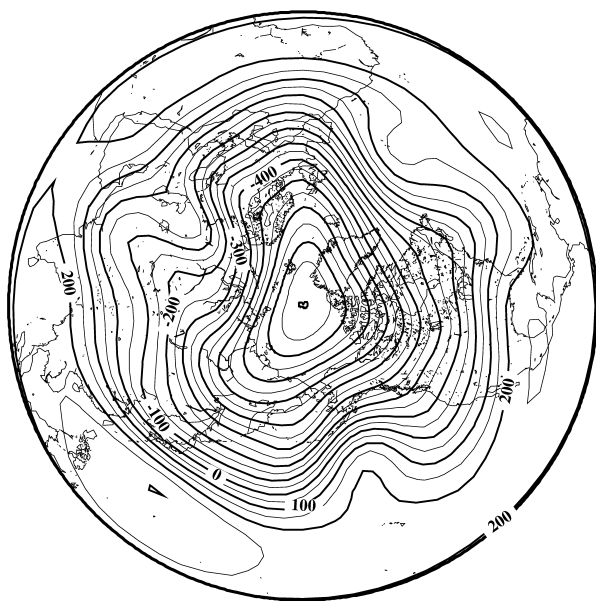
Init : 1996021912

day = 5

Growth-model
(b9n313)



S-model



Difference

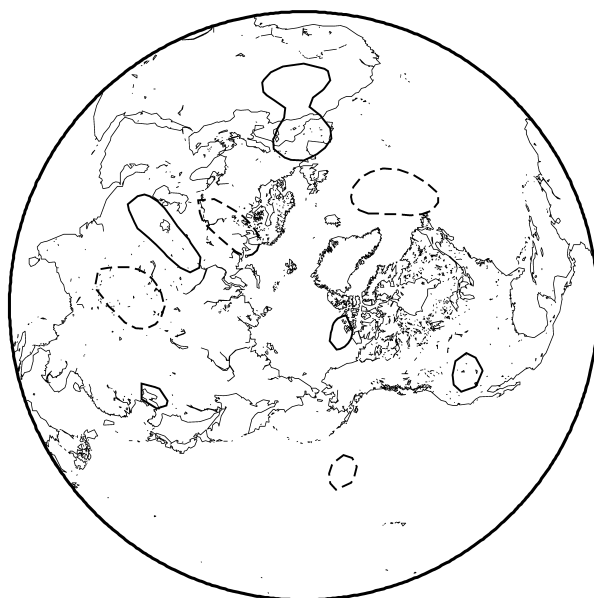


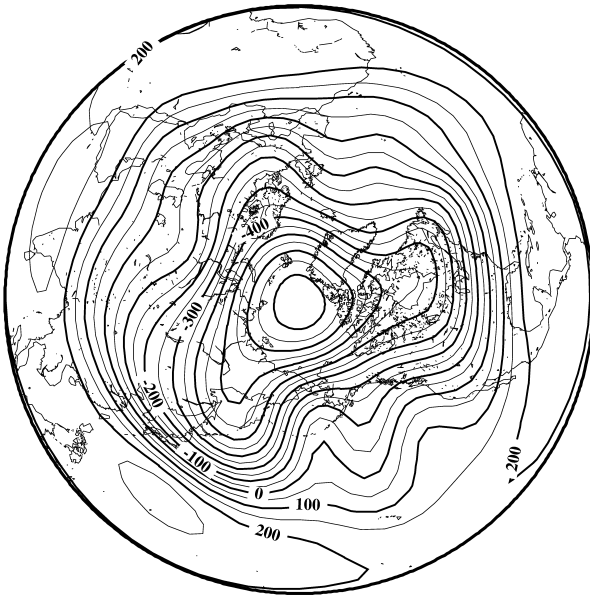
図 28: 実験 2:1996 年 2 月 19 日 12GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および両者の差の順圧高度場
5 日目. コンターは 50m で引いている. 差の実線は正, 点線は負を示している.

Barotropic Height

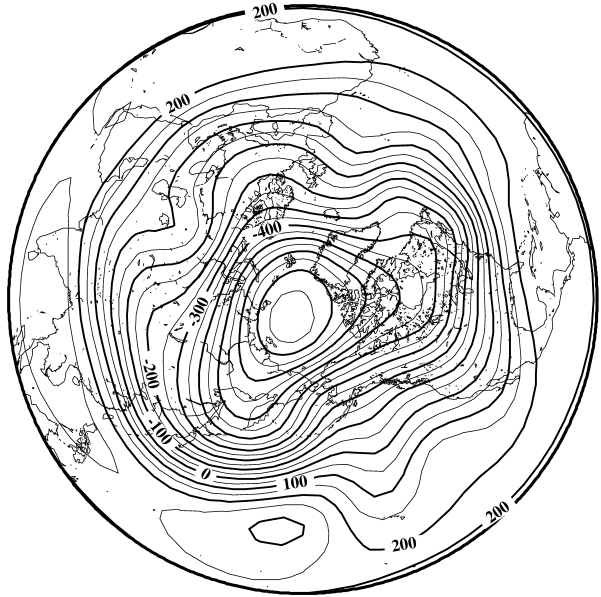
Init : 1996021912

day = 10

Growth-model
(b9n3l3)



S-model



Difference

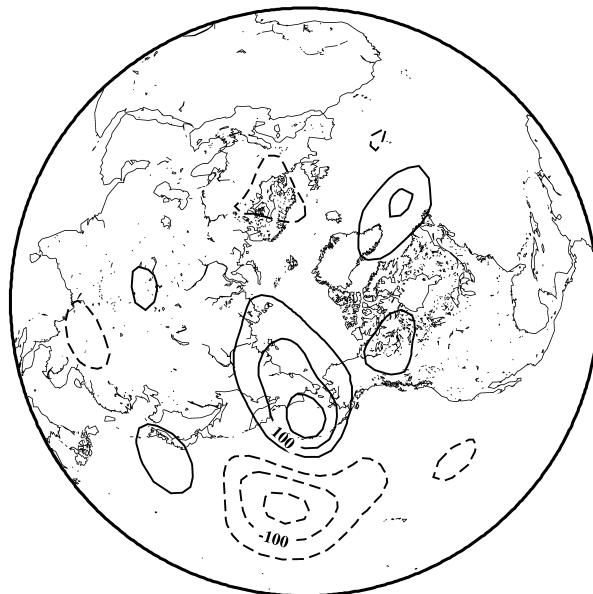


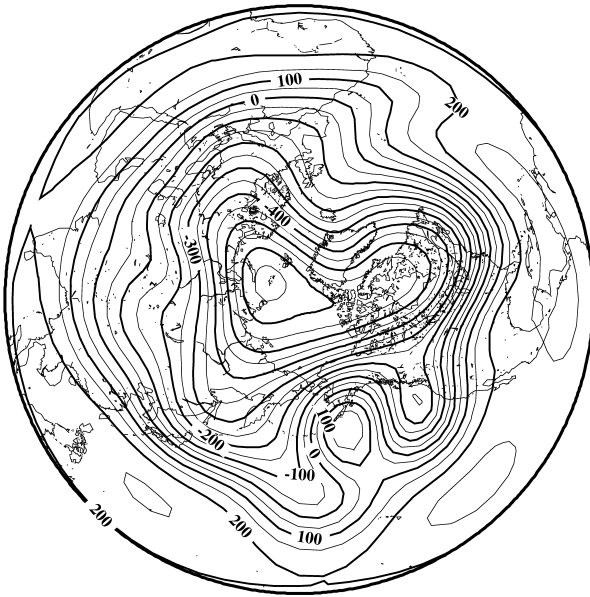
図 29: 実験 2:1996 年 2 月 19 日 12GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および差の順圧高度場
10 日目. 図 28 と同様.

Barotropic Height

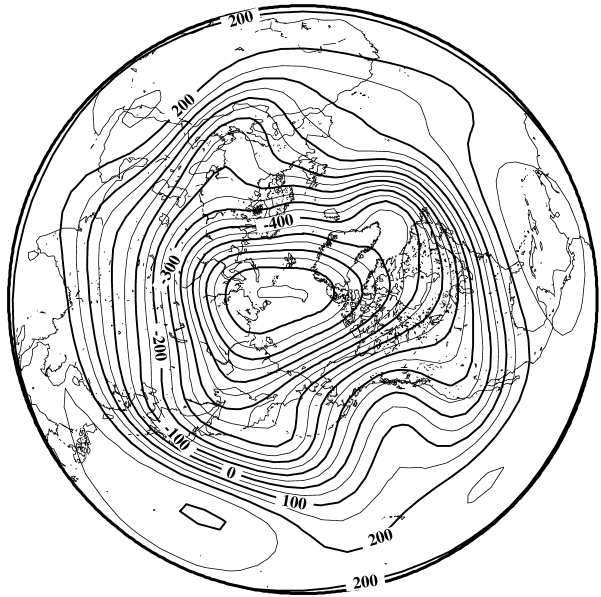
Init : 1996021912

day = 15

Growth-model
(b9n313)



S-model



Difference

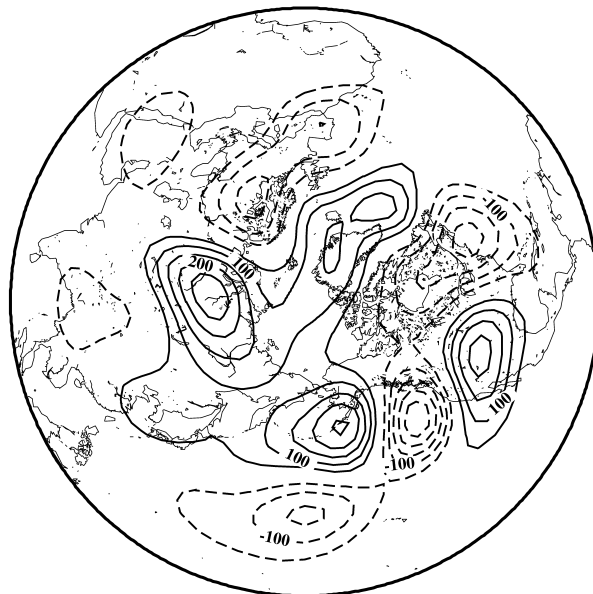


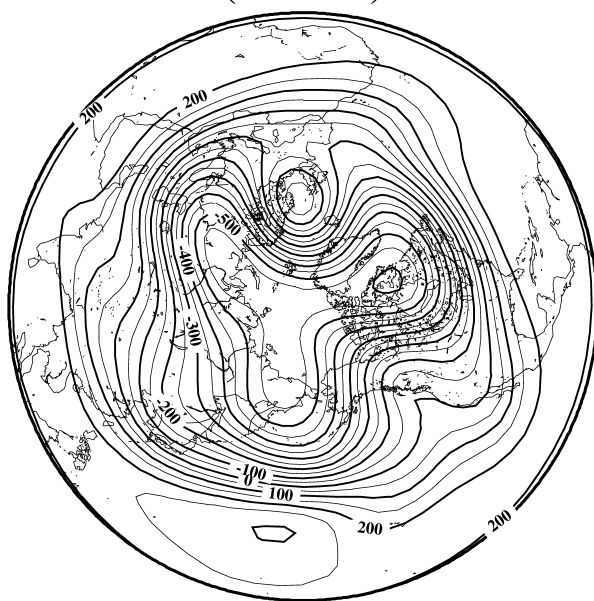
図 30: 実験 2: 1996 年 2 月 19 日 12GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および差の順圧高度場
15 日目. 図 28 と同様.

Barotropic Height

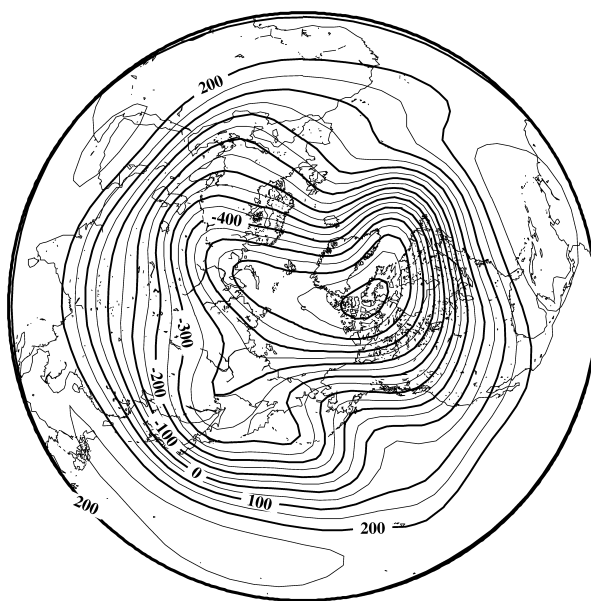
Init : 1996021912

day = 25

Growth-model
(b9n313)



S-model



Difference



図 31: 実験 2:1996 年 2 月 19 日 12GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および差の順圧高度場
25 日目. 図 28 と同様.

Energy Spectrum

S-model 20days run starting at 1996021912

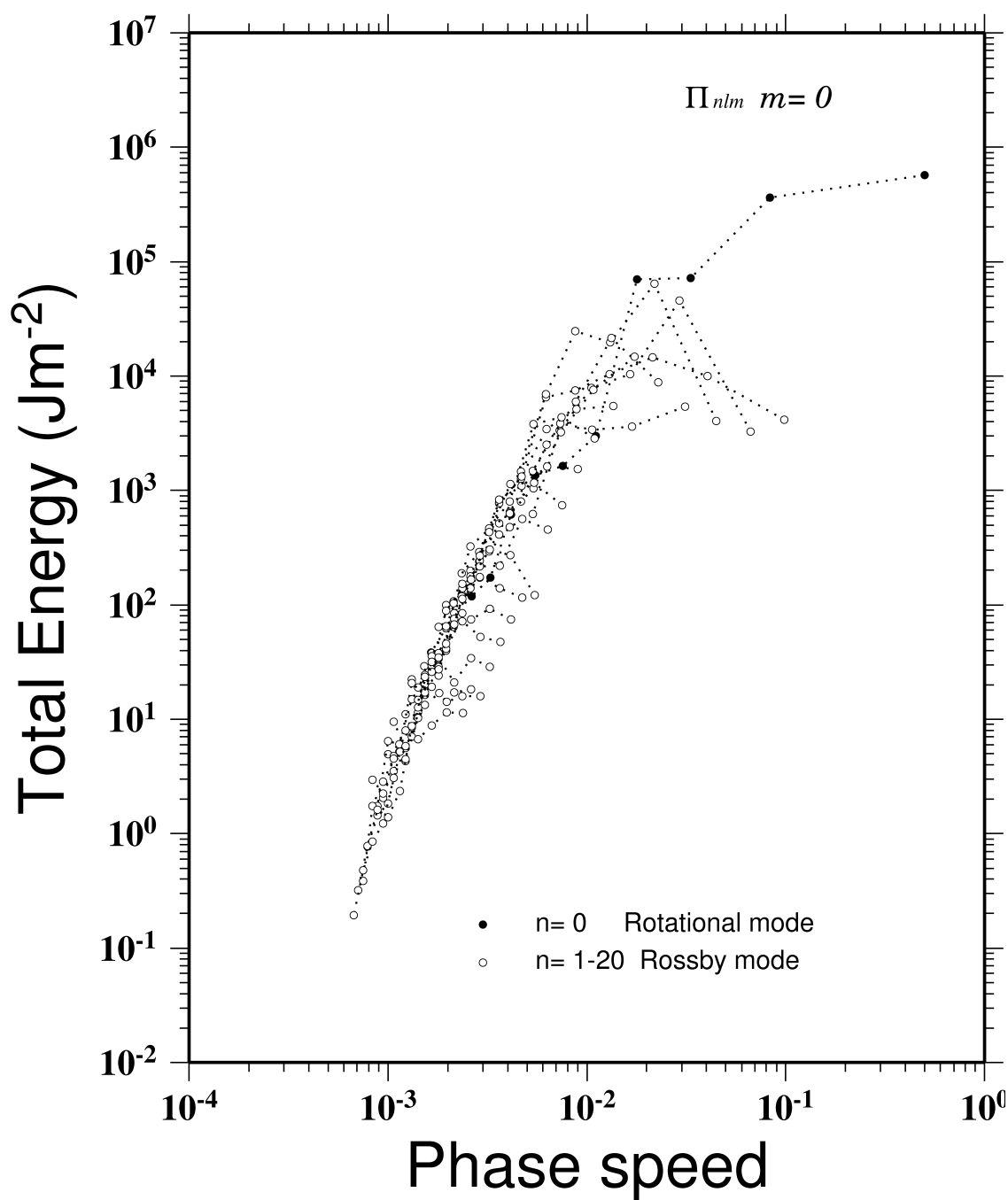


図 32: 実験 2:1996 年 2 月 19 日 12GMT 初期値の Normal S-model run によるエネルギー スペクトル図

Energy Spectrum

20days run starting at 19960219 12 b9n3l3

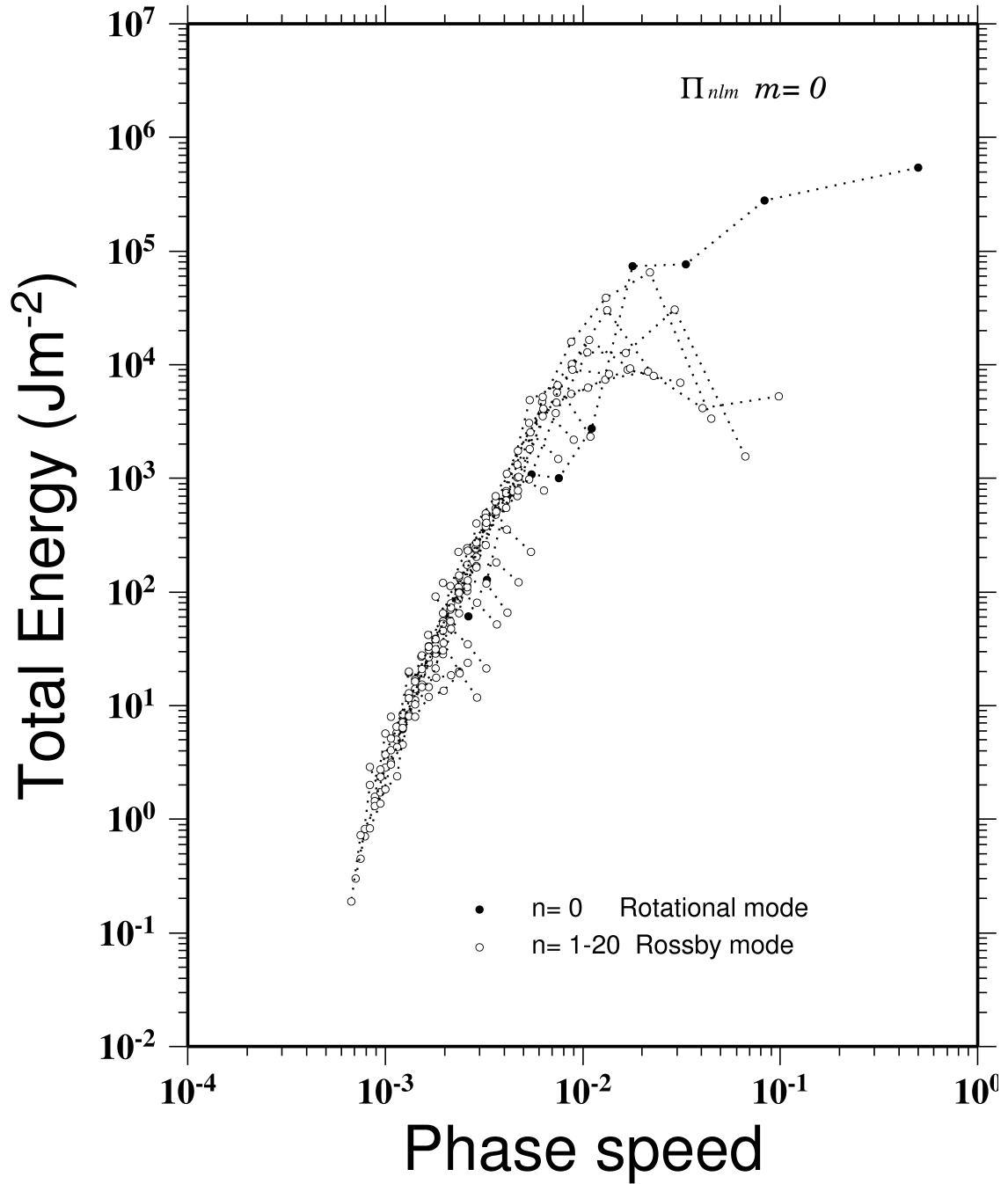


図 33: 実験 2:1996 年 2 月 19 日 12GMT 初期値の Growth-model run によるエネルギースペクトル図
東西波数 3, 南北モード 5 を e-folding time = 9 day で励起している。

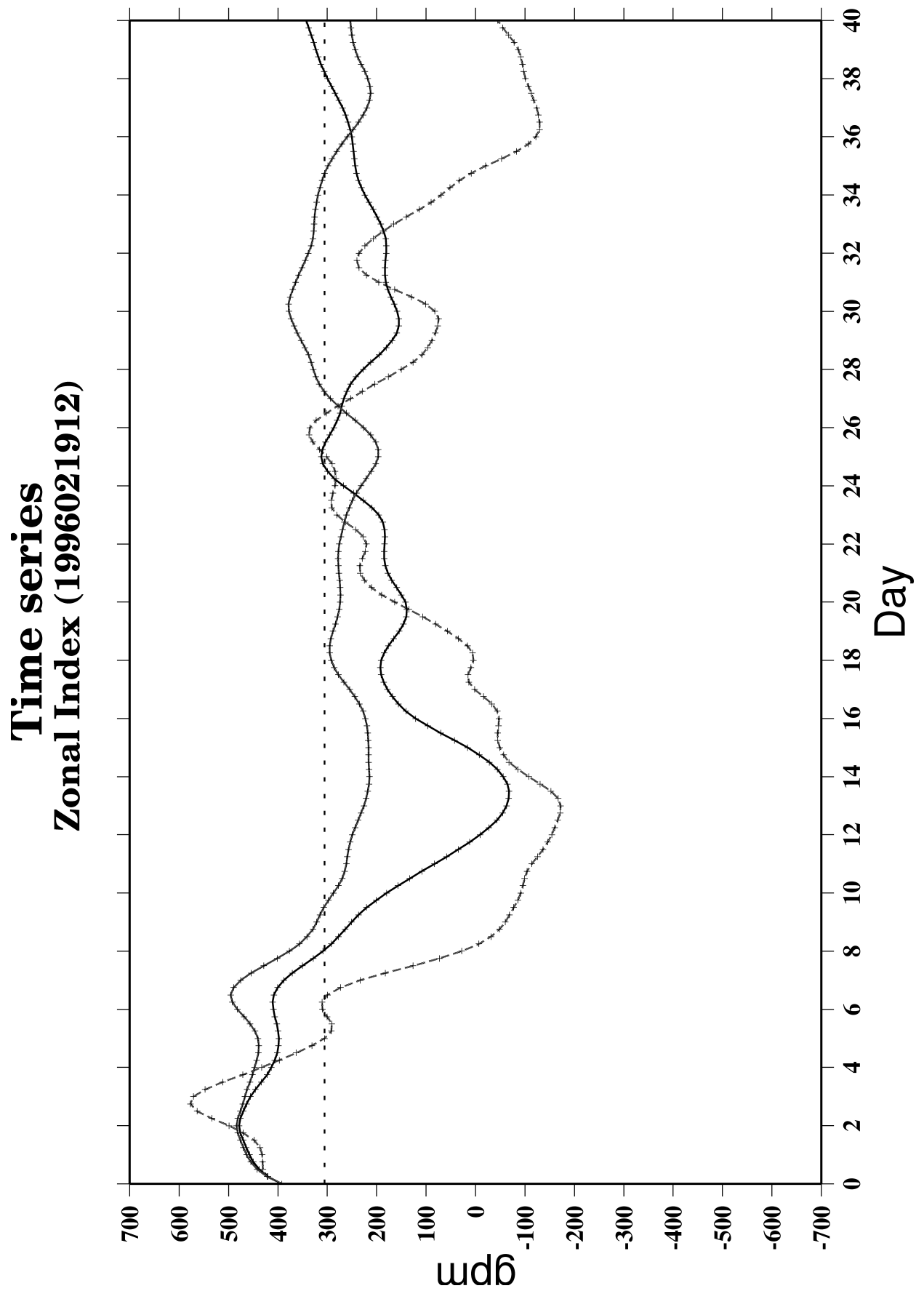


図 34: 実験 2: Zonal Index による評価
それぞれ NCEP/NCAR(点線), Normal S-model(細線), Growth model(太線) を示す.

Time series Zonal 3, Merid 5 and Total Energy

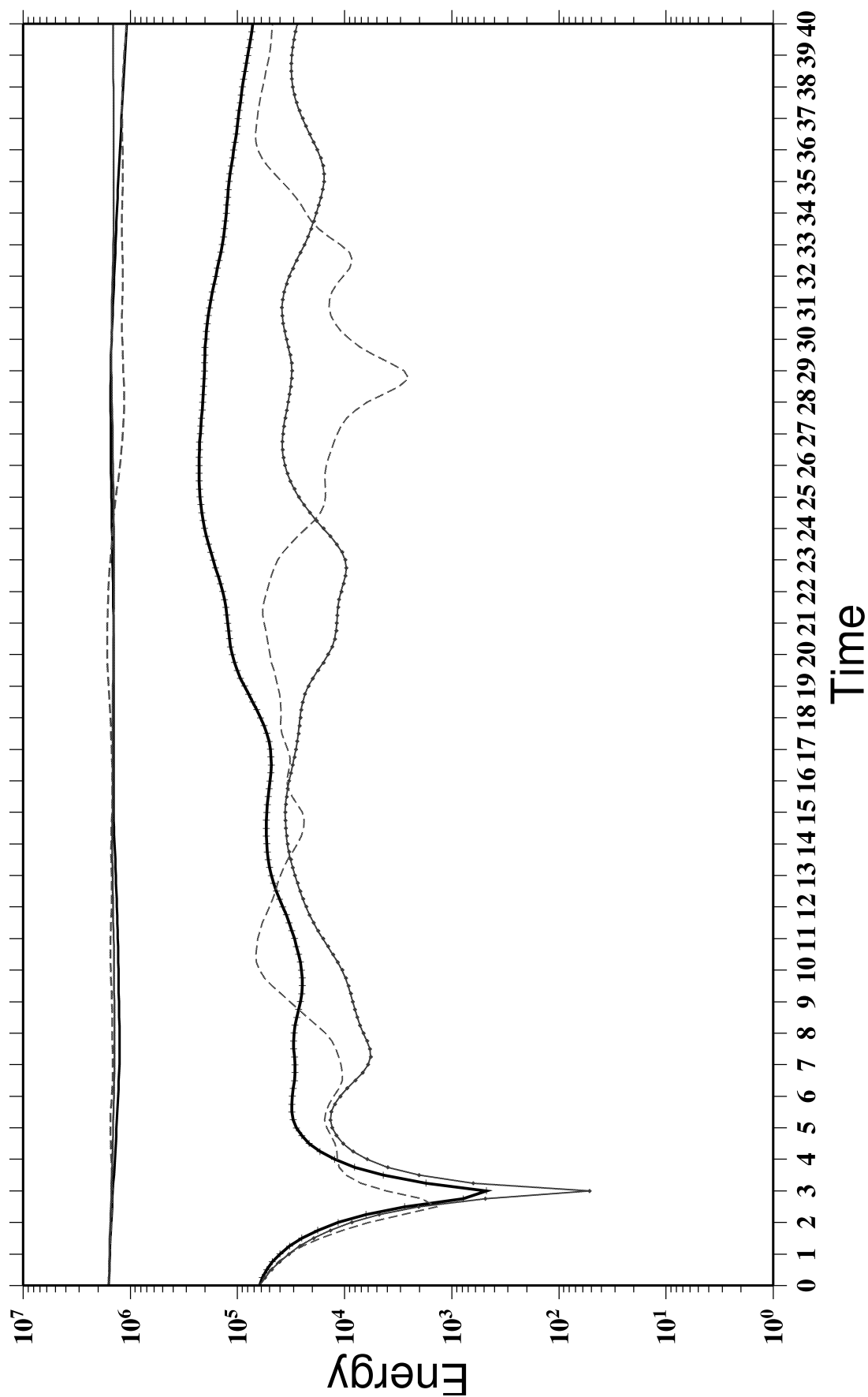
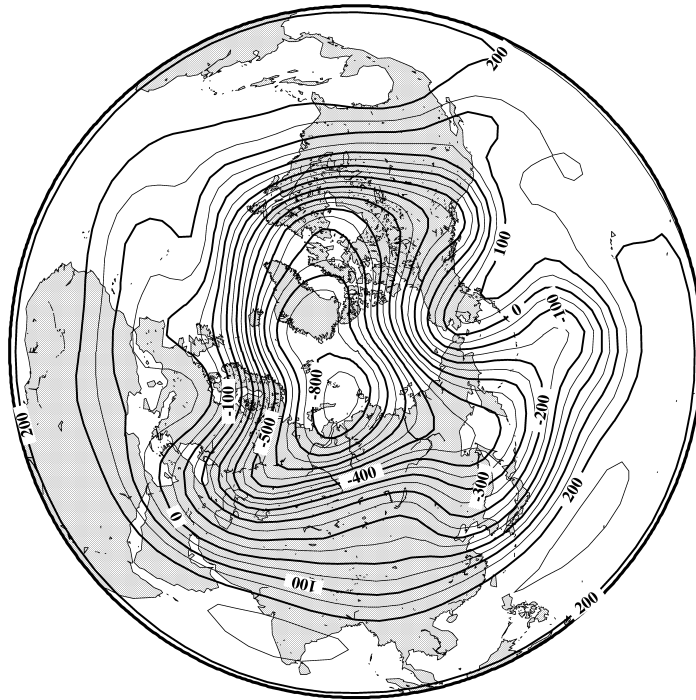


図 35: 実験 2:1996 年 2 月 19 日 12GMT 初期値のエネルギー時系列図

点線は NCEP/NCAR, 細線は Normal S-model run, 太線は Growth run を示しており, エネルギーの高い線が全エネルギー, 低い線が東西波数 3, 南北モード 5 のエネルギーを示す. 実況値 5 日目にあたる値にあわせ, 図中央に点線を引いている.

12 01 February 1989



00 29 January 1989

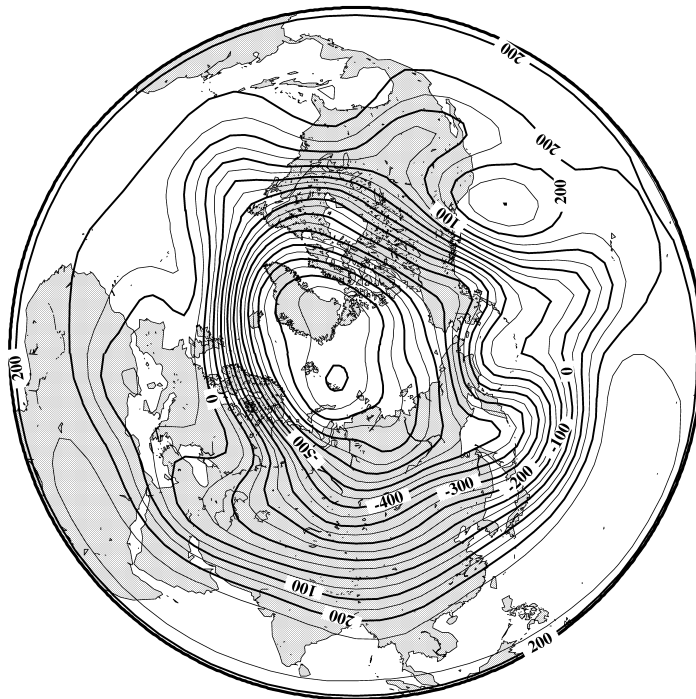


図 36: 実験 2:1989 年 1 月 29 日 00GMT (Onset) と 1989 年 2 月 1 日 12GMT (Mature) のブロッキングの順圧高度場

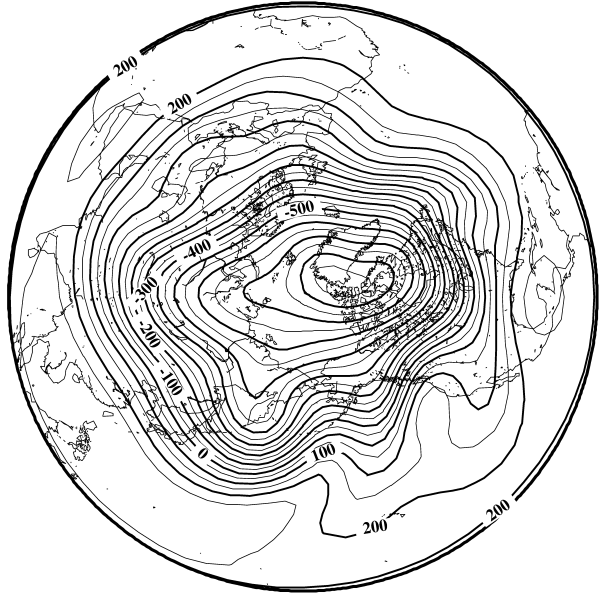
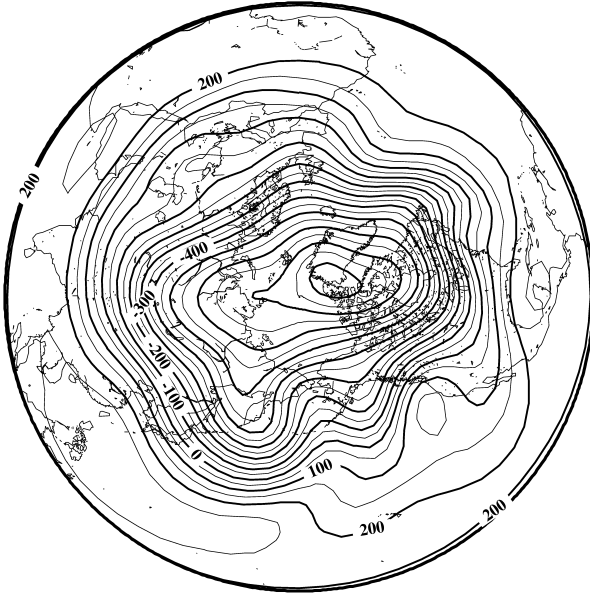
Barotropic Height

Init : 1989012400

day = 5

Growth-model
(testb8n2l3)

S-model



Difference

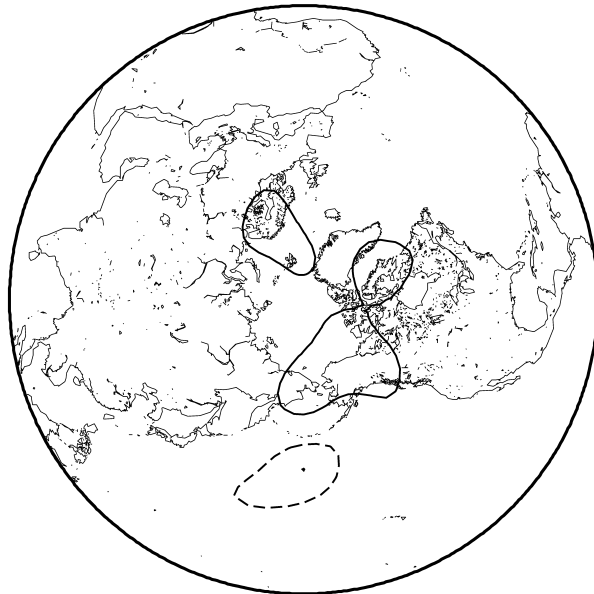


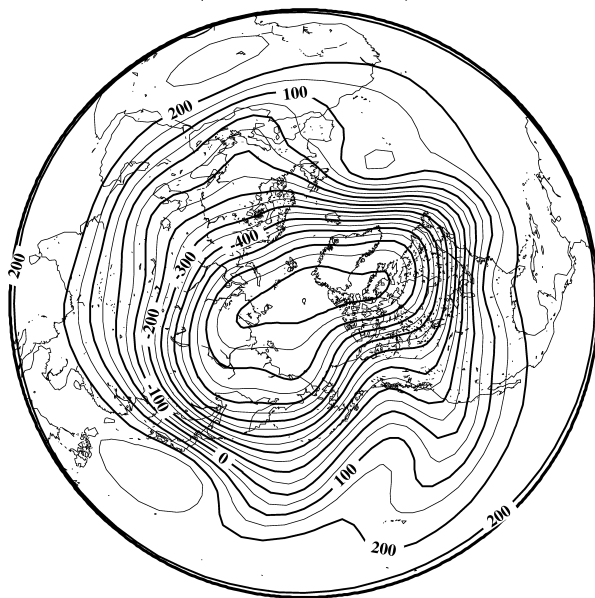
図 37: 実験 2:1989 年 1 月 24 日 00GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および両者の差の順圧高度場
5 日目. Growth run は東西波数 2, 南北モード 5 を e-folding time = 8 day で増幅している.
コンターは 50m で引いている. 差の実線は正, 点線は負を示している.

Barotropic Height

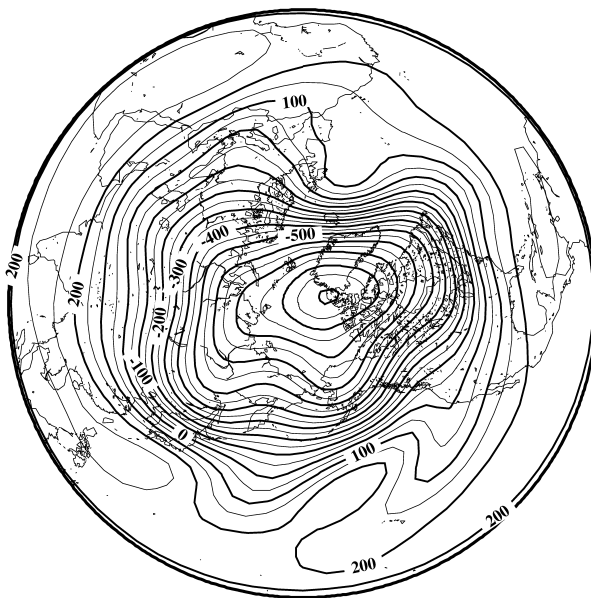
Init : 1989012400

day = 8

Growth-model
(testb8n2l3)



S-model



Difference

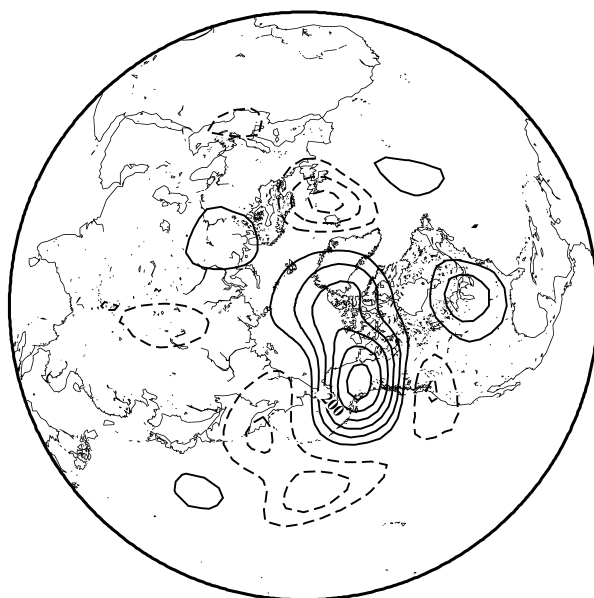


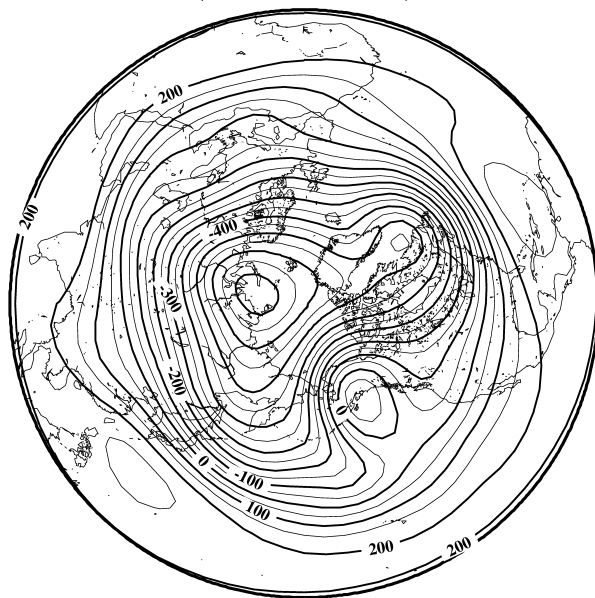
図 38: 実験 2: 1989 年 1 月 24 日 00GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および差の順圧高度場
8 日目. 図 36 と同様.

Barotropic Height

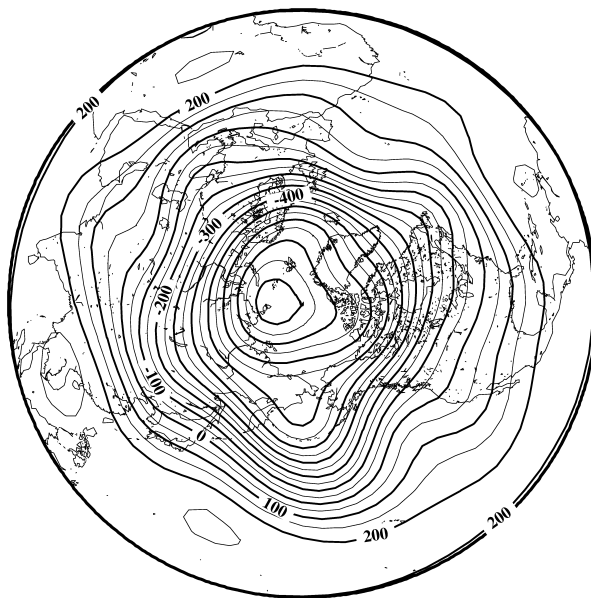
Init : 1989012400

day = 18

Growth-model
(testb8n213)



S-model



Difference

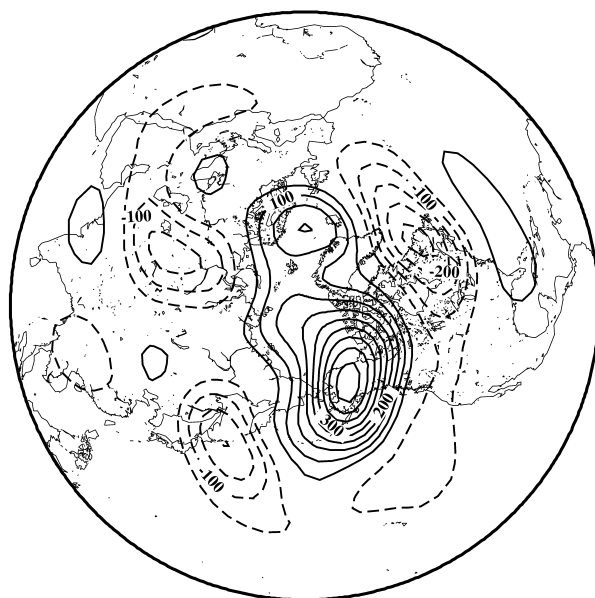


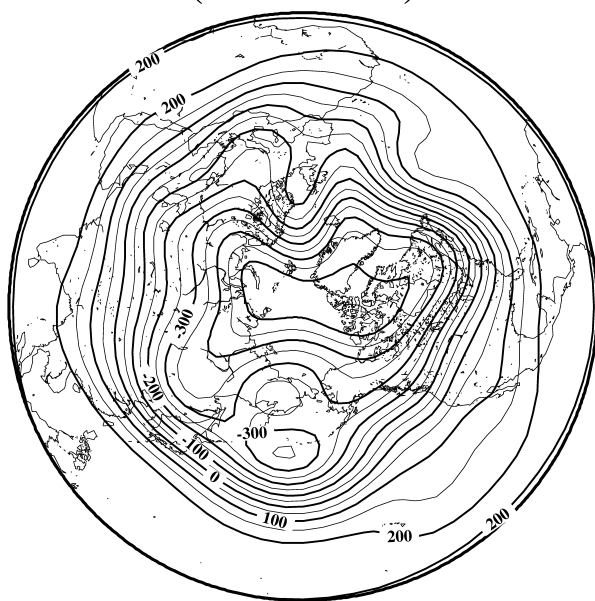
図 39: 実験 2: 1989 年 1 月 24 日 00GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および差の順圧高度場
18 日目. 図 36 と同様.

Barotropic Height

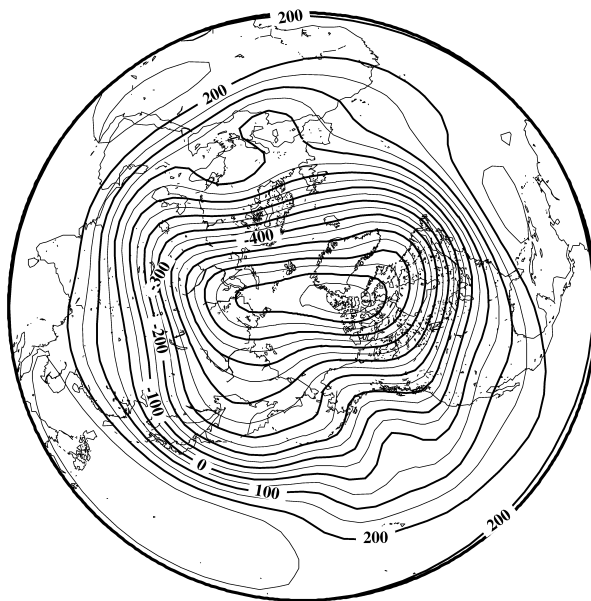
Init : 1989012400

day = 34

Growth-model
(testb8n213)



S-model



Difference

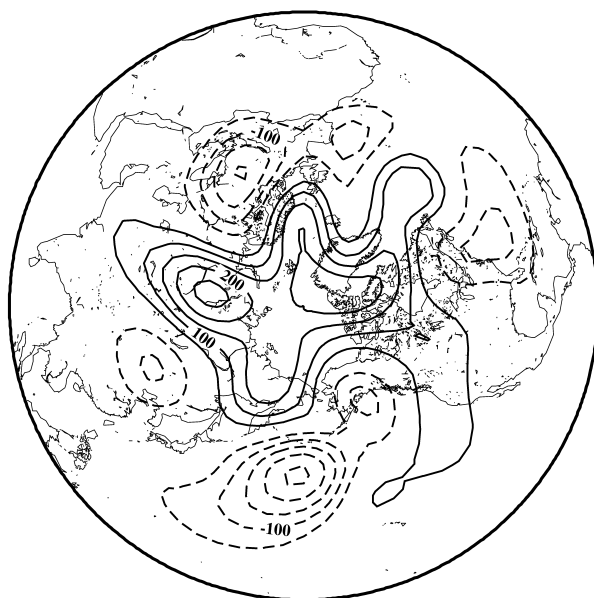


図 40: 実験 2: 1989 年 1 月 24 日 00GMT 初期値による Normal S-model run と Growth run および差の順圧高度場
34 日目. 図 36 と同様.

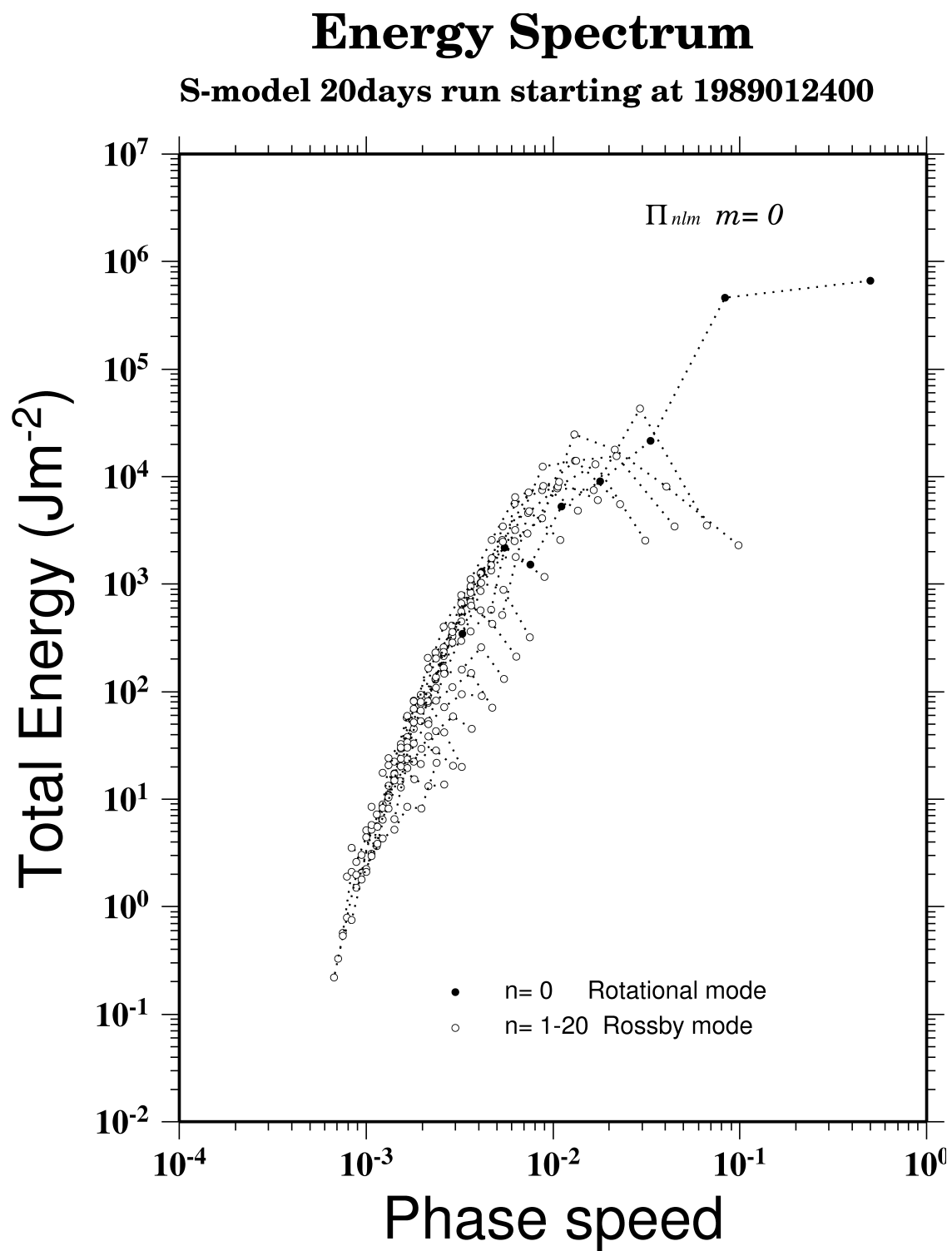


図 41: 実験 2:1989 年 1 月 24 日 00GMT 初期値による S-model run のエネルギースペクトル図

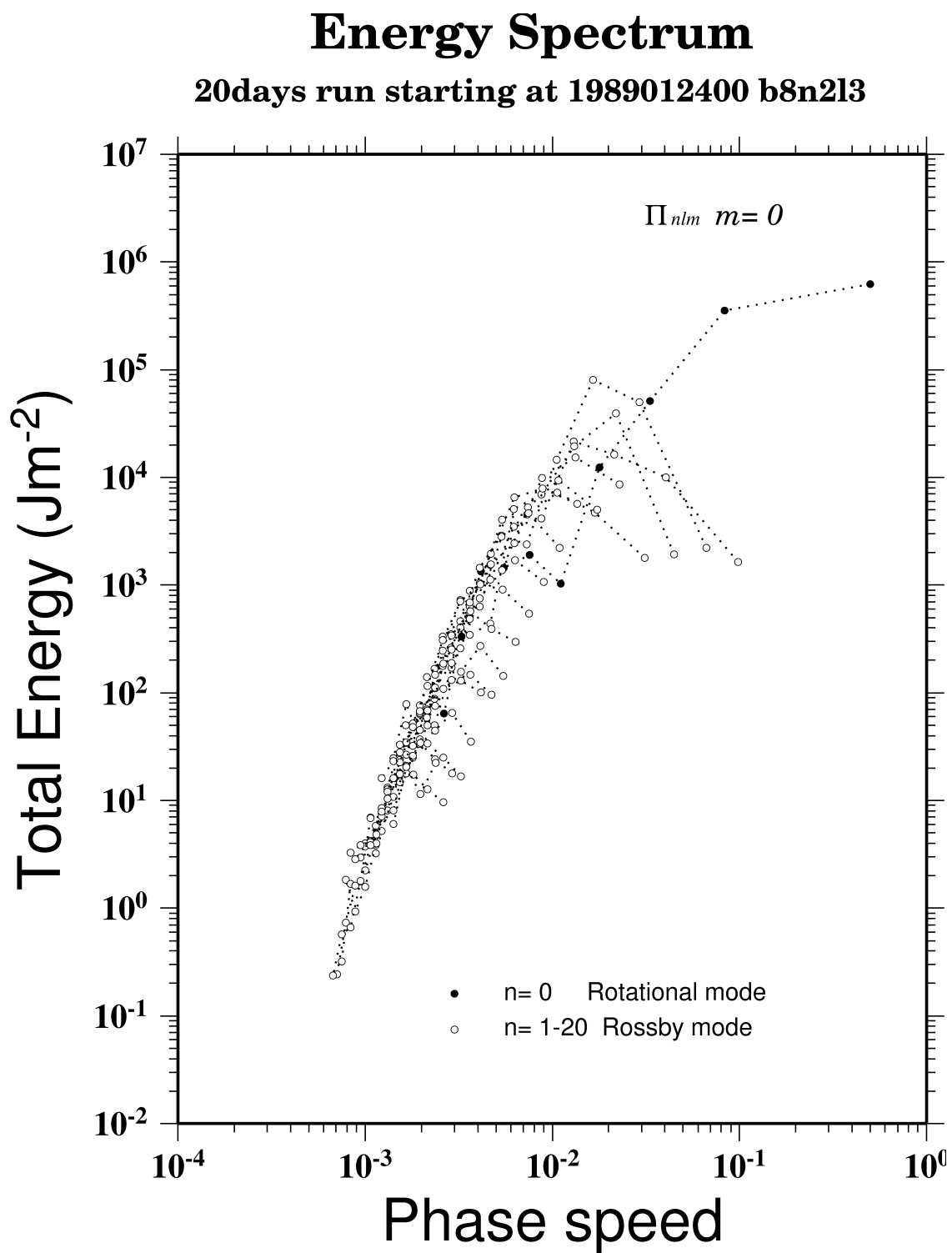


図 42: 実験 2:1989 年 1 月 24 日 00GMT 初期値による Growth-model run のエネルギースペクトル図

Time series
Zonal Index
Init:1989012400

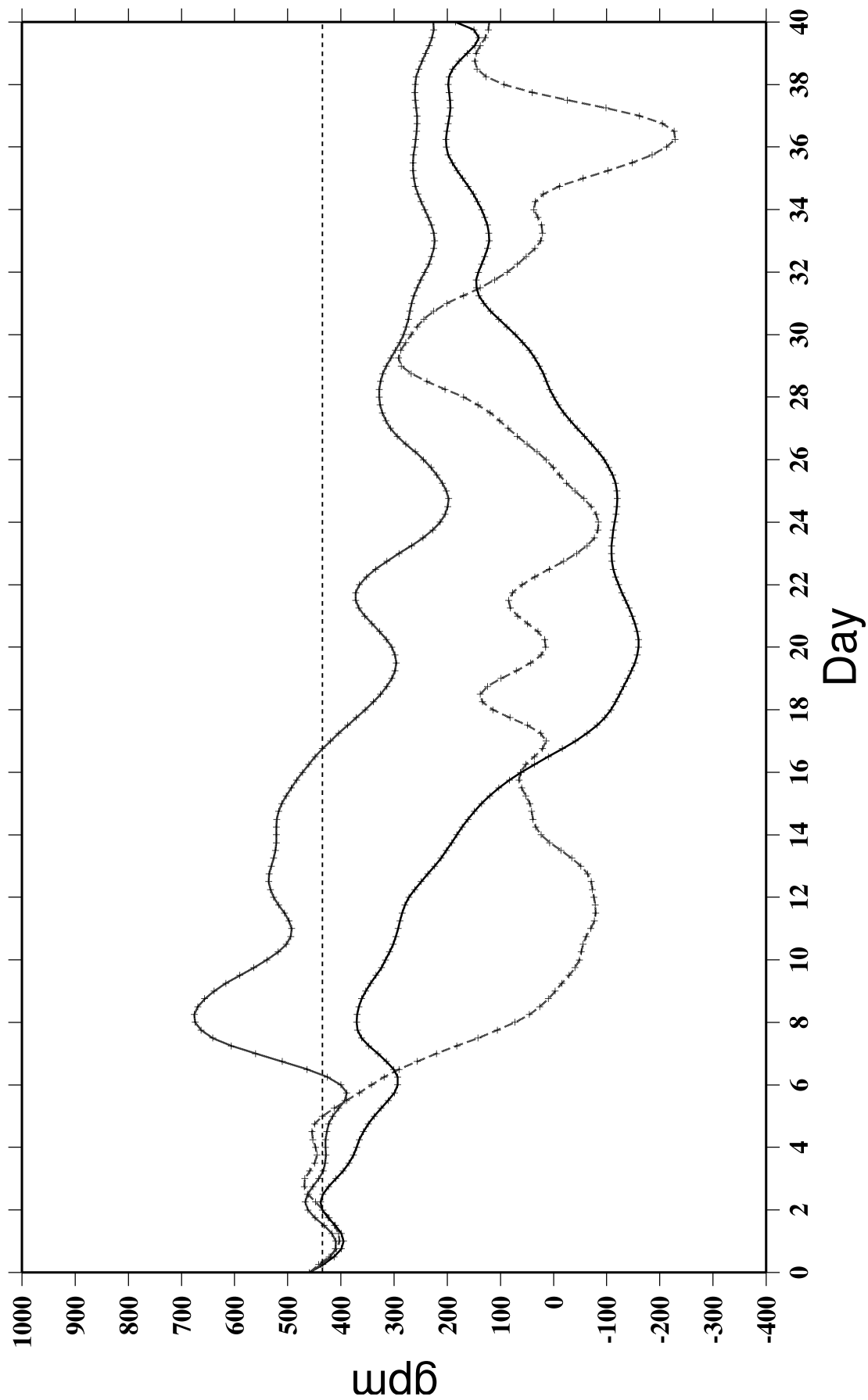


図 43: 実験 2:Zonal Index による評価 (太平洋域)
 それぞれ NCEP/NCAR(点線), Normal S-model(細線), Growth model(太線) を示す. 太平洋域 190-220° W を示す.

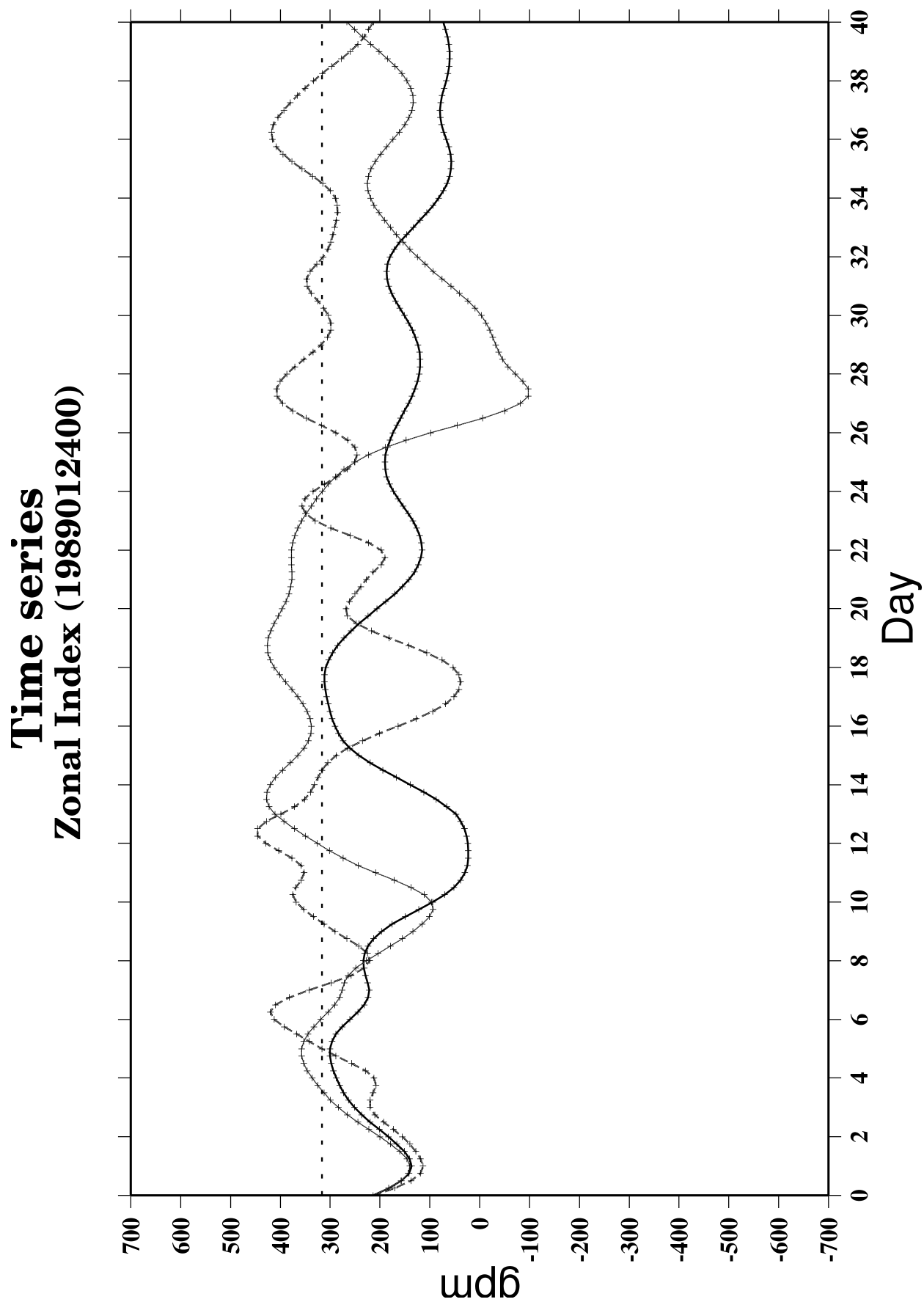


図 44: 実験 2: Zonal Index による評価 (大西洋域)
 図 43 と同様. ただし, 大西洋域 $0-30^{\circ}$ E の平均値を示す.

Time series Zonal 2, Merid 3 and Total Energy

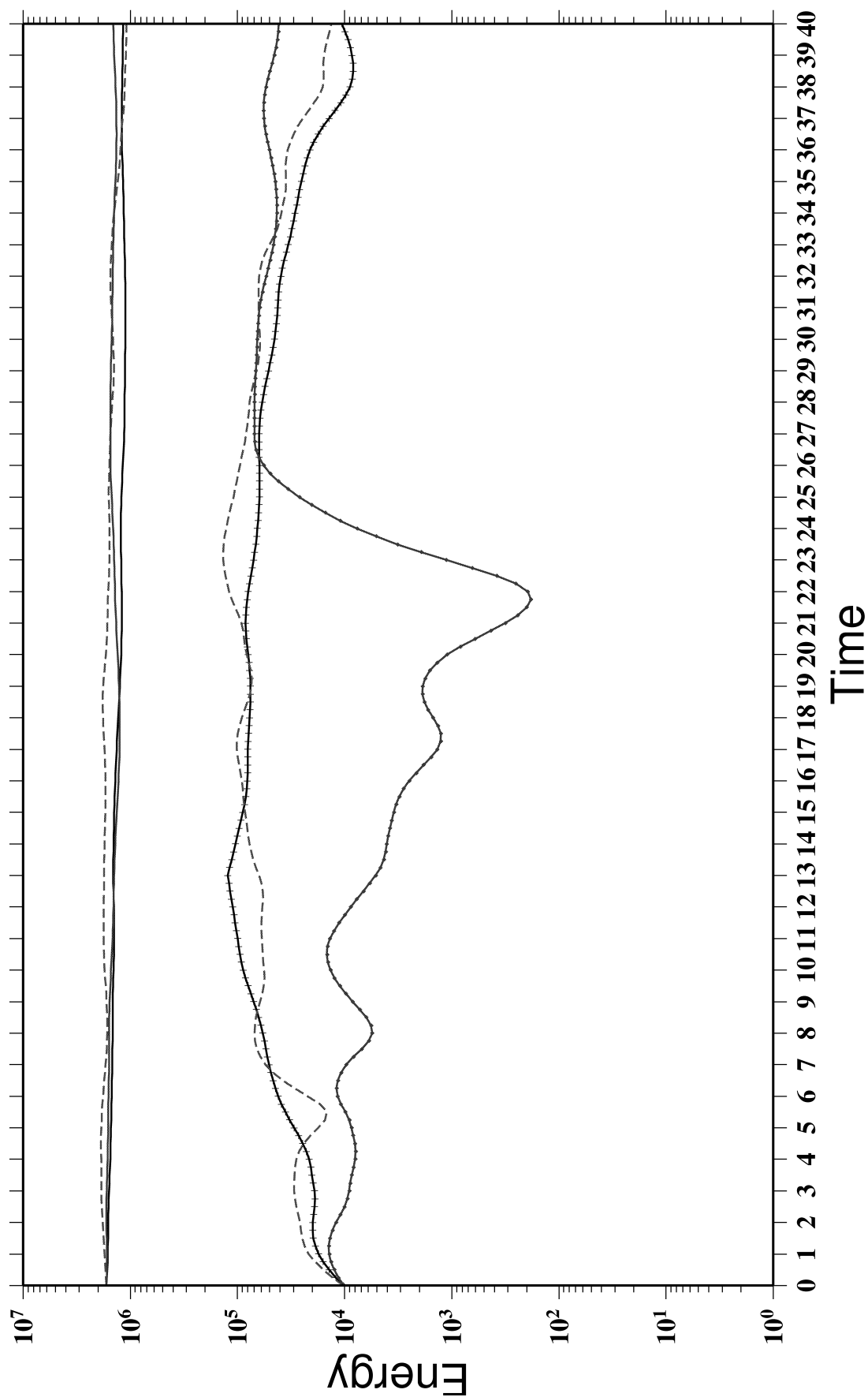


図 45: 実験 2:1989 年 1 月 24 日 00GMT 初期値によるエネルギー時系列図
点線は NCEP/NCAR, 細線は Normal S-model run, 太線は Growth run を示している. エネルギーの高い線が全エネルギー, 低い線が東西波数 2, 南北モード 5 のエネルギーを示す.