

大気大循環の 3 次元エネルギー スペクトルの解析

2006 年 1 月
寺崎 康児

目次

Abstract	ii
表図目次	iii
1 はじめに	1
2 研究方法	4
2.1 プリミティブ方程式	4
2.2 鉛直構造関数	7
2.3 水平構造関数	11
2.4 3次元ノーマルモード関数展開	13
2.5 エネルギー方程式	14
3 使用データ	16
4 結果	17
4.1 鉛直構造関数	17
4.2 エネルギースペクトル	18
4.2.1 鉛直エネルギースペクトル	18
4.2.2 東西波数領域でのエネルギースペクトル	19
4.2.3 位相速度領域でのエネルギースペクトル	20
4.2.4 ケルビン波と混合ロスビー重力波のエネルギースペクトル	21
4.3 エネルギー相互作用	21
5 結論	24
6 謝辞	26

Analysis of the 3 Dimensional Energy Spectrum of the General Circulation of the Atmosphere

Koji TERASAKI

Abstract

In this study, the energy spectrum and the energy interactions of the atmospheric general circulation are analyzed, using the expansion in three dimensional normal mode functions. The analytical solutions of the vertical structure equations, which have non-aliasing, are used for the vertical direction. I could calculate the non-aliased atmospheric energy spectrum and the energy interactions.

According to the result of the analysis, most of kinetic energy is included in the barotropic mode. The secondary peak of kinetic energy is seen at one of the baroclinic modes which has an equivalent height about $h_m = 250$ m. Most of available potential energy is included in the same vertical scale at the secondary peak of kinetic energy.

According to the result of the analysis of the energy interaction, following energy flows are found for the general circulation of the atmosphere. Energy of the atmospheric circulation is supplied by the solar radiation as the zonal baroclinic available potential energy. And this energy is converted into baroclinic available potential energy at the synoptic scale. As soon as the conversion is completed, the baroclinic available potential energy is converted into baroclinic kinetic energy at the same synoptic scale. Moreover, the baroclinic kinetic energy is converted into the barotropic kinetic energy at the same synoptic scale. The barotropic energy is then transferred to zonal barotropic energy by the up-scale energy cascade. Finally, the zonal barotropic kinetic energy is dissipated by the friction and the viscosity. It is found in this study that the energy spectrum and the conversions are consistent with that by Tanaka (1985), although the present study is based on the analytical vertical structure functions.

KEYWORDS : analytical solutions, vertical structure functions, three dimensional normal mode functions, energy spectrum, energy interaction

表目次

- 1 解析に用いたデータの鉛直気圧面と静的安定度 (左 2 列)。鉛直モード番号とそのモード番号に対応する等価深度 (右 2 列)。 29

図目次

- 1 鉛直構造方程式の数値解、鉛直構造関数の鉛直プロファイル。鉛直モード (m) 0 から 22 まで。 30
- 2 鉛直構造方程式の理論解、鉛直構造関数の鉛直プロファイル。鉛直モード (m) 0 から 22 まで。 34
- 3 領域平均した運動エネルギーの鉛直スペクトル。太い実線は全球平均、細い実線は極域平均、点線は中緯度平均、そして破線は熱帯域の平均である。 38
- 4 領域平均した有効位置エネルギーの鉛直スペクトル。線は図 3 と同様。 . 39
- 5 領域平均した全エネルギーの鉛直スペクトル。線は図 3 と同様。 40
- 6 全鉛直モードを足し合わせた東西エネルギースペクトル。 はロスビーモード、 は重力波モードである。 41
- 7 順圧成分の東西エネルギースペクトル。記号は図 6 と同様。 42
- 8 傾圧成分の東西エネルギースペクトル。記号は図 6 と同様。 43
- 9 位相速度空間におけるエネルギースペクトル。図はロスビーモードのみをプロットしていて、それぞれ鉛直モードごとの図である。 49
- 10 混合ロスビー重力波モードとケルビン波モードのハフ関数。混合ロスビー重力波モードは東西波数 6、ケルビン波モードは東西波数 1 をプロットした。線は一番外側が順圧モードで、内側へ行くにつれて鉛直モード番号が大きくなっている。 50
- 11 混合ロスビー重力波モードとケルビン波モードの鉛直エネルギースペクトル。 は混合ロスビー重力波、 はケルビン波である。 51
- 12 混合ロスビー重力波モードとケルビン波モードの東西エネルギースペクトル。記号は図 11 と同様である。 52

13	東西波数領域におけるエネルギー相互作用。 は運動エネルギーの変換量で、 は有効位置エネルギーの変換量である。上から順に全ての鉛直モード、順圧成分のみ、そして傾圧成分のみの図である。	53
14	鉛直モード領域におけるエネルギー相互作用。 は運動エネルギーの変換量で、 は有効位置エネルギーの変換量である。上から順に全ての鉛東西波数、帯状成分のみ、そして渦動成分のみの図である。	54
15	鉛直モード領域における $m = 0$ から $m = 7$ までのエネルギー相互作用。上から順に運動エネルギー、有効位置エネルギー、そしてエネルギー生成項、消散項の相互作用の図である。	55
16	東西波数-鉛直モード領域における運動エネルギーの相互作用。(Unit : $10^{-2}\text{W}/\text{m}^2$)	56
17	東西波数-鉛直モード領域における有効位置エネルギーの相互作用。(Unit : $10^{-2}\text{W}/\text{m}^2$)	57
18	東西波数-鉛直モード領域におけるエネルギー生成項と消散項の相互作用。(Unit : $10^{-2}\text{W}/\text{m}^2$)	58

1 はじめに

地球規模の大気現象の理解には、大気波動論・大気エネルギー論的なアプローチが有効である。1939年の(古典的)ロスビー波の発見以来、現代気象力学に至るまで過去半世紀に渡り、波動は理論・解析の両面に多くの示唆を与えてきた(廣田, 1987)。この理由は波動の持つ線形性のために、複雑な現象を単純な波の重ね合わせとして理解できることによる。また、波動の基底関数を正規直交関数系にとれば、各波数間でエネルギーが定義され、比較可能となることによる。

波数展開による波の解析は Saltzman (1957) の緯度円に沿うフーリエ変換にその端を発する。この方法は 1 次元的な波数展開であり、解析される波は理論的には古典的ロスビー波(小倉, 1978)に対応する。この解析スキームは各緯度間での比較に適している。彼はシノプティックスケールの波の運動エネルギーがプラネタリー波と短波の両方のエネルギーに変換されることを示した。

次に、球面座標系での 2 次元波数展開が考案された。この時の基底関数は球面調和関数(南北方向はルジャンドル陪関数)と呼ばれる。この関数は、大循環モデルの力学系の基底として用いられている(Holton, 1992)。理論的にはロスビー・ハウルヴィツ波(正野, 1960)に対応している。この解析スキームは高度間の比較に適している。

ロスビー・ハウルヴィツ波は球面座標系での運動方程式から発散を除去して得られる波である。この発散をも考慮した波は規準振動(以下ノーマルモード)と呼ばれる(廣岡, 1987)。この時の基底関数はハフ関数と呼ばれる。廣岡は成層圏におけるノーマルモードロスビー波の季節変化を衛星データなどを用いて詳細に調べた(解説が廣岡(1987)にある)。

Kasahara (1976) では水平のみならず、鉛直方向にも波数展開が考案された。この水平方向と鉛直方向の基底関数を結合して 3 次元ノーマルモード関数が構成された。3 次元ノーマルモード関数によるエネルギー解析スキームは、東西波数領域で比較すると Saltzman によるエネルギー解析スキームと同様な結果を示す。しかし、3 次元ノーマルモード関数展開の特徴は南北方向と鉛直方向にも波数展開をすることであり、このことが有益な情報を与えることも多い。例えば、田中(1984)及び Tanaka et al. (1986) はプラネタリー波の南北スケールの伸張に伴いプロッキング現象が生じ、南北モードが臨界値を越えると鉛直伝播によりパロトロピックモードから成層圏で大振幅をもつバロクリニックモードへエネルギーが流出することを示した。換言すれば、成層圏突然昇温の境界条件としてプロッキング(対流圏プラネタリー波の増幅)があると捉えられる。プロッキング

(対流圏プラネタリー波の増幅) に関してはその成因のメカニズムなどは明らかではないが、観測された現象を理解する上で 3 次元ノーマルモード関数展開は有効であったと考えられる。Tanaka (1985) はこの関数系を基底としたエネルギー解析スキームを用いて、第 1 回 GARP 全球実験 (First GARP(Global Atmospheric Research Program) Global Experiment、以下 FGGE) 冬季期間中のデータを用いてエネルギースペクトルとエネルギー相互作用についての解析を行った。その結果、周波数領域における鉛直方向に捕捉されるモードのエネルギースペクトルは周波数の -3 乗則に従うのに対し、伝播モードのエネルギースペクトルは $-5/3$ 乗則に従い、西進重力波のエネルギースペクトルと一致することを見出した。また大気大循環のエネルギーの非線形相互作用については、傾圧モード (特に $m = 4$) に供給された帯状有効位置エネルギーは超長波の順圧モードの運動エネルギーに直接変換されることを見出した。一方、長波の傾圧モードの運動エネルギーは順圧モードの帯状および渦動運動エネルギーに変換される。このように 3 次元ノーマルモード展開による解析は大気大循環のエネルギースペクトルを理解するには非常に有効な手段であるといえる。また、Tanaka and Kung (1988) では同様に方法を用いて FGGE の全期間について調べられた。

その後も Tanaka によって 3 次元ノーマルモード展開を用いてさまざまな研究がなされてきた。ただし、最近ではブロッキングや AO(北極振動) が順圧的な構造をしていることから、主に順圧成分についてのエネルギー解析が主に行われてきた。例えば、Tanaka and Terasaki (2005) では順圧成分の解析を行った結果、ブロッキングは Rhines Scale -(Rhines, 1975) に過剰に蓄積されたエネルギーによって生じるものであるという結論を導き出した。また Tanaka and Terasaki (2005) では AO のインデックスが正の時と負の時の帯状-渦動成分のエネルギー相互作用に解析し、AO インデックスが正の時は帯状-渦動成分のエネルギー相互作用が気候値と比べて約 2 倍近く大きな値となっていて、AO は Rhines Scale に蓄積されたエネルギーが帯状成分に逆カスケードすることによって形成されるということを提唱した。

ここで、3 次元ノーマルモード展開で鉛直方向の基底関数として用いられている鉛直構造関数について考える。Kasahara (1976) で考案された鉛直構造関数は鉛直構造方程式を数値的に解いたものであった。数値的に解いた鉛直構造方程式には、特に高次のモードに大きなエイリアシングがあるということが言える (図 1 を参照)。エイリアシングの大きい鉛直構造関数で展開し計算されたエネルギースペクトルは、高次の鉛直モードには大きなエイリアシングが含まれることになる。大気大循環のエネルギースペクトルをより正確に、より詳細に議論するためにはより精度のよい鉛直構造関数を用いることが必要であることはいうまでもない。

従って本研究では、大気大循環のエネルギースペクトルを解析するにあたって 3 次元ノーマルモード展開を用いるが、鉛直方向の基底関数である鉛直構造関数を数値的ではなく解析的に求めることにより、エイリアシングのない鉛直構造関数を計算しそれを用いて展開する。そして高次の鉛直モードにもエイリアシングのないエネルギースペクトルそしてエネルギー相互作用を解析することを目的とする。2 章では解析方法として、球座標系のプリミティブ方程式から 3 次元ノーマルモード関数の導出を主に記述する。3 章では解析に使用したデータについて述べる。そして 4 章ではそれらの 3 次元ノーマルモード関数を用いて計算されたエネルギースペクトルとエネルギー相互作用についての解析結果を述べる。

2 研究方法

2.1 プリミティブ方程式

本研究で使われるモデルの基礎方程式系は、球座標系 (緯度 θ , 経度 λ , 気圧 p) で表された水平方向の運動方程式、熱力学第一法則の式、質量保存則、状態方程式、静力学平衡の式から成り立つ。

・水平方向の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv + F_u \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv + F_v \quad (2)$$

・熱力学第一法則の式

$$\frac{\partial c_p T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla c_p T + \omega \frac{\partial c_p T}{\partial p} = \omega \alpha + Q \quad (3)$$

・質量保存則

$$\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (4)$$

・状態方程式

$$p\alpha = RT \quad (5)$$

・静力学平衡の式

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha \quad (6)$$

これらの方程式で用いられている記号は次の通りである。

θ : 緯度	ω : 鉛直 p 速度
λ : 経度	F_u : 東西方向の摩擦
p : 気圧	F_v : 南北方向の摩擦
t : 時間	Q : 非断熱加熱率
T : 気温	Ω : 地球の自転角速度 (7.29×10^{-5} [rad/s])
u : 東西方向の風速	a : 地球の半径 (6.371×10^6 [m])
v : 南北方向の風速	c_p : 定圧比熱 (1004 [JK $^{-1}$ kg $^{-1}$])
V : 水平方向の風速	R : 乾燥気体の気体定数 (287.04 [JK $^{-1}$ kg $^{-1}$])
α : 比容	

そして上記の方程式の中で熱力学第一法則の式に質量保存則、状態方程式、静力学平衡の式を代入することによって、これらの基礎方程式系を3つの従属変数 (u, v, ϕ) のそれぞれの予報方程式で表すことができる (Tanaka 1991)。

まず始めに気温 T と比容 α 、ジオポテンシャル ϕ について以下のような摂動を与える。

$$T = T_0 + T' \quad (7)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha' \quad (8)$$

$$\phi = \phi_0 + \phi' \quad (9)$$

ここで T_0, α_0, ϕ_0 はそれぞれ全球平均量であり、 T', α', ϕ' は全球平均量からの偏差である。(7) から (9) 式を状態方程式と静力学平衡の式に適用すると、

$$p\alpha_0 = RT_0 \quad (10)$$

$$p\alpha' = RT' \quad (11)$$

$$\frac{d\phi_0}{dp} = -\alpha_0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial\phi'}{\partial p} = -\alpha' \quad (13)$$

これら (7) ~ (13) 式を用いて熱力学第一法則の式を変形すると、

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T' + \omega \left(\frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{RT'}{pc_p} \right) + \omega \left(\frac{dT_0}{dp} - \frac{RT_0}{pc_p} \right) = \frac{Q}{c_p} \quad (14)$$

となる。ここで $T_0 \gg T'$ が成り立つので、(14) 式の左辺の第3項において、気温の摂動の断熱変化項は無視することができる。つまり、

$$\omega \frac{RT_0}{pc_p} \gg \omega \frac{RT'}{pc_p} \quad (15)$$

である。また左辺の第 4 項において、全球平均気温 T_0 を用いることで、以下のような大気の静的安定度パラメータ γ を導入することができる (Tanaka 1985)。

$$\gamma = \frac{RT_0}{c_p} - p \frac{dT_0}{dp} \quad (16)$$

よってこの関係式を用いて (14) 式を変形すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{p^2}{\gamma R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} - \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \omega = \frac{Qp}{c_p \gamma} \quad (17)$$

さらに (17) 式の両辺を p で微分し、質量保存則を適用すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\gamma R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} \\ & = \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{\gamma R} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{Qp}{c_p \gamma} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

となる。以上より熱力学第一法則の式 (3) から気温 T と比容 α を消去し、摂動ジオポテンシャル ϕ' の予報方程式を導くことができた。これによって 3 つの従属変数 (u, v, ϕ') に対して、3 つの予報方程式 (1),(2),(18) が存在するので解を一意的に求めることができる。これらの 3 つに式をまとめて行列表示すると次式のようなになる (Tanaka 1991)。

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{F} \quad (19)$$

ここで τ は無次元化した時間であり、 $\tau = 2\Omega t$ である。

\mathbf{U} : 大気の状態変数

$$\mathbf{U} = (u \quad v \quad \phi')^T \quad (20)$$

\mathbf{M} : 鉛直方向の微分オペレーター

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\gamma R} \frac{\partial}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (21)$$

L : 水平方向の微分オペレーター

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \sin \theta & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ 2\Omega \sin \theta & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\partial(\cdot) \cos \theta}{a \cos \theta \partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

B : 非線形項

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv \\ -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

C : 非線形項

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{\gamma R} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (24)$$

F : 外部強制項

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_u \\ F_v \\ \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{pQ}{c_p \gamma} \right) \end{pmatrix} \quad (25)$$

2.2 鉛直構造関数

基本状態として断熱静止大気を考える。断熱・摩擦なしということは、プリミティブ方程式において $F = 0$ ということになる。また静止大気とは、 $(\bar{u} = \bar{v} = \bar{\phi} = 0)$ であり、そしてそこに微小擾乱 $\mathbf{U}' = (u', v', \phi')$ を与える。

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\mathbf{V}' \cdot \nabla u' - \omega \frac{\partial u'}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} u' v' \\ -\mathbf{V}' \cdot \nabla v' - \omega \frac{\partial v'}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} u' v' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{\gamma R} \mathbf{V}' \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (27)$$

この式において、2 次以上の摂動項と摂動項の微分の項を微量として無視すると、 $\mathbf{B} = 0$ 、 $\mathbf{C} = 0$ となる。よって、

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \mathbf{L} \mathbf{U} = 0 \quad (28)$$

この方程式において、従属変数 \mathbf{U} を水平方向と鉛直方向に、鉛直構造関数 (vertical structure function) $G_m(p)$ を用いて変数分離する。

熱力学方程式 (\mathbf{U} の第 3 成分に関する式) の第 m 鉛直モードは変数分離により、

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\lambda, \theta, p, \tau) &= (u, v, \phi)^T \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (u_m, v_m, \phi_m)^T \mathbf{G}_m(p) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{U}_m(\lambda, \theta, \tau) \mathbf{G}_m(p) \end{aligned} \quad (29)$$

ここで添え字 m は鉛直モード (vertical mode number) を意味する。

これを (26) 式に代入すると、

$$\mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{U}_m(\lambda, \theta, \tau) \mathbf{G}_m(p) + \mathbf{L} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{U}_m(\lambda, \theta, \tau) \mathbf{G}_m(p) = 0 \quad (30)$$

第 m 鉛直モードについてのみ表すと、

・ 第 1 成分

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v_m + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi_m}{\partial \lambda} = 0 \quad (31)$$

・ 第 2 成分

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u_m + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi_m}{\partial \theta} = 0 \quad (32)$$

・ 第 3 成分

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} (\phi_m G_m) \right\} + \frac{G_m}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{G_m}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (33)$$

第 3 成分について考えてみる。第 1 項において、 ϕ_m は (λ, θ, t) の関数であり、 p には依存しない。両辺を G_m で割る。この 2 つのことを考慮すると、

$$\frac{1}{G_m} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\phi_m \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial G_m}{\partial p} \right\} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (34)$$

また p は時間 t に依存しないので、

$$\frac{1}{G_m} \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m}{dp} = \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} \quad (35)$$

よって

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial t} \left(\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} \right)^{-1} = G_m \left(\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m}{dp} \right)^{-1} \quad (36)$$

上式の左辺は λ, θ, t のみに依存し、右辺は p のみに依存する。この等式が恒等的に成り立つには両辺が定数になる必要がある。その定数を $-gh_m$ とおくと、

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial t} \left(\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} \right)^{-1} = G_m \left(\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m}{dp} \right)^{-1} = -gh_m \quad (37)$$

以上より

$$\frac{d}{dp} \left(p^2 \frac{dG_m}{dp} \right) + \lambda_m G_m = 0, \quad \lambda_m = \frac{R\gamma}{gh_m} \quad (38)$$

$$\frac{1}{gh_m} \frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (39)$$

(31), (32), (39) 式をまとめて水平構造方程式 (horizontal structure equation) といい、(38) 式を鉛直構造方程式 (vertical structure equation) という。

ここでは (38) 式の鉛直構造方程式について着目する。(16) 式より $\gamma = \gamma(p)$ と気圧の関数になっている。 γ が定数でないときは鉛直構造方程式は解析的に解くことは不可能である。しかし、仮に γ の鉛直方向への依存性がなくなり定数であると仮定すると、鉛直構造方程式は一般的にオイラーの方程式と呼ばれるものになる。すると、鉛直構造方程式の解は固有値として等価深度 h_m 、固有ベクトルとして鉛直構造関数を各々の鉛直モードに対して、解析的に求めることができるようになる。 $m \geq 1$ は傾圧 (baroclinic) モード、または内部 (internal) モードといい、 m 番目のモードに関しては鉛直方向に m 個の節を持つ。そして、 $m = 0$ は順圧 (barotropic) モード、または外部 (external) モードと呼ばれ、鉛直方向に節を持たず、鉛直方向にはほとんど値は変化しない。

また境界条件は、

$$\frac{dG_m}{dp} = 0 \quad \text{at} \quad p \rightarrow \epsilon > 0 \quad (40)$$

$$\frac{dG_m}{dp} + \alpha G_m = 0 \quad \text{at} \quad p = p_s \quad (41)$$

で与えられる。

(1) 順圧モード ($m = 0$)

$m = 0$ のとき、 $0 < \lambda_0 < \frac{1}{4}$ で、(38) 式の一般解は C_1 、 C_2 を定数として、

$$G_0(\sigma) = C_1 \sigma^{r_1} + C_2 \sigma^{r_2}$$

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \mu, \quad r_2 = -\frac{1}{2} - \mu, \quad \mu^2 = \frac{1}{4} - \lambda_0 \quad (42)$$

ここで、 $\sigma = \frac{p}{p_s}$ である。(42) 式と境界条件の (40),(41) 式から

$$r_1(r_2 + \alpha)\epsilon^{r_1} - r_2(r_1 + \alpha)\epsilon^{r_2} = 0 \quad (43)$$

を得ることができる。この方程式を解くと λ_0 を求めることができ、 μ, r_1 そして r_2 を求めることができ、鉛直構造関数 $G_0(\sigma)$ を求めることができる。また C_1, C_2 は、 $C_1^2 + C_2^2 = 1$ となるように正規化する。

(2) 傾圧モード ($m \geq 1$)

$m \geq 1$ のとき、 $\frac{1}{4} < \lambda_m < \infty$ で、(38) 式の一般解は C_1 、 C_2 を定数として、

$$G_m(\sigma) = \sigma^{-\frac{1}{2}} (C_1 \cos(\mu \ln \sigma) + C_2 \sin(\mu \ln \sigma))$$

$$\mu^2 = \lambda_m - \frac{1}{4} \quad (44)$$

(44) 式と境界条件の (40),(41) 式から

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \left[\mu \cos(\mu \ln \sigma) - \frac{1}{2} \sin(\mu \ln \sigma) \right] + \mu \left[\mu \sin(\mu \ln \sigma) + \frac{1}{2} \cos(\mu \ln \sigma) \right] = 0 \quad (45)$$

を得ることができる。順圧モード ($m=0$) のときと同様にして、この方程式を解くと λ_m を求めることができ、 μ, r_1 そして r_2 を求めることができ、鉛直構造関数 $G_m(\sigma)$ を求めることができる。また C_1, C_2 は、 $C_1^2 + C_2^2 = 1$ となるように正規化する。

2.3 水平構造関数

鉛直方向に変数分離した後の第 m 鉛直モードの時間、水平方向に関する方程式は、

$$\mathbf{M}_m \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U}_m + \mathbf{L} \mathbf{U}_m = 0 \quad (46)$$

ここで

$$\mathbf{M}_m = \text{diag}(1, 1, \frac{1}{gh_m}) \quad (47)$$

また、従属変数 \mathbf{U} と方程式系全体にを無次元化するために、以下のようなスケール行列 \mathbf{X}_m と \mathbf{Y}_m を導入する。

$$\mathbf{X}_m = \text{diag}(\sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, gh_m) \quad (48)$$

$$\mathbf{Y}_m = 2\Omega \text{diag}(\sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, 1) \quad (49)$$

これらを用いて式 (46) を変形すると、

$$(\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m) \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) = 0 \quad (50)$$

ここで、

$$\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m = 2\Omega^{-1} \text{diag}(1, 1, 1) \quad (51)$$

より

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) = 0 \quad (52)$$

この式 (52) の解は、水平構造関数 (horizontal structure function)、またはハフ関数 (Hough function) と呼ばれ、 \mathbf{H}_{nlm} と表す。ここで、 \mathbf{H}_{nlm} は第 m 鉛直モードに相当する水平ノーマルモード、つまり規準振動を表し、添え字の n は東西波数 (zonal wave number)、 l は南北波数 (meridional wave number) を意味する。式 (52) の解 \mathbf{H}_{nlm} は、それぞれの振動モード nlm に対応する無次元化固有振動数 σ_{nlm} と共に、固有値問題を解くことで求めることができる。

kasahara and Puri (1981) によると、式 (51) の解 \mathbf{U}_m は、 \mathbf{H}_{nlm} を用いることで、次のように変数分離することができる。

$$\mathbf{U}_m(\lambda, \theta, \tau) = \mathbf{X}_m \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \exp(-i\sigma_{nlm}\tau) \quad (53)$$

この式 (53) を水平構造方程式 (52) に代入すると、

$$-i\sigma_{nlm}\mathbf{H}_{nlm} + (\mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{L}\mathbf{X}_m)\mathbf{H}_{nlm} = 0 \quad (54)$$

ここで、ハフ調和関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ はハフベクトル関数 Θ_{nlm} (Hough vector function) と三角関数 $\exp(in\lambda)$ とのテンソル積として以下のように表される。

$$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) = \Theta_{nlm}(\theta) \exp(in\lambda) \quad (55)$$

$$\Theta_{nlm}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{nlm}(\theta) \\ -i\mathbf{V}_{nlm}(\theta) \\ \mathbf{Z}_{nlm}(\theta) \end{pmatrix} \quad (56)$$

南北波数 l に関しては、異なった 3 種類のモードから構成される。1 つは低周波の西進するロスビーモード (Rossby mode) l_r で、残りの 2 つは、高周波の西進と東進の重力波モード (gravity mode) l_w, l_e から成り立つ。

ハフ調和関数は次の直交条件を満たす。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_{nlm} \cdot \mathbf{H}_{n'l'm}^* \cos \theta d\lambda d\theta = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \quad (57)$$

アスタリスクは複素共役を示す。また、 nlm と $n'l'm$ は異なったモードを意味する。この関係から、次のフーリエ - ハフ変換 (Fourier-Hough transform) が導かれる。

第 m 鉛直モードに相当する物理空間における任意のベクトル関数を $\mathbf{W}_m(\lambda, \theta, \tau)$ とすると

$$\mathbf{W}_m(\lambda, \theta, \tau) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{nlm}(\tau) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \quad (58)$$

$$w_{nlm}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{W}_m(\lambda, \theta, \tau) \cdot \mathbf{H}_{nlm}^*(\lambda, \theta) \cos \theta d\lambda d\theta \quad (59)$$

となる。ここで $w_{nlm}(\tau)$ はフーリエ - ハフ変換係数である。

式 (46) にこのフーリエ - ハフ変換を施すと、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial \tau} w_{nlm} + i\sigma_{nlm} w_{nlm} = 0 \quad (60)$$

上式によると、固有振動数 σ_{nlm} は実数なので、第 2 項目の線形項は波動の位相のみを表現し、波の振幅は変化させないことを意味している。

2.4 3次元ノーマルモード関数展開

ここでは今までに扱った鉛直構造関数と水平構造関数を結合させ、静止大気を基本状態とした3次元ノーマルモード関数 $\Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p)$ (three-dimensional normal mode function) を構成し、その3次元ノーマルモード関数を用いて、式(19)で表されたプリミティブ方程式を3次元スペクトル表記する。3次元ノーマルモード関数 $\Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p)$ は、 $G_m(p)$ と $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ とのテンソル積で定義される。つまり、

$$\begin{aligned}\Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) &= G_m(p)\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \\ &= G_m(p)\Theta_{nlm}(\theta)\exp(in\lambda)\end{aligned}\quad (61)$$

である。この3次元ノーマルモード関数は、以下で定義される内積の下で直交条件を満たすことが示されている (Tanaka and Sun 1990)。

$$\begin{aligned}\langle \Pi_{nlm}, \Pi_{n'l'm'} \rangle &= \frac{1}{2\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \Pi_{nlm} \cdot \Pi_{n'l'm'}^* \cos\theta d\lambda d\theta dp \\ &= \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}\end{aligned}\quad (62)$$

この3次元ノーマルモード関数の直交性を利用することで、(19)式における \mathbf{U} 、 \mathbf{F} に関して、次のように波数展開することができる (Tanaka and Kung 1989)。

$$\mathbf{U}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M w_{nlm} \mathbf{X}_m \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (63)$$

$$\mathbf{F}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M f_{nlm} \mathbf{Y}_m \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (64)$$

ここで、 $w_{nlm}(\tau)$ 、 $f_{nlm}(\tau)$ はそれぞれ従属変数ベクトル \mathbf{U} と外部強制項ベクトル \mathbf{F} に関しての展開係数であり、時間 τ だけの関数である。また、東西波数と南北波数、鉛直波数それぞれ N, L, M で波数切断している。式(19)と $\Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p)$ の内積をとると、

$$\left\langle \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \mathbf{L}\mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{C} - \mathbf{F}, \mathbf{Y}_m^{-1} \Pi_{nlm} \right\rangle = 0 \quad (65)$$

となり、この式に式(63)、(64)の関係を適用すると、外部強制項を伴った連立常微分方程式として、スペクトル表示によるプリミティブ方程式を記述することができる。

$$\frac{\partial w_i}{\partial \tau} + i\sigma_i w_i = -i \sum_{j,k}^K r_{ijk} w_j w_k + f_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, K) \quad (66)$$

添え字 i, j, k は3重添え字 $nlm, n'l'm', n''l''m''$ を略したものである。 σ_i は、静止状態を基本状態とした水平構造方程式を構成する固有値問題より得られる無次元の固有振動数であり、ラプラス潮汐振動数と呼ばれる。 r_{ijk} は非線形の波 - 波相互作用 (wave-wave interaction) あるいは、帯状 - 波相互作用 (zonal-wave interaction) に関する相互作用係数 (interaction coefficients) であり、すべての波数間の相互作用を示した係数であり、実数である。

以上により、順圧成分と傾圧成分からなる鉛直構造関数、ロスビーモードと重力波モードからなる水平構造関数、この両方を用いることでプリミティブ方程式をスペクトル表示で表すことができる。

2.5 エネルギー方程式

3次元ノーマルモードの展開係数 w_i は元のプリミティブ方程式から u, v, ϕ の情報を含んでいる。式 (66) において w_i はある波の振幅を表している。よってある波数の波のエネルギーは、

$$\begin{aligned} E_{nlm} &= \frac{1}{2} p_s h_m |w_{nlm}|^2 \\ E_{0lm} &= \frac{1}{4} p_s h_m |w_{0lm}|^2 \end{aligned} \quad (67)$$

と表すことができる。ここで E_{0lm} の添え字の0は東西波数0を示している。逆複素フーリエ変換において波数0の展開係数は、波数1以上の展開係数の $\frac{1}{2}$ となる。この式においてのみ n は波数0以外を示す。この式の両辺を時間 t で微分すると

$$\frac{dE_i}{dt} = \Omega p_s h_m \left(\frac{dw_i}{d\tau} w_i^* + \frac{dw_i^*}{d\tau} w_i \right) \quad (68)$$

この式 (68) の右辺に式 (66) を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{dE_i}{dt} = \Omega p_s h_m [& (-i\sigma_i w_i - i \sum_{j,k} r_{ijk} w_j w_k + f_i) w_i^* \\ & + (i\sigma_i w_i^* + i \sum_{j,k} r_{ijk} w_j^* w_k^* + f_i^*) w_i] \end{aligned} \quad (69)$$

$$\frac{dE_i}{dt} = \Omega p_s h_m [(-i w_i^* \sum_{j,k} r_{ijk} w_j w_k + i w_i \sum_{j,k} r_{ijk} w_j^* w_k^*) + w_i f_i^* + w_i^* f_i] \quad (70)$$

となり、線形項が消去される形となる。そしてこの式 (70) において

$$N_i = \Omega p_s h_m (-i w_i^* \sum_{j,k} r_{ijk} w_j w_k + i w_i \sum_{j,k} r_{ijk} w_j^* w_k^*) \quad (71)$$

$$F_i = \Omega p_s h_m (w_i f_i^* + w_i^* f_i) \quad (72)$$

と置くことによって、次のようなエネルギー方程式を得ることができる。

$$\frac{dE_i}{dt} = N_i + F_i \quad (73)$$

ここで N は非線形相互作用、 F は摩擦などの粘性項によるエネルギーの消散を表している。

3 使用データ

本研究で使用したデータは JRA-25 (Japanese Re-Analysis 25 years) のデータである。

- 水平グリッド間隔： $2.5^\circ \times 2.5^\circ$
- 鉛直グリッド間隔：23 層 (1000 , 925 , 850 , 700 , 600 , 500 , 400 , 300 , 250 , 200 , 150 , 100 , 70 , 50 , 30 , 20 , 10 , 7 , 5 , 3 , 2 , 1 , 0.4 hPa)
- 気象要素：水平風 (u, v)、ジオポテンシャル ϕ
- 期間：1978 年 1 月 1 日 ~ 1978 年 1 月 31 日
- 時間間隔：00Z , 06Z , 12Z , 18Z

4 結果

4.1 鉛直構造関数

エネルギースペクトルやエネルギー変換量の結果の前に鉛直構造関数について述べる。

Kasahara and Puri (1981) や Tanaka (1985) では鉛直方向の基底関数として、鉛直構造関数を用いた。しかしその鉛直構造関数は、(38) 式を数値的に解いたものを使用した。図 1 は鉛直構造関数の数値解の鉛直プロファイルを図示したものである。この結果は Tanaka (1985) とは使用しているデータは違うが、結果には一貫性が見られる。順圧モードや低次の傾圧モードでは、鉛直構造関数は上空に行くほどその振幅が大きくなるという正しい構造を示している。しかし、 $m = 12$ くらいから、その構造が大きく崩れてきている。これは JRA-25 は鉛直 23 層のデータであるため、その半分の $m = 11$ または $m = 12$ からはその構造をうまく数値的に解くことができず、かなり大きなエイリアシングを含んでしまう。実際 $m = 13$ 以上の鉛直モードにおいて、鉛直構造関数は $-\ln(p/p_s) \geq 4$ でほぼ 0 に近い定数関数となっていて、下層に大きな振幅を持つという構造になってしまっている。

このようなエイリアシングを回避する方法として、本研究では (16) 式で定義された静的安定度を定数と仮定することで鉛直構造方程式を理論的に解き、その鉛直構造関数を求めた。本来、静的安定度は気圧の関数となっているが、エイリアシングの大きい数値解を用いるより静的安定度を定数とした理論解を用いるほうが鉛直スペクトルを精度よく計算することが可能であろう。また、式 (40) の境界条件でも示したように大気の上端は 0 hPa ではなく、 ϵ という有限の正の値でなくてはならない。本研究では $\epsilon = 1$ hPa とした。また、この ϵ の値の設定の仕方によって、鉛直構造関数の節や腹の位置が変わるのでその解析結果も変わってしまうことに注意が必要である。

鉛直構造関数の理論解を順圧成分と傾圧成分に分けて考えてみる (図 2)。鉛直構造関数の順圧成分は物理的には鉛直平均を意味するので、鉛直方向に節を持たず一定値に近い関数となっている。傾圧成分は (44) 式より、 $\sigma^{-\frac{1}{2}}$ が乗算されているので σ が小さくなる、つまり上空に行くほど振幅が大きくなるというプロファイルになっている。数値解の高次のモードは上層ほど振幅が小さく、下層に大きな振幅を持つという構造をしていたが、この理論解から考えると数値解が大きなエイリアシングをもっていることが理解できる。以上のことから、本研究では鉛直展開の基底関数として鉛直構造方程式の数値解ではなく理論解を用いて鉛直展開をすることにした。

4.2 エネルギースペクトル

ここでは本研究のメインテーマの1つでもあるエネルギースペクトルについて、上記で述べた方法によってスペクトル展開したデータを用いて計算した結果について述べる。またここでは4つのエネルギースペクトルについて述べる。

1. 鉛直エネルギースペクトル
2. 東西波数領域のエネルギースペクトル
3. 位相速度領域のエネルギースペクトル
4. ケルビン波と混合ロスビー重力波のエネルギースペクトル

4.2.1 鉛直エネルギースペクトル

図3, 4, 5はいずれも鉛直エネルギースペクトルであるが、それぞれ運動エネルギー、有効位置エネルギーそしてその両方を足し合わせた全エネルギーの図である。エネルギースペクトルは全球平均、極域平均 (両半球の緯度 $60^\circ \sim 90^\circ$)、中緯度平均 (両半球の緯度 $30^\circ \sim 60^\circ$)、そして熱帯地域の平均 (両半球の緯度 $0^\circ \sim 30^\circ$) の4つの比較をした。

まず運動エネルギーについて述べる。いずれの領域のスペクトルを見ても、順圧成分の運動エネルギーが最も大きいことが分かる。2つ目のエネルギーピークは $h_m \simeq 250\text{m}$ ($m = 4$) にある。しかし極域の平均だけはこのスケールにはピークがなく、もう少しスケールの小さいところに2つ目のピークが存在し、かつそのピークのエネルギーも他の領域平均と比べてかなり小さくなっていることが分かる。ここで $m = 4$ の鉛直構造関数を見てみると、対流圏内ではおよそ 200 hPa ($-\ln \sigma = 1.8$) 付近に最大値が存在する。そして現実大気における現象を考えると、ここで熱帯地域と中緯度と分けた両領域をまたぐようにして上空およそ 200 hPa 付近にジェット気流が存在する。このジェット気流による風速のピークによって、 $m = 4$ というスケールに2つ目のエネルギーピークが形成されている。同様にして極域にこの2つのエネルギーピークが見られないことは、極域の対流圏上層部には中緯度大気とは違いジェット気流が存在しないことから説明ができる。

次に有効位置エネルギーについて考える。有効位置エネルギーは運動エネルギーとは違い、各々の領域によってエネルギー量は違うがエネルギースペクトルはほぼ同じような構造をしている。有効位置エネルギーのピークは $m = 4$ に存在している。有効位置エネルギーは気温の全球平均からの偏差の2乗に比例する量で定義されている。 $m = 4$ の鉛直構造関数は対流圏下部と上部で符号が逆転する構造になっている。この構造が有効位置エ

エネルギーのピークをあらわしている。またこのピーク付近のエネルギーは中緯度と熱帯域は全球平均にかなり近い値になっているが、極域は全球平均からの偏差量がとても大きいので有効位置エネルギーはどの鉛直モードをとっても全球平均やその他の領域の平均と比べても最も大きな値となっている。順圧成分は鉛直平均という意味から考えると、もし順圧成分の鉛直構造関数が高さとともに変化しない定数関数であるなら有効位置エネルギーは 0 になるはずである。しかし鉛直構造方程式の解析解の順圧成分は (42) 式からも分かるように定数にはならないので、順圧成分の有効位置エネルギーは 0 にはなっていない。

全位置エネルギーは運動エネルギーと有効位置エネルギーを足し合わせた量である。有効位置エネルギーと全エネルギーの図はほとんど同じような特徴を持っているが、傾圧成分は運動エネルギーが有効位置エネルギーよりも数桁も小さくなってしまっている。順圧成分については運動エネルギーのほうが有効位置エネルギーよりも大きくなっている。

4.2.2 東西波数領域でのエネルギースペクトル

ここでは東西波数領域におけるエネルギースペクトルについて述べる。東西波数領域におけるエネルギースペクトルはさまざまな研究がなされてきている。Tung and Orland (2003) では慣性小領域の理論から大気大循環のエネルギースペクトルは全波数の -3 乗に比例することを示した。また Tanaka et al. (2004) では、ロスビー波の飽和理論から順圧成分のエネルギースペクトルは位相速度 c の 2 乗に比例することを示した。

$$E = mc^2 \quad (74)$$

またロスビー波の位相速度は、

$$c = \frac{-1}{n^2 + l^2 + \lambda_m^2} = -\frac{1}{\mathbf{k}^2} \quad (75)$$

で表せることができる。ここで \mathbf{k} は全波数である。(72) 式を (71) 式に代入すると、

$$E = m\mathbf{k}^{-4} \quad (76)$$

となる。

図 6 は横軸に東西波数を取り、全ての鉛直モードを足し合わせたエネルギースペクトルの図である。ただし東西波数 0 はこの図には含まれておらず、渦動成分のみをプロットしたものである。ロスビーモードの東西エネルギースペクトルは波数 5 から 20 くらいまで -3 乗則にうまく適合している。しかし、東西波数 25 くらいからは -3 乗上には乗らずに傾きはもっと大きくなっている。重力波モードは東西波数 1 で最もエネルギーが大きく波数の増加とともに単調減少している。

図7は図6と同様であるが、順圧成分のみをプロットしたものである。この図から東西波数に対してではあるが、順圧成分の東西エネルギー Spektrum が波数の -4 乗の線に乗ることが確認できる。図8は傾圧成分の東西エネルギー Spektrum をプロットしたものであるが、Spektrum の特徴としては全ての鉛直モードを足し合わせたものとかかなり似通ったものとなっている。

4.2.3 位相速度領域のエネルギー Spektrum

Tanaka (1985) では大気大循環のエネルギー Spektrum を位相速度空間上で描写した。Tanaka et al. (2004) では前節でも述べたように、ロスビー波の飽和理論から順圧成分のエネルギー Spektrum は位相速度 c の 2 乗に比例することを示した。本研究で新たに、鉛直構造関数として鉛直構造方程式の理論解を用いたことによってより正確なエネルギー Spektrum を計算した。図9はその結果である。

図は各鉛直モードごとについて描いたもので、 $m = 0$ が順圧モード、そして $m \geq 1$ が傾圧モードを示している。まず順圧モードのエネルギー Spektrum を見ると、Spektrum が位相速度 c の 2 乗を満たしていることが分かる。これまでの研究では NCEP/NCAR 再解析データを用いてこのエネルギー Spektrum の解析をしていた。NCEP/NCAR 再解析データは波数 25 付近でフィルタリングされているため、高周波のエネルギー Spektrum が落ち込むという風に考えられたいた。本研究で用いた JRA-25 のデータは波数によるフィルタリングがなされていないため、高周波成分のエネルギー Spektrum は落ち込まないことが予想された。しかし解析の結果、高周波成分のエネルギー Spektrum は落ち込み、もう c^2 を満たすことはないことが分かった。またどの鉛直モードの Spektrum を見ても、東西波数 0 かつ南北モード 1 のエネルギーが各鉛直モードの中で最も大きな値をとっている。

次に傾圧モードのエネルギー Spektrum について述べる。順圧モードでは Rhines scale を超えて線形項が卓越するスケールはエネルギーが落ち込む Spektrum が見られていたが、傾圧モードでは基本的にどの鉛直モードをとっても、そのような分布は見ることができない。また傾圧モードはモードが大きくなる、つまり鉛直スケールが小さくなるにつれてエネルギー Spektrum は立ち上がり、その傾きは徐々に大きくなっていくことがわかる。順圧モードにおいて、同一の東西波数の線は南北スケールが大きくなるにつれてエネルギーは大きくなっていったが、傾圧モードではモードが大きくなるにつれて同一東西波数のエネルギー Spektrum は南北波数によらず、横に並ぶような分布をするようになっている。

4.2.4 ケルビン波と混合ロスビー重力波のエネルギースペクトル

Tanaka (1985) ではケルビン波モードと混合ロスビー重力波モードのエネルギースペクトルについても論じている。したがって本研究でも、その結果との比較のために同様の解析を行った。基礎方程式の1つである運動方程式を解くと、ロスビー波と東進、西進の重力波が解として得られる。従って3次元ノーマルモードでも水平構造方程式の解であるハフ関数にはロスビーモードと東西に進行する重力波のモードがそれぞれ解が得られる。図10に混合ロスビー重力波モードとケルビン波モードの構造を示す、ジオポテンシャルのハフ関数を示した。図の横軸は南北方向を示していて、 -1 は南極、 0 は赤道そして 1 は北極を表している。図を見ると、上の混合ロスビー重力波モードの図は赤道を境に正負が逆転し南北非対称の構造をしていることが分かる。また下のケルビン波モードの図は赤道に対して対称になっている。

図11は横軸に等価深度 h_m の逆数を取って、ケルビン波モードと混合ロスビー重力波モードの鉛直エネルギースペクトルを示した図である。それを見ると、ケルビン波モードのエネルギーは鉛直モード $m = 2$ から $m = 5$ の間にエネルギーの大部分が存在し、その中でも $m = 4$ にエネルギーピークが存在する。また混合ロスビー重力波モードのエネルギーはほとんど順圧成分に集まっていることが分かる。また $m = 3$ から $m = 5$ 付近にもエネルギーピークが存在していることが分かる。このことは Tanaka (1985) の解析結果ともほとんど合致しているといえるだろう。

図12は図11と同様にケルビン波モードと混合ロスビー重力波モードのエネルギースペクトルの図であるが、横軸に東西波数をとっている。この図からケルビン波モードは東西波数 $n = 1$ と $n = 2$ に、つまりプラネタリースケールに大部分のエネルギーが存在していることが分かる。また混合ロスビー重力波モードは総観規模擾乱のスケールに幅広く分布していることが分かる。

4.3 エネルギー相互作用

本節ではエネルギー相互作用 (Energy Interactions) について述べる。このエネルギー相互作用を調べることによって、大気大循環のエネルギー流について理解することが可能となる。地球大気の運動のエネルギーの源は太陽放射によるエネルギーである。その太陽放射は地球が球体であることや地軸の傾きなどによる南北方向に加熱差によって、多量の有効位置エネルギーを生成する。その太陽放射によって地球に供給された有効位置エネルギーは傾圧不安定などによって運動エネルギーに変換され、最終的には摩擦などによって

消散していく。これが大気大循環のエネルギーの基本的な流れである。このことを解析結果から詳しく分析していく。

ノーマルモードエネルギー論におけるエネルギー方程式は、

$$\frac{dE_i}{d\tau} = B_i + C_i + D_i$$

で表される。ここで B_i は運動エネルギーの相互作用 (Kinetic Energy Conversion)、 C_i は有効位置エネルギーの相互作用 (Available Potential Energy Conversion)、そして D_i はエネルギーの生成や消散を表している。ソルツマンサイクルでも大気大循環のエネルギー相互作用について研究されている。ノーマルモードエネルギー論における B_i はソルツマンサイクルの $L(n) + M(n)$ つまり運動エネルギーの帯状 - 波相互作用と波 - 波相互作用の和、 C_i は $R(n) + S(n)$ つまり有効位置エネルギーの帯状 - 波相互作用と波 - 波相互作用の和を示している。従って、 C_i の値が正であるということは帯状有効位置エネルギーが渦動有効位置エネルギーに変換されるということを意味する。

図 13 は東西波数を横軸にとった運動エネルギーと有効位置エネルギーの相互作用を表した図である。(a) が全ての鉛直モードを足し合わせたもので、(b) が順圧モードのみの相互作用、そして (c) は傾圧モードの相互作用である。(c) の傾圧成分の有効位置エネルギーの相互作用を見ると、全ての渦動成分で正の値となっている。このことから地球大気に供給された帯状成分の有効位置エネルギーが有効位置エネルギーの渦動成分、特に東西波数 $n = 5$ に変換されたことを意味している。そしてこの渦動成分の有効位置エネルギーは渦動成分の運動エネルギーに変換される。(c) の傾圧成分の運動エネルギーの相互作用を見ると全ての渦動成分で負の値で、(b) の順圧成分の運動エネルギーの相互作用を見ると全ての正になっていることから、運動エネルギーが傾圧成分から順圧成分に変換されることを示している。

図 14 は図 13 と同様にエネルギー相互作用を表した図である。(a) が全ての東西波数について足し合わせたもので、(b) は帯状成分のみ、そして (c) は渦動成分についての相互作用である。まず (b) の帯状成分の有効位置エネルギーを見ると、 $m = 3$ が大きな負の値となっている。そして (c) の渦動成分の有効位置エネルギーを見ると、順圧成分を除いて全ての傾圧成分で有効位置エネルギーの相互作用が正となっている。このことから $m = 3$ の帯状成分に供給された有効位置エネルギーが傾圧成分の全般の渦動成分の有効位置エネルギーに変換されていることが分かる。運動エネルギーについて見ると、傾圧成分は全て負そして順圧成分は正になっていることから、運動エネルギーは傾圧成分から順圧成分に変換されることを示している。

図 15 は各鉛直モードごとの渦動成分のエネルギー相互作用の図である。この図では順

圧モードと傾圧モードの $m = 1$ から $m = 7$ までをプロットした。まず有効位置エネルギーについてみると、ほとんどのモードで相互作用は正の値となっている。このことは先にも述べたように帯状成分に供給された有効位置エネルギーが渦動成分に変換されるということと一致している。また運動エネルギーの相互作用は順圧成分で正、傾圧成分で負になっている。やはり特にプラネタリースケールと総観規模スケールの相互作用が大部分を占めていることがわかる。

図 16, 図 17, 図 18 は横軸に東西波数、縦軸に鉛直モードをとった 2 次元平面にエネルギー相互作用を描いた図である。図 18 を見ると $m = 3$ の帯状成分に大きなエネルギーソースが存在していることが確認できる。その $m = 3$ に供給された有効位置エネルギーが傾圧成分の総観規模スケールに変換され、そこから同じスケールの運動エネルギーに変換される。そして有効位置エネルギーから変換された運動エネルギーは順圧成分に変換される。そして順圧成分の運動エネルギーは、2 次元流体の特徴として帯状成分に逆カスケードをしていく。最終的には図 18 からわかるように、順圧成分の帯状運動エネルギーは摩擦などによって消散していく。これらのことから大気大循環に供給されたエネルギーがさまざまな形に変換され消散していくというエネルギー流を理解することができる。

5 結論

本研究では、Tanaka (1985) で研究された 3 次元ノーマルモードエネルギー論と同様の解析を行った。しかし Tanaka (1985) では鉛直方向の基底関数に Kasahara and Puri (1981) で行われた鉛直構造方程式の数値解を用いた。その鉛直構造方程式の数値解には特に高次のモードに大きなエイリアシングが存在する。そのため、その鉛直構造関数を用いて波数空間に展開された鉛直エネルギースペクトルも大きなエイリアシングを持つことになる。Tanaka (1985) での鉛直スペクトルの解析では、鉛直構造関数のエイリアシングのために高次の鉛直モードに大きなエイリアシングがあった。Tanaka (1985) では鉛直モードは 0 から 11 までとられた。その鉛直モード 11 は等価深度は約 $10m$ で、スケールもかなり小さいのでエネルギーは少ないはずだがエイリアシングを持った鉛直構造関数で展開されたために順圧成分の約半分ほどのエネルギーを持ってしまっている。

そこで本研究では静的安定度を定数と置くことで鉛直構造方程式の解析解を求めた (Fukutomi, 1994)。鉛直構造方程式の理論解は三角関数で表され、上空に行くに従って振幅が大きくなるという構造をしている。そのようにして計算された鉛直構造関数を用いて 3 次元ノーマルモード展開を行い、エネルギースペクトル解析を行った。

解析の結果、鉛直構造方程式の数値解を用いたときよりもより正確なエネルギースペクトルを計算することができた。大気大循環のエネルギースペクトル解析として極域、中緯度域、そして熱帯域の 3 つの領域に分けてエネルギー解析を行った結果、どの領域においても運動エネルギーは順圧成分が最も大きいことが分かった。極域には対流圏上部に亜熱帯ジェットのような強風域がないために傾圧成分に運動エネルギーのピークが見られなかった。また有効位置エネルギーはどの領域でもスペクトルの特徴に違いは見られず、その大きさは極域で最も大きくなった。

次に東西波数領域でのスペクトル解析の結果、Tung and Orland (2003) などで提唱された -3 乗則にも合致している。また順圧成分のみの東西エネルギースペクトルはロスビー波の飽和理論から -4 乗になることを導き出し、実際に解析の結果、大気大循環の順圧成分の東西エネルギースペクトルが波数の -4 乗を満たすことが確認できた。

位相速度領域でのエネルギースペクトル解析では、Tanaka et al. (2004) によって導き出された順圧成分の $E = mc^2$ という大気大循環のエネルギースペクトルの法則を満たすことを確認した。傾圧成分のエネルギースペクトルについても解析したが、傾圧成分のエネルギースペクトルについてはまだ分かっていないことが多くこれから更なる研究が必要である。

大気大循環のエネルギー相互作用についても解析を行った。すると大気大循環のエネルギーは太陽加熱の南北差による帯状傾圧成分、主に $m = 3$ にエネルギーソースがあり、その有効位置エネルギーは渦動傾圧成分の有効位置エネルギーに変換される。そしてその渦動傾圧成分の有効位置エネルギーは渦動傾圧成分の運動エネルギーに変換され、これは実際の大気現象としてはジェット気流の蛇行、つまり傾圧不安定などによるものである。そのようにして変換された傾圧成分の運動エネルギーは順圧成分の運動エネルギーへと変換され、その運動エネルギーは2次元流体の特徴として帯状順圧成分の運動エネルギーへと逆カスケードしていく。そして最終的には帯状順圧成分の運動エネルギーは摩擦などの粘性によって消散していく。このような大気大循環のエネルギーサイクルが理解できた。

6 謝辞

本研究を進めるにあたり、筑波大学計算機科学研究センターの田中 博教授には、学群生の頃からの長きに渡り、研究指導・論文指導教官として、始終適切な御指導を賜りました。また、筑波大学生命環境科学研究科の木村 富士男教授、林 陽生教授、上野 健一助教授、植田 宏昭講師にはとくに研究発表の場において、多数の御助言を頂きました。

同じく、気象研究所の堀 E. 正岳氏、陸域環境研究センター準研究員の渡来 靖氏、生命環境科学研究科の松枝 未遠氏にはゼミや発表の場において貴重な助言を頂きました。

最後になりましたが、ともに修士論文研究を進めた同期の皆様、生命環境科学研究科地球環境科学専攻大気科学分野の先輩・後輩方、筑波大学気候学・気象学分野の後輩の皆様にも大変お世話になり、深く感謝しております。

参考文献

- 小倉義光, 1978: 気象力学通論, 東京大学出版会, 249pp.
- 田中 博, 1984: 1979 年 1 月の東西波数 1 の増幅および鉛直伝播について. グロー
スペクター, 22, 2, 17–25.
- 廣岡俊彦, 1987: 大気中のプラネタリー・ロスビー波. ロスビー波, 気象研究ノー
ト, 第 156 巻, 日本気象学会, 93–127.
- 正野重方, 1960: 気象力学. 岩波全書, 284pp.
- Holton, J. R., 1992: An Introduction to Dynamic Meteorology. Academic
Press, 3rd edition, 511 pp.
- Kasahara and K. Puri, 1981: Spectral representation of three dimensional
global data by expansion in normal mode functions. *Mon. Wea. Rev.*, **109**,
37–51.
- Rhines, P. B., 1975: Waves and turbulence on a beta-plane, *J. Fluid Mech.*,
69, 417–443.
- Saltzman, B., 1957: Equations governing the energetics of the larger scales of
atmospheric turbulence in the domain of wavenumber. *J. Meteor.*, **14**, 513–523.
- Tanaka, H. L., E. C. Kung, and W. E. Baker, 1985: Energetics analysis of
the observed and simulated general circulation using three-dimensional normal
mode expansion. *Tellus*, **38A**, 412–428.
- Tanaka. H. L and E. C. Kung, 1988: Normal mode energetics of the general
circulation during the FGGE year. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 3723–3736.

Tanaka, H. L., 1991: A numerical simulation of amplification of low-frequency planetary waves and blocking formations by the upscale energy cascade. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 2919–2935.

Tanaka, H. L. and K. Terasaki, 2005: A theory of blocking formation by an excessive accumulation of barotropic energy at the spherical Rhines scale. (submitted to JMSJ).

Tanaka, H. L. and K. Terasaki, 2005: Energy spectrum and energy flow of the Arctic Oscillation in the phase speed domain. *SOLA*, **1**, 65–68.

Tanaka, H. L., Y. Watarai, and T. Kanda, 2004: Energy spectrum proportional to the squared phase speed of Rossby modes in the general circulation of the atmosphere. *Geophys. Res. Letters*. *31(13)*, **13109**, doi: 10.1029/2004GL019826.

Tung, K. K., and W. W. Orland, 2003: The k^{-3} and $k^{-5/3}$ energy spectrum of atmospheric turbulence: Quasigeostrophic two-level model simulation. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 824–835.

表 1 解析に用いたデータの鉛直気圧面と静的安定度 (左 2 列)。鉛直モード番号とそのモード番号に対応する等価深度 (右 2 列)。

Pressure (hPa)	Static stability $\gamma(K)$	Vertical mode	Equivalent height (m)
0.4	62.24	0	9908.7
1.0	69.71	1	5961.4
2.0	94.72	2	2641.1
3.0	102.94	3	1262.9
5.0	87.06	4	792.7
7.0	77.54	5	501.2
10.0	74.56	6	402.6
20.0	77.80	7	268.1
30.0	76.43	8	232.8
50.0	70.79	9	181.7
70.0	68.49	10	160.1
100.0	57.66	11	127.2
150.0	41.11	12	92.1
200.0	34.21	13	86.8
250.0	28.19	14	67.0
300.0	22.71	15	44.9
400.0	20.67	16	28.5
500.0	25.20	17	19.4
600.0	30.36	18	12.6
700.0	37.25	19	9.5
850.0	45.72	20	7.9
925.0	38.05	21	7.0
1000.0	27.89	22	1.9

Vertical Structure Function

Vertical Mode (0 - 5)

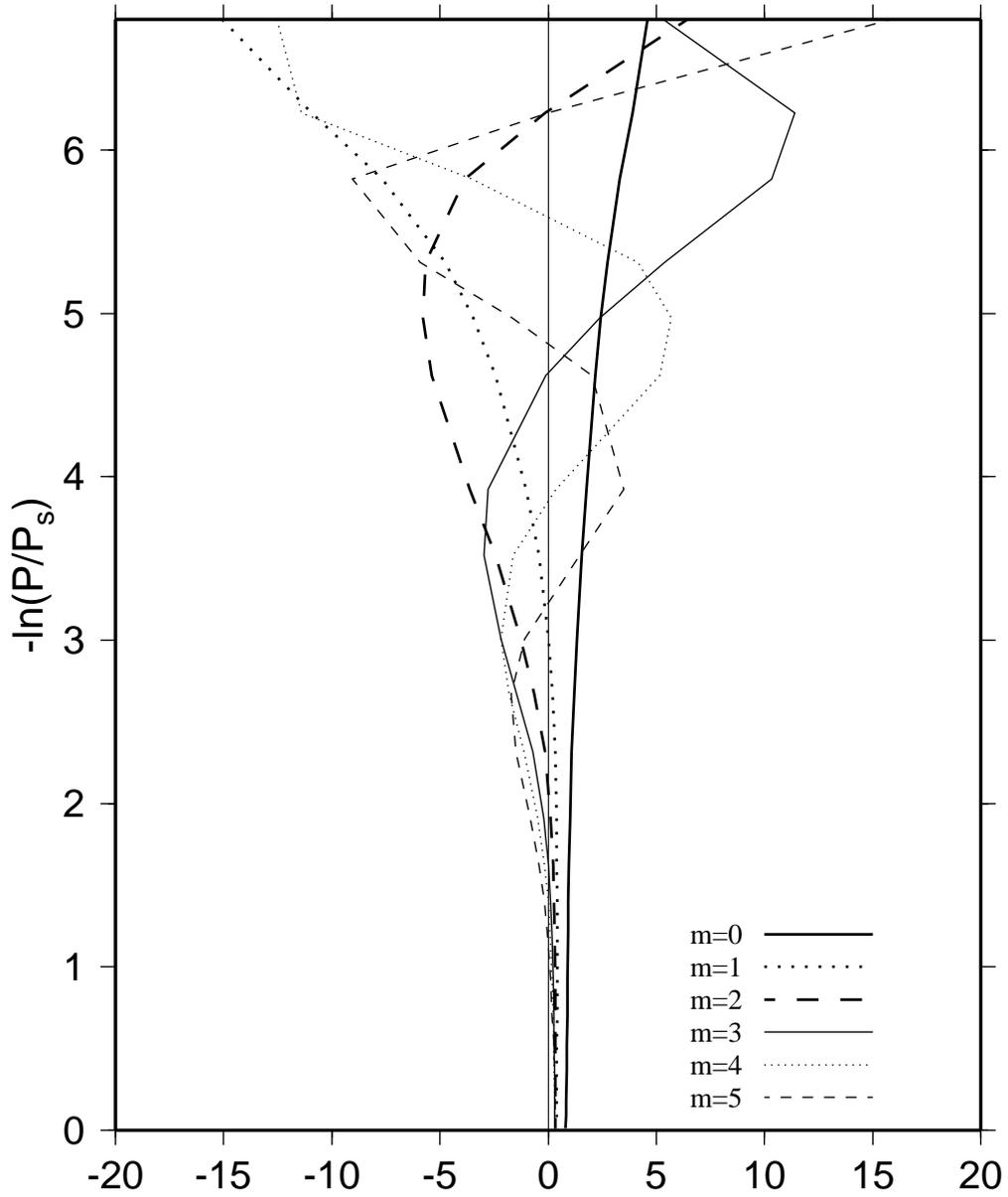
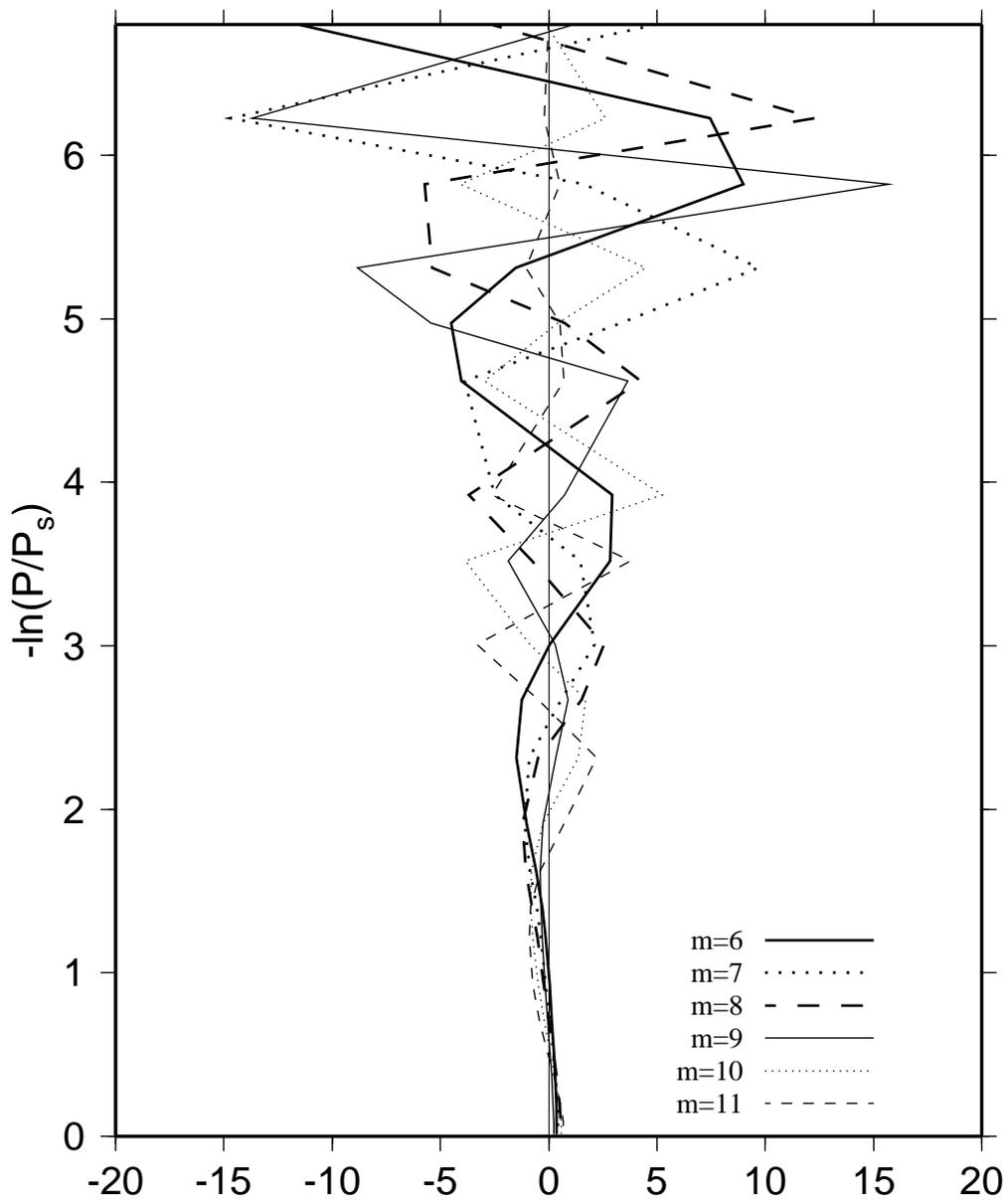


図1 鉛直構造方程式の数値解、鉛直構造関数の鉛直プロファイル。鉛直モード (m) 0 から 22 まで。

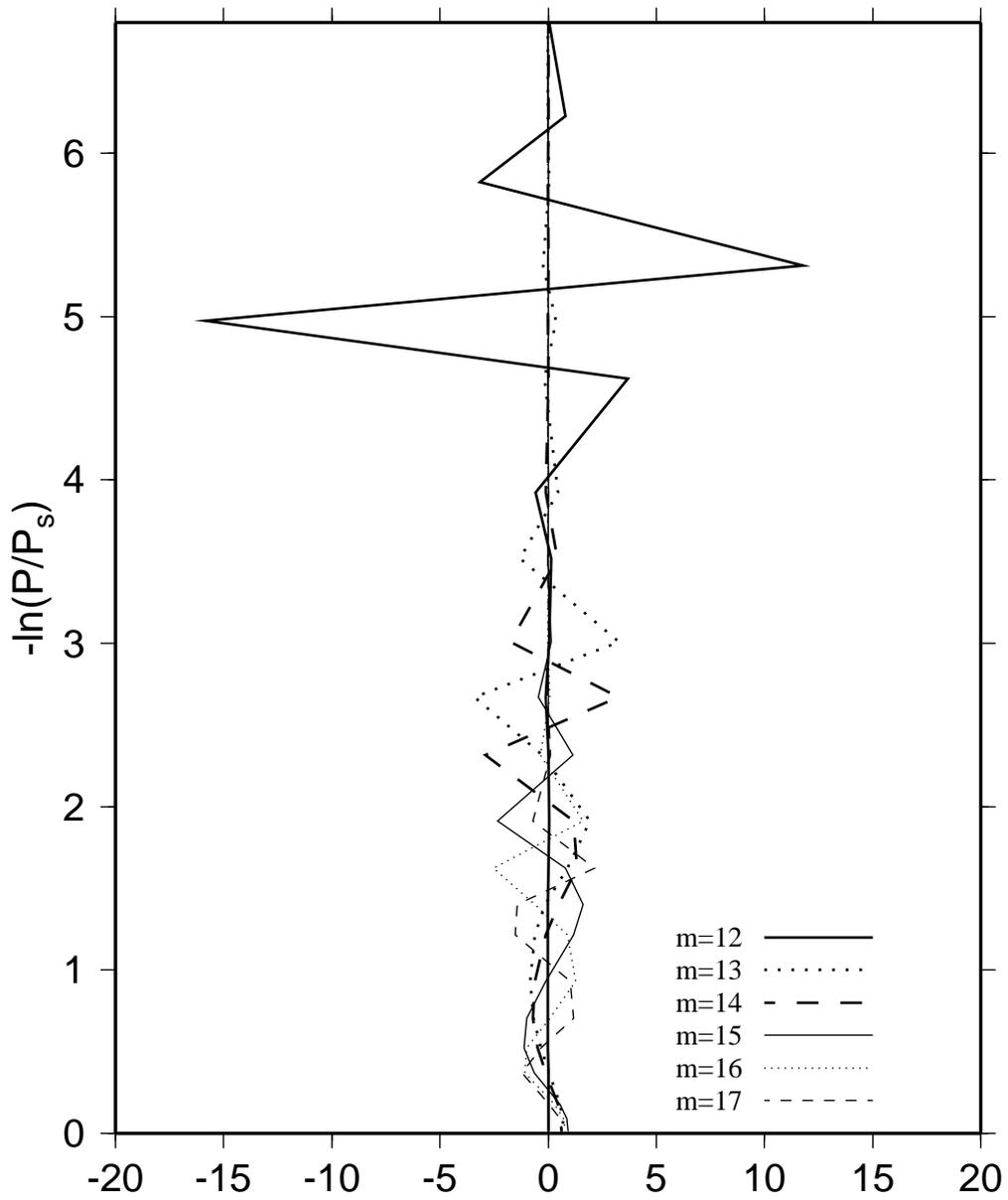
Vertical Structure Function

Vertical Mode (6 - 11)



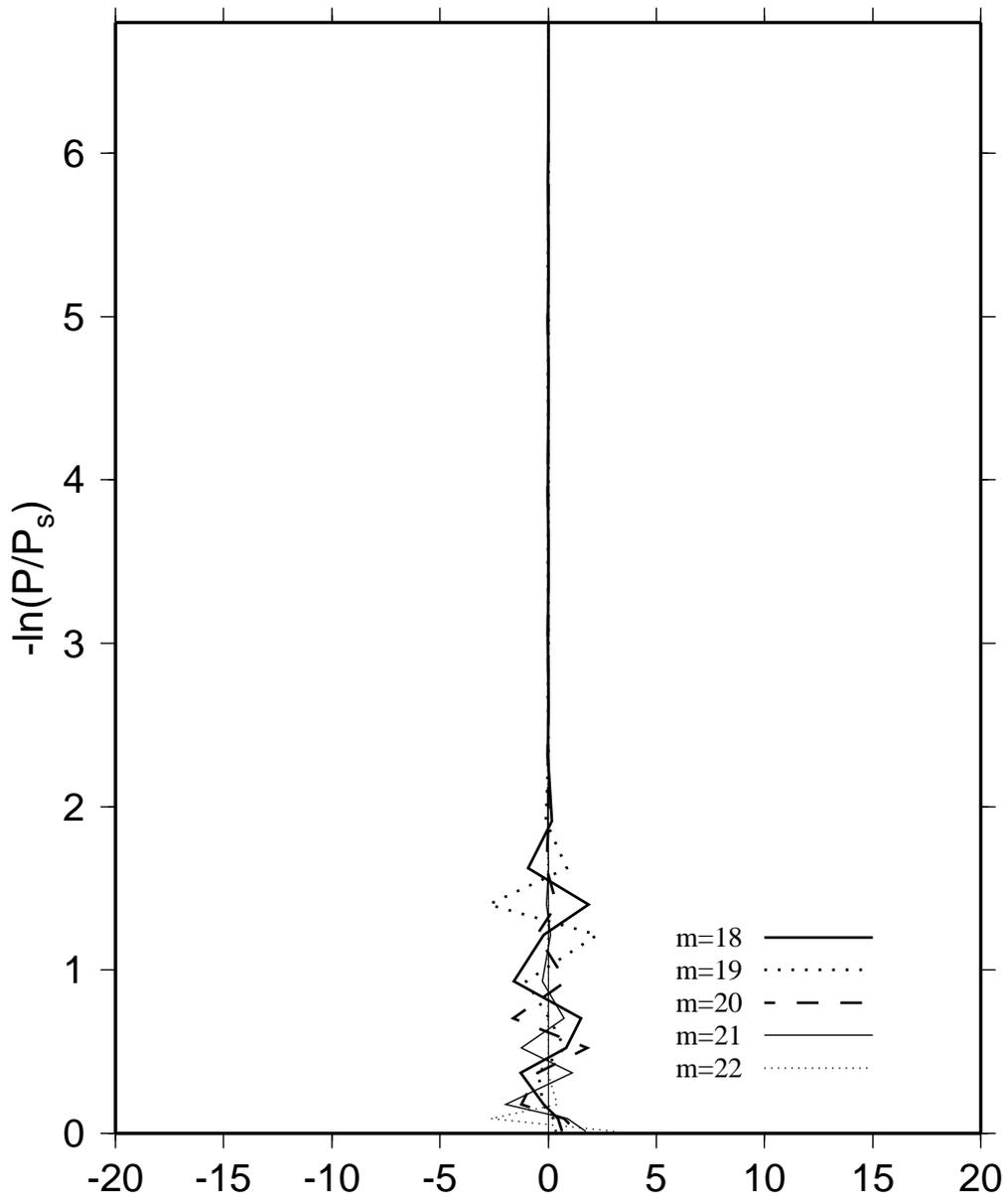
Vertical Structure Function

Vertical Mode (12 - 17)



Vertical Structure Function

Vertical Mode (18 - 22)



Vertical Structure Function

Vertical Mode (0 - 5)

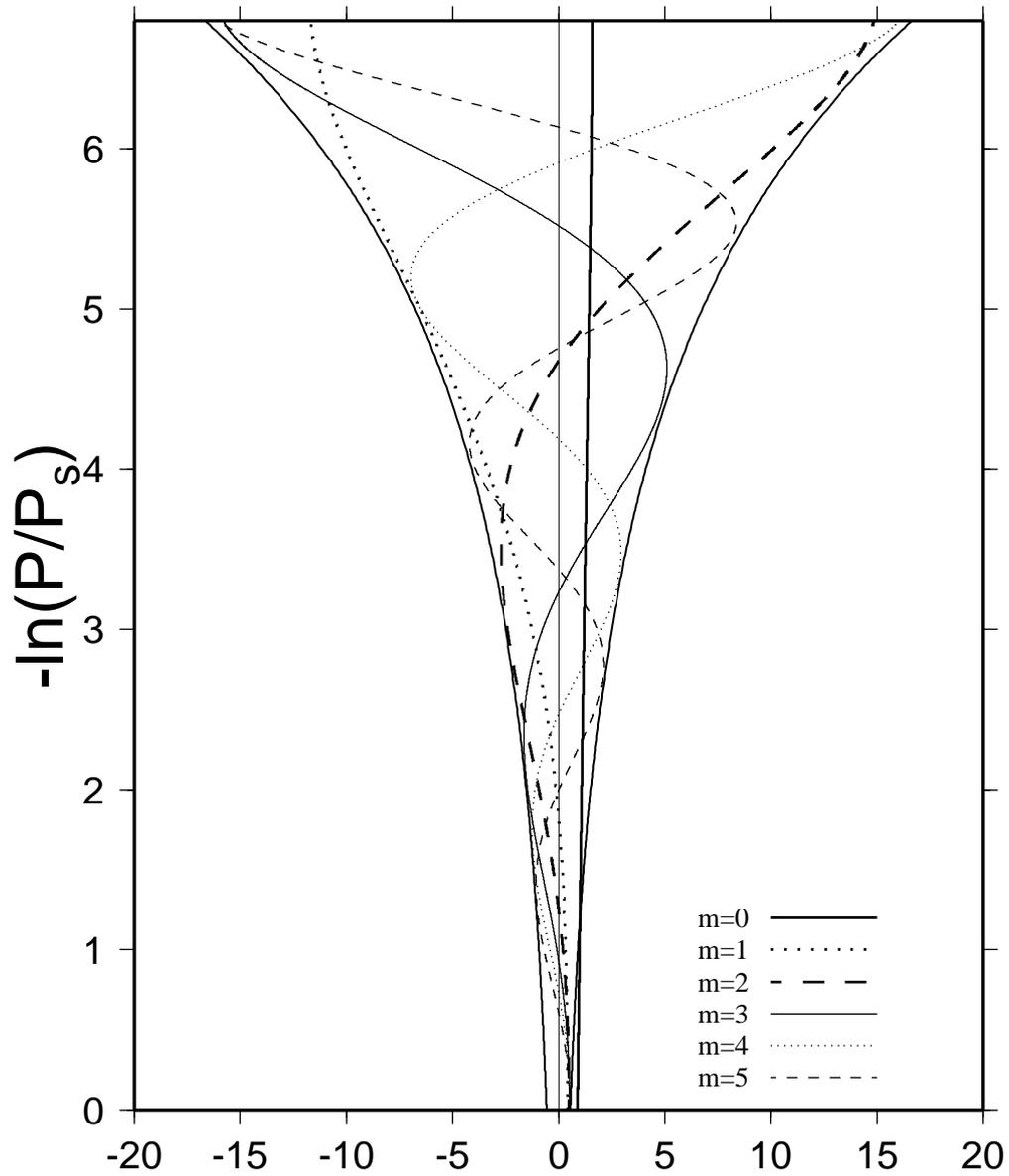
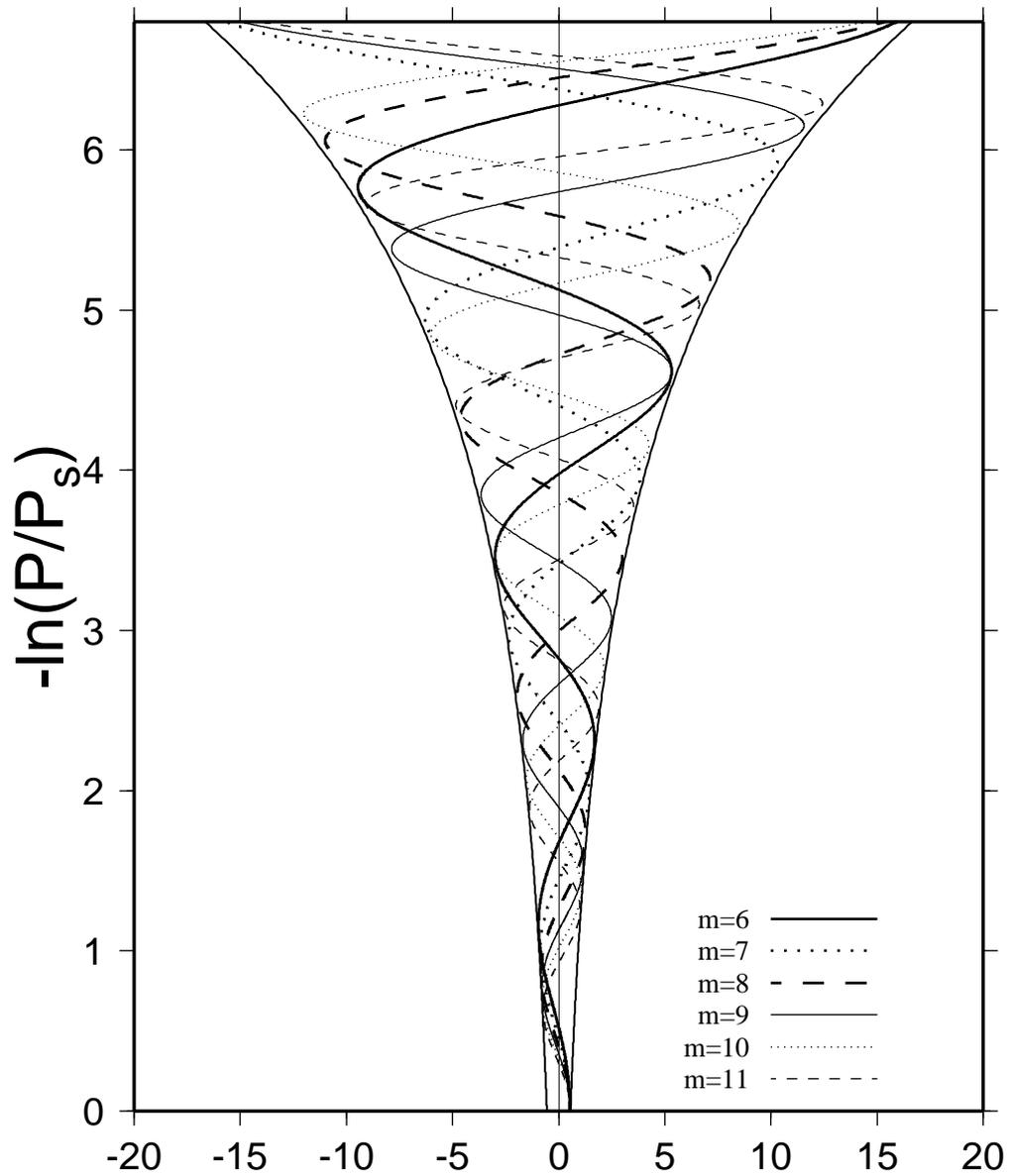


図2 鉛直構造方程式の理論解、鉛直構造関数の鉛直プロファイル。鉛直モード (m) 0 から 22 まで。

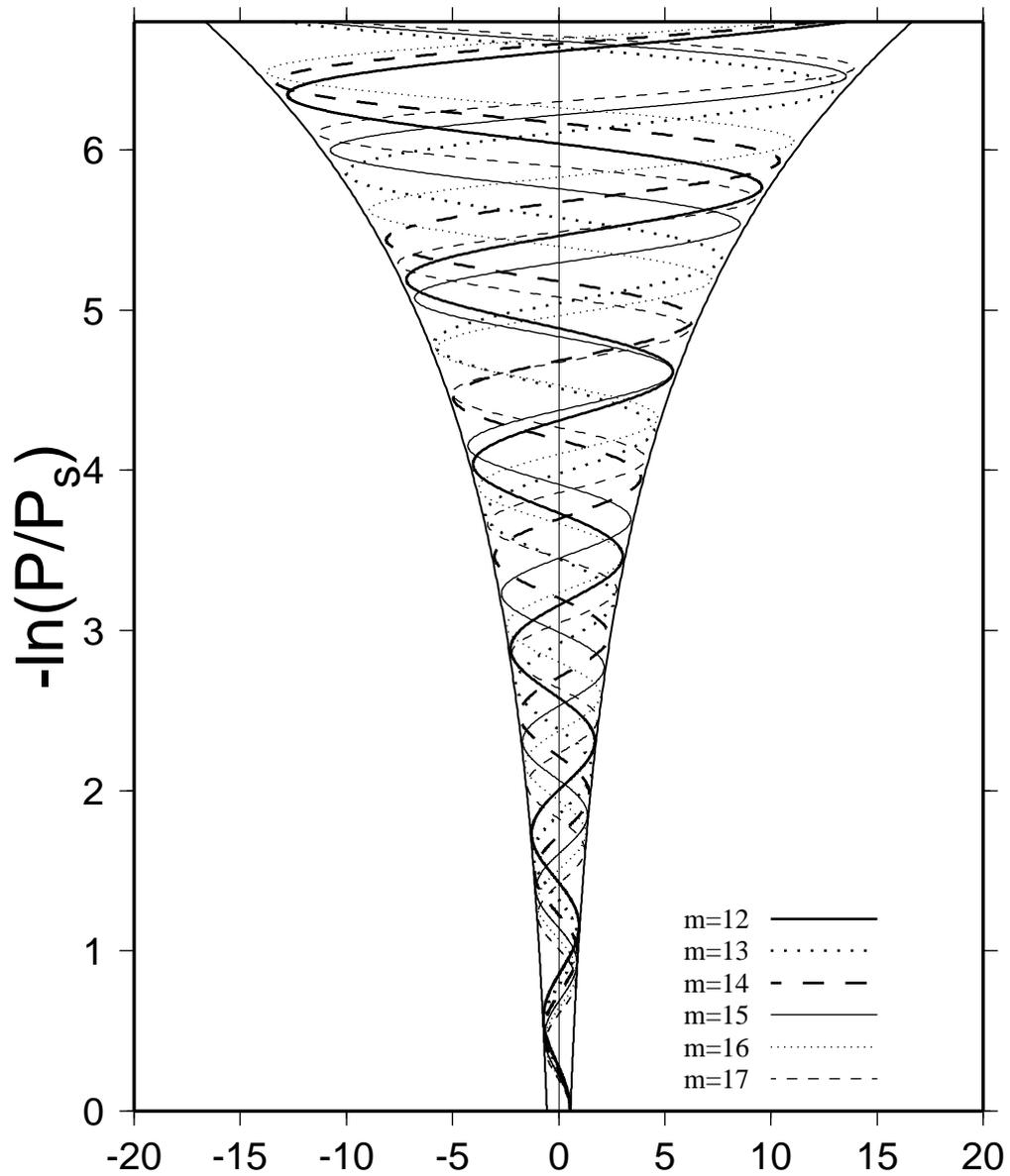
Vertical Structure Function

Vertical Mode (6 - 11)



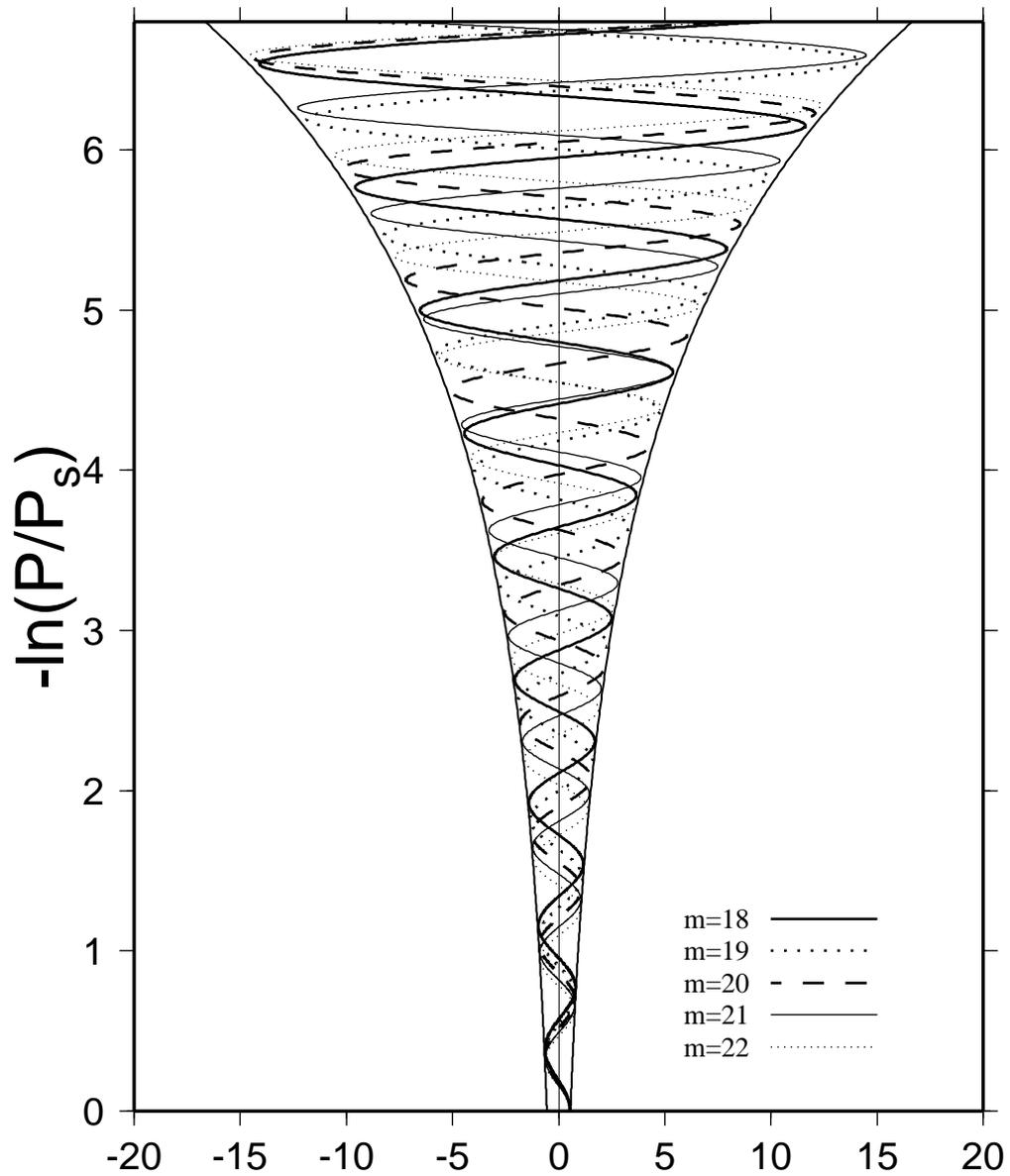
Vertical Structure Function

Vertical Mode (12 - 17)



Vertical Structure Function

Vertical Mode (18 - 22)



Vertical Energy Spectrum

1 Jan 1979 - 31 Jan 1979

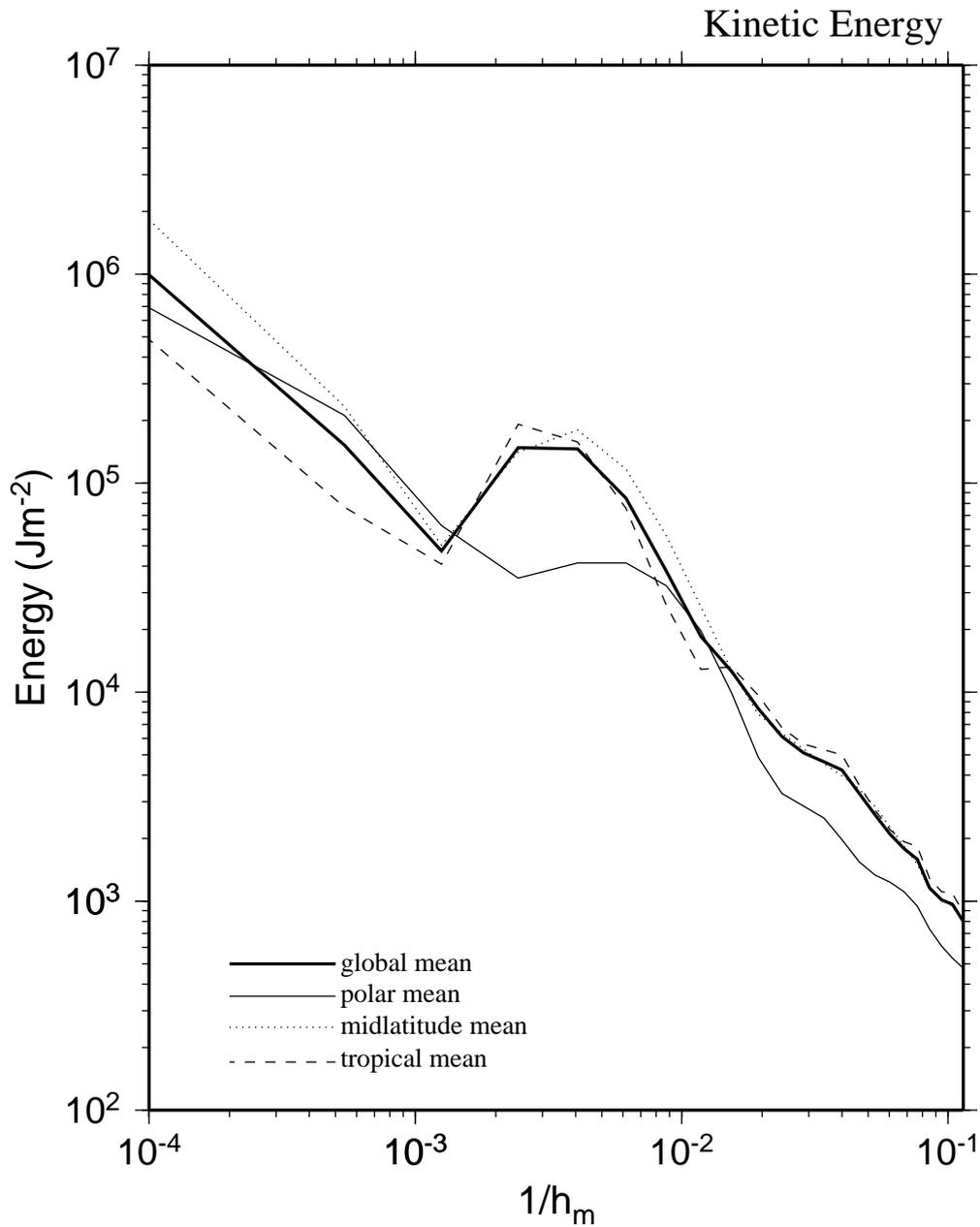


図3 領域平均した運動エネルギーの鉛直スペクトル。太い実線は全球平均、細い実線は極域平均、点線は中緯度平均、そして破線は熱帯域の平均である。

Vertical Energy Spectrum

1 Jan 1979 - 31 Jan 1979

Available Potential Energy

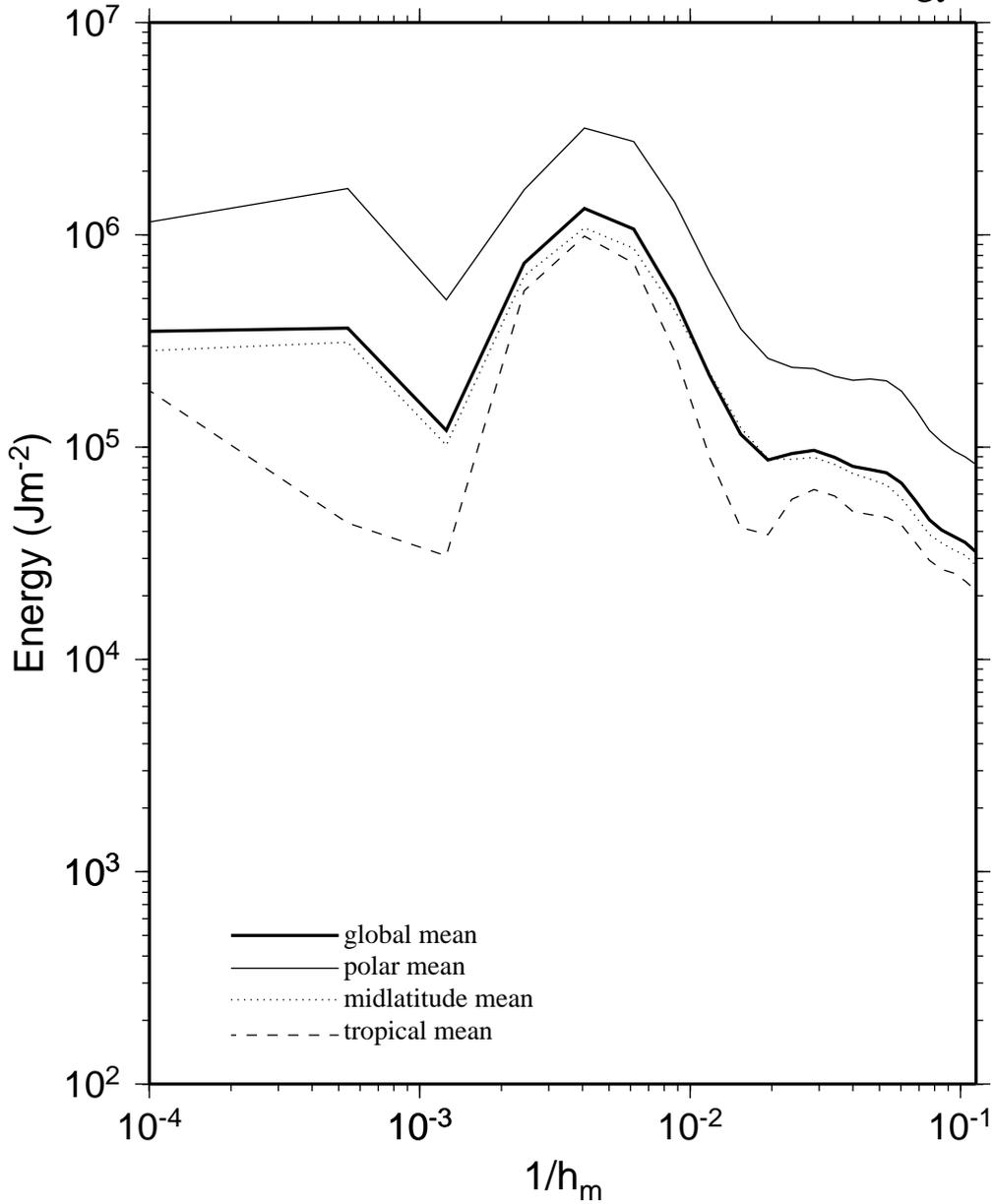


図 4 領域平均した有効位置エネルギーの鉛直スペクトル。線は図 3 と同様。

Vertical Energy Spectrum

1 Jan 1979 - 31 Jan 1979

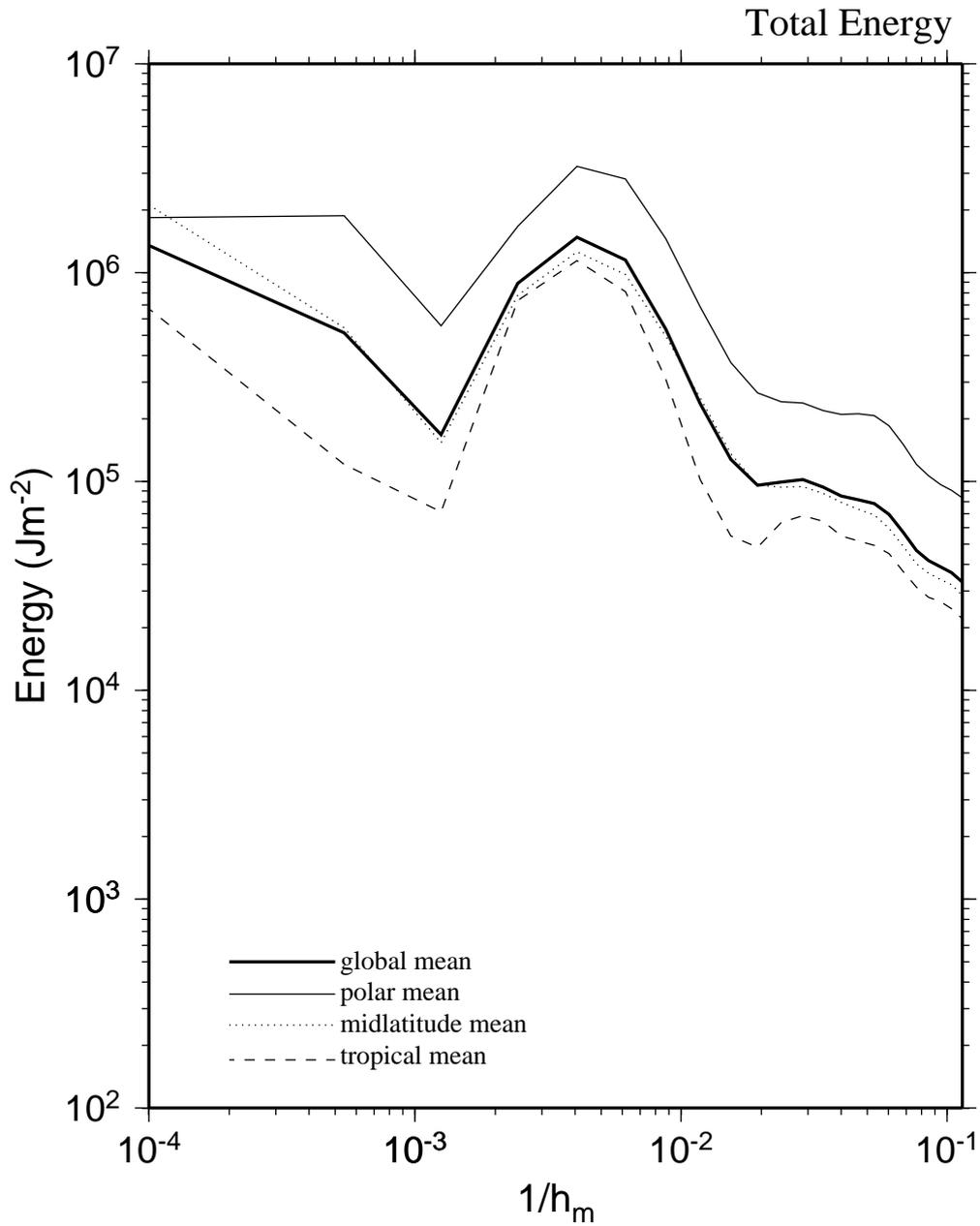


図5 領域平均した全エネルギーの鉛直スペクトル。線は図3と同様。

Zonal Energy Spectrum

1 Jan 1979 - 31 Jan 1979

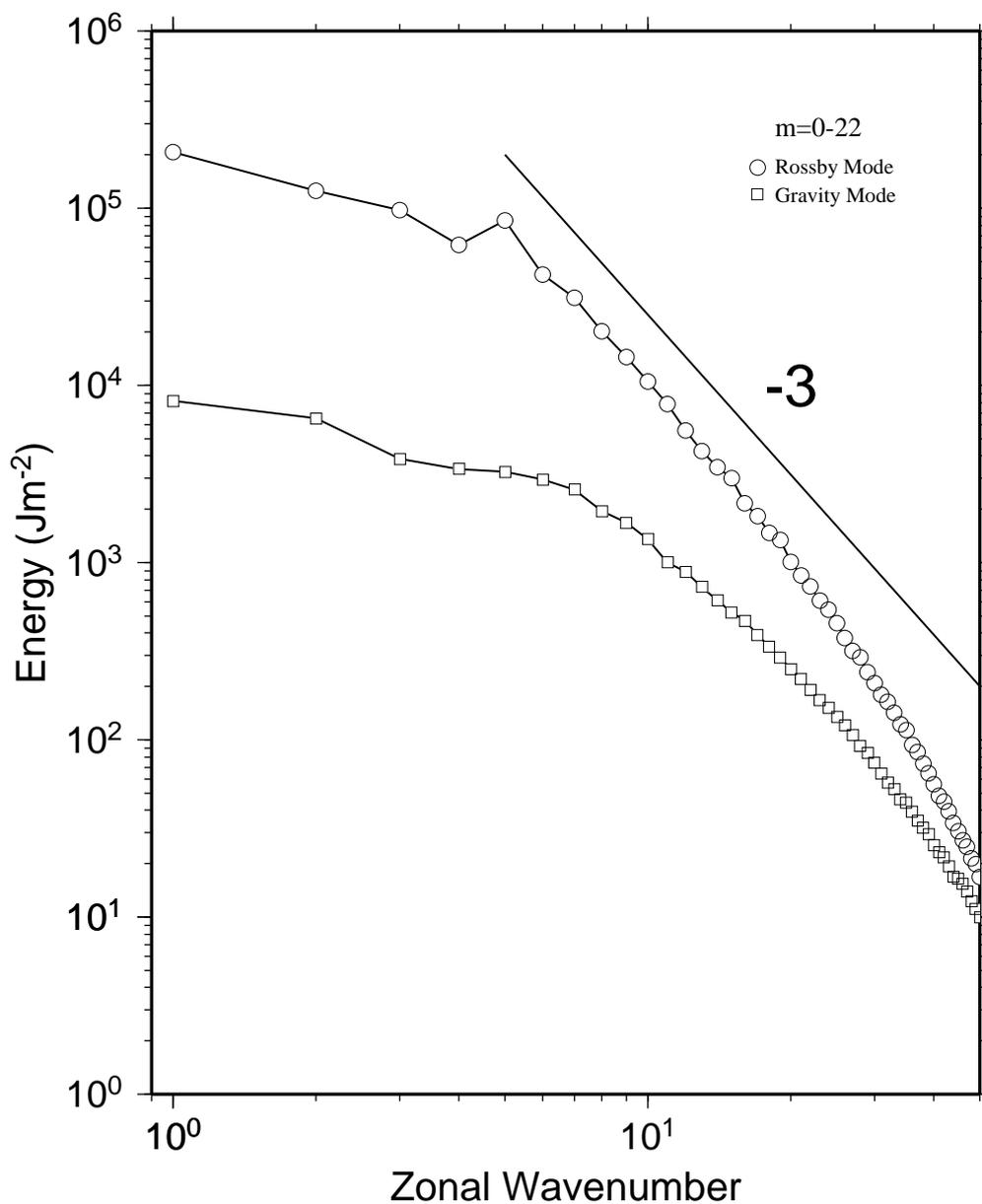


図6 全鉛直モードを足し合わせた東西エネルギースペクトル。○はロスビーモード、□は重力波モードである。

Zonal Energy Spectrum

1 Jan 1979 - 31 Jan 1979

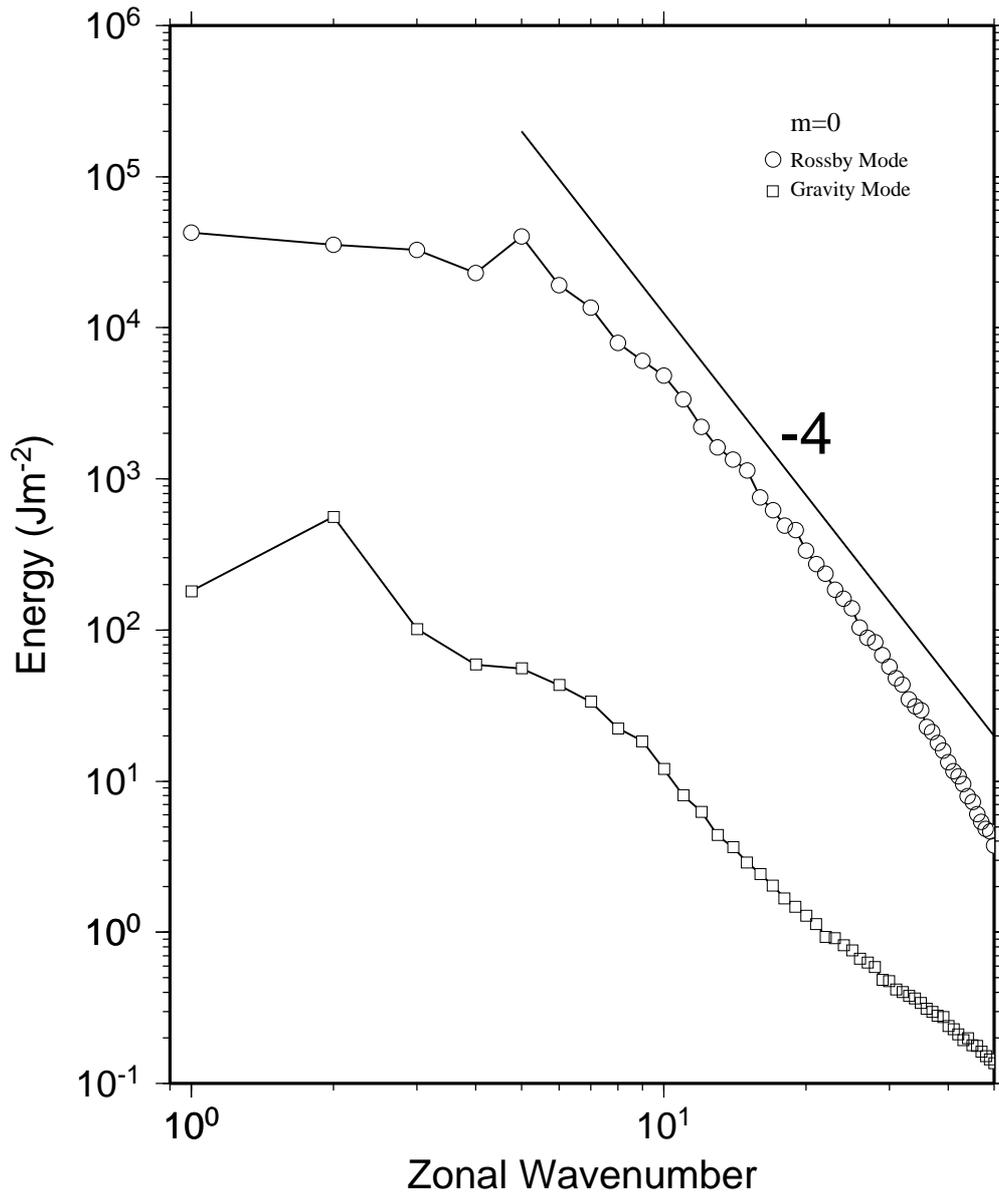


図7 順圧成分の東西エネルギースペクトル。記号は図6と同様。

Zonal Energy Spectrum

1 Jan 1979 - 31 Jan 1979

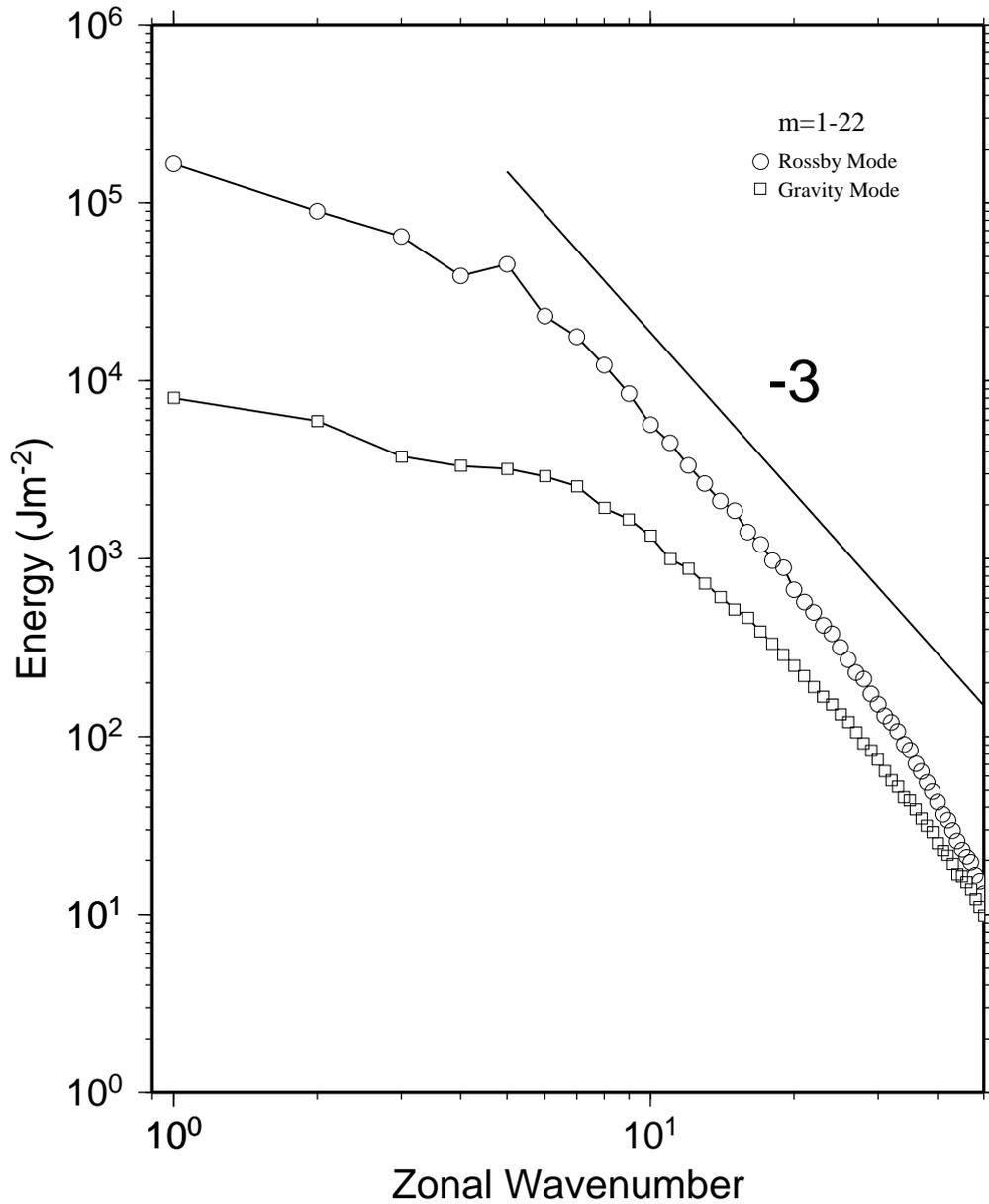
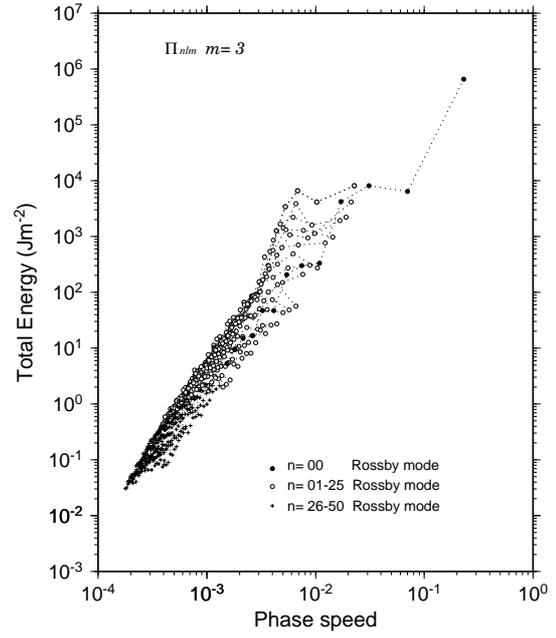
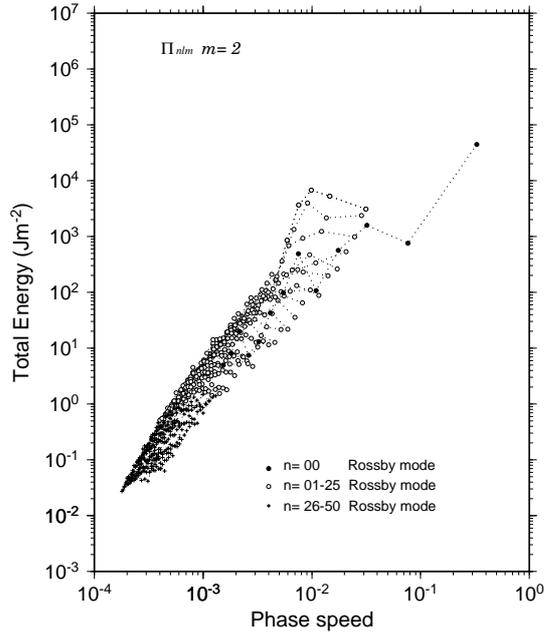
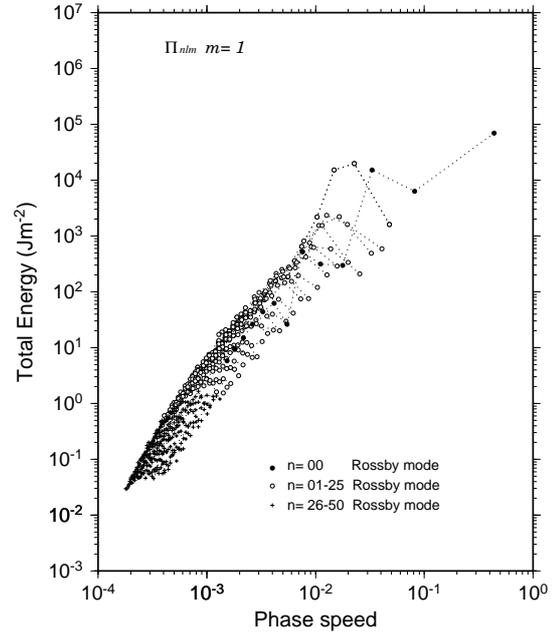
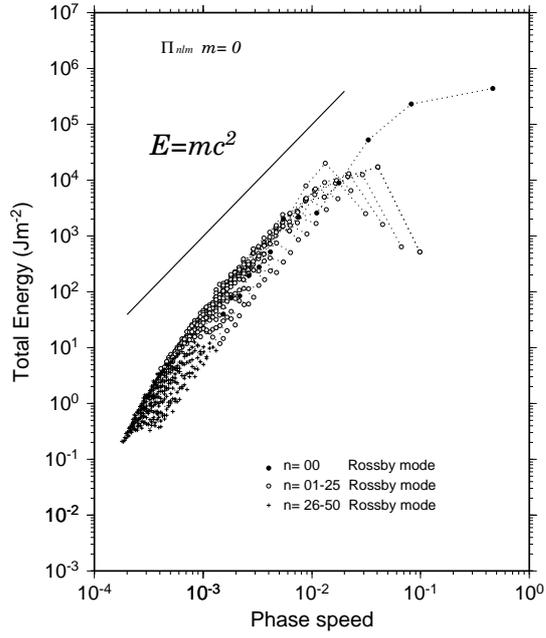
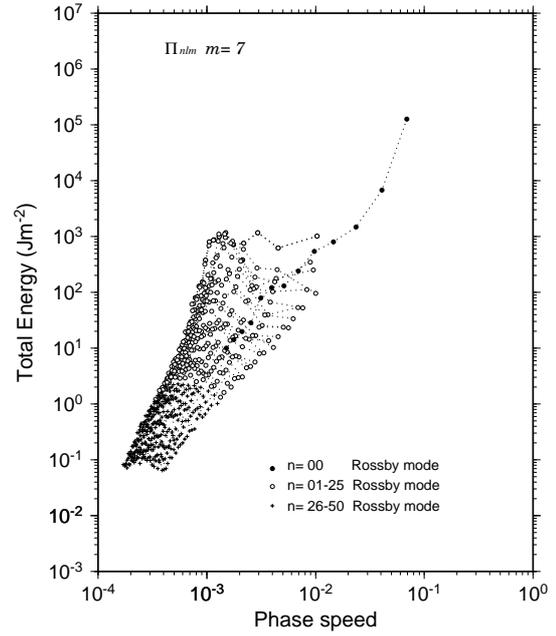
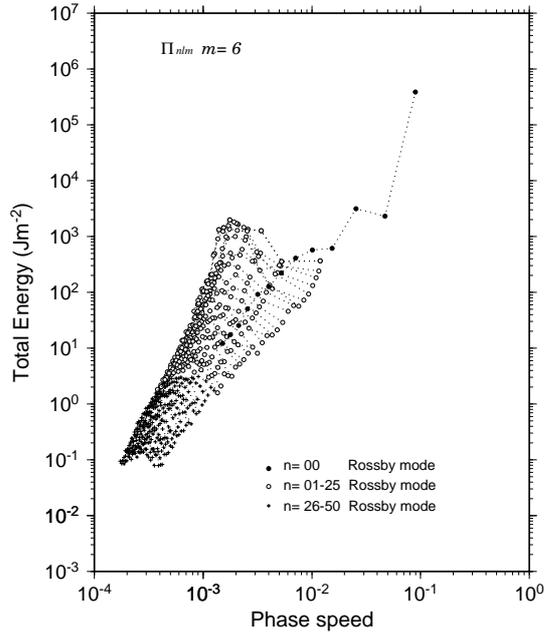
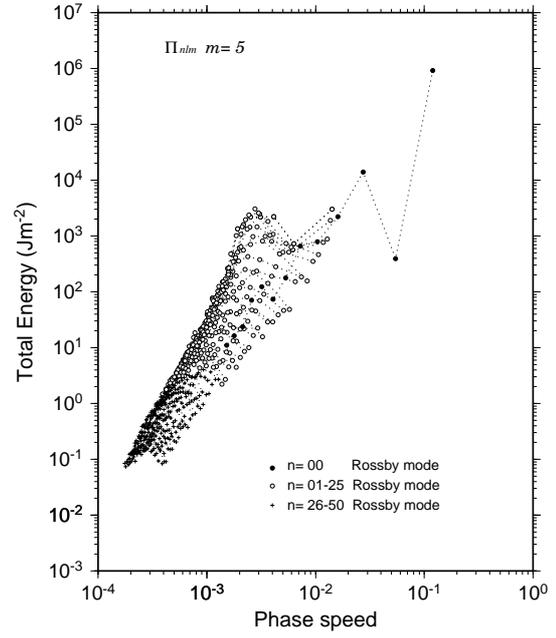
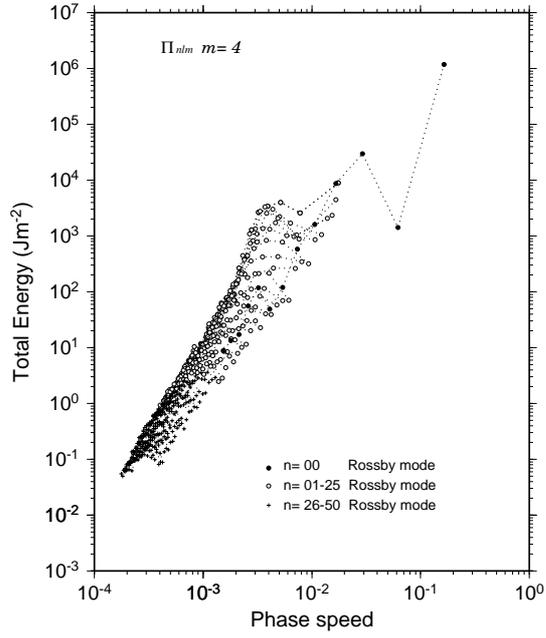
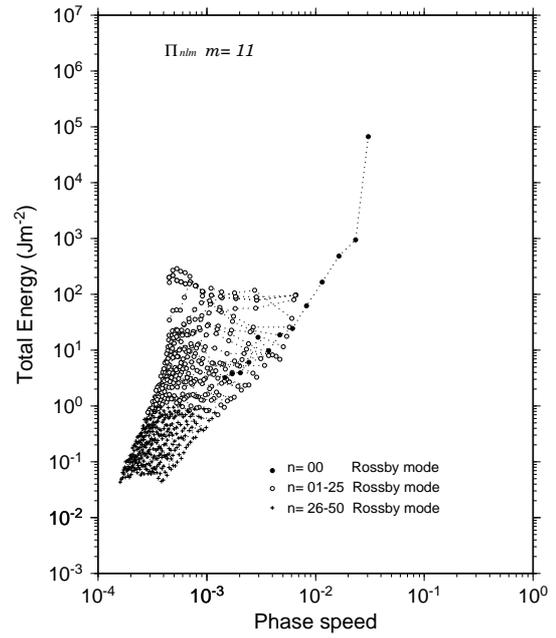
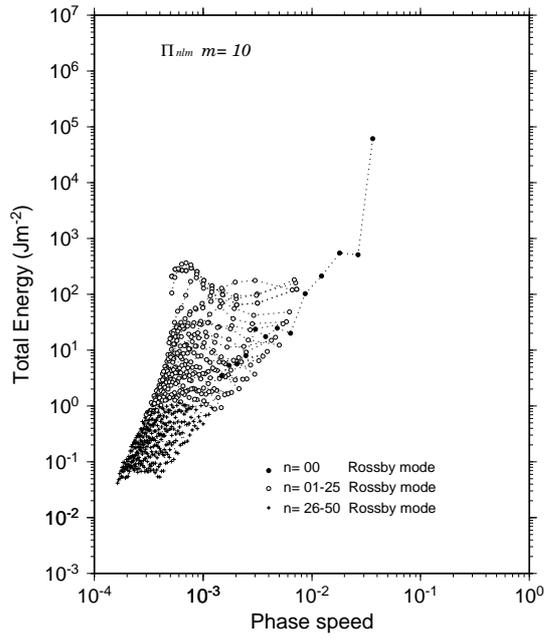
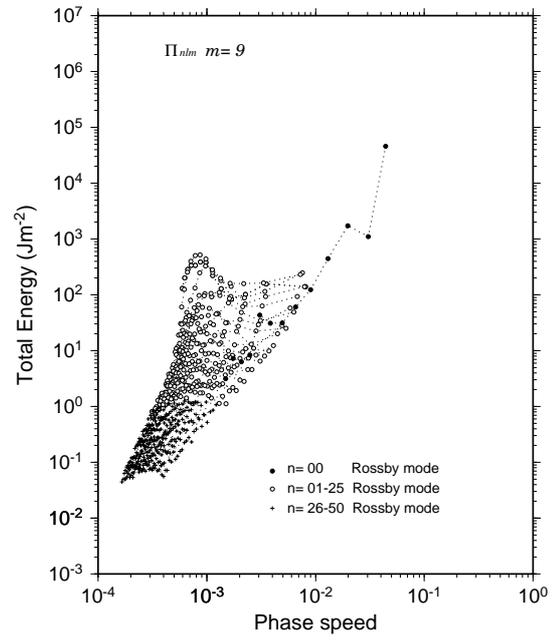
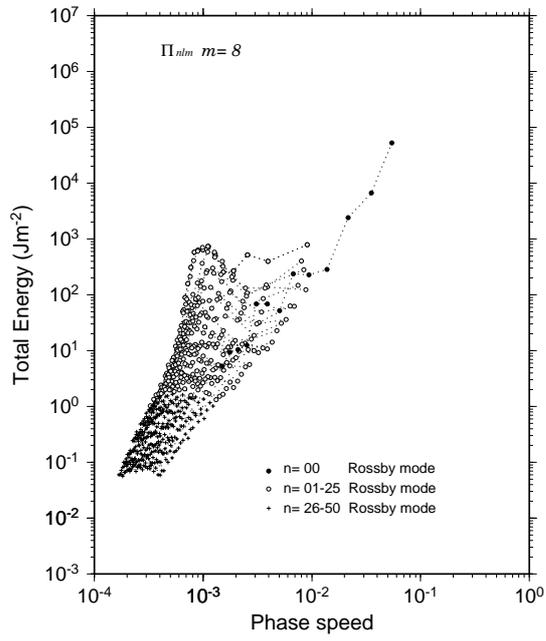
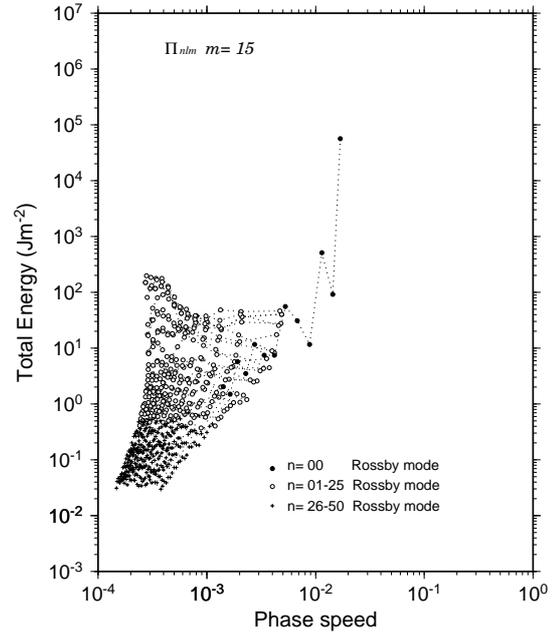
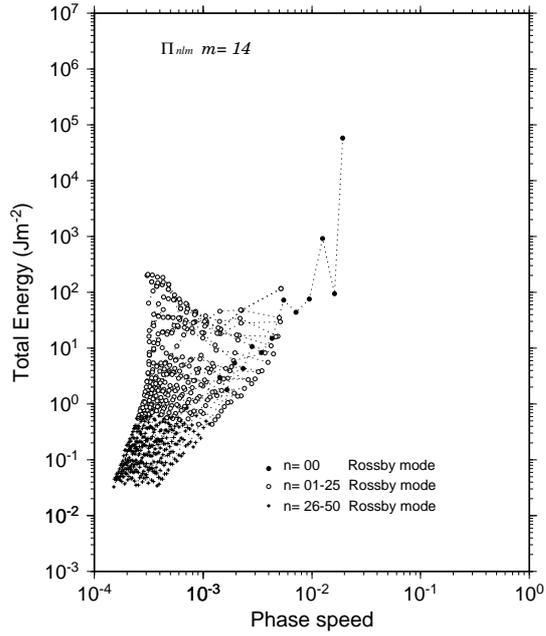
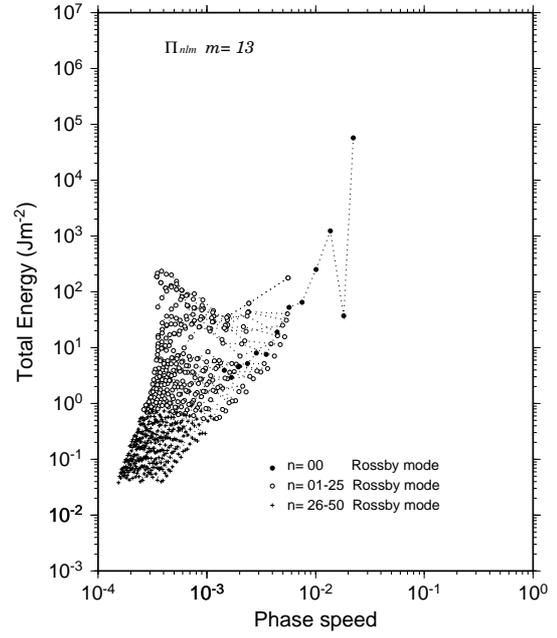
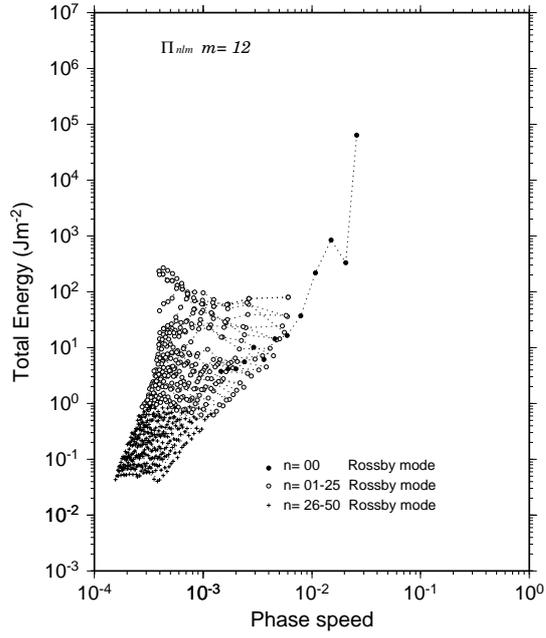


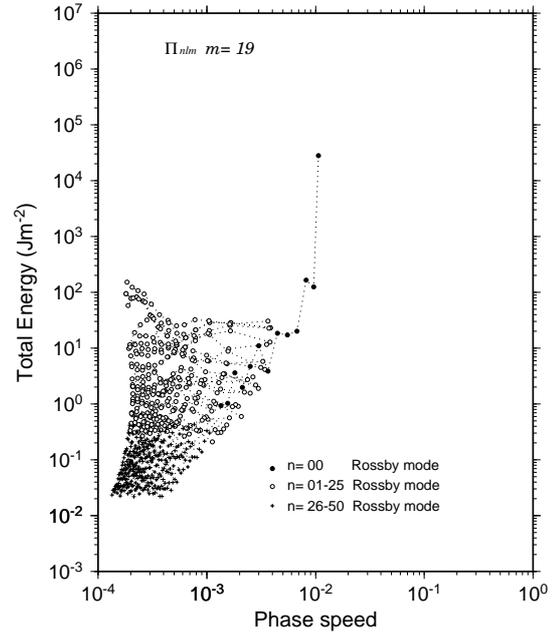
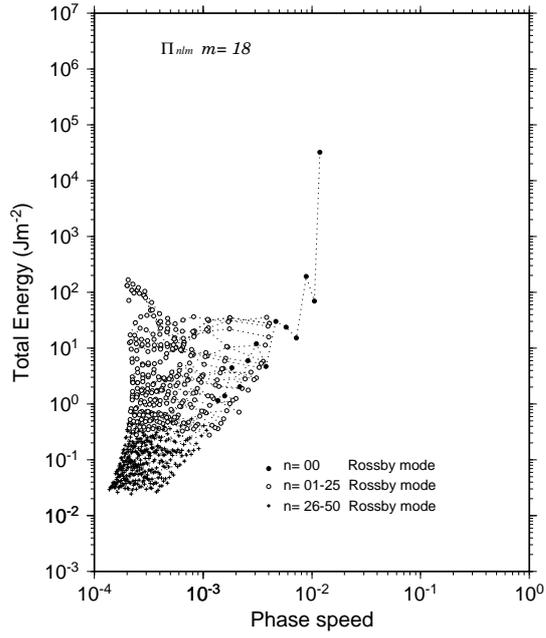
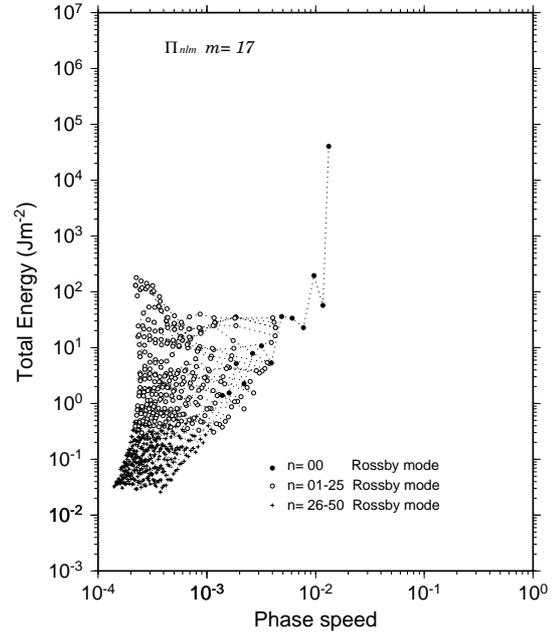
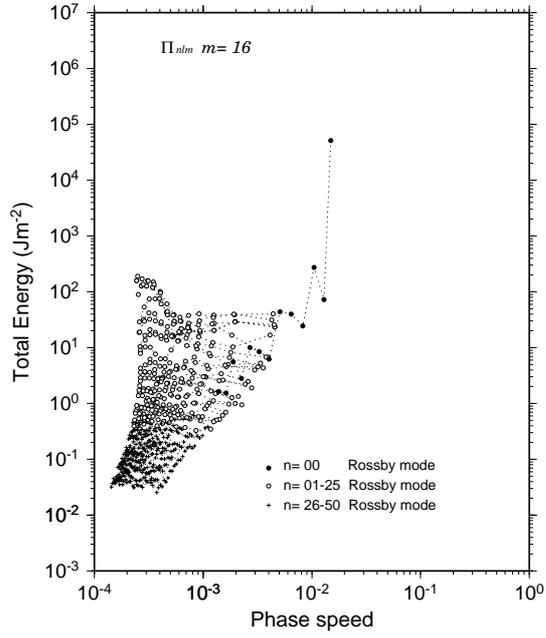
図8 傾圧成分の東西エネルギースペクトル。記号は図6と同様。











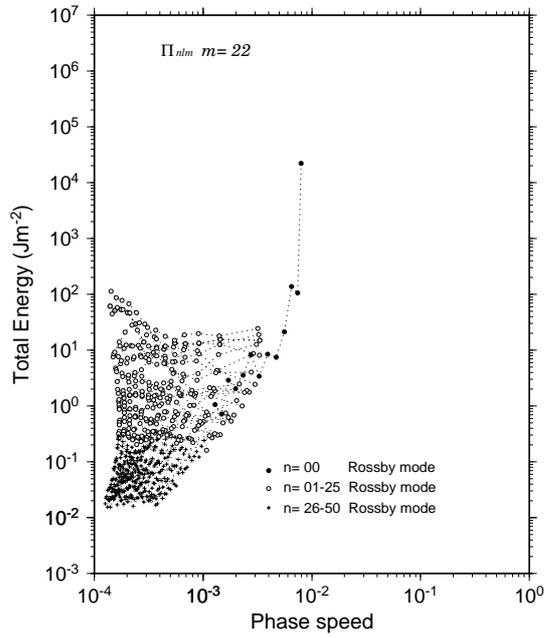
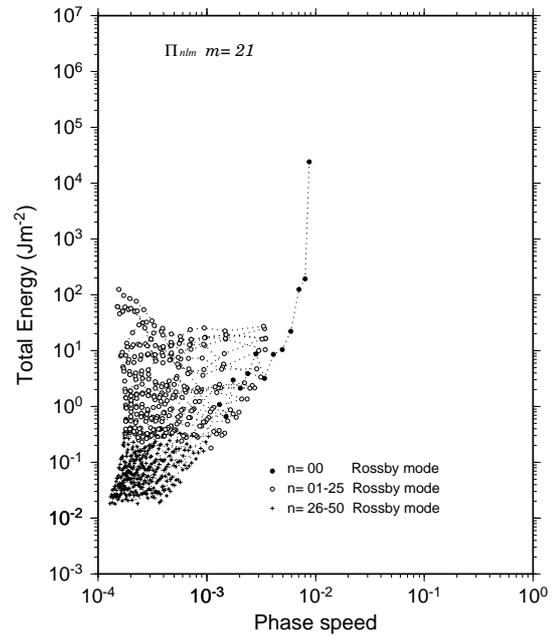
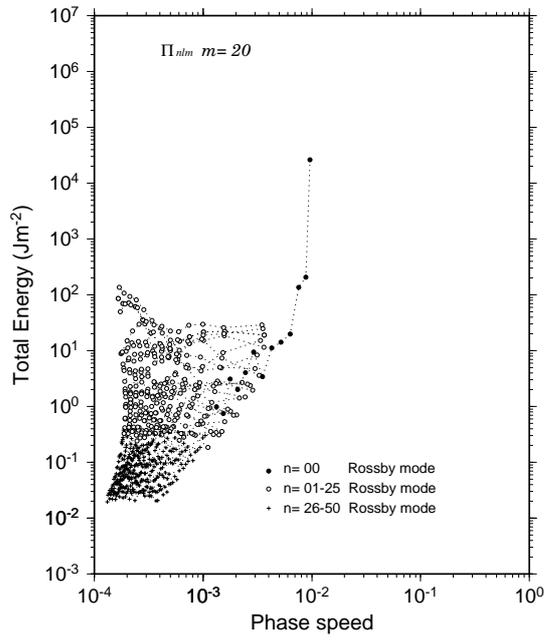


図 9 位相速度空間におけるエネルギースペクトル。図はロスビーモードのみをプロットして、それぞれ鉛直モードごとの図である。

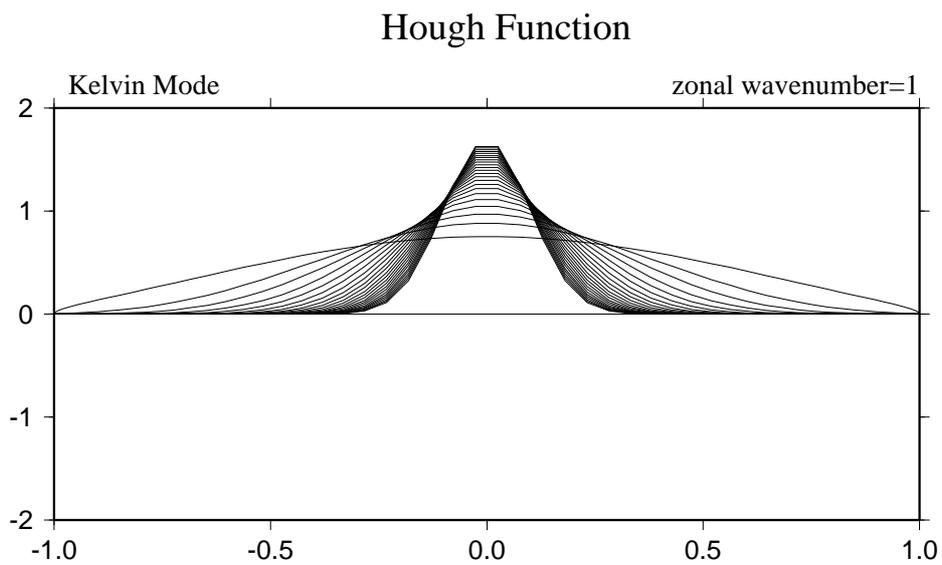
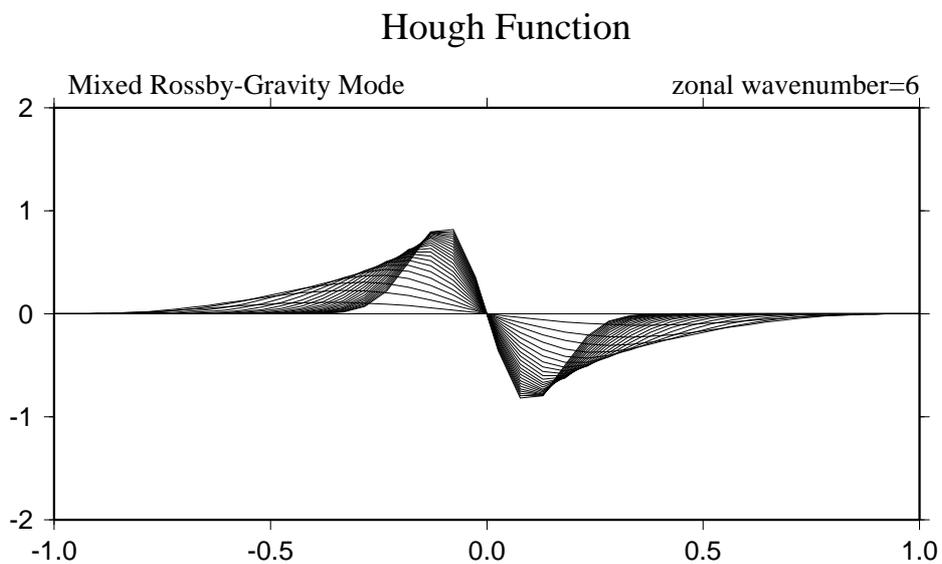


図 10 混合ロスビー重力波モードとケルビン波モードのハフ関数。混合ロスビー重力波モードは東西波数 6、ケルビン波モードは東西波数 1 をプロットした。線は一番外側が順圧モードで、内側へ行くにつれて鉛直モード番号が大きくなっている。

Vertical Energy Spectrum

1 Jan 1979 - 31 Jan 1979

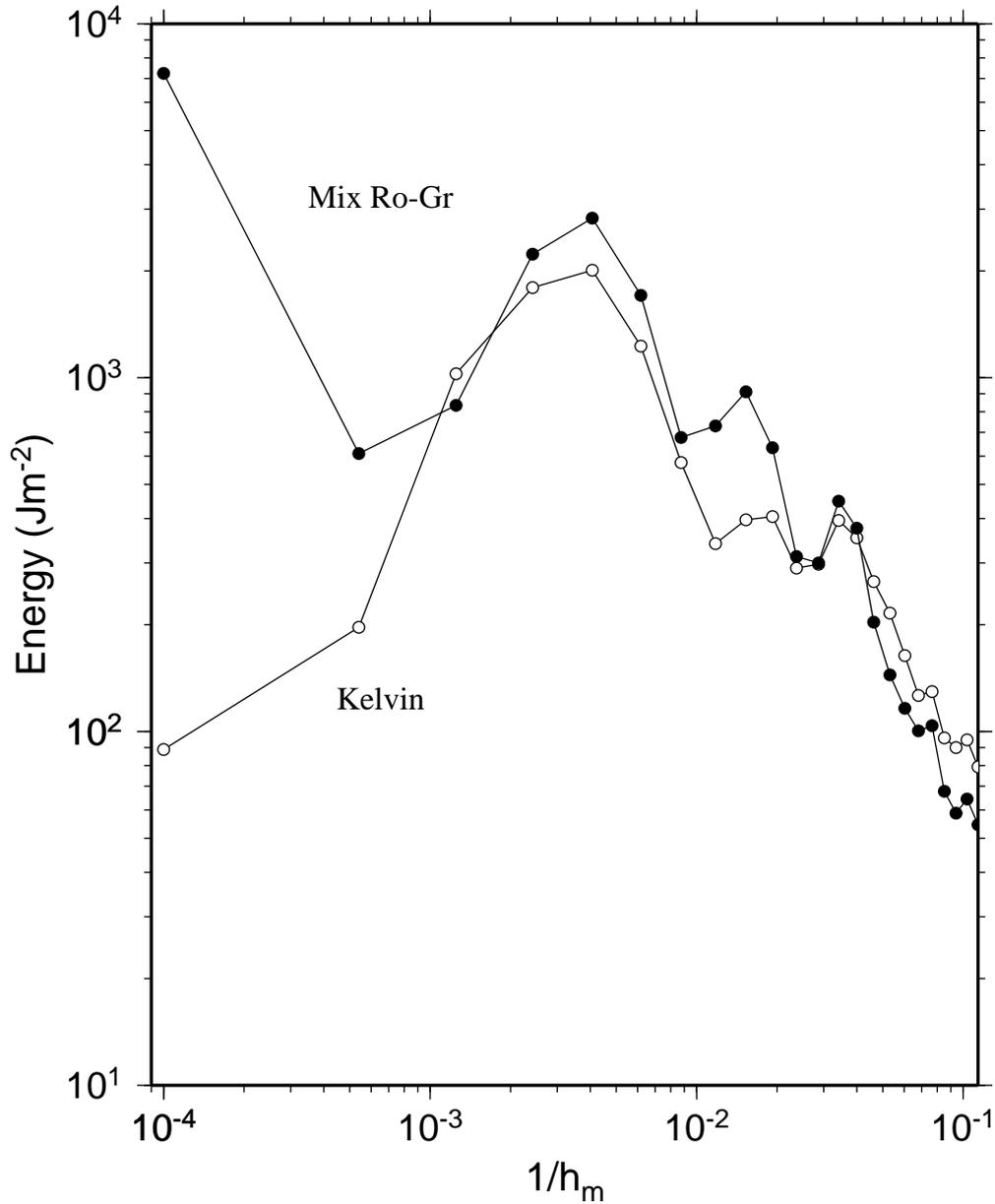


図 11 混合ロスビー重力波モードとケルビン波モードの鉛直エネルギースペクトル。 は混合ロスビー重力波、 はケルビン波である。

Zonal Energy Spectrum

1 Jan 1979 - 31 Jan 1979

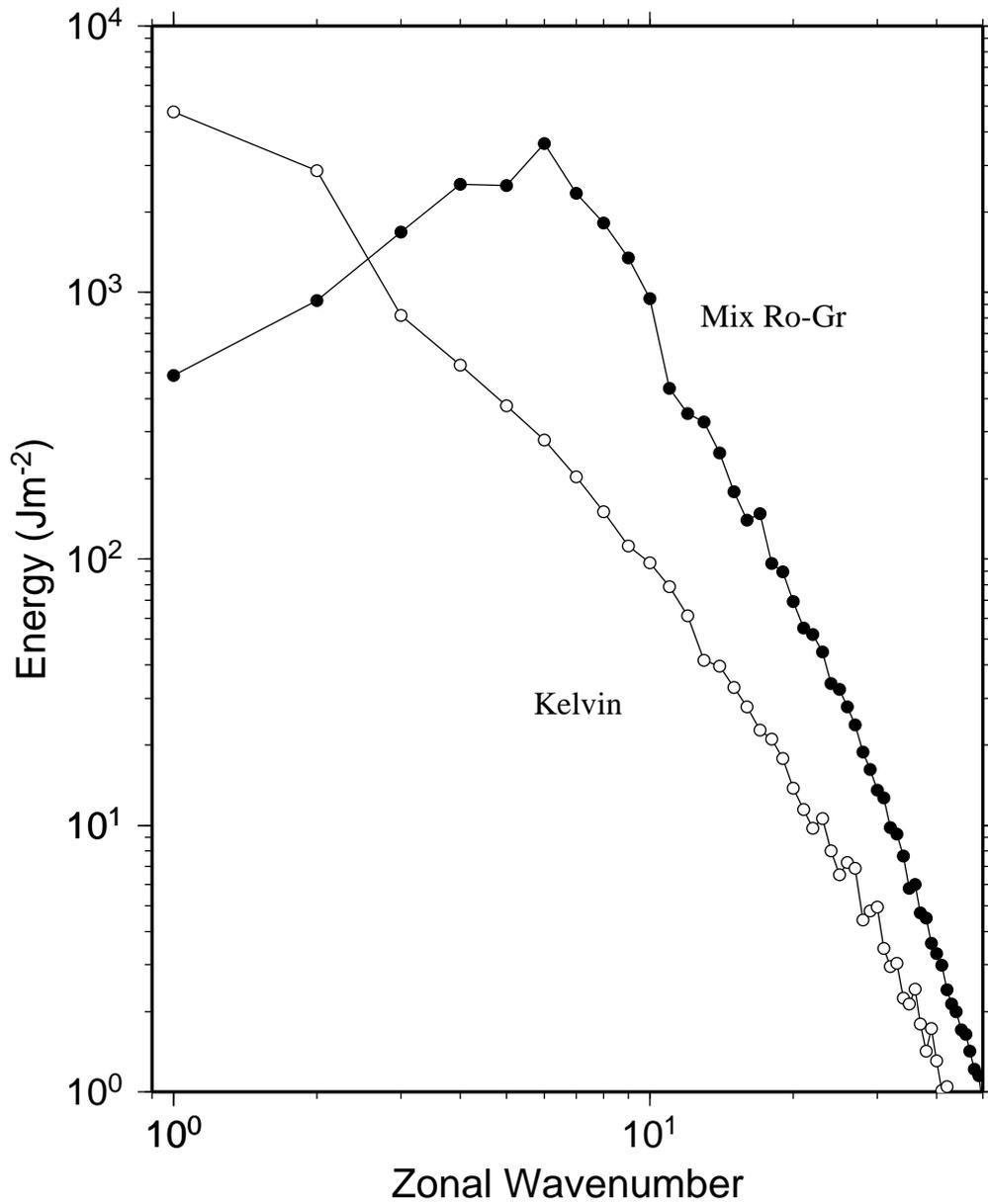


図 12 混合ロスビー重力波モードとケルビン波モードの東西エネルギースペクトル。記号は図 11 と同様である。

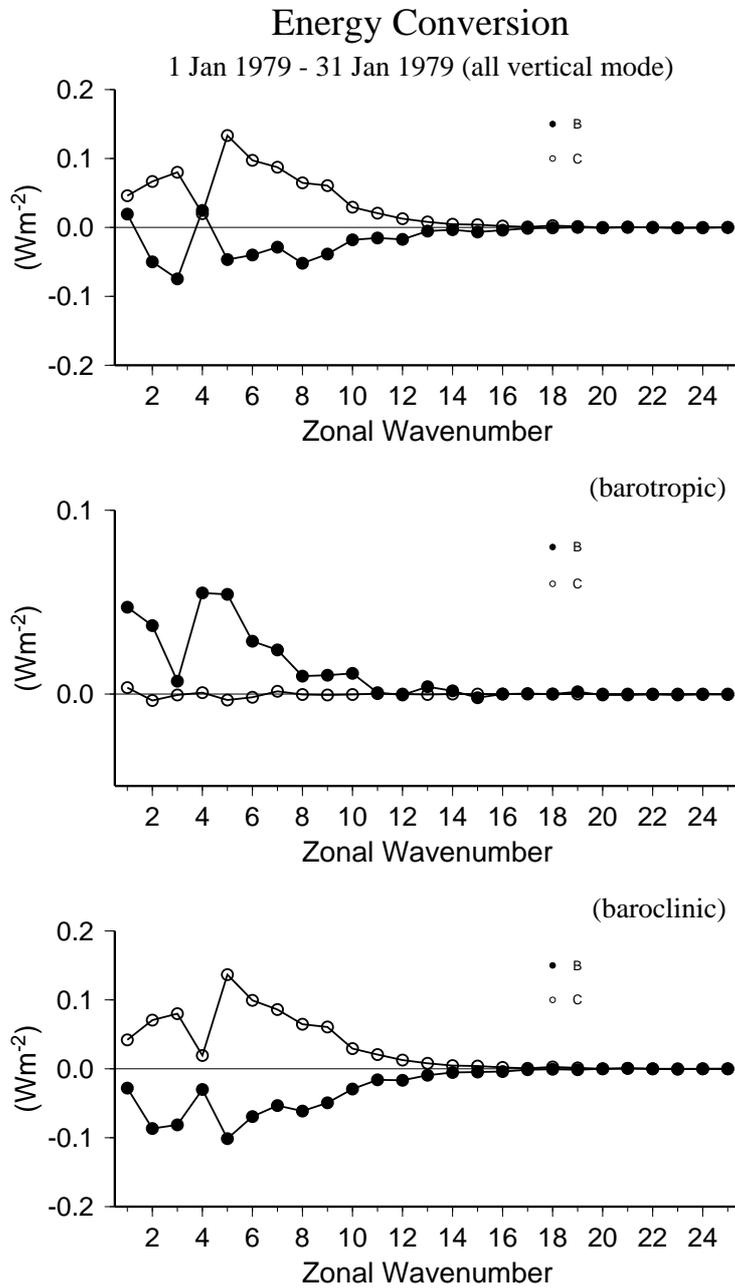


図 13 東西波数領域におけるエネルギー相互作用。 B は運動エネルギーの変換量で、 C は有効位置エネルギーの変換量である。上から順に全ての鉛直モード、順圧成分のみ、そして傾圧成分のみの図である。

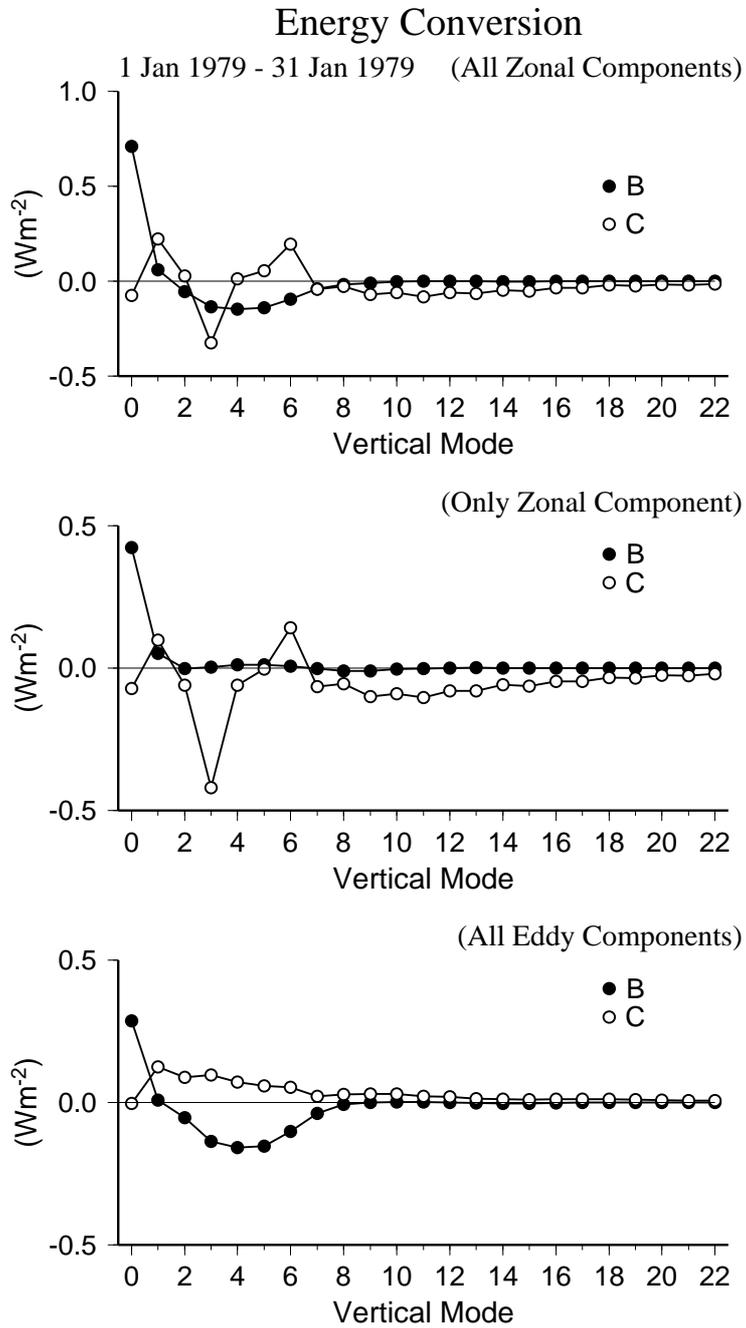


図 14 鉛直モード領域におけるエネルギー相互作用。●は運動エネルギーの変換量で、○は有効位置エネルギーの変換量である。上から順に全ての鉛東西波数、帯状成分のみ、そして渦動成分のみの図である。

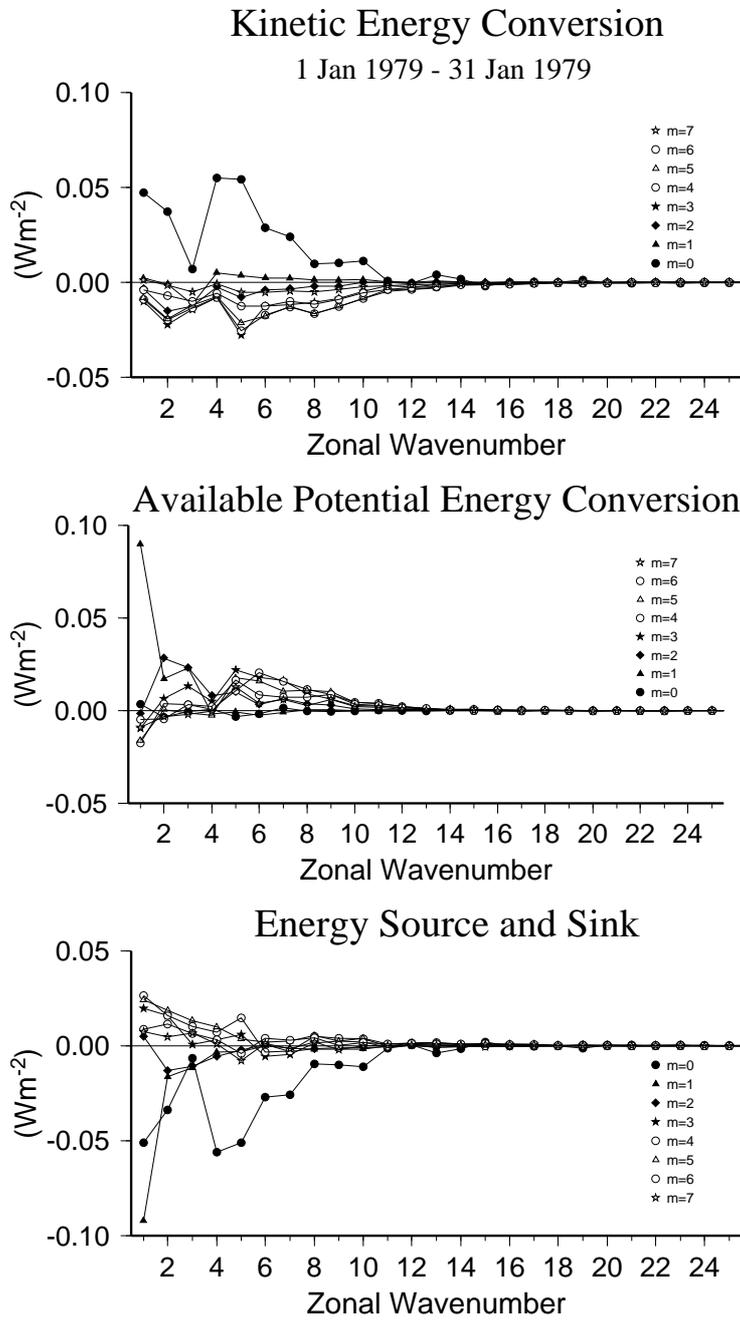


図 15 鉛直モード領域における $m = 0$ から $m = 7$ までのエネルギー相互作用。上から順に運動エネルギー、有効位置エネルギー、そしてエネルギー生成項、消散項の相互作用の図である。

Kinetic Energy Conversion

1 Jan 1979 -- 31 Jan 1979

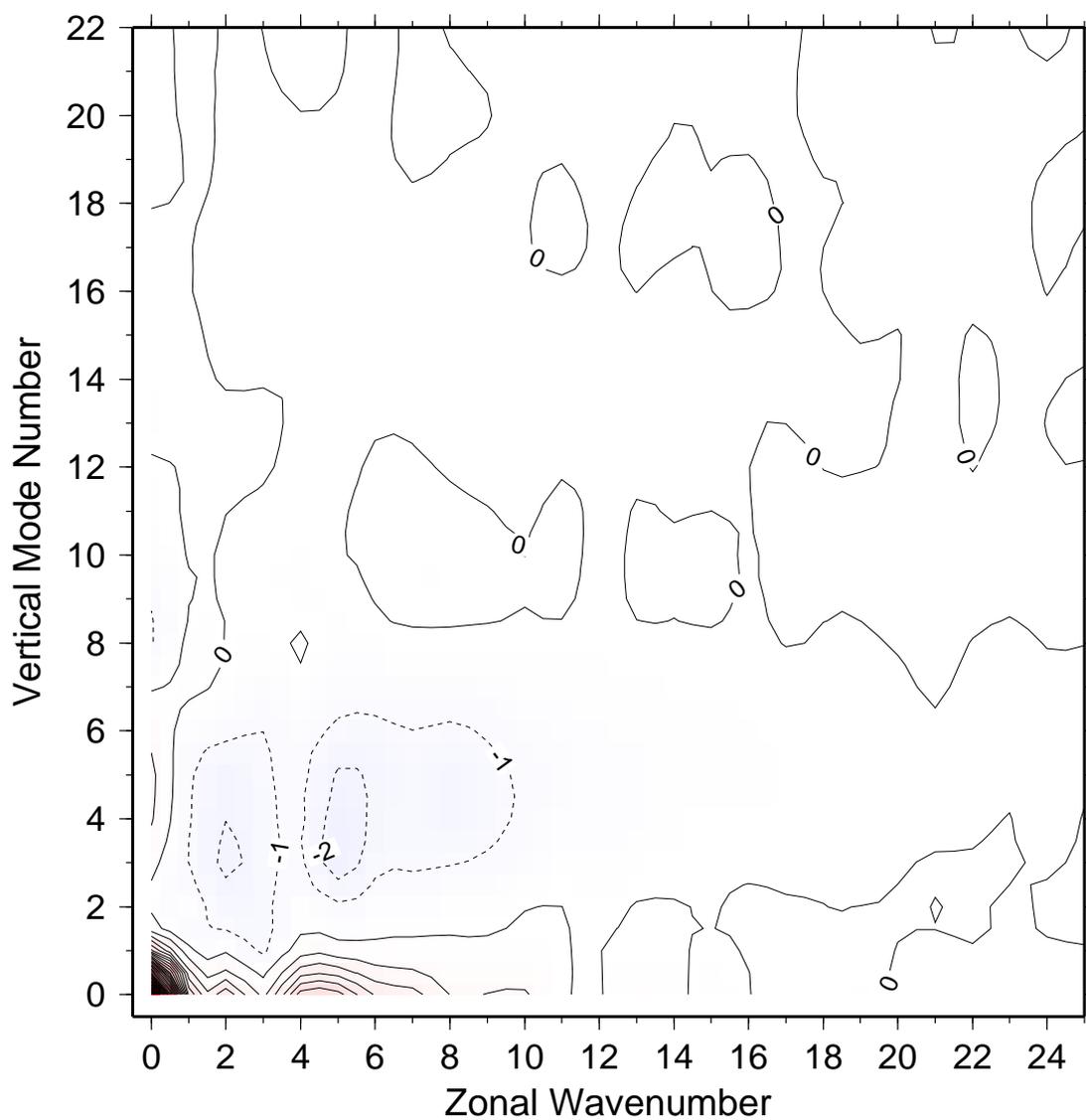


図 16 東西波数-鉛直モード領域における運動エネルギーの相互作用。(Unit : 10^{-2}W/m^2)

Available Potential Energy Conversion

1 Jan 1979 -- 31 Jan 1979

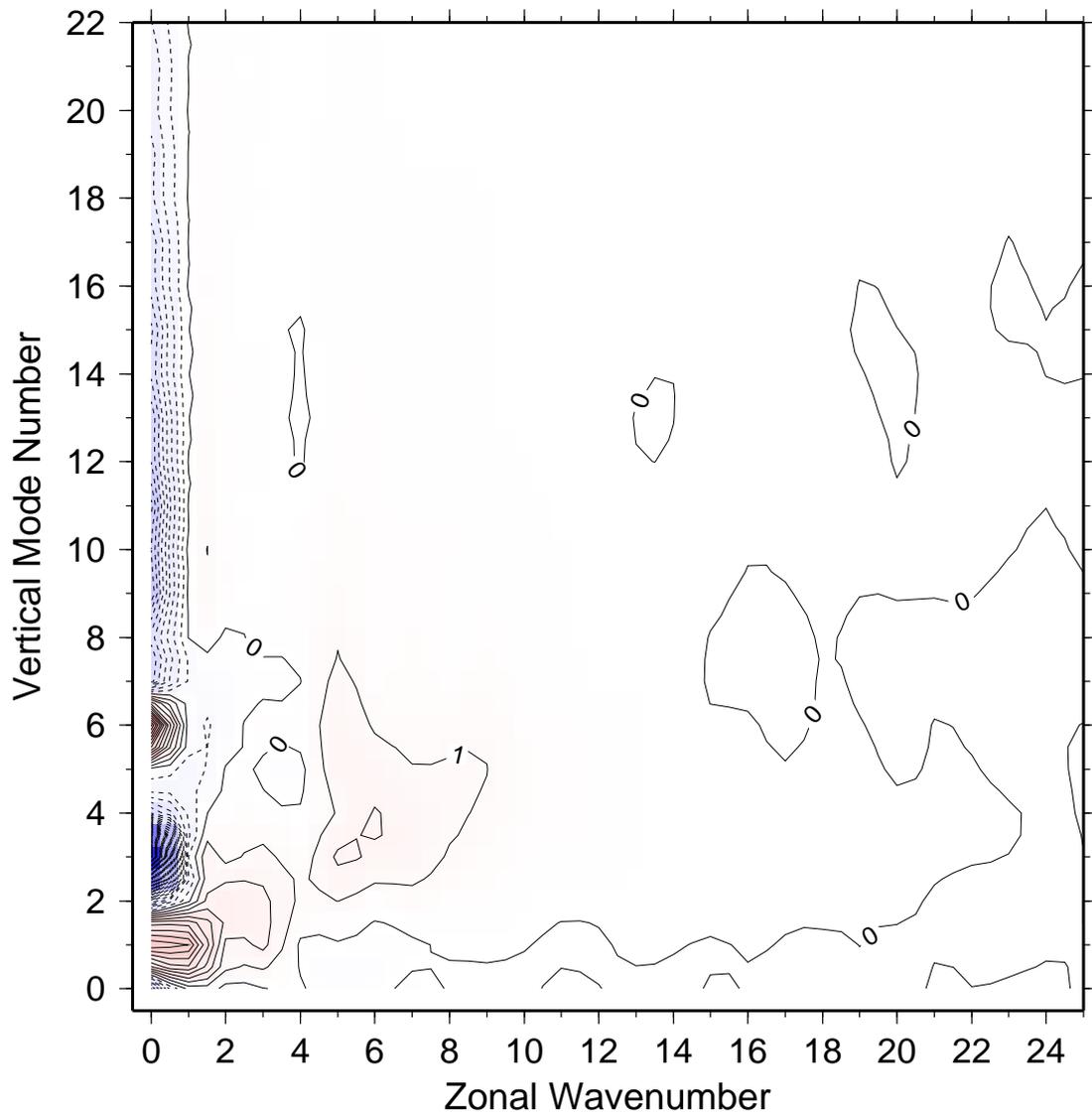


図 17 東西波数-鉛直モード領域における有効位置エネルギーの相互作用。(Unit : 10^{-2}W/m^2)

Energy Source and Sink

1 Jan 1979 -- 31 Jan 1979

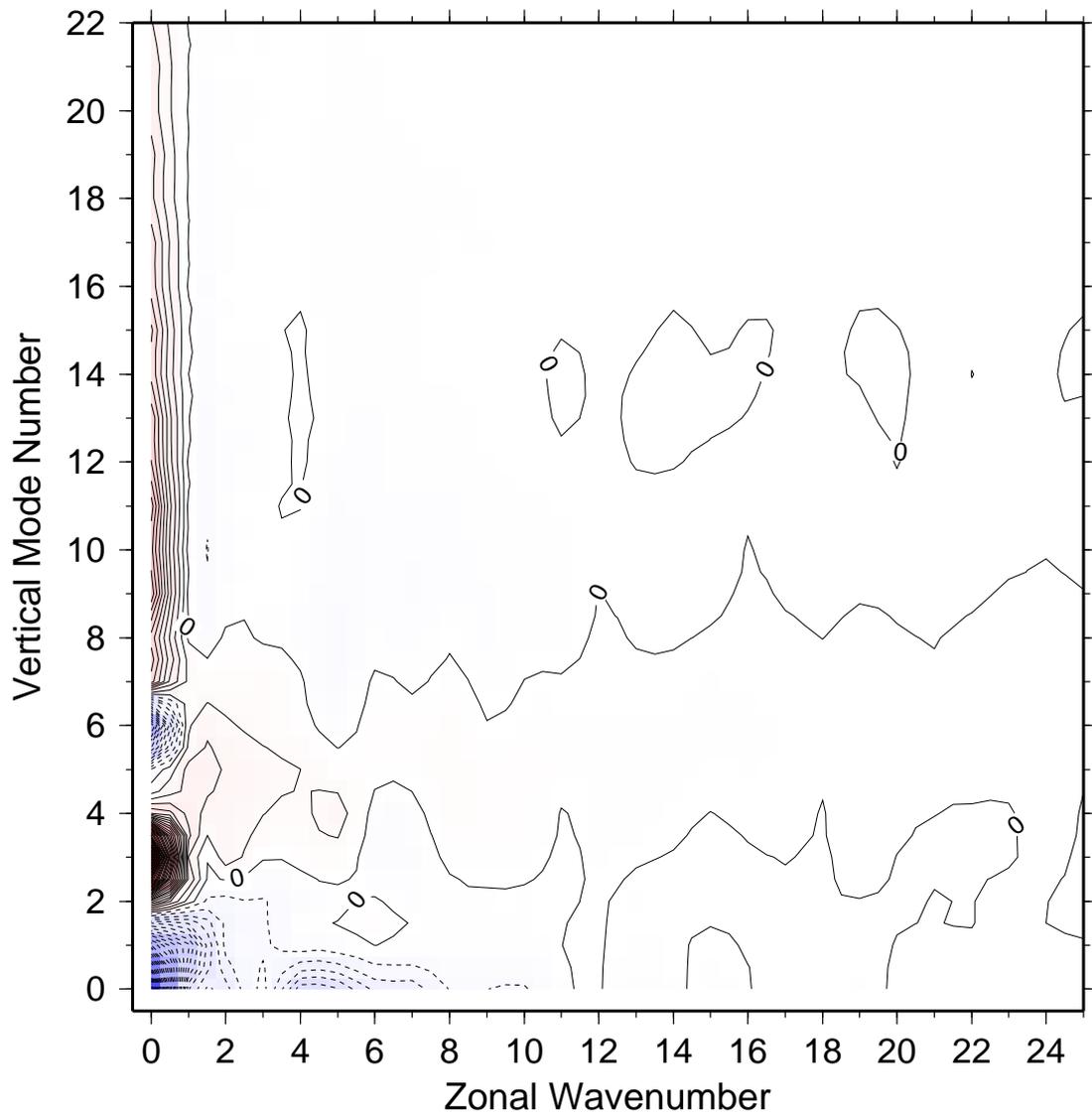


図 18 東西波数-鉛直モード領域におけるエネルギー生成項と消散項の相互作用。
(Unit : $10^{-2}W/m^2$)