

平成 28 年度 卒業論文

筑波大学順圧 S-Model を用いた  
Kalman Filter と変分法  
及び Hybrid 法の同化性能比較実験

筑波大学生命環境学群地球学類

地球環境学主専攻

201310764

栗花卓弥

2017 年 1 月

# 目次

目次	i
要旨	iii
Abstract	v
図目次	vii
1 はじめに	1
2 目的	4
3 実験概要	5
3.1 線形浅水方程式	5
3.1.1 線形浅水モデルにおける性能実験	5
3.1.2 線形浅水モデルにおける B の変化実験	5
3.1.3 線形浅水モデルにおける Hybrid の性能実験	6
3.1.4 線形浅水モデルにおける KF による背景誤差の構造	6
3.2 S-Model	6
3.2.1 S-Model における性能実験	6
3.2.2 S-Model における B の変化実験	7
3.2.3 Hybrid の混合比実験	7
3.2.4 自己適応型 B 性能実験	7
3.2.5 S-Model における 背景誤差共分散の構造	8
3.3 線形浅水モデル	9
3.3.1 線形浅水方程式系	9
3.4 基礎方程式系	10
3.4.1 プリミティブ方程式系	10
3.4.2 線形化と変数分離	14
3.4.3 鉛直構造関数	16
3.4.4 水平構造関数	19
3.4.5 3次元ノーマルモード展開	22
3.4.6 大気の順圧成分の抽出	24
3.4.7 順圧 S-Model	24

<b>4</b>	<b>データ同化手法</b>	<b>27</b>
4.1	Kalman Filter . . . . .	27
4.1.1	予報方程式 . . . . .	27
4.1.2	解析方程式 . . . . .	29
4.1.3	カルマンゲイン . . . . .	29
4.1.4	Inflation . . . . .	30
4.2	変分法 . . . . .	31
4.2.1	3DVar . . . . .	31
4.2.2	KF と 3DVar の解析解の関係 . . . . .	32
4.2.3	4DVar . . . . .	33
4.2.4	Quasi-Newton method . . . . .	35
<b>5</b>	<b>結果</b>	<b>37</b>
5.1	線形浅水方程式 . . . . .	37
5.1.1	線形浅水モデルにおける性能実験 . . . . .	37
5.1.2	線形浅水モデルにおける B の変化実験 . . . . .	38
5.1.3	線形浅水モデルにおける Hybrid の性能実験 . . . . .	39
5.1.4	線形浅水モデルにおける KF による背景誤差の構造 . . . . .	40
5.2	S-Model . . . . .	41
5.2.1	S-Model における性能実験 . . . . .	41
5.2.2	S-Model における B の変化実験 . . . . .	42
5.2.3	Hybrid の混合比実験 . . . . .	45
5.2.4	自己適応型 B 性能実験 . . . . .	46
5.2.5	S-Model における 背景誤差共分散の構造 . . . . .	49
<b>6</b>	<b>考察</b>	<b>50</b>
6.1	KF と変分法 . . . . .	50
6.2	Hybrid 化の影響 . . . . .	52
<b>7</b>	<b>結論</b>	<b>54</b>
	謝辞	56
	参考文献	57

# 筑波大学順圧 S-Model を用いた Kalman Filter と変分法 及び Hybrid 法の同化性能比較実験

栗花 卓弥

## 要旨

現在のデータ同化研究で最も注目されているテーマの 1 つが Hybrid 法による同化性能の向上の研究である。この Hybrid 同化法では、Ensemble Kalman Filter (EnKF) 内のアンサンブル予報によって作成された背景誤差共分散を 3 次元変分法 (3DVar) や 4 次元変分法 (4DVar) へ渡し、両手法を融合させている。しかし、アンサンブル予報は時として全アンサンブルが的外れな予報をして全滅し予報精度が安定しない欠点がある。本研究ではアンサンブル予報を用いている EnKF ではなく Kalman Filter (KF) と Hybrid 化させた Hybrid 同化システムを筑波大学順圧スペクトル大気大循環モデル (S-Model) のパーフェクトモデル環境下で実装し実験を行った。S-Model はモデルの次元数が比較的少なく KF を搭載できる。モデル次元数が低く抑えられたことで、一般的な大気大循環モデル (GCM) では計算資源が膨大で KF を実行できない問題を避けることができた。

実験結果としては、順圧高度場の解析値の真値からの誤差を検証すると、Hybrid-3DVar、及び Hybrid-4DVar はそれぞれの Hybrid させていない手法と比較し誤差が低くなった。また、それらの二乗平均平方根誤差 (RMSE) の値も低下した。これらの結果から、低解像度の GCM では KF との Hybrid 化も同化精度の向上に貢献することが示された。

さらに、本研究では同時に、3DVar、4DVar の同化性能に背景誤差共分散が与える影響、及び Hybrid 化の配合率についても注目して実験を行った。適正な大きさの背景誤差共分散値は同化システムにおいて良好な同化結果を出すにあたり重要なパラメータの 1 つである。しかし、先行研究においては KF との Hybrid 化は前例がほとんどなく、最適な背景誤差共分散は評価されていない。そこで、ここでは変分法及び Hybrid 化で KF によって与えられる適正な背景誤差共分散値を検証する。

背景誤差共分散に関する実験の結果として、100 時間ほど KF を走らせて作成した背景誤差共分散が最良な背景誤差共分散値であることが明らかとなった。Hybrid 同化システムでは、固定値として KF から与えた背景誤差共分散と流れ依存な背景誤差共

分散を同率で混ぜたものが、両変分法を総合して考慮した際に最適な配合率となった。

キーワード: 背景誤差共分散 , 4DVar, Hybrid , Kalman Filter, 3DVar

# **A Comparison of Kalman Filter, Variational Assimilation Methods and their Hybrids in a Barotropic General Circulation Model**

**Takuya Kurihana**

## **Abstract**

The effect of hybrid data assimilation (hybrid-DA) method becomes one of the cutting edge research trends in the recent DA field. Especially given that ensemble forecasting within hybrid-DA system, Ensemble Kalman Filter (EnKF) provides the background error covariance for three dimensional data assimilation (3DVar) and four dimensional data assimilation (4DVar). Meanwhile, the predictability of ensemble forecasting sometimes could be deteriorated. This research, however, runs these hybrid-DA methods by coupling Kalman Filter (KF) in the spectral barotropic general circulation model in University of Tsukuba, called S-model, under the perfect model configuration. The S-model enables to implement KF because of the relatively lower dimension of model parameter, which avoids the extremely expensive computational cost of KF in a typical general circulation model (GCM).

As a result, according to the difference between truth and analysis of barotropic height, the performance of hybrid-3DVar and hybrid-4DVar was higher than that of non-hybrid-DA methods. Root mean square error of these hybrid methods also showed smaller. Following these consequences, hybrid with KF could also work well in lower dimensional GCM.

In addition, this research concurrently focused on the influence of background error covariance matrix to 3Dvar, 4DVar and proportion of the hybrid rate for hybrid-DA methods. An appropriate background error covariance has been regarded as one of the key parameters for the good performance of assimilation system. However, prior studies did not verify the best combination of the covariance matrix given by KF due to the aforementioned model related problems. Hence, this paper proposed suitable DA running conditions.

Consequently, the covariance matrix, which was made by approximately 100 hours' KF running, was able to estimate the optimal background error. In hybrid-DA, the

equal ratio between a fixed background error covariance and flow dependent one was concluded as the best mixed rate.

**Key Words:** Background error statistics , 4DVar, Hybrid , Kalman Filter, 3DVar

## 目 次

1	線形浅水方程式モデルでの性能実験 . . . . .	60
2	線形浅水方程式モデルでの B の変化実験 . . . . .	61
3	線形浅水方程式モデルでの Hybrid 実験 . . . . .	62
4	線形浅水方程式モデルでの背景誤差共分散行列の構造 . . . . .	63
5	線形浅水方程式モデルでの背景誤差共分散行列の構造 . . . . .	64
6	S-Model での KF の性能実験 . . . . .	65
7	S-Model での KF によるトラジェクトリー . . . . .	65
8	S-Model での KF による順圧高度場の解析誤差の空間分布 . . . . .	67
9	S-Model での 3DVar の性能実験 . . . . .	68
10	S-Model での 3DVar によるトラジェクトリー . . . . .	68
11	S-Model での 3DVar による順圧高度場の解析誤差の空間分布 . . . . .	70
12	S-Model での 4DVar の性能実験 . . . . .	71
13	S-Model での 4DVar によるトラジェクトリー . . . . .	71
14	S-Model での 4DVar による順圧高度場の解析誤差の空間分布 . . . . .	73
15	S-Model での 3DVar の B (KF 0 時間目) 変化実験 . . . . .	74
16	S-Model での 3DVar の B (KF 0 時間目) によるトラジェクトリー . . . . .	74
17	S-Model での 3DVar (KF = 0) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 . . . . .	76
18	S-Model での 3DVar の B (KF 6 時間目) 変化実験 . . . . .	77
19	S-Model での 3DVar の B (KF 6 時間目) によるトラジェクトリー . . . . .	77
20	S-Model での 3DVar (KF = 6) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 . . . . .	79
21	S-Model での 3DVar の B (KF 30 時間目) 変化実験 . . . . .	80
22	S-Model での 3DVar の B (KF 30 時間目) によるトラジェクトリー . . . . .	80
23	S-Model での 3DVar (KF = 30) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 . . . . .	82
24	S-Model での 3DVar の B (KF 60 時間目) 変化実験 . . . . .	83
25	S-Model での 3DVar の B (KF 60 時間目) によるトラジェクトリー . . . . .	83
26	S-Model での 3DVar (KF = 60) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 . . . . .	85
27	S-Model での 3DVar の B (KF 300 時間目) 変化実験 . . . . .	86
28	S-Model での 3DVar の B (KF 300 時間目) によるトラジェクトリー . . . . .	86
29	S-Model での 3DVar (KF = 300) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 . . . . .	88
30	S-Model での 3DVar の B (KF 702 時間目) 変化実験 . . . . .	89
31	S-Model での 3DVar の B (KF 702 時間目) によるトラジェクトリー . . . . .	89
32	S-Model での 3DVar (KF = 702) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 . . . . .	91

33	S-Model での 4DVar の B (KF 0 時間目) 変化実験 . . . . .	92
34	S-Model での 4DVar の B (KF 0 時間目) によるトラジェクトリー . . .	92
35	S-Model での 4DVar (KF = 0) による順圧高度場の解析誤差の空間分布	94
36	S-Model での 4DVar の B (KF 6 時間目) 変化実験 . . . . .	95
37	S-Model での 4DVar の B (KF 6 時間目) によるトラジェクトリー . . .	95
38	S-Model での 4DVar (KF = 6) による順圧高度場の解析誤差の空間分布	97
39	S-Model での 4DVar の B (KF 30 時間目) 変化実験 . . . . .	98
40	S-Model での 4DVar の B (KF 30 時間目) によるトラジェクトリー . .	98
41	S-Model での 4DVar (KF = 30) による順圧高度場の解析誤差の空間分布	100
42	S-Model での 4DVar の B (KF 60 時間目) 変化実験 . . . . .	101
43	S-Model での 4DVar の B (KF 60 時間目) によるトラジェクトリー . .	101
44	S-Model での 4DVar (KF = 60) による順圧高度場の解析誤差の空間分布	103
45	S-Model での 4DVar の B (KF 300 時間目) 変化実験 . . . . .	104
46	S-Model での 4DVar の B (KF 300 時間目) によるトラジェクトリー . .	104
47	S-Model での 4DVar (KF = 300) による順圧高度場の解析誤差の空間分布	106
48	S-Model での 4DVar の B (KF 702 時間目) 変化実験 . . . . .	107
49	S-Model での 4DVar の B (KF 702 時間目) によるトラジェクトリー . .	107
50	S-Model での 4DVar (KF = 702) による順圧高度場の解析誤差の空間分布	109
51	S-Model での 3DVar (B 60 時間目) Hybrid 比実験 . . . . .	110
52	S-Model での 3DVar (B 102 時間目) Hybrid 比実験 . . . . .	110
53	S-Model での 4DVar (B 60 時間目) Hybrid 比実験 . . . . .	111
54	S-Model での 4DVar (B 102 時間目) Hybrid 比実験 . . . . .	111
55	S-Model での S4DVar の性能実験 . . . . .	113
56	S-Model での S4DVar (KF = 0) による順圧高度場の解析誤差の空間分布	114
57	S-Model での S4DVar (KF = 6) による順圧高度場の解析誤差の空間分布	115
58	S-Model での S4DVar (KF = 30) による順圧高度場の解析誤差の空間分布	116
59	S-Model での S4DVar (KF = 60) による順圧高度場の解析誤差の空間分布	117
60	S-Model での S4DVar (KF = 102) による順圧高度場の解析誤差の空間 分布 . . . . .	118
61	S-Model での S4DVar (KF = 300) による順圧高度場の解析誤差の空間 分布 . . . . .	119
62	S-Model での S4DVar (KF = 702) による順圧高度場の解析誤差の空間 分布 . . . . .	120
63	S-Model での背景誤差共分散行列の構造 . . . . .	121

64	S-Model での背景誤差共分散行列の構造 . . . . .	122
----	----------------------------------	-----

# 1 はじめに

近年の急速な計算機の発展は、気象学の分野において数値予報の急激な成長をもたらした。より精度の高い予報計算を行うにあたって、数値計算のために最適な初期値の作成が重要となる。そこで、モデルの第一推定値と観測値からより精度の高い解析値を計算し予報計算を行い、より正確な予報を得ることが望まれる。気象予測へより良い橋渡しをするための手法がデータ同化である。

データ同化の原理は、不完全な予報モデルによる予報値を、観測値を取り込むことで補正することにある。これは、第一推定値、観測値ともに含む任意の誤差をデータ同化手法によって最小化・最適化し、誤差が少ない解析値を導くということである。このデータ同化の原理を追求するには、1 つには最小分散推定、もう1 つに最尤推定というアプローチがあり、それぞれ後に説明するカルマンフィルターと変分法の基本的な考え方になっている。最小分散推定とは、解析値が変数の重みを考慮した線形結合で表せられるとき、これら変数の誤差共分散を最小とする重みを求めて、誤差を最小化させる手法である。一方で、最尤法は変数の確率密度分布を考慮した際、それらの確率の積で表された尤度関数が最大となる変数を求め、それが求める解析値になるという手法である。

気象学におけるデータ同化の歴史を遡ると、Eliason (1954) と Gandian (1963) において最小分散推定の考え方を基本とし、重みを経験的に与えるのではなく、解析値の誤差を最小とするように与えて最適な解析値を求める最適内挿法 (Optimal Interpolation : OI) を実施しデータを補正するという提案から始まった。また Charney (1969) によって、観測された気温や風のデータを用いて、データによる時空間的な補正が可能であるという提案もデータ同化の原点と言われている。その後、1980年代以降、変分法やカルマンフィルターの研究に力が注がれるようになった。しかし、計算機の性能が未熟で限界が存在したため、実際に変分法やカルマンフィルターが本格的に研究されるに至ったのは1990年代後半以降である(露木 2002)。

現在のデータ同化においては、Kalman (1960) によって提唱された Kalman Filter (KF) を大気システム向けに応用した Ensemble Kalman Filter (EnKF) (Evensen 1994) と 4 Dimensional Variational Assimilation (4DVar) (Lewis and Derber 1985, Courtier et al. 1994) が主流となっており、現業化を主眼に置いた手法改良の研究だけでなく、これらの手法の長所及び短所の比較研究も行われている (Kalnay et. al 2007)。多くの先行研究では、4DVar が EnKF と比較してフィルターダイバージェンスのような同化システムの破綻が発生せず安定して良好な同化結果を出していると結論付けられているが、高解像度モデルにおける EnKF やアンサンブル数を増やした EnKF は 4DVar

に匹敵する性能を示すと言われている (Kalnay et. al 2007)。本学独自のモデルである筑波大学順圧 S-Model (Tanaka 2003) においては、EnKF と KF を非線形にも対応するように近似した Extended Kalman Filter (EKF) の比較性能実験を行い、EnKF のアンサンブル数が 50 メンバー以上で良好な同化性能、100 メンバー以上で EnKF が理想的な同化法の EKF とほぼ同じ性能であることが示された (近藤 2007, Kondo 2009)。しかし、EKF を一般的な大気大循環モデル (以下 GCM と呼ぶ) での計算に適用する際には膨大な演算量という課題があり、現在の最高性能の計算機を用いても不可能である。これは行列計算の過程で、モデル格子点ごとに誤差共分散行列の演算で大量の記憶容量が、さらに逐次計算の際の行列積に膨大な演算回数が必要となるためである。そのため、EKF と主流な同化手法との比較研究は非常に少ない (Zhang and Malanotte 2003, Kondo 2009)。しかし、順圧 S-Model の次元数はせいぜい 410 次元であるため、一般的な GCM と比較すると変数が少なく、計算コストが低く抑えられるため EKF の実験が可能である。他方、4DVar も良質な同化性能を提供することと引き換えに、開発難易度と計算機コストが高いという欠点がある。前者については、特に非線形モデルでのアジョイントコードの作成が容易ではないという難点である。後者については、最適化の過程において多数の反復計算と大規模な記憶容量によって計算機コストが膨大になってしまう点である。この様に、データ同化は計算機性能に大きく依存する。

近年、前述した EnKF と 4DVar を融合発展させた Hybrid 法 (Hybrid-3DVar, Hybrid-4DVar / E4DVar) (Hamill and Snyder 2000, Zhang 2008) が GCM に搭載され予報の向上に貢献している。この手法は、EnKF のアンサンブル予報を一定混ぜることで背景誤差共分散 (以下 B と呼ぶ) をより適切に与え、Hybrid しない同化手法と比較し精度が向上している (Jonathan and Zhang 2015)。従来の 3DVar や 4DVar の B は、気候値や一定期間の統計値が用いられたが、背景場の流れを良く反映させられない問題を抱えていた。しかし、EnKF がアンサンブル予報によって作成する B は、作成時点での大気場をよく反映しているため、任意の割合で統計の B と混ぜて背景誤差共分散行列を作成することで同化性能が向上することが広く知られている。統計とアンサンブルの比率は使用するモデルによっても異なるが、一般的には 5 : 5 の比率で統計の B とアンサンブルによる B が合わせられている。しかし、最良な配合率については依然として確固たる結果は出ていない。この半分半分の比率は、統計的な B によって大気場の平均的な背景誤差をベースで与えつつ、流れ依存性をもつ背景誤差共分散を同等に考慮し、安定して同化サイクルを回すことが意図されている。

このように、様々なデータ同化手法が生み出され改良されてきたが、計算機の性能が飛躍的に向上した現在でさえ KF を GCM で実行することは不可能とされている。この理想的な同化性能と比較し、現状において精度が高い 4DVar 並びに Hybrid-4DVar は

どの程度の同化性能を示すのか未だかつてほぼ研究がなされていない。ましてや、KFとのハイブリットなどは現業研究が多くを占める気象学におけるデータ同化研究の中では前例がないに等しい。

## 2 目的

本研究の目的は、近藤 (2007)、Kondo(2009) において順圧 S-Model を用いたデータ同化手法の比較実験で行われていない双璧する同化手法である変分法系の 3DVar、4DVar、そして 2 つの融合型の Hybrid 法での性能実験を行い、KF と比較してそれらの同化手法がどの程度の同化結果を示すのか、また KF との Hybrid による同化性能への影響はどの程度なのかという 2 点を検証することである。

この実験に先立ち、まず変分法のデータ同化手法を開発する必要がある。そのため、準備段階としてモデルの次元数が 3 の線形浅水方程式 (Daley 1991) においてこれらの手法の開発及び、基礎的な実験を実施し性能を確認する。この浅水方程式は、従属変数  $(u, v, \phi)$  をノーマライゼーションし、ある波数のある 1 点における 3 成分の時間変化を表現したモデルである。上記のような極めて簡易的な物理モデルにおいても、多くの先行研究と同様の同化結果の傾向が現れるか検証することも目的の 1 つである。

最終的にデータ同化手法の比較実験を行う S-Model は、従属変数  $(u, v, \phi)$  を 3 次元ノーマルモード展開した展開係数  $w$  で表され、順圧成分のみを考慮に入れた順圧プリミティブスペクトルモデルである。東西波数を 20, 南北波数を 10 で切断しているので、前述のようにモデルの次元の数は 410 と、次元数が 1 万を超える一般的な GCM よりも抑えられている特徴がある。本研究によって、現在の主要なデータ同化手法を一通り本モデルに搭載し実行したことになる。よって S-Model でのデータ同化手法間の検証も併せて行う。

これらのモデルは KF を直接計算可能という利点があるため、この特徴を考慮し EnKF のアンサンブル計算によって求められる背景誤差共分散ではなく、KF が生成した背景誤差共分散行列を使用し Hybrid 化を行った。背景誤差共分散の Hybrid 化の比率を調べ、背景誤差共分散行列がデータ同化の中で及ぼす影響についても研究する。また背景誤差共分散の構造についても同時に調べる。

### 3 実験概要

実験概要としては、本研究では前述の 2 つの物理モデルを使用し、各同化手法の性能の検証、変分法系の手法における背景誤差共分散行列の同化への影響、及び Hybrid 同化法を使用した際の同化の向上を、KF を理想として指標とした際に、どの程度近づくか比較実験を行う。理想的な大気場でのデータ同化実験を行うため、本実験の両モデルともパーフェクトモデルで行った。線形浅水方程式では、モデルの値を真値とし、そこに正規分布の誤差を 10 パーセント加えた疑似観測値を作成し実験を行った。S-Model も同様に、1950 年 1 月 1 日 00UTC を初期値とした 50 年間の順圧 S-Model の予報値を真値とした。この真値に観測誤差相当のノイズを推定し (Tanaka and Nohara 2001)、これを適当な観測誤差として加え疑似観測を作成した。

両モデルに搭載した KF は、線形浅水方程式ではインフレーションを考慮せず、S-Model では考慮した。3DVar、4DVar、Hybrid-3DVar、Hybrid-4DVar、Self-Adaptive 4DVar (後述) の降下法には準ニュートン法系の記憶制限準ニュートン法 (L-BFGS 法) を採用した。

#### 3.1 線形浅水方程式

##### 3.1.1 線形浅水モデルにおける性能実験

線形浅水方程式 (Daley 1991) に搭載する 3DVar、4DVar が開発されていないため、これらを開発する。その後、同化サイクル 2 時間、疑似観測データ作成間隔 2 時間で回した KF で B を与える。この時事前に KF を回し、KF が良く収束した 33 時間目の背景誤差共分散行列を変分法の固定値 B とする。基礎実験として同化間隔 6 時間、疑似観測データ作成間隔 1 時間で 6000 時間ラン (250 日間) を行い 3 手法の基本的な性能を検証する。

##### 3.1.2 線形浅水モデルにおける B の変化実験

変分法では評価関数を導入し、第一推定値と解析に含まれる誤差、観測と解析にある誤差を B と観測誤差行列 R で重み付けして最小化する。そのため、背景誤差共分散行列がデータ同化へ与える影響は同化性能を左右する核である (Derber 1998, Bannister 2008, Haben et al. 2011)。この実験においては、様々な背景誤差共分散行列を作成しそれを B として、3DVar、4DVar が B によってどの程度同化性能に違いが現れるか調べる。与える KF の背景誤差共分散行列は、1 時間目 (ファーストラン)、7 時間目、31

時間目、61 時間目、103 時間目、301 時間目、703 時間目のものとする。同化実験の環境としては、同化間隔 6 時間、疑似観測データ作成間隔 1 時間で 6000 時間ラン (250 日間) のもと行う。

### 3.1.3 線形浅水モデルにおける Hybrid の性能実験

適切な背景誤差共分散行列を変分法の B に与えると同化精度、収束ともに向上することは広く知られており、これを実現する 1 つの方法として、KF または EnKF から毎回または任意の同化サイクルごとに背景誤差共分散行列を引き渡し、それをもって 3DVar、4DVar を走らせる Hybrid 同化法が挙げられる。ここでは、この Hybrid 化を施し同化精度と収束の性能を KF や Hybrid 化していないものと比較する。同化実験の環境は前述の実験度同様、同化間隔 6 時間、疑似観測データ作成間隔 1 時間で 6000 時間ラン (250 日間) のもと行う。通常はハイブリットの比率は、統計値：流れ依存の値を 1：1 で行っているものが多いが、線形浅水方程式のモデル実験では組み合わせパターンは一律で、KF からの背景誤差共分散行列のみをハイブリットさせている。つまり 0：1 である。これは KF からの背景誤差共分散行列の影響について強調するためである。

### 3.1.4 線形浅水モデルにおける KF による背景誤差の構造

本節では、KF によって作成された  $3 \times 3$  の背景誤差共分散行列の行列構造を打ち出し、それらの変化を調べ、前節までの同化性能の結果と比較し、B の構造と同化性能の関係について検証する。

## 3.2 S-Model

### 3.2.1 S-Model における性能実験

3DVar、4DVar は順圧 S-Model では開発されていないため、まずこれらを開発する。その後、同化実験の設定として、1950 年 1 月 1 日 00 UTC をスタートとして 1950 年 1 月 31 日 18 UTC まで同化間隔 6 時間、疑似観測データ作成間隔 1 時間で 1 か月ラン (744 時間) を行い全手法の S-Model での同化性能を検証する。

### 3.2.2 S-Model における B の変化実験

線形浅水方程式での実験同様、任意の時間の KF が作成した背景誤差共分散行列を変分法の B として同化をし、S-Model におけるデータ同化実験でどの程度同化性能に違いがみられるか調べる。同化実験の初期値は 1950 年 1 月 1 日 00 UTC とし同化間隔 6 時間、疑似観測データ作成間隔 1 時間で 1 か月ランを行う。KF から与える背景誤差共分散行列は、同様の時間間隔として 0 時間目 (ファーストラン)、6 時間目、30 時間目、60 時間目、102 時間目、300 時間目、702 時間目とする。

### 3.2.3 Hybrid の混合比実験

3DVar、4DVar を Hybrid 化した際に、固定した B と KF によって作成される背景場を考慮した B の Hybrid を混ぜる割合を変化させて同化性能を検証する。同化実験の初期値は 1950 年 1 月 1 日 00 UTC とし同化間隔 6 時間、疑似観測データ作成間隔 1 時間で 1 か月ランを行う。B の配合率は、固定の B と流れを反映した B を 4:1、1:1、1:4、0:1 で混ぜ込んだものを実験する。

### 3.2.4 自己適応型 B 性能実験

線形モデルを仮定した際の 4DVar は、評価関数を解析的に解くと、B をモデル演算子で挟み込み背景場の影響を B に伝えている。

これは以下のように導ける。

まず、 $d_t = y_t - \tilde{\mathbf{H}}_t(x_i^f)$ 、 $\tilde{\mathbf{H}}_t(x_i) = \mathbf{H}_t(M^t(x_i))$ 、 $x_i^f = x_i + \delta x$  とおき  $i$  回目の同化の解析値について考えると、

$$\begin{aligned} J(x_i) &= \frac{1}{2} (x_i - x_i^f)^T \mathbf{B}^{-1} (x_i - x_i^f) \\ &\quad + \sum_{t=0}^T \frac{1}{2} (y_t - \tilde{\mathbf{H}}_t(x_i))^T \mathbf{R}_t^{-1} (y_t - \tilde{\mathbf{H}}_t(x_i)) \\ &= \frac{1}{2} (\delta x)^T \mathbf{B}^{-1} (\delta x) \\ &\quad + \sum_{t=0}^T \frac{1}{2} (d_t - \tilde{\mathbf{H}}_t(\delta x))^T \mathbf{R}_t^{-1} (d_t - \tilde{\mathbf{H}}_t(\delta x)) \end{aligned} \tag{1}$$

次に、簡単のため、観測が同化ウィンドウ内で 1 つだけしかないとする。この条件の下で 1 の勾配をとれば、

$$\begin{aligned}\nabla J(\delta x) &= \mathbf{B}^{-1}(\delta x) - \tilde{\mathbf{H}}_t^T \mathbf{R}_t^{-1}(d_t - \tilde{\mathbf{H}}_t(\delta x)) = 0 \\ \mathbf{B}^{-1}(\delta x) - \mathbf{M}_t^T \mathbf{H}_t^T \mathbf{R}_t^{-1}(d_t - \mathbf{H}_t \mathbf{M}_t(\delta x)) &= 0 \\ \delta x &= (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{M}_t^T \mathbf{H}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{H}_t \mathbf{M}_t)^{-1} \mathbf{M}_t^T \mathbf{H}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} d_t\end{aligned}\quad (2)$$

これは、KF と 3DVar の解析解の関係の際のように次の形に変形できる。

$$\begin{aligned}\delta x &= \mathbf{B} \mathbf{M}_t^T \mathbf{H}_t^T (\mathbf{H}_t \mathbf{M}_t \mathbf{B} \mathbf{M}_t^T \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} d_t \\ x_i &= x_i^f + \mathbf{B} \mathbf{M}_t^T \mathbf{H}_t^T (\mathbf{H}_t \mathbf{M}_t \mathbf{B} \mathbf{M}_t^T \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} (y_t - \mathbf{H}_t \mathbf{M}_t(x_i^f))\end{aligned}\quad (3)$$

よって、 $i + 1$  番目の解析解は、片々に  $\mathbf{M}_t$  を掛けて

$$x_{i+1} = x_{i+1}^f + \mathbf{M}_t \mathbf{B} \mathbf{M}_t^T \mathbf{H}_t^T (\mathbf{H}_t \mathbf{M}_t \mathbf{B} \mathbf{M}_t^T \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} (y_t - \mathbf{H}_t(x_{i+1}^f))\quad (4)$$

となる。以上より、4 において 4DVar の解析解ではモデル演算子でもって背景場の影響を  $\mathbf{B}$  へ反映させていることがわかる。観測が 1 点のみの際は、このモデル演算子によって背景場を捉えるように  $\mathbf{B}$  は陽ではないが背景場へ射影され、流れ依存性を持つように改善された。通常は観測は複数個であるから、その際は複数のモデル演算子で挟み射影される。しかし、通常の 4DVar では、このようなモデル演算子、非線形モデルでは接線形演算子で背景場の影響を間接的に  $\mathbf{B}$  へ伝えて背景場へフィットさせているにも関わらず、この改善した状態で更新することはない。新型では、KF が背景誤差共分散行列を自己補正するように、 $\mathbf{M}_t \mathbf{B} \mathbf{M}_t^T$  で  $\mathbf{B}$  を置き換え 4DVar も同化ごとに自ら  $\mathbf{B}$  を自動適応・更新させるようにした。この新型の 4DVar を本実験では Self-Adaptive 4DVar / S4DVar と呼ぶこととする。

S-Model 自体は非線形効果を含む非線形モデルであるが、線形過程をしてモデル演算子でもって射影した。本節では、同化を繰り返すことで、一定値の  $\mathbf{B}$  で 4DVar を回す実験と比較し同化性能がどのように変化するか検証する。

### 3.2.5 S-Model における 背景誤差共分散の構造

3.1.4 節同様に、KF によって作成された  $410 \times 410$  の背景誤差共分散行列の成分を打ち出し構造を調べる。

### 3.3 線形浅水モデル

本研究は予報科学の基礎研究が念頭に置かれているため手法開発に重点がある。開発の第一段階として、線形浅水方程式で本実験で使用するデータ同化手法の開発を行い、簡易物理モデルでの性能実験を行った。使用した線形浅水モデルについては、後述の Daley (1991) Chapter 6、12、及び 13 を参考にした。

#### 3.3.1 線形浅水方程式系

Daley (1991) より、東西風  $u$ 、南北風  $v$ 、波の高さ  $h$  とすると浅水方程式系は以下の 3 式で表せられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (7)$$

ここで  $f$  はコリオリパラメータである。 $\beta$  面近似をすると  $\beta$  は  $\beta_0$  と置くことができ、5、6、7 は以下のように書き換えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f_0 v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f_0 u + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \tilde{\Phi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (10)$$

$\Phi$ 、 $\tilde{\Phi}$  はそれぞれとジオポテンシャル高度とその平均である。さらに、流線関数  $\psi$ 、速度ポテンシャル  $\chi$  の  $u$ 、 $v$  についての関係式

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \nabla^2 \chi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

を用いて 8、9、10 を式変形すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + f_0 \nabla^2 \chi = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \chi - f_0 \nabla^2 \psi + \nabla^2 \Phi = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi + \tilde{\Phi} \nabla^2 \chi = 0 \quad (13)$$

上記 11、12、13 を東西波数  $m$ 、南北波数  $n$ 、地球の半径をある定数  $a$  を用いて波動関数に規格化すると上式は、

$$\frac{d\hat{\psi}}{dt} + if_0 \hat{\chi} = 0 \quad (14)$$

$$i \frac{d\hat{\chi}}{dt} - f_0 \hat{\psi} + f_0 \sqrt{K} \hat{\Phi} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d\hat{\Phi}}{dt} - if_0 \sqrt{K} \hat{\chi} = 0 \quad (16)$$

以上の流線関数  $\psi$ 、速度ポテンシャル  $\chi$ 、ジオポテンシャル高度  $Phi$  についての 3 式が線形浅水モデルの基礎方程式系になる線形浅水方程式系である。

### 3.4 基礎方程式系

次に低次元の大循環スペクトルモデルである筑波大学順圧 S-Model においてデータ同化手法の開発及び実装を行った。以下の項では S-Model の根幹となるプリミティブ方程式系、鉛直構造関数、水平構造関数、そして 3 次元ノーマルモード展開について Tanaka (2003)、近藤 (2006)、小倉 (1978) などを中心として参考にし説明を行う。

#### 3.4.1 プリミティブ方程式系

プリミティブ方程式系は極座標表示の水平方向の運動方程式、熱力学方程式からなる予報方程式に加え質量保存則、状態方程式、静力学平衡の 6 式から構成される。

・水平方向の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega v \sin \theta + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = -\mathbf{V} \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial P} + \frac{\tan \theta}{a} uv + F_u \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega u \sin \theta + 1/a \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\mathbf{V} \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial P} - \frac{\tan \theta}{a} uv + F_v \quad (18)$$

・熱力学方程式

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot c_p T + \omega \frac{\partial c_p T}{\partial P} = \alpha \omega + Q \quad (19)$$

・質量保存則

$$\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0 \quad (20)$$

・状態方程式

$$P\alpha = RT \quad (21)$$

・静力学平衡近似式

$$\frac{\partial \omega}{\partial P} = -\alpha \quad (22)$$

上記の方程式系で用いられている記号は以下のとおり気象学で一般的に使用されているものである。

$\theta$ : 緯度	$\omega$ : 鉛直 $p$ 速度 ( $dp/dt$ )
$\lambda$ : 経度	$F_u$ : 東西方向の摩擦力
$p$ : 気圧	$F_v$ : 南北方向の摩擦力
$t$ : 時間	$Q$ : 非断熱加熱率
$u$ : 東西風速度	$\Omega$ : 地球の自転角速度 ( $7.29 \times 10^{-5}[\text{rad/s}]$ )
$v$ : 南北風速度	$a$ : 地球の半径 ( $6371.22[\text{km}]$ )
$\phi$ : ジオポテンシャル	$C_p$ : 定圧比熱 ( $1004[\text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}]$ )
$T$ : 気温	$R$ : 乾燥空気の気体定数 ( $287.04[\text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}]$ )
$\alpha$ : 比容	

Tanaka (1991) より、熱力学方程式 19 に質量保存則 20、状態方程式 21、静力学平衡近似式 22 を代入し基礎方程式系を従属変数  $(u, v, \phi)$  のそれぞれ変数についての予報方程式を立てることが可能である。気温  $T$  比容  $\alpha$ 、ジオポテンシャル  $\Phi$  を摂動法により、全球平均量を表す  $X_0$  とその摂動  $\acute{X}$  で表示すると

$$T(\theta, \lambda, P, t) = T_0(P) + \acute{T}(\theta, \lambda, P, t) \quad (23)$$

$$\alpha(\theta, \lambda, P, t) = \alpha_0(P) + \acute{\alpha}(\theta, \lambda, P, t) \quad (24)$$

$$\phi(\theta, \lambda, P, t) = \phi_0(P) + \acute{\phi}(\theta, \lambda, P, t) \quad (25)$$

さらに、21、22 も基本場と摂動の式に分ける。

〈基本場〉

$$p\alpha_0 = RT_0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial p} = -\alpha_0 \quad (27)$$

〈摂動場〉

$$p\acute{\alpha} = R\acute{T} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \acute{\phi}}{\partial p} = -\acute{\alpha} \quad (29)$$

これら 23 ~ 27 を熱力学方程式 19 に代入すると

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} + c_p \mathbf{V} \cdot \nabla T + c_p \omega \left( \frac{\partial T}{\partial P} - \frac{\alpha}{c_p} \right) = Q \quad (30)$$

式 24、25 を 30 へ代入し整理すると

$$\frac{\partial \acute{T}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \acute{T} + \omega \left( \frac{\partial T_0}{\partial P} - \frac{\alpha_0}{c_p} \right) + \omega \left( \frac{\partial \acute{T}}{\partial P} - \frac{\acute{\alpha}}{c_p} \right) = \frac{Q}{c_p} \quad (31)$$

$\alpha_0 = \frac{RT_0}{P}$ 、 $\acute{\alpha} = \frac{R\acute{T}}{P}$  であるから 27 に代入すると、

$$\frac{\partial \acute{T}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \acute{T} + \omega \left( \frac{\partial T_0}{\partial P} - \frac{RT_0}{Pc_p} \right) + \omega \left( \frac{\partial \acute{T}}{\partial P} - \frac{R\acute{T}}{Pc_p} \right) = \frac{Q}{c_p} \quad (32)$$

摂動が十分小さいから断熱変化項は無視でき、28 は、

$$\frac{\acute{T}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \acute{T} + \omega \left( \frac{\partial T_0}{\partial P} - \frac{RT_0}{pc_p} \right) + \omega \frac{\partial \acute{T}}{\partial P} = \frac{Q}{c_p} \quad (33)$$

また、左辺第3項目に関しては大気の静的安定度パラメータ  $\gamma$  を用いることができる (Tanaka 1985)。

$$\gamma(P) \equiv \frac{RT_0(P)}{c_p} - P \frac{dT_0(P)}{dp} \quad (34)$$

33 へ 34 を代入してまとめると

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \dot{T} - \frac{\omega \gamma}{P} + \omega \frac{\partial \dot{T}}{\partial P} = \frac{Q}{c_p} \quad (35)$$

続いて、28、29 より

$$\dot{T} = \frac{P'}{R} = -\dot{P}R \cdot \frac{\partial \phi}{\partial P} \quad (36)$$

よって、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{P}{R} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial P} \right) + \mathbf{V} \cdot \nabla \left( -\frac{P}{R} \frac{\partial \phi}{\partial P} \right) - \frac{\omega \gamma}{P} + \omega \frac{\partial}{\partial P} \left( -\frac{P}{R} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial P} \right) = \frac{Q}{c_p} \quad (37)$$

両辺に  $\frac{P}{\gamma}$  を掛けると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{P^2}{\gamma R} \frac{\partial \phi}{\partial P} \right) - \frac{P^2}{\gamma R} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial P} - \omega + \omega \frac{\partial}{\partial P} \left( -\frac{P}{\gamma R} \frac{\partial \phi}{\partial P} \right) = \frac{QP}{c_p \gamma} \quad (38)$$

さらに、質量保存則を考慮するために辺々  $P$  で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial P}{\partial P} \frac{P}{R} \frac{\partial \phi}{\partial P} \right) - \frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{P^2}{\gamma R} \dot{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial P} + \frac{\omega P}{\gamma} \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{P}{R} \frac{\partial \phi}{\partial P} \right) \right] - \frac{\partial \omega}{\partial P} \\ = \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{QP}{c_p \gamma} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

ここで質量保存則 20 を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial P}{\partial P} \frac{P}{R} \frac{\partial \phi}{\partial P} \right) + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} \\ = \frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{P^2}{\gamma R} \dot{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial P} + \omega \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{P^2}{\gamma R} \frac{\partial \phi}{\partial P} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{QP}{c_p \gamma} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

以上の操作より摂動ジオポテンシャルについての予報方程式が導出できた。これより、3つの従属変数  $(u, v, \phi)$  についての予報方程式を設定できた。

これらの予報方程式 17、18、40 からなるプリミティブ方程式は以下のように行列表示でまとめることができる (Tanaka 1991)。

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{N} + \mathbf{F} \quad (41)$$

ここで上記の変数は以下のような成分となる。

U : 従属ベクトル

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \quad (42)$$

M : 鉛直線形演算子

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial P} \frac{P^2}{\gamma R} \frac{\partial}{\partial P} \end{pmatrix} \quad (43)$$

L : 水平線形演算子

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \sin \theta & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ 2\Omega \sin \theta & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{a \cos \theta} & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial(\cdot) \cos \theta}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

N : 非線形項からなるベクトル

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial P} - \frac{\tan \theta}{a} uv \\ -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial P} - \frac{\tan \theta}{a} uv \\ \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{P^2}{\gamma R} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial P} + \frac{\omega P}{\gamma} \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{P}{R} \frac{\partial \phi}{\partial P} \right) \right) \end{pmatrix} \quad (45)$$

F : 外部強制項からなるベクトル

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_v \\ \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{PQ}{c_p \gamma} \right) \end{pmatrix} \quad (46)$$

### 3.4.2 線形化と変数分離

プリミティブ方程式系 41 は非線形連立微分方程式であるため、これを簡略化して解くため線形化 ( $\mathbf{N} = 0$ ) し、静止大気を基本場とし、外部からの力がないものとする

( $\mathbf{F} = 0$ )。 そうすると 41 式は

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (47)$$

ここで 47 は、変数ベクトル  $\mathbf{U} = \mathbf{G}_m(\mathbf{P}) \mathbf{U}_m(\lambda, \theta, t)$  のように鉛直方向のみに依存した関数  $G_m(P)$ 、水平方向のみに依存した関数  $\mathbf{U}_m(\lambda, \theta, t)$  に変数分離でき、これを 47 に代入すると、

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial p^2}{\partial p} \frac{\partial}{\gamma R} \frac{\partial}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} u_m(\theta, \lambda, t) G_m(p) \\ \frac{\partial}{\partial t} v_m(\theta, \lambda, t) G_m(p) \\ \frac{\partial}{\partial t} \phi_m(\theta, \lambda, t) G_m(p) \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 0 & -2\omega \sin \theta & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ 2\omega \sin \theta & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{a \cos \theta} & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_m(\theta, \lambda, t) G_m(p) \\ v_m(\theta, \lambda, t) G_m(p) \\ \phi_m(\theta, \lambda, t) G_m(p) \end{pmatrix} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

各成分を整理して見ると

< 第 1 成分 >

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - 2\omega \sin \theta \cdot v_m + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi_m}{\partial \lambda} = 0 \quad (49)$$

< 第 2 成分 >

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} - 2\omega \sin \theta \cdot u_m + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi_m}{\partial \theta} = 0 \quad (50)$$

< 第 3 成分 >

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{P^2}{\gamma R} \frac{\partial}{\partial P} \phi_m G_m(P) \right) + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} u_m G_m(P) \\ & \quad + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} v_m G_m(P) \cos \theta = 0 \\ & -\frac{\partial \phi_m}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial P} \frac{P^2}{\gamma R} \frac{\partial}{\partial P} G_m(P) \right) + \frac{G_m(P)}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{G_m(P)}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \\ & -\frac{1}{G_m(P)} \frac{\partial}{\partial P} \frac{P^2}{\gamma R} \frac{\partial}{\partial P} G_m(P) \\ & \quad + \frac{1}{\frac{\partial \phi_m}{\partial t}} \left( \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

51は、第1項が鉛直  $P$  のみの項、第2項が  $\lambda, \theta, t$  による水平項である。よって線形性を利用し、各項に分けてそれぞれ方程式を新たに立てる。各項は波の鉛直・水平変化を見ているので浅水方程式の概念から等価深度  $h_m$  を導入し、その逆数を分離定数として分けると

鉛直方向の関数は、

$$-\frac{\partial}{\partial P} \frac{P^2}{\gamma R} \frac{\partial}{\partial P} G_m(P) = \frac{1}{gh_m} G_m(P) \quad (52)$$

水平方向の関数は、

$$\frac{\partial \phi'_m}{\partial t} + gh_m \left( \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (53)$$

ここから、線形プリミティブ方程式から鉛直構造関数 52 と水平構造関数 53 が導けた。

### 3.4.3 鉛直構造関数

方程式を一般的に解く際には境界条件が必要である。鉛直構造関数では鉛直より、上下の境界条件を与えてやる。今、その境界条件を以下のように与える。

$$(u, v, w) = 0 \quad \text{at } P = P_s(\text{地表面}),$$

$$\frac{1}{P_s} \int_0^{P_s} \text{Kinetic } E + \text{Available Potential } E < \infty \quad (54)$$

この鉛直構造方程式 52 を簡略化し変形すると、

$$P^2 \frac{\partial^2}{\partial P^2} G_m(P) + 2P \frac{\partial}{\partial P} G_m(P) + G_m(P) = 0 \quad (55)$$

$$\left[ P^2 \frac{\partial^2}{\partial P^2} + 2P \frac{\partial}{\partial P} + 1 \right] G_m(P) = 0 \quad (56)$$

と変形でき、これを  $LG_m(P)$  と置く。

演算子  $L$  に対して随伴演算子  $\bar{L}$  を

$$\bar{L} = \frac{\partial^2}{\partial P} P^2 - \frac{\partial}{\partial P} 2P + 1 \quad (57)$$

と定義する。この  $\bar{L}$  は

$$\bar{L} = P^2 \frac{\partial^2}{\partial P^2} + [2(P^2)' - 2P] \frac{\partial}{\partial P} + P'' - 2P' + 1 \quad (58)$$

と書き直すことができ、これを計算すると 56 の  $L$  になる。つまり  $L = \bar{L}$  が成立し、自己付随演算子が計算でき、自己随伴 "adjoint" が証明できる。この adjoint の概念は後に述べる 4 次元変分法の根幹をなす概念である。以上のことから 55 を自己随伴形式で表現しなおすと

$$LG_m(P) = \bar{L}G_m(P) = \frac{\partial}{\partial P} P^2 \frac{\partial}{\partial P} G_m(P) + 2PG_m(P) \quad (59)$$

59 において、2 項目の  $2P$  を鉛直方向の変数と考えれば等価深度  $\frac{1}{gh_m}$  と置き換えて考えることができるので、52 はスツルム リウビル型 *Sturm - Liouville* 型の微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial P} P^2 \frac{\partial}{\partial P} G_m(P) + 2PG_m(P) + \lambda_m \rho(P) G_m(P) \quad (60)$$

に変形可能である。ここで、 $\rho(P)$  は連続関数で  $\rho(P) > 0$  である。また、 $\lambda_m$  はこの関数の固有値、 $G_m(P)$  は固有解である。

スツルム リウビル型微分方程式の境界値問題の性質として、相異なる固有値による固有関数は互いに直交関数系をなし、この自己随伴演算子の固有値はすべて実数である。

よって正規直交性から

$$\langle G_m(P), G_n(P) \rangle = \frac{1}{P_s} \int_0^{P_s} G_m(P) G_n(P) dP = \delta_{mn} \quad (61)$$

スツルム リウビル型の他の特徴として、デルタ関数は完全規格直交関数系  $G_m(P)$  によって次のように数学的に定義可能である。

$$\delta(P - \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle G_m(P), G_m(\xi) \rangle \quad (62)$$

ここから気圧  $P$  の任意の関数に対して、次の鉛直変換を導出できる ( $f_m$  : 第  $m$  モードでの鉛直変換係数)。

$$\begin{aligned} f(P) &= \sum_{m=0}^{\infty} \langle f_m G_m(P) \rangle \\ &= f_0 G_0(P) + f_1 G_1(P) + \dots + f_m G_m(P) \end{aligned} \quad (63)$$

両辺に  $G_m(P)$  を掛けて  $P$  について 0 から  $P_s$  まで積分することで内積を計算すると

$$\langle f(P), G_n(P) \rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} f_m G_m(P), G_n(P) \right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \langle G_m(P), G_n(P) \rangle \quad (64)$$

よって、 $G_m(P)$  の正規直交性をもちいてフーリエ係数の要領で考えると、

$$f_m = \frac{1}{P_s} \int_0^{P_s} f(P) G_m(P) dP \quad (65)$$

以上の鉛直変換を用いて変数ベクトル  $\mathbf{U}$  を展開すると、

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \quad : U \text{ は } \theta, \lambda, P, t \text{ の関数} \quad (66)$$

$$= \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \dot{\phi}_0 \end{pmatrix} G_0(p) + \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dot{\phi}_1 \end{pmatrix} G_1(p) + \cdots + \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ \dot{\phi}_m \end{pmatrix} G_m(p) + \cdots \quad (67)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ \dot{\phi}_m \end{pmatrix} G_m(p) \quad (68)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} U_m G_m(p) \quad : U_m \text{ は } \theta, \lambda, t \text{ の関数} \quad (69)$$

ここで展開係数は直交性より以下で得られる。

$$U_m = \langle \mathbf{U}, G_m(P) \rangle = \frac{1}{P_s} \int_0^{P_s} \mathbf{U} G_m(P) dP \quad (70)$$

因みに、添え字  $m$  は鉛直モードを意味し、

$m \geq 1$  : 傾圧モード (内部モード) ... 鉛直方向に波数  $m$

$m = 0$  : 順圧モード (外部モード) ... 鉛直方向に波数 0 の鉛直平均場

本実験で使用した順圧 S モデルは、この  $m = 0$  の順圧モードの時のみを考慮している。詳細は (Tanaka, 1985) 参照。

### 3.4.4 水平構造関数

鉛直方向に変数分離した後の、第  $m$  モードの時間・水平方向に関する方程式系の行列表示は

$$\mathbf{M}_m \frac{\partial \mathbf{U}_m}{\partial t} + \mathbf{L} \mathbf{U}_m = 0 \quad (71)$$

ここで等価深度の変換  $\frac{1}{gh_m}$  から、

$$\mathbf{M}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{gh_m} \end{pmatrix} \quad (72)$$

また、従属変数  $\mathbf{U}_m$  は

$$\mathbf{U}_m = \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ \phi_m \end{pmatrix} \quad (73)$$

ここで従属変数  $\mathbf{U}_m$  と方程式系全体に次元をもたせるために、以下のようなスケール行列  $\mathbf{X}_m$  と  $\mathbf{Y}_m$  を導入する。

$$\mathbf{X}_m = \begin{pmatrix} \sqrt{gh_m} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{gh_m} & 0 \\ 0 & 0 & gh_m \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$\mathbf{Y}_m = \begin{pmatrix} 2\omega\sqrt{gh_m} & 0 & 0 \\ 0 & 2\omega\sqrt{gh_m} & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega \end{pmatrix}$$

これらを用いて 71 の中に  $\mathbf{X}_m$  を互いを打ち消す合う形で登場させ、その後左辺に左から  $\mathbf{Y}_m^{-1}$  を掛ける変形をすると、

$$(\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) = 0 \quad (75)$$

ここで無次元時間  $\tau (\equiv 2\Omega t)$  を導入することにより微分演算子  $t$  を、 $\tau$  に変換できるので 75 は、ラプラス潮汐方程式と呼ばれる重力波とロスビー波を振動解にもつ以下の

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) = 0 \quad (76)$$

に変換できる。ここで、(Kasahara and Puri 1981)、(Kasahara 1978) によると水平構造関数である Hough harmonics (後述) を導入することで 76 を次のように変形できる。

$$\mathbf{U}_m(\lambda, \theta, \tau) = \mathbf{X}_m \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \exp(-i\omega_{nlm}\tau) \quad (77)$$

この式 77 を水平構造関数 76 に代入すると、

$$(\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) = i\omega_{nlm} \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \quad (78)$$

78 から、水平構造関数をは単純な固有値問題として扱うことが可能となった。ここで、

$H_{nlm}$  : 第  $m$  鉛直モードの水平自由振動を表し、 $n$  は東西波数、 $l$  は南北波数  
 $nlm$  : それぞれの振動モード  $n, l, m$  に対応する無次元固有振動数

水平構造関数であるハフ調和関数 (hough harmonics) とは、ハフベクトル  $\Theta_{nlm}$  と三角関数  $\exp(in\lambda)$  によって

$$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) = \Theta_{nlm}(\theta) \exp(in\lambda) \quad (79)$$

で表される。

南北方向のみで規定されるハフベクトル  $\Theta_{nlm}(\theta)$  は

$$\Theta_{nlm}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{nlm}(\theta) \\ -i\mathbf{V}_{nlm}(\theta) \\ \mathbf{Z}_{nlm}(\theta) \end{pmatrix} \quad (80)$$

であり、東西風  $\mathbf{U}(\theta)$ 、南北風  $-i\mathbf{V}(\theta)$ 、ジオポテンシャル高度  $Z(\theta)$  である。これは、東西風の波の山とジオポテンシャル高度の高い場所がある高気圧や低気圧周辺では、南北風の波の山は  $90^\circ$  分遅れてくる理論的根拠に寄る。

南北波数  $l$  に関しては、次の異なる 3 つのモードが存在する。

$$\begin{cases} l_r : \text{低周波の西進するロスビーモード} \\ l_{wg} : \text{低周波の西進する重力波モード} \\ l_{eg} : \text{高周波の東進する重力波モード} \end{cases}$$

また、ハフベクトルは次の直交性を有す

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Theta_{nlm} \cdot \Theta_{n'l'm}^* d\theta = \delta'_{nn'} \delta'_{ll'} \quad (81)$$

よってハフ調和関数は次の直交条件を満たす。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_{nlm} \cdot \mathbf{H}_{n'l'm}^* \cos \theta d\lambda d\theta = \delta'_{nn'} \delta'_{ll'} \quad (82)$$

$\Theta_{n'l'm}^*$ 、 $\mathbf{H}_{nl'm}^*$  とそれぞれ複素共役を表す。今、第  $m$  鉛直モードに相当する物理空間における任意のベクトル関数  $W_m(\lambda, \theta, \tau)$  は

$$\mathbf{W}_m(\lambda, \theta, \tau) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{nlm}(\tau) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \quad (83)$$

と書くことができる。83 の辺々に  $\mathbf{H}_{nlm}^*(\lambda, \theta)$  を掛け、以下で定義される内積

$$\langle \mathbf{W}_m, \mathbf{H}_{nlm} \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\mathbf{W}_{nlm} \cdot \mathbf{H}_{nlm}) \cos \theta d\lambda d\theta \quad (84)$$

を作用させることで

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{W}_m(\lambda, \theta, \tau), \mathbf{H}_{nlm}^*(\lambda, \theta) \rangle \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{nlm}(\tau) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \mathbf{H}_{nlm}^*(\lambda, \theta) \end{aligned} \quad (85)$$

変形して

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{W}_m(\lambda, \theta, \tau), \mathbf{H}_{nlm}^*(\lambda, \theta) \rangle \\ &= w_{nlm}(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \mathbf{H}_{nlm}^*(\lambda, \theta) \\ w_{nlm}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{W}_m \mathbf{H}_{nlm}^* \cos \theta d\lambda d\theta \end{aligned} \quad (86)$$

を導出できる。

76 に、この一連のフーリエハフ変換を施す。

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) = 0 \quad (87)$$

78 に  $\mathbf{H}_{nlm}^*(\lambda, \theta)$  を掛ければ

$$(\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) = i\omega_{nlm} \quad (88)$$

となりこれを 76 に代入すれば

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + i\omega_{nlm} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) = 0 \quad (89)$$

任意のベクトル関数  $\mathbf{W}_m(\lambda, \theta, \tau) = (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m)$  と置いて左から  $\mathbf{H}_{nlm}^*(\lambda, \theta)$  をかけて内積を掛ければの 86 ようになり、76 は以下のようにフーリエハフ変換で変換できる。

$$\frac{\partial}{\partial \tau} w_{nlm}(\tau) + i\omega_{nlm} w_{nlm}(\tau) = 0 \quad (90)$$

90 から、固有振動数  $\omega_{nlm}$  は実数なので左辺第 2 項目の線形項は、波動の位相のみ表現する。

### 3.4.5 3次元ノーマルモード展開

前々章、前章で扱った鉛直構造関数  $G_m(P)$ 、水平構造関数  $H_{nlm}(\lambda, \theta)$  を結合させ、静止大気を基本場とした 3次元ノーマルモード関数  $\prod_{nlm}(\lambda, \theta, P)$  を構成し、3次元ノーマルモード関数展開を用いてプリミティブ方程式式 41 の 3次元スペクトル表記を導く。

3次元ノーマルモード関数は前述の通り鉛直構造関数と水平構造関数の積 (テンソル積) であったから、

$$\prod_{nlm}(\lambda, \theta, P) = G_m(P) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) = G_m(P) \Theta_{nlm}(\theta) \exp(in\lambda) \quad (91)$$

$G_m(P)$  は、Sturm Liouville 型の境界値問題であり、この Sturm Liouville 型の固有解 (固有関数) は完全直交関数を成す性質がある (Tanaka and Sun 1990)。ここから 3次元ノーマルモード関数  $\prod_{nlm}(\lambda, \theta, P)$  は、

$$\begin{aligned} \langle \prod_{nlm}, \prod_{n'l'm'} \rangle &= \frac{1}{2\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \prod_{nlm} \prod_{n'l'm'}^* \cos \theta d\lambda d\theta dp \\ &= \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (92)$$

この 3次元ノーマルモード関数の直交性を利用することで、42、46 でのベクトル  $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{bfF}$  に対して次のような波数展開を適応できる (Tanaka and Sun, 1990)。

$$\mathbf{U}(\lambda, \theta, P, \tau) = \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M w_{nlm}(\tau) \mathbf{X}_m \prod_{nlm}(\lambda, \theta, P) \quad (93)$$

$$\mathbf{F}(\lambda, \theta, P, \tau) = \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M f_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \prod_{nlm}(\lambda, \theta, P) \quad (94)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n : \text{東西波数} \rightarrow \text{波数 } N \text{ で波数切断} \\ l : \text{南北波数} \rightarrow \text{波数 } L \text{ で波数切断} \\ m : \text{鉛直波数} \rightarrow \text{波数 } M \text{ で波数切断} \end{array} \right.$$

ここで、 $w_{nlm}(\tau)$ 、 $f_{nlm}(\tau)$  はそれぞれ、従属ベクトル  $\mathbf{U}$  と外部強制項  $\mathbf{F}$  に関する 3次元ノーマルモード展開係数であり、92~94 から以下の内積で求めることができる。

$$w_{nlm}(\tau) = \left\langle \mathbf{U}(\lambda, \theta, P, \tau), \mathbf{X}_m^{-1} \prod_{nlm}(\lambda, \theta, P) \right\rangle \quad f_{nlm}(\tau) = \left\langle \mathbf{F}(\lambda, \theta, P, \tau), \mathbf{Y}_m^{-1} \prod_{nlm}(\lambda, \theta, P) \right\rangle$$

(95)

さらに、41 と  $Y_m^{-1} \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, P)$  との内積をとる。これは、無次元時間  $\tau$  を  $Y_m^{-1}$  と  $\Pi_{nlm}(\lambda, \theta, P)$  にかけて内積をとり登場させるためである。

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L}\mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F}, Y_m^{-1} \Pi_{nlm} \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}, Y_m^{-1} \Pi_{nlm} \right\rangle + \left\langle \mathbf{L}\mathbf{U}, Y_m^{-1} \Pi_{nlm} \right\rangle \\ & - \left\langle \mathbf{N}, Y_m^{-1} \Pi_{nlm} \right\rangle - \left\langle \mathbf{F}, Y_m^{-1} \Pi_{nlm} \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (96)$$

よって、 $\Pi_{nlm}(\lambda, \theta, P)$  の直交性とテンソル表記によって簡略化すると、

$$\frac{d}{d\tau} w_{nlm} + i\sigma_{nlm} w_{nlm} = -i \sum_{n'l'm'}^K \sum_{n''l''m''}^K r_{nlmn'l'm'n''l''m''} w_{nlmn'l'm'n''l''m''} + f_{nlm} \quad (97)$$

のようにし、添え字を次のように整理すると、

$$\begin{cases} nlm \longrightarrow i \\ n'l'm' \longrightarrow j \\ n''l''m'' \longrightarrow k \end{cases}$$

$$\frac{d}{d\tau} w_i + i\omega_i w_i = -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w_j w_k + f_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, K) \quad (98)$$

ただし、

$$\begin{cases} K & : & \text{全波数 } (= (2N+1)(L+1)(M+1)) \\ \omega_i & : & \text{ラプラス潮汐方程式から得られる固有振動数} \\ r_{ijk} & : & \text{非線形の波 波数相互作用の実数係数} \end{cases}$$

となる。

以上から外部強制項を伴ったプリミティブ方程式のスペクトル表示ができた。

ここから、モード数  $m$  によって分かれる順圧成分と傾圧成分をもった鉛直構造関数  $G_m(P)$  とロスビー波、重力波の振動数による異なるモードを有した水平構造関数  $H_{nlm}(\lambda, \theta)$  を用いることでプリミティブ方程式 41 をスペクトル表示 98 で表すことができる。

### 3.4.6 大気の順圧成分の抽出

順圧 S モデル (Tanaka 1998) は大気の順圧成分のみを取り出したモデルであり 96 においてプリミティブ方程式と鉛直モード ( $m = 0$ ) の 3 次元ノーマルモード関数の内積をとり、大気の順圧成分を抽出した。

$$\left\langle \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L}\mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F}, \mathbf{Y}_0^{-1} \prod_{nlm} \right\rangle \quad (99)$$

これをスペクトル表示に書き換えると

$$\frac{d}{d\tau} w_i + it_i \omega_i w_i = -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w_j w_k + f_i \quad (i = 1, 2, \dots, K (= (2N + 1)(L + 1))) \quad (100)$$

ここで、 $K$  はモデルにおける全波数を意味する。本研究では、東西波数は  $n = 0, 1, \dots, 20$  で、南北波数は  $l = 1, 3, \dots, 19$  (赤道対称のモードのみ) で切断し、方程式系を構成する。

式 (92) において、プリミティブ方程式の線形項は、鉛直構造関数  $G_m$  の直交性により順圧成分のみが残る。ここで、非線形項  $\mathbf{N}$  の  $\omega$  を含む項は、便宜上外部強制項  $\mathbf{F}$  に含める。また、順圧 - 傾圧相互作用も  $\mathbf{F}$  に含まれる。よって、順圧成分のプリミティブ方程式 (92) を成分表示すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta \cdot v + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = -V \cdot \nabla u + \frac{\tan \theta}{a} uv + F_u \quad (101)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta \cdot u + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -V \cdot \nabla v - \frac{\tan \theta}{a} uv + F_v \quad (102)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -V \cdot \nabla \phi - gh_0 \nabla \cdot V + F_z \quad (103)$$

となる。ただし、右辺の発散項はスケージングにより線形化した。以上より、大気の順圧成分に関するプリミティブ方程式として、101、102、103 が得られた。

### 3.4.7 順圧 S-Model

ここからは S-Model での外力項について解説を行う。以下は、近藤 (2006)、大塚 (2015) を基にした。100 を時間積分することで、ある時刻の予報変数  $w_i$  を求めることができるようになった。その際に物理過程としての外力  $f_i$  を見積もらなくてはならな

い。本研究で用いる順圧 S-Model では、豊富にある観測データを統計的に、以下の式で重回帰して、外力  $f_i$  を状態変数  $w_i$  の変数として求めている。

$$f_i = \tilde{f}_i + A_{ij}w_j + B_{ij}w_j^* + \epsilon_i \quad (104)$$

ここで、 $\tilde{f}_i$  は  $f_i$  の気候値で時間のみの周期関数、また、アスタリスクは複素共役であり、残差  $\epsilon_i$  のノルムを最小化するように、未知のシステム行列  $A_{ij}$  ,  $B_{ij}$  を決めなくてはならない。その方法は以下のとおりである。まず、システム行列 A, B を

$$A = A_R + iA_I \quad w = w_R + iw_I \quad (105)$$

$$B = B_R + iB_I \quad w = w_R - iw_I \quad (106)$$

と分ける。ここで R は実数部 , I は虚数部である。

また、 $f_i$  を  $f_i$  のアノマリーとして、

$$f_i = A_w + B_w^* + \epsilon \quad (107)$$

としておく。以上の式より、

$$\begin{aligned} f_i &= A_w + B_w^* + \epsilon \\ &= (A_R + iA_I)(w_B + iw_I) + (B_R + iB_I)(w_R - iw_I) + \epsilon_R + i\epsilon_I \\ &= A_Rw_R - A_Iw_I + B_Rw_R + B_Iw_I + iA_Iw_R + iB_Iw_R - iB_Rw_I + \epsilon_R + i\epsilon_I \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{pmatrix} f_R \\ f_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_R + B_R & -A_I + B_I \\ A_I + B_I & A_R - B_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_I \end{pmatrix} \quad (108)$$

$$= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_I \end{pmatrix} \quad (109)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} A_R + B_R &= a & A_I + B_I &= b \\ -A_I + B_I &= c & A_R - B_R &= d \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} A_R &= (a + d)/2 & A_I &= (b - c)/2 \\ B_R &= (a - d)/2 & B_I &= (b + c)/2 \end{aligned}$$

となる。システム行列を求めるためにフーリエ展開係数の転置行列をかけて時間平均をとれば、

$$\overline{\begin{pmatrix} f_R \\ f_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^T} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^T} + \overline{\begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^T}$$

となり、ここからシステム行列は以下のように、

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} f_R \\ f_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^T} \cdot \overline{\begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^T}^{-1}$$

となり、右辺を計算することで  $A_R$ 、 $B_R$ 、 $A_I$ 、 $B_I$  が同時に求まり、システム行列  $A$ 、 $B$  を求めることができる。

## 4 データ同化手法

### 4.1 Kalman Filter

KF は Kalman によって提唱された逐次最適化手法の 1 つであり、工学を中心に多くの分野で応用されており、KF に関する論文数は 1 万を超えていると言われている。KF は最小分散推定法に分類され、誤差の共分散行列のトレースを最小化することで最適な解析値を作成する (Kalman 1960)。本節では、田中 (2015 地球流体力学)、三好 (2017 筑波大学大気科学特別講義)、淡路 (2009)、及び近藤 (2006) に基づき、KF を成す 2 つの予報方程式、2 つの解析方程式、カルマンゲインの導出まで解説する。加えて、KF と 3DVar が解析的に同値になる条件にも触れる。

ここで導出過程で用いる数学的表現、及び定義について注釈を入れる。

まず、本節以降  $x$  は  $x \in \mathbb{R}^n$  で状態変数・ベクトルを表す。M は  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  のモデル演算子またはモデルの時間発展についてのアフィン行列を表し、

$$\begin{cases} \text{モデルが線形の場合} & : \quad Mx \\ \text{モデル演算子が非線形の場合} & : \quad M(x) \end{cases}$$

で時間発展する。 $y$  は  $y \in \mathbb{R}^m$  で観測値を表し、 $x$  は  $H$  で表される観測演算子  $H \in \mathbb{R}^{n \times m}$  によって観測点のある空間へ内挿される。誤差量は  $\varepsilon$  で表す。ここで、非線形モデル  $M$  を微小変位量  $\delta x$  のまわりで Taylor 展開すると、

$$M(x + \delta x) - M(x) = M(\delta x) \quad (110)$$

であり、 $M$  はモデル演算子  $M$  のヤコビ行列と定義できる。次に本節での添え字表記についてであるが、上付き添え字は、それぞれ  $f$  が予報、 $a$  が解析で、下付き添え字の  $t$  または  $i$  は時間発展の関係を表す。

予報・解析方程式の導出の項では、取り扱う変数が必ずしもガウス分布に従うものではないとし、線形・非線形を限定せず一般的に論じる。また、通常はモデル誤差等も考慮に入れるが、本研究ではそれら付加的に加える項はすべて無視する。また、 $x$ 、 $y$  は不偏推定値とし、誤差は互いに無相関であるとする。散らばり具合の期待値が分散共分散であり、これを  $\langle \rangle$  で表す。

#### 4.1.1 予報方程式

今、モデルが、

$$x_t = M(x_{t-1}) \quad (t = 1, 2, \dots) \quad (111)$$

のように発展すると定義すると、KF の時間発展は、

$$x_i^f = \mathbf{M}(x_{i-1}^a) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (112)$$

と定義できる。これが 1 つ目の予報方程式である。

次に 2 つ目の予報方程式である、予報誤差の時間発展の関係について導出する。

ここで解析誤差、予報誤差の以下の関係式から、

$$x_i^f = x_i^{true} + \varepsilon^f \quad (113)$$

$$x_i^a = x_i^{true} + \varepsilon^a \quad (114)$$

これらの誤差に関する共分散行列  $\mathbf{P}$  は

$$\mathbf{P}^f = \langle \varepsilon^f, (\varepsilon^f)^T \rangle \quad (115)$$

$$\mathbf{P}^a = \langle \varepsilon^a, (\varepsilon^a)^T \rangle \quad (116)$$

上付きの  $T$  は一般的な数学的表現と同様に転置を表す。よって、110、112 ~ 115 よりモデルが非線形の場合は

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^f &= \langle \varepsilon^f, (\varepsilon^f)^T \rangle \\ &= \langle (x_i^f - x_i^{true}), (x_i^f - x_i^{true})^T \rangle \\ &= \langle (\mathbf{M}(x_{i-1}^a) - x_i^{true}), (\mathbf{M}(x_{i-1}^a) - x_i^{true})^T \rangle \\ &= \langle (\mathbf{M}(\varepsilon_{i-1}^a + x_{i-1}^{true}) - x_i^{true}), (\mathbf{M}(\varepsilon_{i-1}^a + x_{i-1}^{true}) - x_i^{true})^T \rangle \\ &= \langle (\mathbf{M}(\varepsilon_{i-1}^a) + (\mathbf{M}(x_{i-1}^{true}) - x_i^{true})), (\mathbf{M}(\varepsilon_{i-1}^a) + (\mathbf{M}(x_{i-1}^{true}) - x_i^{true}))^T \rangle \\ &= \langle \mathbf{M}(\varepsilon_{i-1}^a), (\mathbf{M}(\varepsilon_{i-1}^a))^T \rangle \\ &= \mathbf{M}(\varepsilon_{i-1}^a)(\varepsilon_{i-1}^a)^T \mathbf{M}^T \\ &= \mathbf{M} \mathbf{P}_{i-1}^a \mathbf{M}^T \end{aligned} \quad (117)$$

となる事が導かれた。線形の場合、117 の 5 行目で 110 の関係で登場したヤコビ行列  $\mathbf{M}$  がモデル演算子  $\mathbf{M}$  に置き換わり、

$$\begin{aligned} &= \langle (\mathbf{M}(\varepsilon_{i-1}^a) + (\mathbf{M}(x_{i-1}^{true}) - x_i^{true})), (\mathbf{M}(\varepsilon_{i-1}^a) + (\mathbf{M}(x_{i-1}^{true}) - x_i^{true}))^T \rangle \\ &= \langle \mathbf{M}(\varepsilon_{i-1}^a), (\mathbf{M}(\varepsilon_{i-1}^a))^T \rangle \\ &= \mathbf{M}(\langle \varepsilon_{i-1}^a, (\varepsilon_{i-1}^a)^T \rangle) \mathbf{M}^T \\ &= \mathbf{M} \mathbf{P}_{i-1}^a \mathbf{M}^T \end{aligned} \quad (118)$$

となる。この予報誤差の時間発展に関する式はリヤプノフ方程式 *Lyapunovequation* と呼ばれている。

以上より、KF の予報方程式 112、117 又は 118 が導出された。

#### 4.1.2 解析方程式

前述の通り、KF は最小分散推定法である。つまり、ある誤差分散の重みつき平均によって解析値が求められると解釈できる。ここで、KF を用いたデータ同化の原理について考えると、予報値と観測値をある重みによって重みつき平均し解析値を求めることであった。任意の重み  $K$  (詳細については後述) を登場させると、予報と観測の重みつき平均は、

$$\begin{aligned} x_i^a &= (\mathbf{I} - \mathbf{KH}) x_i^f + \mathbf{K}y \\ &= x_i^f + \mathbf{K} \left( y - \mathbf{H}x_i^f \right) \end{aligned} \quad (119)$$

と置ける。ここで観測誤差を  $\varepsilon^o$  と定義し、

$$y_i = \mathbf{H}x_i^{true} + \varepsilon^o$$

の関係であることから、113、114 を 119 に代入して変形すると解析誤差  $\varepsilon^a$  は、

$$\begin{aligned} x_i^{true} + \varepsilon^a &= x_i^{true} + \varepsilon_i^f + \mathbf{K} \left( \mathbf{H}x_i^{true} + \varepsilon^o - \mathbf{H} \left( x_i^{true} + \varepsilon_i^f \right) \right) \\ \varepsilon^a &= +\mathbf{K} \left( \varepsilon^o - \mathbf{H}\varepsilon_i^f \right) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{KH}) \varepsilon_i^f + \mathbf{K}\varepsilon^o \end{aligned} \quad (120)$$

と求まるため、解析誤差分散行列  $\mathbf{P}^a$  は以下のように、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^a &= \langle \varepsilon^a, (\varepsilon^a)^T \rangle \\ &= \left\langle ((\mathbf{I} - \mathbf{KH}) \varepsilon_i^f + \mathbf{K}\varepsilon^o), ((\mathbf{I} - \mathbf{KH}) \varepsilon_i^f + \mathbf{K}\varepsilon^o)^T \right\rangle \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{KH} \left\langle (\varepsilon_i^f), (\varepsilon_i^f)^T \right\rangle \mathbf{I} - \mathbf{KH}^T + \mathbf{K} \left\langle (\varepsilon^o), (\varepsilon^o)^T \right\rangle \mathbf{K}^T + 0 \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{KH}) \mathbf{P}_i^f (\mathbf{I} - \mathbf{KH}^T) + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T \end{aligned} \quad (121)$$

と求められる。前述のように予報誤差と観測誤差同士の誤差相関はないので、 $\langle \varepsilon^f, \varepsilon^o \rangle$  の項はキャンセルされる。ここで  $\mathbf{R}$  は観測誤差共分散行列で、 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  の大きさをもつ正方行列である。因みに、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{R}$  共に実対称行列である。

#### 4.1.3 カルマンゲイン

解析方程式の導出を通して、ある重み  $\mathbf{K}$  と置いたが、最適な解析値を求めるためには最適な重み  $\mathbf{K}$  を求める必要がある。KF の最適化の条件は、誤差共分散のトレースを最小とする分散を求めることだったので、この時の  $\mathbf{K}$  を求めればよいから、

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} (\text{trace}(\mathbf{P}^a)) = 0 \quad (122)$$

を解けばよい。トレース及び行列の微分公式、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} (\text{trace} (\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A}^T)) &= \mathbf{A} (\mathbf{B} + \mathbf{B}^T) \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} (\text{trace} (\mathbf{A} \mathbf{B})) &= \mathbf{B}^T\end{aligned}\tag{123}$$

を使うと、121 は次のように、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} (\text{trace} (\mathbf{P}^a)) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} \left( (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H}) \mathbf{P}_i^f (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})^T + \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{K}^T \right) \\ &= -2 \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T + \mathbf{K} (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) \\ &\quad + \mathbf{K} (\mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{P}^f \mathbf{H})\end{aligned}\tag{124}$$

となり、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{R}$  共に実対称行列であることを思い出せば 124 は、

$$\begin{aligned}-2 \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T + 2 \mathbf{K} \mathbf{R} + 2 \mathbf{K} \mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T &= 0 \\ \mathbf{K} \mathbf{R} + \mathbf{K} \mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T &= \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T \\ \mathbf{K} &= \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}\end{aligned}\tag{125}$$

と変形でき、最適なカルマンゲイン  $\mathbf{K}$  が求められた。この 125 を 121 に代入して変形すると 121 はより簡素に、

$$\mathbf{P}^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H}) \mathbf{P}^f\tag{126}$$

として表現することが可能である。

以上より、KF は、予報方程式 112、117、解析方程式 119、126、及びカルマンゲイン 125 の 5 式によって表現できることが導かれた。

#### 4.1.4 Inflation

ここまで理論的に KF を求めた訳だが、上記の解説ではいくつか近似仮定を置いている。1 つにはモデルの時間発展に誤差を含んでいない点であり、本来ならば 111 は、

$$x_t = \mathbf{M}(x_{t-1}) + \gamma \quad (t = 1, 2, \dots)\tag{127}$$

のように、 $\gamma \in \mathbb{R}^n \cap \text{Guassian i.i.d}$  の誤差が混入するため、

$$\mathbf{P}_t^f = \mathbf{M} \mathbf{P}_{t-1}^a \mathbf{M}^T + \Gamma\tag{128}$$

のように背景誤差共分散が時間発展する。 $\Gamma = \langle \gamma, \gamma^T \rangle$  で  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  である。KF 系のデータ同化手法においては、この微小変位分の有無が実際に同化を継続していく段階で収束にとって大きな問題となる。そこで考えられたのがインフレーション (Inflation)

であり、今日までに複数の手法が開発されてきた。

本実験では最も簡易的な Multiplicative Inflation (Anderson and Anderson 1999) を fix 10 % で S-model に対して用いた。浅水方程式モデルでは行っていない。Multiplicative Inflation は予報誤差を定数倍して 128 で示した微小変位分に相当する分だけ膨張させる手法であり、

$$\mathbf{P}_i^f = \alpha \mathbf{P}_i^f \quad (129)$$

の操作を行う。その他の手法については Anderson、Hamill、Miyoshi、Whitaker 氏などの論文を参照することを勧める。

## 4.2 変分法

### 4.2.1 3DVar

3DVar は、前項まで述べられた KF とは異なり、最尤推定法のアプローチをとるデータ同化手法である。1980 年代から研究が進み、現業のデータ同化手法のなかでは比較的早くから利用されてきた方法であり、1991 年にアメリカ気象局による現業利用まで遡る (Parrish and Derber 1991)。最尤推定法とは、ある変数  $x$  と  $y$  に関する確率密度分布の積からなる尤度関数を定義した時、この関数を最大とする解析値を求め最適化する手法である。本節では、田中 (2015 地球流体力学)、三好 (2017 筑波大学大気科学特別講義)、淡路 (2009) に基づき導出をする。

まず最尤推定の原理を簡単に解説する。

予報  $x^f$ 、観測  $y$  は以下の前提を満たすと仮定する。

1.  $x^f, y$  は正規分布に従う。
2.  $x^f, y$  の期待値は等しい。即ち、不偏推定量である。
3. それぞれ独立である。

確率密度の方程式は、それぞれの分散を  $\sigma_{x^f}$ 、 $\sigma_y$  と置くと、

$$P(x^f | x^{true}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x^f}} \exp \left[ -\frac{(x^f - x^{true})^2}{2\sigma_{x^f}^2} \right] \quad (130)$$

$$P(y | x^{true}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp \left[ -\frac{(y - x^{true})^2}{2\sigma_y^2} \right] \quad (131)$$

これらの確率密度分布の積は、

$$P(x | x^f, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x^f}} \exp \left[ -\frac{(x^f - x^{true})^2}{2\sigma_{x^f}^2} - \frac{(y - x^{true})^2}{2\sigma_y^2} \right] \quad (132)$$

となり、 $P$  を最大にするためには、指数を最大化すればよい。ここで、

$$J(x) = \frac{(x^f - x^{true})^2}{2\sigma_{x^f}^2} + \frac{(y - x^{true})^2}{2\sigma_y^2} \quad (133)$$

という評価関数  $J(x)$  を設定すると、この指数を最大にすることは、この評価関数の最小を求めることと同値であるので、評価関数  $J(x)$  を  $x$  で微分した  $\nabla J(x) = 0$  となる時の  $x$  を求めればよい。

ここで、 $\sigma_{x^f}$ 、 $\sigma_y$  は、KF の時と同様に予報値と観測値それぞれの誤差共分散行列で成るため、ここで  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  と置き換えれば、133 は以下のように

$$J(x) = \frac{1}{2}(x - x^f)^T \mathbf{B}^{-1}(x - x^f) + \frac{1}{2}(y - \mathbf{H}(x))^T \mathbf{R}^{-1}(y - \mathbf{H}(x)) \quad (134)$$

と表現できる。134 の微分である勾配ベクトルが 0 となる点に変分法において最適化される条件であるから、 $\nabla J(x)$  は、

$$\begin{aligned} \nabla J(x) &= \mathbf{B}^{-1}(x - x^f) - \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}(y - \mathbf{H}(x)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (135)$$

ただし  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  は、観測演算子  $H$  のヤコビ行列である。

後は、降下法を用いて繰り返し計算 (iteration) により最小値を見つければよい。この最適化アルゴリズムには、共益勾配法 (Conjugate Gradient : CG) やニュートン法系の準ニュートン法 (Quasi-Newton)、ガウスニュートン法 (Gauss-Newton) などがあるので目的や取り組むべき方程式系に合わせて使用すればよい。本研究では、準ニュートン法の 1 つで LBFSGS 法を採用している。この手法についての詳細は後ほど触れる。

#### 4.2.2 KF と 3DVar の解析解の関係

ここでは、KF でガウス分布を仮定した際に 3DVar と KF の解析解が一致することを示す。134 に 113 の  $x^f = x^{true} + \delta x$  を代入すると、

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{1}{2}(x^f - \delta x - x^f)^T \mathbf{B}^{-1}(x^f - \delta x - x^f) \\ &\quad + \frac{1}{2}(y - \mathbf{H}(x^f - \delta x))^T \mathbf{R}^{-1}(y - \mathbf{H}(x^f - \delta x)) \end{aligned} \quad (136)$$

$d = y - \mathbf{H}(x^f)$  と置けば

$$= \frac{1}{2}\delta x^T \mathbf{B}^{-1}\delta x + \frac{1}{2}(d - \mathbf{H}(\delta x))^T \mathbf{R}^{-1}(d - \mathbf{H}(\delta x))$$

これより、 $x$  の微小変位量  $\delta x$  での微分が 0 になる点を探せばよいので、

$$\begin{aligned} \nabla J(\delta x) &= \mathbf{B}^{-1}\delta x - \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}(d - \mathbf{H}(\delta x)) = 0 \\ (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}) \delta x &= \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} d \\ \delta x &= (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} d \end{aligned} \quad (137)$$

となり、解析的に 3DVar の解が得られた。次に KF ( $\in$  Gaussian *i.i.d.*) について  $\delta x$ 、 $d$ 、 $P^f = B$  を用いて 120 を書き直すと、

$$\begin{aligned}
 x^a &= x^f + K (y - H(x^f)) \\
 &= x^f + Kd \\
 x^a - x^f &= BH^T (HBH^T + R)^{-1} d \\
 \delta x &= BH^T (HBH^T + R)^{-1} d
 \end{aligned} \tag{138}$$

ここで、トリッキーな式変換を行う。 $(B^{-1} + H^T R^{-1} H)$  とその逆行列を 138 に左から順にかけると、

$$\begin{aligned}
 \delta x &= (B^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} (B^{-1} + H^T R^{-1} H) BH^T (HBH^T + R)^{-1} d \\
 &= (B^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} (H^T + H^T R^{-1} HBH^T) (HBH^T + R)^{-1} d \\
 &= (B^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} (H^T R^{-1} R + H^T R^{-1} HBH^T) (HBH^T + R)^{-1} d \tag{139} \\
 &= (B^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} H^T (R^{-1} (R + HBH^T)) (HBH^T + R)^{-1} d \\
 &= (B^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} d
 \end{aligned}$$

以上の 137、139 を見れば、ガウス分布における KF と 3DVar の解析解が一致することが導かれた。

一般的な教科書や資料等では最適内挿法 (OI) と 3DVar の解析解の関係性を説明しているものが多いが、最適内挿法は KF と同じ最小分散推定法の 1 種であるため最適内挿法とも解析解が一致するのは言うまでもない。KF と OI の最大の違いは、後者はリヤプノフ方程式がない、つまり背景誤差共分散を自ら作成・適応させない手法であり計算資源的を考えた際簡易に計算可能である。

#### 4.2.3 4DVar

4DVar は前々項で導出した 3DVar を時間軸方向の次元を加えて 4 次元に拡張した、現在アメリカとカナダを除く主要な気象センターで現業利用されているデータ同化手法である。3DVar が一定時間 (通常 6 時間) の同化サイクルごとの観測データのみ取り込んで同化をするのに対し、4DVar は同化サイクル間の複数の時刻の観測データを取り込んで同化を行うため、観測データのトラジェクトリ に良くフィットした解析が得られる利点がある (Lewis and Derber 1985, Courtier et al. 1994)。このため他手法と比較し安定的で良好な同化性能を誇るが、一方で、前述の最小値探索のための最適化アルゴリズムで最適化の条件を満たすまで何度も数万次元以上の変数の繰り返し計算を行うため、非常に計算資源を消費する同化手法である (Miyoshi and Honda 2007)。

さらに、非線形モデルの接線形モデル及びアジョイントモデルの作成においては高難易度のプログラミング技術を必要とし、大気モデルが更新される度に 4DVar のアジョイントコードも更新する必要がある、開発においてもコストが掛かる手法である。しかし、現時点の現業予報ではそれらの問題点を補うだけの精度・同化の安定性を誇る。本節でも、淡路 (2009)、田中 (2015 地球流体力学) に基づき導出をする。今、モデルが、

$$x_t = \mathbf{M}(x_{t-1}) \quad (t = 1, 2, \dots) \quad (140)$$

のように発展すると定義すると、評価関数は以下のように

$$\begin{aligned} J(x) = & \frac{1}{2}(x_i - x_t^f)^T \mathbf{B}^{-1}(x_i - x_t^f) \\ & + \sum_{t=0}^T \frac{1}{2}(y_t - \mathbf{H}_t(x_t))^T \mathbf{R}_t^{-1}(y_t - \mathbf{H}_t(x_t)) \end{aligned} \quad (141)$$

$$(i = 0, 1, \dots, N)$$

と表わせられる。ここで添え字の  $t$  は同化期間 (同化ウィンドウ) の長さであり  $t = 0$  から  $t = T$  までである。 $x_i$  は評価関数の制御変数であり、毎同化サイクルごとに求める解析値である。 $\mathbf{H}_t, \mathbf{R}_t$  はそれぞれ同化期間内の各時間ステップにおける観測演算子と観測誤差行列であり次元はそれぞれ KF、3DVar の式と同様に  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  である。

ここで、 $x_t$  を制御変数である  $x_i$  に書き換えねばならないので新たに、

$$\tilde{\mathbf{H}}_t(x_i) = \mathbf{H}_t(\mathbf{M}^t(x_i)) \quad (142)$$

と置く。これは解析値を同化ウィンドウ分時間積分することを意味し、一般的にはフォワードモデル (forward model) と呼ばれる。142 を用いて評価関数を書き直すと、

$$J(x) = \frac{1}{2}(x_i - x_t^f)^T \mathbf{B}^{-1}(x_i - x_t^f) + \sum_{t=0}^T \frac{1}{2}(y_t - \tilde{\mathbf{H}}_t(x_i))^T \mathbf{R}_t^{-1}(y_t - \tilde{\mathbf{H}}_t(x_i)) \quad (143)$$

評価関数を  $x_i$  で微分すれば、

$$\begin{aligned} \nabla J(x) = & \mathbf{B}^{-1}(x_i - x_t^f) - \sum_{t=0}^T \tilde{\mathbf{H}}_t^T \mathbf{R}_t^{-1}(y_t - \tilde{\mathbf{H}}_t(x_i)) \\ = & 0 \end{aligned} \quad (144)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{H}}$  は  $\tilde{\mathbf{H}}_t$  の接線形演算子であり、

$$\tilde{\mathbf{H}}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{M}_{t-1} \mathbf{M}_{t-2} \dots \mathbf{M}_0 \quad (145)$$

と表せる。 $\mathbb{H}_t$  も  $\mathbf{H}_t$  の接線形演算子である。ここから 146 は、

$$\begin{aligned}
\nabla J(x) &= \mathbf{B}^{-1}(x_i - x^f) \\
&\quad - \sum_{t=0}^T \mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_1^T \dots \mathbf{M}_{t-1}^T \mathbb{H}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} (y - \mathbf{H}_t(\mathbf{M}^t(x_i))) \\
d_t &= \mathbb{H}_t \mathbf{R}_t^{-1} (y - \tilde{\mathbf{H}}_t(x_i)) \text{ とおけば} \\
&= \mathbf{B}^{-1}(x_i - x^f) \\
&\quad + (\mathbf{M}_0^T (\mathbf{M}_1^T (\dots (\mathbf{M}_{T-1}^T d_T + d_{T-1}) \dots) + d_1) + d_0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{146}$$

と変形できた。ここで、 $\mathbf{M}_t^T$  に関する部分はアジョイント演算子を時間軸後方に伝えてモデルにフィットさせているところであり、通常バックワードモデル (backward model) とされる部分である。また、 $d_t$  と置いた項は、インクリメントの時間積分で観測と予報データのズレを計算している。あとは適当な降下法でもって最適化アルゴリズムの条件に合う解析値を繰り返し計算で求めればよい。

4DVar には Outer Loop と Inner Loop と一般的に言われる 2 つのループが存在する。Inner Loop とは最適化アルゴリズムによる繰り返し計算結果を評価関数の勾配に戻して勾配が 0 に近づくように計算する部分で、Outer Loop はモデルを回し接線形演算子、アジョイント演算子を作り直すループである (三好 2017 筑波大学大気科学特別講義)。この 2 つの演算子の精度も同化結果に影響するため、現業機関ごとの予報の質の違いが出る部分の 1 つである。

補足として 4DVar は別名アジョイント法とも言われるが、それは  $\mathbf{M}_t^T$  が  $\mathbf{M}_t$  の随伴演算子 (アジョイント演算子) であるからだ。この詳しい導出については (淡路 2009) を参考にしていきたい。

#### 4.2.4 Quasi-Newton method

準ニュートン法とは、ある関数  $f(x)$  の最小値探索手法であるニュートン法において用いた二階微分の行列であるヘッセ行列を直接計算せず、計算によって得られたベクトルなどから近似して与える手法である (Nocedal 1980)。詳しい手法については Nocedal (1980) や Byrd et. al (1995) を参考にしていきたい。本節では Nocedal (1980)、Byrd et. al (1995)、田中 (2015 地球流体力学) を基に概要を式を交えて追っていく。また、本研究では準ニュートン法の 1 つである Limited-BFGS 法 (L-BFGS) を採用した (Liu and Nocedal 1989)。本研究のプログラムは、フリーの LBFGS 法プログラム (Nocedal and Morales 2011) を借用し設計した。

まず準ニュートン法について説明する。ある関数  $f(x)$  の最小値を求めるには、まず任意の初期値  $x_0$  の周りで  $\delta x = x^a - x_0$  を用い Taylor 展開し、

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\delta x^2 \quad (147)$$

$x^a$  の中央差分を、 $x^a$  を中心に  $\delta x$  分離れたもう一つの点  $x_1$  を導入し、147 も用いて考えると、

$$\begin{aligned} f'(x_a) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{2\delta x} \\ &= \frac{1}{2} \left( f'(x_0) + f''(x_0)\frac{1}{2}\delta x \right) \end{aligned} \quad (148)$$

$x^a$  での微分は 0 より、

$$\begin{aligned} f'(x_0) + f''(x_0)\frac{1}{2}\delta x &= 0 \\ x^a &= x_0 - 2\frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} \end{aligned} \quad (149)$$

ヘッセ行列を  $H$  を用いて表すと 149 は、

$$x^a = x_0 - H^{-1}\nabla f(x_0) \quad (150)$$

これを  $x_0$  を次々と漸近させるように表現を換えれば、

$$x_{n+1} = x_n - H^{-1}\nabla f(x_n) \quad (i = 0, 1, \dots, N) \quad (151)$$

ここで、

$$y_n = \nabla f(x_{n+1}) - \nabla f(x_n) \quad (152)$$

$$s_n = x_{n+1} - x_n$$

とすれば、ヘッセ行列  $H$  は次ように近似可能である (Dennis and Schnabel 1989)。

$$H_{n+1} = V_n^T H_n V_n + \rho_n s_n s_n^T \quad (153)$$

$$V_n = I - \rho_n y_n s_n^T \quad (154)$$

$$\rho_n = 1/y_n^T s_n^T \quad (155)$$

このようにしてヘッセ行列を更新して最小値を探索していけばよい。L-BFGS 法はプログラムで指定した分だけ過去の  $f(x)$  の一階微分と  $x$  しか持たない。これによって計算途中のメモリーを制限し、大規模計算の際に他の計算分のメモリーを確保することができる。

## 5 結果

以下は、線形浅水モデルと S-Model において各手法を様々な設定の基で実験した結果である。結果の捉え方としては、誤差の RMSE 値もしくは順圧高度場からの誤差が減少するほど同化の性能が良いとする。つまり本実験では、基本的には同化性能の善し悪しはどれだけ小さい RMSE 値を出したかによって決定されるもととする。しかし、収束に要する時間もデータ同化においては重要な指標の一つであるので、基本的には誤差が低くなる手法や設定が「性能が良い」データ同化であるものの、この点も考慮に加えて全体的に「性能」を判断する。また以上の定義に基づき、結果の項ではデータ同化の「性能」という言葉を使用する。

### 5.1 線形浅水方程式

#### 5.1.1 線形浅水モデルにおける性能実験

本節では、パーフェクトモデルの線形浅水方程式を用いて基本的なデータ同化手法の性能及び特徴について実験を行った。

##### 5.1.1.1 KF

図 1 は、ある領域内の点上でのある 1 つの波数について KF でデータ同化を行った際の RMSE の時系列変化である。KF の特徴としては最も収束が速くことが挙げられる。同化開始から 40 時間ほど (同化サイクル 7 回目) で RMSE が 0.03 と十分収束していることがわかる。この時、4DVar の RMSE 値は 0.05、3DVar は 0.17 と収束に関しては KF が 3 手法の中で最も優れている。40 時間を過ぎると誤差収束が緩やかになり、最終的には RMSE 値が 0.02 程度まで漸近する。

##### 5.1.1.2 3DVar

図 1 は、KF と同様の環境でデータ同化を行った際の RMSE の図である。当初、任意で与えた B で実験を行った場合、300 時間 (同化サイクル数 50) を超えても KF や 4Dvar のように十分に収束せず、その時点の RMSE 値が 0.05 と KF の 30 時間 (同化サイクル数 5) と同等であった。一方で、複数の B での実験後に最適な B を抽出し、再度同化実験を行った場合、図 ~ のように同化性能、収束の速さともに他手法よりは劣るものの同化開始から 50 ~ 100 時間の間は RMSE 値が 0.02 まで収束するなど、KF や 4Dvar に匹敵する性能を示す時間もあることが確認できる。

### 5.1.1.3 4DVar

図 1 は他 2 手法と同様に同化実験した際の 4DVar の RMSE の時系列変化である。収束は KF よりやや遅れるものの、同化サイクルが 50 時間を越えると KF よりも誤差が少なく同化精度が高いことが示されている。

## 5.1.2 線形浅水モデルにおける B の変化実験

本実験では任意の時間における KF が作成した背景誤差共分散を B として与えた際の同化性能の差異についての結果である。図 2 の黒実線である default は 2 時間ごとに同化させた KF が 60 時間目に作成した背景誤差共分散値を与えたもので、実験初期に与えた B の値である。

### 5.1.2.1 1 hour

KF が 1 時間に作る背景誤差共分散行列を各変分法の B にしたものが図 2 の赤実線である。3DVar、4DVar とともに同化開始当初は RMSE 値こそ他の時間の B を与えたものよりも良いが、同化サイクルを続けるも最終的に収束しないことが確認できる。

### 5.1.2.2 7 hour

7 時間目以降の KF の背景誤差共分散行列を与えた 3DVar では同化初めの値が 0.2 周辺に集まっているのに対し、4DVar では 1 時間目の B を与えた時と比較し、同化結果の特徴に大きな変化がない。

### 5.1.2.3 31 hour

30 時間を超えたあたりから KF の背景誤差共分散行列が 3DVar、4DVar の同化性能に良い影響を与えている。3DVar の場合、60~100 時間ほど同化サイクルが進んだところで収束し他の時間の背景誤差共分散行列と比較し最も RMSE の値を改善した時間帯となった。4DVar でも同様に 31 時間目の背景誤差共分散行列は以前の時間のものよりも 4DVar を安定して収束させるようになったが、同化サイクルが進むにつれて誤差収束が悪化し、RMSE の時系列変化グラフが上下に振れるようになった。

### 5.1.2.4 61 hour

4DVar で最も素早く収束し、RMSE 値が改善した時間が 61 時間目の KF の背景誤差共分散行列を与えた時であった。同化開始から 40 時間目 (同化サイクル 7 周目) には 0.15 程度まで RMSE 値が改善した。

#### 5.1.2.5 103 hour

3DVar において、以前の時間の KF の背景誤差共分散行列が同化に与えた影響と比較し、悪化させる方向に働いていることが読み取れる。同化開始から 250 時間以上要して初めて収束する。一方で、4DVar は収束に要する時間は 61 時間の KF によって同化した際より 1 サイクル程遅いものの、同化サイクルが数百サイクルに達しても RMSE 値が 0.02 ~ 0.03 と、他の時間の背景誤差共分散行列が与えられた 4DVar と比較し全体的に良く収束し同化性能も良好である。

#### 5.1.2.6 301 hour

図 2 の橙色の実線は B に KF301 時間目 3DVar の RMSE に時系列変化である。3DVar では誤差は減少するものの収束はしない。一方で 4DVar では収束に要する時間は 150 時間あまりであり非常に遅い、しかし、最終的には誤差が良く収束し、150 時間以上に着目すると RMSE 値が 0.02 から 0.01 以下まで改善している。

#### 5.1.2.7 703 hour

図 2 のライトグリーンの実線は KF702 時間目の背景誤差共分散行列を 3DVar, 4DVar に与えた際の RMSE の時系列変化の図である。この実験条件では両変分法共にほとんど収束しないことは明白である。収束はしないものの、誤差の改善は見られ 3DVar の誤差改善 0.1 程度であったのに対し、4DVar に関しては RMSE 値が 0.2 から 0.05 まで低下し 1、7 時間目の背景誤差共分散行列を与えた際の同化結果と比較し同化開始から 270 時間以降は下回った。

### 5.1.3 線形浅水モデルにおける Hybrid の性能実験

#### 5.1.3.1 Hybrid 3DVar

図 3 の赤実線は KF が毎同化ステップごとに修正した背景誤差共分散行列を完全に変分法 B として Hybrid させた 3DVar の RMSE 時系列変化である。Hybrid していない 3DVar は同化サイクル 1 回目での RMSE が 0.2 であったのに対し、Hybrid 3DVar では同化 1 回目からその半分の 0.1 程度であった。その後も急速に収束し 50 時間ほどで 0.03 程度まで完全に収束した。Hybrid によって 100 時間目までは KF よりも RMSE 値が改善し、その後も同程度の同化性能を示した。収束し始めた 20 時間目ま

での時間帯では 4DVar に相当する性能を示しているが、300 時間程度のスパンで比較すると 4DVar の誤差が大きく落ちる時間帯が多く、背景場のみで構成される B を用いた Hybrid では 3DVar よりも大幅に同化性能は向上するが 4DVar に完全に勝るほどではないことが結果的に得られた。

#### 5.1.1.2 Hybrid 4DVar

図 3 の青実線は Hybrid 3DVar 同様に Hybrid 化させた Hybrid 4DVar の RMSE 値の時系列変化を示している。同化開始当初から収束し、開始から 300 時間目までの RMSE 値は 0.04 から 0.01 の間で一定となっている。KF と比較しても Hybrid-4DVar の同化性能は優れており、本実験の同化手法の中で最も優れた性能を持つことが明らかになった。

#### 5.1.4 線形浅水モデルにおける KF による背景誤差の構造

本節では、KF によって作成された 1、7、31、61、103、301、703 時間の各時間帯の背景誤差共分散行列の構造について軸方向を次元数にとってそのまま図 4 と 5 に書き出した。カラースケールは -1 から 0 にかけて青色から白色に遷移し、0 から 1 になるに従い黄色から赤となる。ここでスケールであるが、全ての時間で  $1.0 \times 10^{-1}$  でノーマライゼーションした。これは GMT によって描ける色の大きさに閾値が存在するためである。

1 時間目の背景誤差は対角成分のみであるが、2 回目の同化サイクルである 7 時間目には対角成分の両隣の成分が -1 以下の青になり、31 時間目には対角成分の中央 (2, 2) 成分が  $5.0 \times 10^{-2}$  程度に減少し、(3, 1) 成分と (1, 3) 成分が  $8.0 \times 10^{-2}$  程度まで増加した。31 時間目まではこのように行列の構造が様々変化しているが、同化結果が良好であった 61、103 時間目には再び対角成分だけが支配的な構造に変化し、300 時間を過ぎると成分が初期と比較し非常に小さくなった。ここから、背景誤差共分散行列は時間とともに小さくなり不秩序な構造に一時的に変化するが、再び対角成分が非対角成分と比較し非常に大きくなり非対角成分の効果が限定されるようになっていった。即ち、背景誤差共分散の逆行列の成分が時間変化に伴い増大するということが明らかになった。

## 5.2 S-Model

### 5.2.1 S-Modelにおける性能実験

ここでは、変分法の B を KF が 102 時間目に作成した背景場誤差共分散とし、実験した。これは、3DVar、4DVar 共に 102 時間目のものを与えたときの同化性能が最も良かったからである。

#### 5.2.1.1 KF

図 7 は KF の 1 ヶ月ランの結果で、縦軸に RMSE 横軸は日数である。赤実線が解析誤差、青実線は予報誤差、緑の点は観測誤差である。2 日ほどで RMSE 値が  $5.0 \times 10^{-4}$  から  $2.5 \times 10^{-4}$  へと半減し、7 日目前後で完全に収束した。

RMSE は  $5.0 \times 10^{-5}$  程度まで減少した。また、図 7 はその時の解析値の第一成分の軌跡であり、同化サイクルを 20 回ほど行うことで真値に漸近していることが明らかである。図 8 はこの 1 ヶ月ランの順圧高度場の誤差の空間分布の時系列変化であり、シェードの色が濃く誤差が一様に大きかった構造が、最終的には高偏差と低偏差の誤差分布領域が交互に存在する構造となった。誤差の空間分布図である図 11 を参照しても、他手法と比較し 3 日目までの誤差が非常に大きいことが示されている。

#### 5.2.1.2 3DVar

図 7 は 3DVar の 1 ヶ月ランの結果で、軸及び色実践または色の点は 5.2.1.1 と同様である。KF と比較し収束に時間を要していることが確認できる。RMSE 値が  $5.0 \times 10^{-4}$  から  $2.5 \times 10^{-4}$  へ半減する際に KF は 2 日程度であったが 3DVar は 4 日程度かかっている。また、最終的に完全に収束するまでも 8 日と、KF よりも遅い。また RMSE の最小値が  $8.0 \times 10^{-5}$  程度と KF までには及ばなかった。図 10 の軌跡をみると、真値に漸近するまで 50 サイクルほど同化が必要であることが示された。

#### 5.2.1.3 4DVar

図 7 は 4DVar の同実験結果である。軸・色付き実線及び色付き点の様式は他の実験と同様である。RMSE の半減までに要する時間は KF と同様で 2 日程度と 3DVar と比較し早い。最終的に RMSE の最小値が  $9.0 \times 10^{-5}$  程度まで減少するも 10 日程要する。他の同化手法と比較すると、解析誤差が予報誤差よりも大きく改善している。しかし、図 13 の解析値と第一推定値のトラジェクトリーを見ると予報モデルのトラジェクトリーがなかなか真値に漸近せず、解析値も真値に大きく近づけていない。これは誤差の空間構造の図 14 見ても同様である。

## 5.2.2 S-Modelにおける B の変化実験

KF の複数の時刻 (0 時間、6 時間、30 時間、60 時間、102 時間、300 時間、702 時間) の背景誤差共分散を 変分法の B として与えた際の RMSE 値の時系列変化を比較した実験が以下になる。3DVar、4DVar それぞれについて見ていく。

### 5.2.2.1 3DVar

#### 5.2.2.1.1 0 hour

図 7 及び図 16 は、0 時間目、つまり同化開始時の背景誤差共分散を B として同化させた際の結果である。図 7 は縦軸が RMSE 値、横軸が日数で、実験 5.2.1 と同様である。以下の実験でも図の形式は同様とする。解析誤差が観測誤差と同程度の RMSE 値が横ばいとなっており、ほとんど同化出来ていない。軌跡の図である 16、順圧高度場の誤差分布の図 17 から同化が成功していないことが明らかである。

#### 5.2.2.1.2 6 hour

図 7 は、6 時間目の KF による背景誤差共分散を与えた同化結果である。実験 5.2.1 では 3DVar は収束が 3 手法の中では最も遅いと結論づけたが、7 時間目の KF による背景誤差共分散を与えると、2 日程度で  $2.5 \times 10^{-4}$  まで RMSE 値が半減する。しかし、この後はこれ以上同化結果は改善しない。図 19 から、0 時間の実験と同様に観測に解析値と第一推定値が大きく引っ張られている。

#### 5.2.2.1.3 30 hour

図 7 は、30 時間目の KF による背景誤差共分散を与えた同化結果である。1 日程度 KF を回して背景誤差共分散を作成し、それを B とすることで RMSE 値が  $1.2 \times 10^{-4}$  まで小さくなった。これには凡そ 2 程度要している。しかし、ここで同化性能の改善は頭打ちとなった。図 38 の順圧高度場の誤差をみると、7 日目以降でそれまで北半球は全体的に濃いシェードで広く覆われていたが、局所的になった。

#### 5.2.2.1.4 60 hour

図 7 は、60 時間目の KF による背景誤差共分散を与えた同化結果である。30 時間目の結果と比較すると収束はやや遅くなっているものの、4 日程度で RMSE 値が急激に

小さくなり、同化開始から 6 日が経過した段階で RMSE 値が  $8.0 \times 10^{-5}$  程度まで小さくなった。実験全体を通して、ある程度良好な同化性能を出しながら収束が最も早い実験結果が 60 時間 KF を回して作成した背景誤差共分散を B とした本実験であった。図 43 の軌跡を見ても、10 サイクルほどで真値と類似した軌跡を描いており、順圧高度場の図 26 でも 1 日目、3 日目、7 日目で誤差が空間的にも小さくなっていることが確認できる。

#### 5.2.2.1.5 102 hour

102 時間目の KF による背景誤差共分散を与えた同化結果は性能実験の図 7 である。60 時間目の結果と比較すると収束は若干遅くなっているものの、同化開始から 6 日目まで滑らかに RMSE 値が低下し、7 日目には全パターンの中で最も良い  $5.0 \times 10^{-5}$  程度まで誤差のノルムが低下した。以降も収束が続き、20 日目には  $4.0 \times 10^{-5}$  まで低下した。収束には 6、7 日掛かるものの、同化性能は最良の実験となった。

#### 5.2.2.1.6 300 hour

図 7 は、300 時間目の KF による背景誤差共分散を与えた同化結果である。RMSE 値は最終的には 102 時間目の実験の結果と同程度もしくはより低い RMSE 値になった時間帯もある。特に実験期間後半の 26 から 28 日目には  $4.0 \times 10^{-5}$  程度まで RMSE 値が低下した。しかし、収束まで 10 日から 2 週間ほど要しており、収束の観点においては、1 週間から 2 週間ほど KF を回して背景誤差共分散は、むしろ同化の収束に悪影響を与えていることが示された。

#### 5.2.2.1.7 702 hour

図 7 は、702 時間目の KF による背景誤差共分散を与えた同化結果である。結果自体は 300 時間の実験とほとんど変わらない、もしくは僅かではあるが誤差が小さくなる時間帯 (2 日目までと 14 日目から 28 日目) が存在した。

### 5.2.2.2 4DVar

#### 5.2.2.2.1 0 hour

図 7 は、0 時間目の背景誤差共分散を B として同化させた結果である。3DVar ではファーストランの時の B では同化出来ていなかった結果に対して、4DVar では観測誤差の半分程度まで RMSE 値が小さくなっている。ここから、3DVar と 4DVar の同

化を考えた際、前者がより B の精度によって誤差の収束が左右されやすいと言える。トラジェクトリーの図 34 を見ても 3Dvar が観測に大きく揺らされていたことに対し、4Dvar では 3DVar ほど観測値に影響されないことが明らかである。また、順圧高度場の誤差分布図 35 を参照した場合でも、3Dvar と比較し空間上の誤差分布に明瞭な差がみられる。

#### 5.2.2.2.2 6 hour

図 7 は、6 時間目の背景誤差共分散を B として同化させた結果である。0 時間目の実験同様、同条件下の 3Dvar と比較し、4DVar の RMSE が  $5.0 \times 10^{-6}$  程度小さくなっている。3DVar の誤差の時系列変化では、同化サイクルごとに誤差の値が上下に大きく揺れることがあったが、4DVar では数日単位の期間で誤差が改善または悪化している。つまり、3Dvar は各同化サイクルごとに誤差の推定が大きくズれることがあるが、4Dvar では誤差の値が数日かけて振れることが結果として得られた。

#### 5.2.2.2.3 30 hour

図 7 は、30 時間目の背景誤差共分散を B として同化させた結果である。2 日で RMSE が  $1.5 \times 10^{-4}$  まで低下した。しかし、RMSE が更に小さくなることはなく、16 日から 18 日目にかけて RMSE が  $2.0 \times 10^{-4}$  まで上昇した。最終的には 21 日目以降再び 2 日目と同程度まで同化性能が改善し、解析誤差が小さくなった。

#### 5.2.2.2.4 60 hour

図 7 は、60 時間目の KF による背景誤差共分散を与えた同化結果である。3DVar の実験では、より長く KF を回した背景誤差共分散を B とすることで収束に要する期間がより長くなってしまったが、4DVar では 3Dvar と比較し B による収束時間への影響は僅かである。その一方で、RMSE の値は 2 日で  $1.2 \times 10^{-4}$  まで低下し、最高で  $9.0 \times 10^{-5}$  から  $1.0 \times 10^{-4}$  程度まで低下した。3Dvar と比較した際、全体として 7 日以降の同化性能が良くない。図 44 の順圧高度場の解析値の時系列変化を見た場合でも、7 日目以降で誤差の空間分布に著しい変化は生じていない。この問題については考察部分で触れる。

#### 5.2.2.2.5 102 hour

102 時間目の KF の誤差共分散を与えた時の同化結果である。前節の性能実験の図が本実験に該当する。60 時間の実験結果と大きく異なっている点はない。詳細に検証すれば、収束に 2 日半程掛かるため、以前の実験結果で指摘したように若干収束期間

への影響が見られる。RMSE 値も  $10^{-5}$  程度 60 時間の結果より低下はしている。

#### 5.2.2.2.6 300 hour

図 7 は、300 時間目の KF による背景誤差共分散を与えた同化結果である。RMSE 値は全体的には 60、102 時間目の実験の結果と類似しているが、10 日目以降は寧ろ 30 時間目の B の実験とほぼ同じ誤差の時系列変化となった。

#### 5.2.2.2.7 702 hour

図 7 は、702 時間目の KF を用いた結果である。同化開始から長時間経過した B を使用したことによる収束の遅れが他の 4DVar の実験設定と比較し顕著であった。3Dvar では一定期間同化期間 (約 2 週間程度) が経過すると 60 から 702 時間どの B の RMSE 値もほぼ同値であった結果に対し、4Dvar では B によって RMSE の値が同化開始 2 週間以上経過しても 3Dvar よりは僅かではあるが異なっており、4Dvar では B が収束期間よりも、収束時の誤差の精度により顕著に影響が出るようになった。また、順圧高度場の誤差の空間分布である図 50 からは、高偏差の赤い領域と低偏差の青い領域が高緯度から低緯度へ向けて「くの字」形に分布していたが、300、702 時間の背景誤差共分散を B とすると、より広域で誤差の偏差が同一の傾向を示すようになることも明らかになった。つまり背景誤差共分散の違いによって、誤差の空間分布にも影響が出ることを示されている。

### 5.2.3 Hybrid の混合比実験

本実験では、KF より与えられる背景誤差共分散によって変分法の精度が最も高められた 102 時間目及び 60 時間目の背景誤差共分散を固定の B として、そこに流れ依存な背景誤差共分散を KF によって毎同化サイクルごとに任意の割合で配合して同化の精度、収束がどのように影響されるか検証した。ここでは、固定の B と流れ依存な B を、0:10、2:8、3:7、4:6、5:5、6:4、7:3、8:2 の比率で Hybrid 化した。

#### 5.2.3.1 Hybrid-3DVar

Hybrid-3DVar では、60 時間目の KF による背景誤差共分散を固定の B とするか 102 時間目のものを固定の B とするかで若干結果が異なった。それぞれ図 7、図 52 である。しかし、両時間とも、流れ依存な B を 3:7 もしくは 4:6 とした Hybrid 率で同化結果が良く、同化ごとに新しく作成した背景誤差共分散を B に若干多く加えた方が

良くなった。しかし、完全に毎度同化ごとに KF が作成する背景誤差共分散をそのまま B としない限り (0:10 のパターン)、大きく精度は変わらない。収束に関しては、要する時間は同一で 7 日ほどであるが、102 時間の背景誤差共分散を B としたほうが性能実験時と同様、同化時間が更に進んでも RMSE が小さくなり良く収束する。

60 時間のケースでは、2:8 で Hybrid 化した際に同化開始から 12 日目に解析値が真値に非常に小さくなり RMSE が 0 にかなり漸近した。一方で、102 時間目を固定の B とした際は、2:8 のケースよりも、3:7、4:6、もしくは 5:5 の割合で混ぜた方が同化結果が優れており、固定の B によって最適な Hybrid の配合率は変化することが結果として導かれた。

### 5.2.3.2 Hybrid-4DVar

図 7 は 60 時間目の KF の背景誤差共分散を固定の B とした実験の図であり、図 54 は 102 時間目の実験である。Hybrid-4DVar でも Hybrid-3DVar と同様に 0:10 で完全に flow dependent な B だけにしてしまうと収束後に発散してしまう結果となった。また、Hybrid-3DVar では流れ依存な B を固定の B よりも多い割合で Hybrid させることで RMSE 値がより小さくなったが、Hybrid-4DVar では対照的に、あらかじめ推定した最適な固定の B の割合を多くすることで収束に良い影響を与えることが明らかになった。また、B は KF を 102 時間回した時の背景誤差共分散を与えることで同化精度が最も良くなったが、Hybrid では 60 時間目の方が 102 時間目の背景誤差共分散を使用するより、配合率間の精度に差が大きく生じない結果となった。

## 5.2.4 自己適応型 B 性能実験

B を KF のように手法のモデル自身で矯正することから自己適応型 4DVar *Self-Adaptive 4DVar*、通称 S4DVar と名付けた。以下の実験では異なる背景誤差共分散を S4DVar の B とすることで、変分法自身が背景誤差共分散を作成することによる同化性能の向上度合いについて実験した結果である。

### 5.2.4.1 0 hour

0 時間目の KF による背景誤差共分散を B とし、それを接線形演算子の時間積分で射影させ時間発展させた S4DVar である。図 55 は、S4DVar の RMSE の時間変化で、縦軸に RMSE 横軸は日数、赤実線は解析誤差、青実線は予報誤差、緑の点は観測誤差である。また図 56 は前節の実験同様、1、7、14、31 日目の 18 時における誤差の分布

図である。青のシェードは順圧高度場の解析値が真値より低い場合、赤は高い場合である。以下の実験での図は全てこの様式に従うものとする。まず図 55 をみると、同化期間を通して、最初の 1 サイクルは同化出来ているものの、その後は全て解析誤差が予報誤差を上回り全く同化をなせていない。しかし、期間を通して解析及び予報誤差の RMSE 値が  $1.0 \times 10^{-5}$  程度減少はしており、背景場の影響を受けて B が改善したことによる影響が見える。これは図 ~ の B を固定した 4DVar の解析誤差が期間を通して変動しなかった結果から明らかである。この時予報誤差も固定実験と比較し上下に振れることが少なくなり安定性が若干ではあるが流れ依存性をもたせた B によって改善はしている。しかし、図 ~ の順圧高度場の誤差分布図では 1 日目から 31 日目まで全ての図で、高緯度地域において広く誤差が 10 m 以上異なる領域が存在し、微小な改善は確認できない。

#### 5.2.4.4 6 hour

6 時間目の KF による背景誤差共分散を B のスタートとして改善した実験である。図 55 から、0 時間時の実験と比較し若干改善はしているものの、まだ予報誤差を下回らず同化は成功していない。図 57 の順圧高度場の誤差分布でも 1 ヶ月の同化期間を通して明瞭な誤差の改善は見られなかったが、RMSE が最小となった 7 日目 1 月 7 日 18 時と最終日の 1 月 31 日 18 時をみると、他の時間の図と比較し、前者は中緯度地域で、後者は太平洋から北米地域にかけてシェードが薄い地域が存在した。

#### 5.2.4.4 30 hour

30 時間目の KF による背景誤差共分散を B の初期の B として改善させた実験である。0、6 時間時の実験と比較し大幅に誤差の収束が改善はした。6 時間目の実験は、解析誤差が  $2.0 \times 10^{-4}$  より低下することはなかったが、本設定では  $1.7 \times 10^{-4}$  程度まで RMSE が低下した。しかし、4 から 6 日目や、15、6 日目など、複数の時間帯で同化が上手く行えていない時間帯が存在する。予報誤差も解析誤差同様改善した。図 ~ の順圧高度場の誤差分布でも、広くのっぺりとした大きな誤差分布の領域が時間経過と共に縮小し、波の山や谷ごとに赤青が入れ替わり、プラネタリー波や総観規模程度の波に乗った誤差が反映されている誤差分布構造が明らかになった。特に図 58 の 28 日目の図では赤と青が交互に入れ替わり波数 6 の波の構造が明快に見える。

#### 5.2.4.4 60 hour

60 時間目の KF による背景誤差共分散を B の初期の B として改善させた実験である。図 55 の RMSE 値の時間変化を見ると、ほぼ全ての時間で解析誤差が予報誤差を

下回り完全に同化に成功している。RMSE は  $1.0 \times 10^{-4}$  程度まで RMSE が低下した。ここから、この新型の S4DVar によって背景場を B へ射影して変分法内で B を自己適応させるには、B の初期値にはある程度精度よく評価された B を置く必要があることが判明した。つまり、B をモデル演算子で挟み込んで補正するには限界が存在することが同時に分かった。図 59 の誤差分布の図でも、従来高緯度地域を中心に存在していた  $\pm 10 m$  以上真値から離れている領域の数が赤青共に 2 個程度まで減少し、中緯度地域では  $\pm 5 m$  以下の誤差の領域が支配的になった。

#### 5.2.4.4 102 hour

S4DVar において最も性能の良い設定となった、102 時間目の B を初期値とした実験である。図 55 の RMSE 値は 60 時間のそれと比較しても誤差が増加する 2 週間目を除く平均して  $1.4 \times 10^{-4}$  程度まで誤差が減少した。最も改善した時は、60 時間目と同様  $1.0 \times 10^{-4}$  程度まで RMSE が低下している。図 60 の誤差分布を見ると、特に誤差が減少した 7 日目では、以前まで存在した閾値以上の濃淡な赤青領域が完全に消え、日本上空、アラスカ上空に  $\pm 8 m$  程度の大きな誤差を持つ領域が見られるだけである。

#### 5.2.4.6 300 hour

300 時間目の KF の背景誤差共分散を B の初期値として走らせた実験である。以前の実験でも 300 時間以降の背景誤差が同化性能を悪化させることが明らかとなっていたが、S4Dvar も大きく矯正するまでには至らなかった。しかし、固定で 300 時間の背景誤差共分散を B として使用した実験と比較し、時間経過とともに  $10^{-5}$  程度、RMSE が低下している。ここから、過小な B を与えることで 4DVar ベースの同化性能自体が悪化し結果は良い同化性能とはならないが、モデルの流れ依存を背景場に反映させることで、自ら同化を改善する方向に修復していることが実験結果からわかった。順圧高度場の誤差分布の図 61 を見ると、30、60、102 時間目には存在した波の山谷に誤差が乗っているような構造は見られず、0、6 時間目同様、1000 km 以上のスケールで  $\pm 10 m$  以上の誤差領域が再び出現した。

#### 5.2.4.4 702 hour

702 時間目の KF の背景誤差共分散を B の初期値とした実験であり、0 時間目よりはやや同化性能が優れるが、6 時間目の同化結果と比較すると平均的な RMSE 値は 6 時間目で設定した実験の方が低く、解析誤差は非常に悪くなった。これら KF が早い時間に作成した背景誤差共分散を B とした実験との決定的な違いは予報誤差の精度で

あり、過小な  $B$  は予報誤差をより悪化させることが結果から示唆された。まとめると、KF の初期の時間帯の背景誤差共分散を持ってきた  $B$  は解析結果に悪影響を与え同化として機能させない影響があることに対し、十分時間が経過し過小になった背景誤差共分散を  $B$  とした際は予報をより汚染するすることが明らかとなった。この十分時間の経過した際の  $B$  の解析への影響を図 62 の順圧高度場の誤差分布の観点で見ると、極域及び高緯度では 1 ヶ月を通して解析値の順圧高度が真値と比較し低く推定されていることが見て取れる。0 時間目の  $B$  でも誤差分布の構造は赤青のシェードが複数個重なっていた構造をしていたため、同じような RMSE 値でも順圧高度場の誤差分布には決定的な違いがもたらされることもわかった。

### 5.2.5 S-Model における 背景誤差共分散の構造

本節では、KF によって作成された 0、6、30、60、102、300、702 時間の各時間帯の背景誤差共分散行列の構造について軸方向を次元数にとってそのまま図に書き出した。0、6、30、60 時間目の背景誤差共分散の構造は図 63、それ以降の時間は図 64 である。カラースケールは -1 から 0 にかけて青色から白色に遷移し、0 から 1 になるに従い黄色から赤となる。ここでスケールであるが、0、6 時間目は  $1.0 \times 10^{-7}$  でノーマライゼーションし、30、60 時間目は  $1.0 \times 10^{-8}$ 、それ以降の時間帯は  $1.0 \times 10^{-9}$  でノーマライゼーションした。

0 時間目の背景誤差共分散は対角成分のみで、分散の成分は  $1.0 \times 10^{-5}$  程度の大きさであった。6 時間目になると対角成分が縮小または負の成分が出現し、非対角成分も 210 行 210 列を境に 4 つの象限を持つような構造になった。これは右上の  $B(1, 211)$ 、 $B(211, 211)$ 、 $B(1, 410)$ 、 $B(211, 410)$  成分を頂点とする正方形の領域を第 1 象限とし左回りに 2、3、4 象限とすると、2、4 象限はスペクトルの実部で、1、3 象限は虚部に対応した成分を起源を持つ。このため対角成分を軸に線対称のような構造になっている。さらに 30、60 時間と経過すると共分散行列の成分は  $1.0 \times 10^{-9}$  から  $1.0 \times 10^{-10}$  程度まで縮小し、構造も各象限の左上を最高に対角方向に向けて成分の大きさが小さくなっていった。また、各象限の対角成分の中央部分 (凡そ 120、325 列または行) で正の成分、両頂点で負成分が卓越しているような構造を持つ。102 時間を過ぎると成分は  $1.0 \times 10^{-10}$  から  $1.0 \times 10^{-12}$  程度まで減衰し、各象限の右側と下側から時間経過に伴い成分がさらに小さくなった。

背景誤差共分散行列の構造の概観としては、60 時間目までは対角成分が非常に支配的であったが、102 時間目以降は非対角成分も対角成分と近い大きさになり、分散共分散の成分が初期の構造と比較し複雑化かつ  $10^{-5}$  程度縮小した。

## 6 考察

### 6.1 KF と変分法

本研究の出発点として、3Dvar、4Dvar といった変分法は、理想的な逐次同化手法かつ現在研究が進められている EnKF の原点である KF と比較し収束や精度がどのように異なるかという手法間の性能の差について簡易的な物理モデル及び低解像度のスペクトル大気大循環をパーフェクトモデル環境下で用いて検証することであった。両モデルでの実験において、KF が収束が最も早く、ついで 4DVar、3DVar という傾向が確認された。同化の精度においては、Daley の浅水方程式モデルでは KF と 4DVar が同程度かもしくは 4DVar が良好な結果を示した。しかし、S-Model においては 4DVar のシステム内の問題によって同化の精度が大きく改善し RMSE 値が KF と競る程度まで低下しなかつたものの、収束に要する時間は KF と同程度であり、この点は 4DVar の手法に共通する特徴が反映されたと思われる。最後に 3DVar だが、他 2 手法と比較し収束に時間を要し、精度も劣る。しかし、同じ 3DVar でも簡易浅水方程式モデルと比較し S-Model では同化をある程度の期間回すことで RMSE が KF の 8 割程度まで低下した。本節では、これらの手法間の精度差、収束時間差の要因、さらに順圧高度場の誤差分布や S-Model 4DVar のシステムの課題を考察していく。

まず手法間に生じる精度、収束時間の差異についてだが、手法のアプローチに起因していると考えられる。KF の最適化アプローチを数学的に考えると背景誤差共分散行列のトレースを最小化するように逐次同化・発展する。そのため、ステップを重ねることで自然と手法自身で誤差が小さくなるよう矯正している。背景誤差共分散を常にアップデートし、同化ごとに改善されたカルマンゲインで同化を行えることも早い収束に貢献していると考えられる。このため、パーフェクトモデル環境下では特に素早く真値に近い解析値にたどり着ける。一方で変分法の手法としてのアプローチは、最も確からしい値を、推定値の誤差評価の項と観測の誤差の項から成る評価関数を最適化して求めることであり、最小自乗法の考え方と同じである。このため、より良い真値が描く軌跡へのフィッティングにはある程度のデータ数を取り込んで観測値によって解析値を徐々に改善していく必要がある。つまり、各同化サイクルごとで真値へ漸近するように改善できる程度が、KF の方がより劇的である。3DVar では同化時間でのみ観測値を取り入れて上記のフィッティングを行っており、且つ、B の項は基本的に変動しないため、必然的に次の解析値が改善されるには KF よりも長い時間観測を取り込んで同化させることが求められる。4DVar に関しては同化ウィンドウ内の複数の観測データでもってフィッティングを行っているため、解析値、解析値から作られる予報

値がより真値に近いトラジェクトリーをとるようになる。このため 3DVar よりも精度よく収束も早くなると考えられる。また、線形浅水モデルはモデルが線形であったため、より 4DVar に都合の良い条件であり、KF に勝る収束時間と精度を出したと考えられる。

RMSE だけでなく順圧高度場の誤差分布にも着目すると、手法ごとに誤差の空間分布が異なっていることが明らかである。3DVar は同化開始直後は広範囲で順圧高度場の解析値が真値より高い赤もしくは低い青の領域が大きく広がり、やがてこれら誤差が、比較的大きな円形状に散在するようになる。また、全体的に誤差の負偏差の領域が支配的である。一方 4DVar は、これらの正偏差と負偏差の誤差領域が同化開始から交互に存在し、全体的に濃いシェードが時間経過とともに高緯度地域から中緯度方向に「くの字」形に存在するようになる。KF は 3DVar と 4DVar の中間のような分布の状態から、北半球の全体的に経度方向に薄くのっぺりとした赤と青の誤差領域が交互に存在するようになる。これらの特徴から、3DVar の解析値を物理空間に射影させると、大域的な誤差を評価していることが推定される。対して 4DVar による解析結果を物理空間に戻すと、トラフとリッジに乗った誤差を大きく評価する傾向にあるという特徴が考えられる。また KF においては、3Dvar のように経度方向に誤差分布が広がりながらも、4DVar のようにトラフからリッジまでの領域に交互に低偏差と高偏差の領域が存在するようになっている。ここから、流れ依存な背景場の影響を取り入れられる手法ほど、スペクトルモデルで波数に乗せた誤差は、物理空間で波の山と谷の領域において正偏差と負偏差は交互に存在するように誤差として反映されることが推察される。また、同化サイクルが進み精度の高い解析値が出力されるほど、物理空間上では誤差分布の領域が 経度方向にのっぺりとするのではないかと考察される。

最後に、S-Model における 4DVar の問題点について述べる。Daley の線形浅水方程式のモデルではモデルが線形かつ非常にシンプルであったためモデル演算子及び接線形演算子の作成が容易であった。4DVar においてはモデル演算子及び接線形演算子の作成精度も同化性能に影響することが一般的に知られている。S-Model では複数の項をまとめてモデル演算子にし、毎時間この接線形近似をとってヤコビ行列を作成しているように見える。4Dvar を作るにあたって、毎 1 時間あたりのモデル演算子を作成し、毎時間の接線形演算子を作成する必要がある。この毎時間あたりのモデル演算子作成が上手く行かず、評価関数の観測の誤差を評価する項で正しくフォワードモデルが作成できていないのではないかとと思われる。アジョイント自体には問題はないため、今後の S-Model における 4DVar の運用にはモデルへの理解を深め、正しくモデル演算子、そして接線形演算子を作成していく必要がある。

## 6.2 Hybrid 化の影響

Hybrid 化により 3DVar、4DVar の精度が向上することは多くの先行研究で示されていることだが、アンサンブルまたは EnKF のアンサンブル計算による背景誤差共分散ではなく、KF によって作成された背景誤差共分散を与えて流れ依存な B にすることで同化性能を検証する実験は過去ほとんど行われいない。そこで KF による Hybrid 化がどのように同化に影響を与えるかという点を検証することが本研究の目的であった。結果的には KF による Hybrid でも同化性能は向上することが検証された。また本研究では、3DVar の方が 4DVar よりも Hybrid 化による同化の改善が著しかった。さらに、両変分法において Hybrid 率が同化性能に与える影響が異なっていた。本節では、両変分法での Hybrid 化と Hybrid させる割合に差異が生じた要因について考察を行う。ここで考察を加える前に、4DVar には未だ改善の余地がある点为本結果に影響を与えている可能性も本来考慮すべきであるが、仮に完成し同化の精度は改善しても Hybrid 化による影響は同じであると仮定をおく。

まず両変分法の Hybrid 化で類似した特徴から考える。3DVar、4DVar 共に完全に流れ依存な B にしてしまうことで、一旦収束後に発散してしまう問題が出てきた。背景誤差共分散の構造についての結果を織り交ぜて考えると、KF が同化を始めて 1 週間を越えて作られる背景誤差共分散は、対角成分でも  $\mathcal{O}10^{-10}$  から  $\mathcal{O}10^{-11}$  程度のオーダーが最も大きな成分で、開始時より  $\mathcal{O}10^{-4}$  以上小さくなっている。60 時間、102 時間程度が適切な背景誤差共分散だとすると、過小に推定されている。つまり逆行列が非常に大きくなっている。これが評価関数の推定値の誤差の項を著しく課題にし、観測によって得られる補正を無視して予報モデルが自己暴走に陥り現実と合わなくなってきたことが原因だと考えられる。

3DVar では固定の B を KF の 102 時間か 60 時間目にするかで配合率による精度に違いが生じている。これは 60 時間目の背景誤差共分散の方が 102 時間目のそれより大きいため、どの程度流れ依存な成分を加えるかが変化してくるためだと考えられる。60、102 時間の両ケースから、若干流れ依存な成分を多く入れた Hybrid 率で同化が他の割合と比較し改善されているが、これはある程度良く評価された B を含みながら、その場その場に合わせて作成された背景誤差共分散を若干多く反映した方が 3DVar が流れ依存の性質を上手く同化結果に反映できるのではないかと思われる。一方で 4DVar では流れ依存な背景誤差共分散を多く B に加えると同化が進むにつれ同化精度が悪化していく結果が出ている。これはアジョイントによって十分に解析値に間接的に背景場とモデルの発展の影響を伝えているにも関わらず、B の逆行列を最適な状態から大きくしてしまうことで、このアジョイントの特性を消し去ってしまうのではな

いかと考えられる。

これらの点から Hybrid 化によって 3DVar と 4DVar の挙動に差異が生じた原因はアジョイントの存在が関わってくるのではないと思われる。また、Hybrid の割合は固定の B によっても異なるため一意的ではないが、3DVar はやや flow dependent な背景誤差共分散を多くし、4DVar では最適な固定の B を基本として、これに若干 flow dependent な背景誤差共分散を加えたほうが Hybrid の性能をより引き出せるのではないと思われる。

## 7 結論

本研究においては、簡易的な物理モデルにおいて変分法を開発した後、本学の低解像のスペクトル GCM である順圧 S-model (Tanaka 2003) を用いて KF と変分法の同化性能の比較、及び、前例がほとんど存在しない KF との Hybrid 化を行い現在主流の手法について同化性能を検証した。また、新型の 4DVar である Self-Adaptive 4DVar (S4DVar) を開発し、一般的な GCM では計算資源的に不可能であるが、理論的に背景誤差共分散を変分法自身で矯正していく新手法を実際の数値計算で実験した。

本研究の第 1 段階としては Daley の線形浅水方程式モデルを用いて Lorenz モデルのような簡易的で理想的な環境下で 3DVar、4DVar を開発し、KF と変分法の同化性能を検証した。 $3 \times 3$  の非常に簡易的なモデルであるためアジョイントを比較的容易に組み込むことが可能であり、またモデルの簡易性・線形性によって多くの観測情報を取り込み同化する 4DVar の長所が如実に現れた。第 2 段階として GCM にも第 1 段階で開発した変分法を導入して性能実験を行なったが、S-model は GCM の中では非常に次元が抑えられかつシンプルであるが、モデルに若干ではあるが非線形性が存在するためモデル演算子が厳密には線形でなくなり 4DVar を開発するにあたって難易度が上がった。また今まで KF と一意的に表記してきたが S-model では厳密には EKF となる。EKF はモデル演算子の接線形近似で誤差共分散行列を発展させている、つまり、KF の誤差発展の式のテーラー展開をしている。しかし S-model は線形性が強いいため、一次近似しても高次の項を無視しても影響が非常に微小であり、線形不安定が生じにくいと考えられるため KF とほぼ同値であると見て良い。このような低解像の GCM で実験を実施したがパーフェクトモデル環境下で実験を行なっているため、観測誤差や背景誤差共分散を再解析データを真値にする実験と比較し容易に与えられるという長所が存在した。このため KF が収束・同化精度共に優れ、4DVar も収束は早く、3DVar がこれに続くという多くの先行研究で出されたこれら手法の同化結果と類似したものであった。ここから本来は観測演算子やそのほかのパラメータを調整して GCM で同化実験を行うが、本実験のように複雑なパラメータチューニングなしでも、手法ごとの特性は同一であることが結果的に導かれる。

次に KF との Hybrid であるが、EnkF と異なり、KF はアンサンブル予報が全滅することで発生するフィルターダイバージェンスが存在しないため、安定的に流れ依存な背景誤差共分散を変分法の固定された B へ供給することが可能ではないかという仮説のもと研究が出発した。変分法に最適な背景誤差共分散を KF であらかじめ固定の B として与え、そこに 3DVar では流れ依存な背景誤差共分散を若干多く、対して 4DVar ではこの流れ依存を比率として少なく与えることで Hybrid しない場合よりも同化の

精度は向上した。このことから、KF による Hybrid も有効であることがパーフェクトモデル環境下では証明された。しかし、KF は収束してから十分に時間が過ぎてしまうと背景誤差共分散が著しく小さくなってしまいう課題がある。インフレーションによる背景誤差共分散の過小評価を防ぐには限界があるため、長期の Hybrid 同化を考える際は、一定期間経過した KF を適切な背景誤差共分散の値を与えて回し直し、過小または過大な背景誤差共分散を作成しないようにしなければならない。

適切な背景誤差共分散の作成が変分法で重要なことは上記で何度も述べられてきたが、4DVar に関しては陽ではないが解析解の式ではモデルの時間発展の影響を  $B$  へ伝えており、同化システム内だけで流れ依存な  $B$  に間接的に変更していることが言える。しかし、4Dvar では  $B$  は Hybrid しない限り常に一定である。そこで新型の 4DVar ではこの解析式の中で更新された  $B$  を保存し次の同化ではこれを  $B$  として使用するようにシステムを構築した。結果的には Hybrid と比較して精度の改善が大きくはないものの同化性能の向上に貢献した。これは結果の章で述べたように KF のリヤプノフ方程式のような厳密な時間発展の式に即してアップデートさせていないからである。また大規模な GCM での運用は現実出来ではない。これは  $B$  をモデル演算子または接線系演算子の時間積分で挟み込んでいるため、行列積の計算となり計算時間を多く要してしまうためである。つまり S-model のモデルの特性が可能とした手法である。今後この手法を基礎研究として発展させるためには、 $B$  の更新の際の行列計算に掛ける計算を抑える必要がある。変分法では  $B$  は実対象正則行列であるため、これをベクトルに置き換え、モデル演算子も粗行列であれば、計算時間をカットできるのではないかと期待する。

以上より、本研究では現業向けの研究が圧倒的に多いデータ同化研究の中で、手法の基礎的な部分を様々な実験で検証した貴重な基礎研究のとなった。KF との Hybrid は GCM では現時点では現実的ではないものの、低解像度かつ、KF の行列積部分が疎行列であれば、グラフカラーリング (Gebremedhin et. al 2005) などの手法によって計算を格段に抑えることが可能であるため、計算機の性能が更に向上する将来を考えたい際、挑戦してみる価値のあるテーマであると考えられる。

## 謝辞

本研究にあたり、指導教官である筑波大学計算科学研究センター田中博教授には、懇切丁寧な御指導をしていただきましたこと感謝致します。更に、アメリカの Rice University Computational and Applied Mathematics の Prof. Heinkenschloss と Ph.D 学生の Caleb には、夏季のリサーチインターンで毎日親身にデータ同化の数学的なアプローチやプログラムのコーディングについて学ばせていただき、本研究に多大なる貢献をもたらして頂きました。また、本研究の原点である Hybrid については、データ同化の最前線にいらっしゃる Penn State の Prof. Fuqing Zhang 氏から、KF やデータ同化の基礎については、同じくデータ同化の世界を牽引されている理化学研究所の三好建正先生から直接アドバイスや指導を講演会や講義の機会に頂いたことは本研究にとって必要不可欠なものでありました。気象庁気象研究所の斉藤和雄先生、國井勝研究員、JAMSTEC の Le Duc 研究員にはデータ同化の研究の基礎知識について本年度を通して様々アドバイスを与えて下さったこと感謝致します。

さらに同大学生命環境学群地球学類の植田宏昭教授、日下博幸教授にはポスター発表等で貴重なご意見を頂きました。また、同大学計算科学センター研究員である山上晃央さん、同大学院生命環境科学研究科の寺内俊平さんには研究についてアドバイスを頂きました。

本論文は以上のデータ同化、気象学及び応用数学の最前線で研究されている方々と田中研究室に所属する方々の親切丁寧なご指導、ご協力のもとに完成いたしました。心より深く感謝いたします。

## 参考文献

- Anderson, J., L., and Anderson, S., L., 1999: A Monte Carlo implementation of the non-linear filtering problem to produce ensemble assimilations and forecasts, *Mon. Wea. Rev.*, **127**, 2741-2758.
- Andersson, E., et. al 1998: The ECMWF implementation of three-dimensional variational assimilation (3D-Var). III: Experiment results, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **124**, 1831-1860.
- Angela, B., 2010: Tangent linear and adjoint models for variational data assimilation, *University Reading Data Assimilation Training Course.*, ECMWF, pp 1-30.
- Bannister, R., N., 2008: A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation. I: Characteristics and measurements of forecast error covariances, *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **134**, 1951-1970.
- Byrd, R., D., Lu, P., Nocedal., J., and Zhu, C., 1995: A limited memory algorithm for bound constrained optimization, *SIAM J. Sci. Comput.*, **16**, 5, 1190-1208.
- Charney, J., Halem, M., and Jastrow, R. 1969: Use of incomplete historical data to infer the present state of the atmosphere, *J. R. Atmos. Sci.*, **26**, 1160-1163.
- Courtier, P., T. and Hollingsworth, A., 1994: A strategy for operational implementation of 4D-Var using an incremental approach, *Quar. J.R. Meteor. Soc.*, **120**, 1367-1387.
- Daley, R., 1991: Atmospheric Data Analysis, *Cambridge University Press.*, Cambridge, pp 376-384.
- Gebremedhin, A., H., Manne, F., and Pothen, A., 2005: What color is your Jacobian? graph coloring for computing derivatives, *SIAM Rev.*, **47**, 4, 629-705.
- Holm, E., 2016: Background error covariance modeling, *ECMWF Data Assimilation Training Course.*, ECMWF, pp 1-40.
- Evensen, G., 1994: Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics, *J. Geophys. Res.*, **99C5**, 10143-10162.

- Hamill, T., M., and Snyder, C., 2000: A hybrid ensemble Kalman filter-3D variational analysis scheme, *Mon. Wea. Rev.*, **128.8**, 2905-2919.
- Jonathan, P., and Zhang, F., 2015: Systematic comparison of four-dimensional data assimilation methods with and without the tangent linear model using hybrid background error covariance: E4DVar versus 4DEnVar., *Mon. Wea. Rev.*, **143.5**, 1601-1621.
- Kalman, R., 1960: A new approach to linear filtering and predicted problems, *J. Basic Eng.*, **82**, 35-45.
- Kalnay, E., Li, H., Miyoshi, T., Yang, S., C., and Ballabrera-Poy, J., 2007: 4-D-Var or ensemble Kalman filter? *Tellus*, **59A**, 758-773.
- Kasahara, A., 1977: Numerical integration of the global barotropic primitive equations with hough harmonic expansions, *J. Atom. Sci.*, **34**, 5, 687-701.
- Kasahara, A., and Puri, K., 1981: Spectral representation of three-dimensional global data by expansion in normal mode functions, *Mon. Wea. Rev.*, **109**, 37-51.
- Kondo, K., and Tanaka, H., L., 2009: Comparison of the extended Kalman filter and the ensemble Kalman filter using the barotropic general circulation model, *J. Meteor. Soc. Japan*, **87**, 347-359.
- Lewis, J., and Derber., J., 1985: The use of adjoint equations to solve a variational adjustment program with advective constraint, *Tellus*, **37A**, 309-322.
- Liu, D., C., and Nocedal, J., 1989: On the limited memort BFGS method for large scale optimization, *Math. Prog.*, **45**, 503-528.
- Nocedal, J., 1980: Updating quasi-newton matrices with limited storage, *Math. Comp.*, **35**, 151, 773-782.
- Tanaka, H. L. and D. Nohara 2001: A Study of Deterministic Predictability for the Barotropic Component of the Atmospher, *Science Rep.*, **22A**, Institute Geoscience, University of Tsukuba, 45 pp.
- Parish, D., F., and Derber J., C., 1991: The national meteorological center's spectral statistical-interpolation analysis system, *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 1747-1763.

- Tanaka, H., L., and Kasahara, A., 1988: Application of vertical mode expansion to problems of baroclinic instability, *J. Atmos. Sci.*, **46**, 4, 489-510.
- Tanaka, H., L., 1985: Energetics analysis of the observed and simulated general circulation using three-dimensional normal mode expansions, *Tellus*, **38A**, 5, 412-428.
- Tanaka, H., L., and Kung E., C., 1989: Energetics examination of winter simulations in the northern hemisphere, *Mon. Wea. Rev.*, **117**, 9, 2019-2040.
- Tanaka, H., L., and Sun, S., 1990: A study of baroclinic energy source for large-scale atmospheric normal modes, *J. Atmos. Sci.*, **47**, 2674-2695.
- Tanaka, H. L., 2003: Analysis and modeling the Arctic Oscillation using a simple barotropic model with baroclinic eddy forcing. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 1359-1379.
- Zhang, M., and Zhang, F., 2008: E4DVar: Coupling an ensemble Kalman filter with four-dimensional variational data assimilation in a limited-area weather prediction model, *Mon. Wea. Rev.*, **140**(2), 587-600.
- Zang, X., and Malanotte-Rizzoli, P., 2003: A comparison of assimilation results from the ensemble Kalman filter and the reduced-rank extended Kalman filter. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **10**, 477-491.
- 淡路 敏之, 池田 元美, 石川 洋一, 蒲地 政文, 2009: データ同化 観測・実験とモデルを融合するイノベーション, 京都大学学術出版会, pp 15-125.
- 大塚 崇晴 2015: 北極振動の指数の正負とブロッキングの発生頻度の関係, 筑波大学生命環境学群地球学類卒業論文, pp 19-20.
- 小倉 義光, 1978: 気象力学通論, 東京大学出版会, pp 249.
- 近藤 圭一, 2007: 順圧大気大循環モデルによるアンサンブル・カルマンフィルタの実験, 筑波大学生命環境学群地球学類卒業論文, pp 1-115.
- 田中 博, 2015: 地球流体力学講義資料, 第 5 章-第 8 章.
- 露木 義, 2012: データ同化の変遷, 神戸大学大学院理学研究科特別講義, pp 1-25.
- 三好建正, 本田 有機 2007: 気象学におけるデータ同化, *天気*, 54(4), 15-18.
- 三好 建正, 2017: 大気科学特別講義資料 データ同化編.



# RMSE Experiment 1

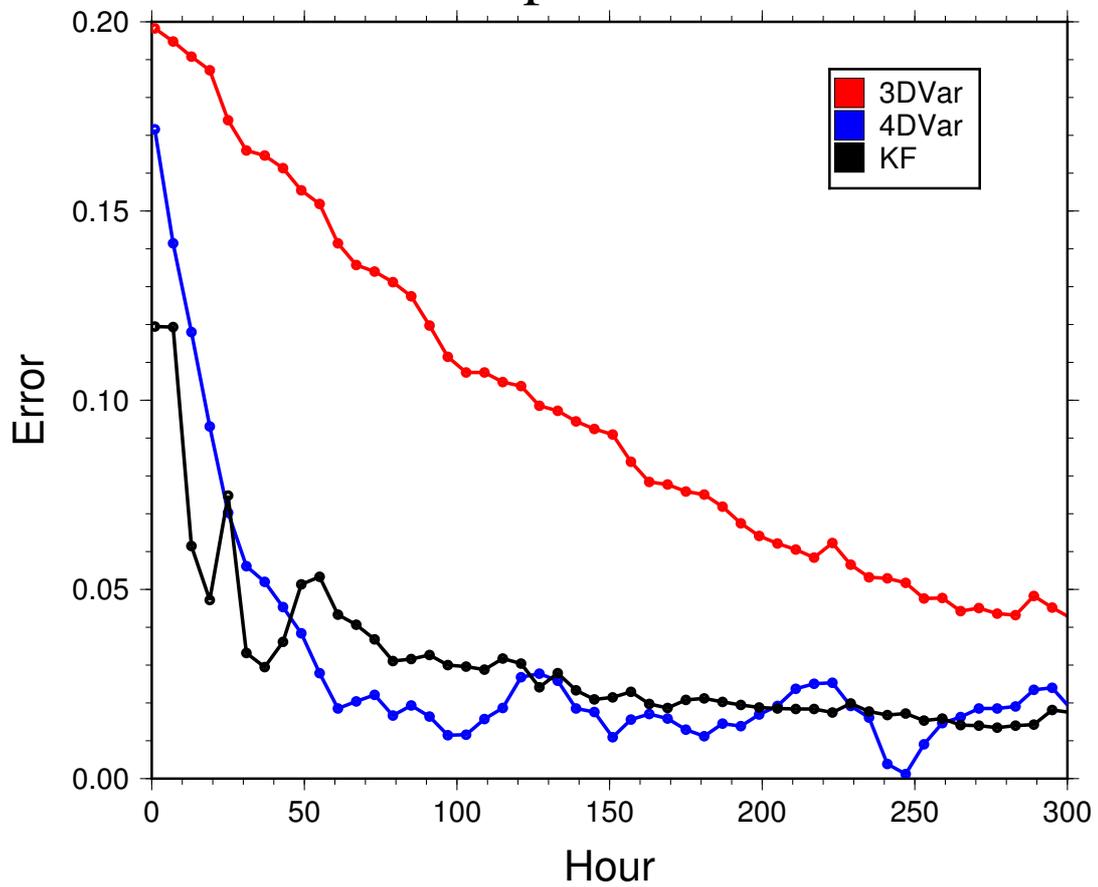
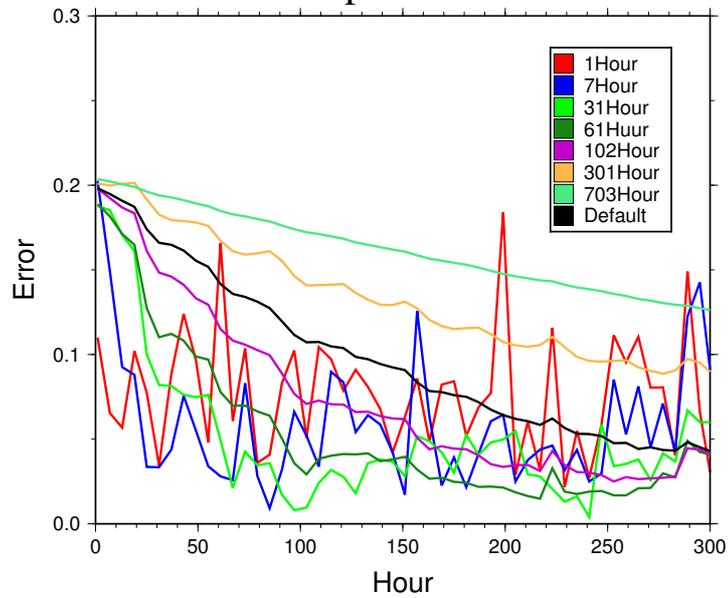


図 1: 線形浅水方程式モデルにおける KF (黒実線)、3DVar (赤実線)、4DVar (青実線) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。点は同化時の値。

## RMSE(3DVar) Experiment 2



## RMSE(4DVar) Experiment 2

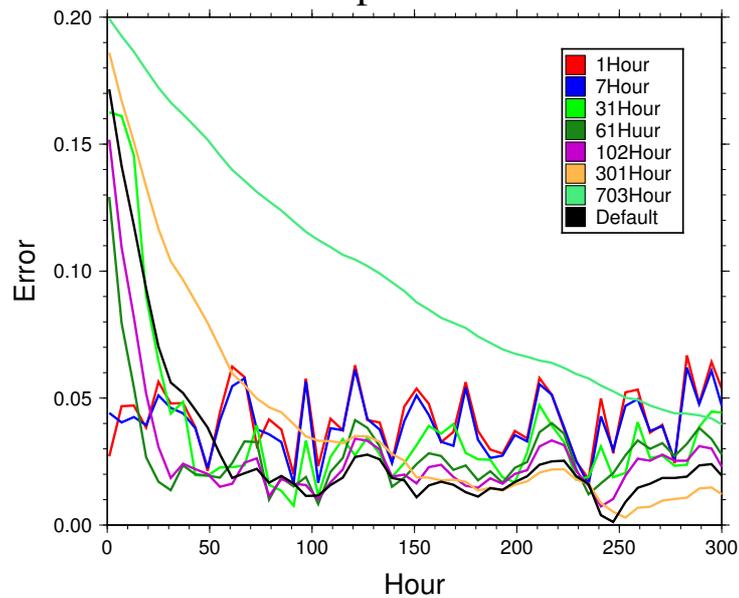


図 2: 線形浅水方程式モデルにおける Hybrid-3DVar (上)、Hybrid-4DVar (下) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線の色はそれぞれ、1 時間目 (赤)、7 時間目 (青)、31 時間目 (緑)、61 時間目 (深緑)、103 時間目 (紫)、301 時間目 (橙)、703 時間目 (ライトグリーン)、default (黒) 時における KF による背景誤差共分散を  $B$  とした際の結果。

# RMSE Experiment 3

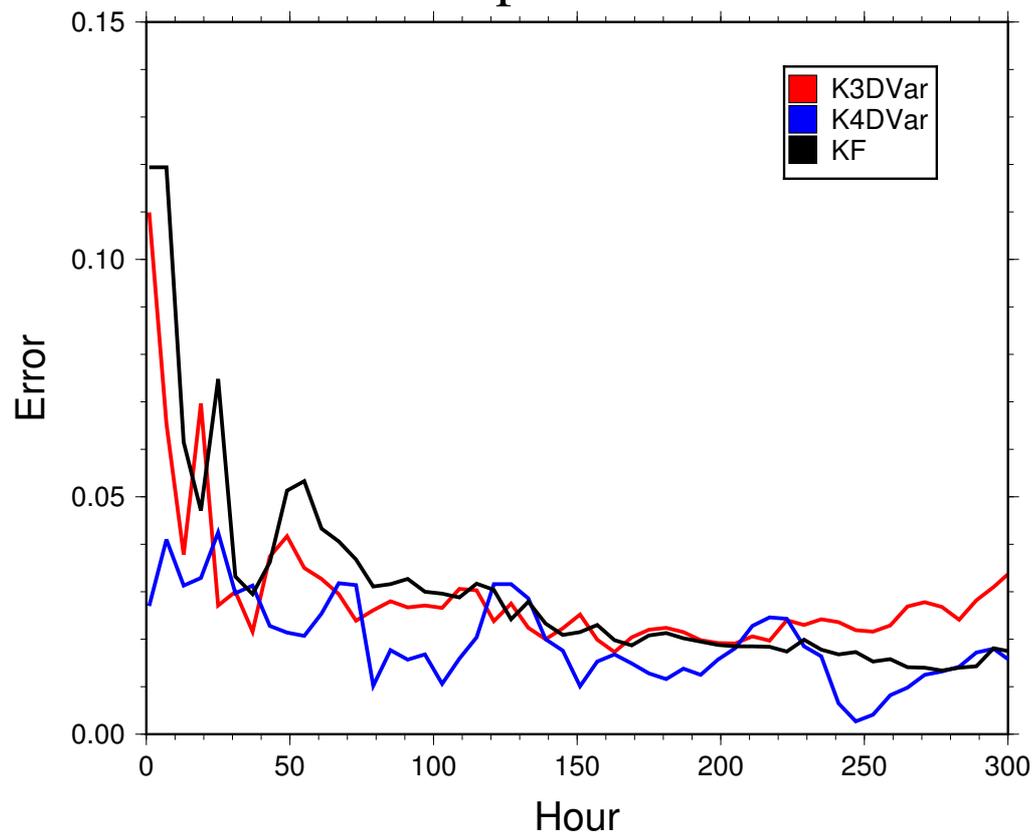
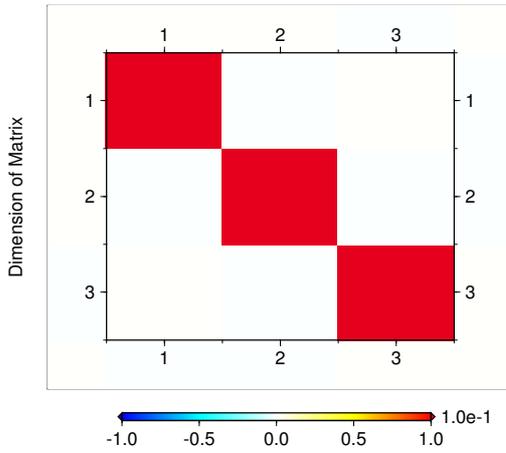


図 3: 線形浅水方程式モデルにおける KF (黒実線)、Hybrid-3DVar / K3DVar (赤実線)、Hybrid-4DVar / K4DVar (青実線) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。

### Background Error Cov.

Time (KF = 1 hr)

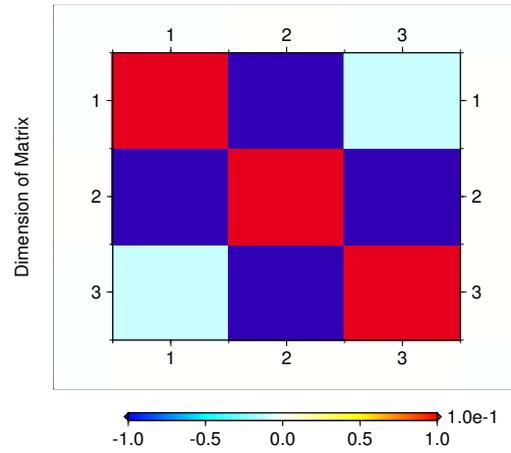
Dimension of Matrix



### Background Error Cov.

Time (KF = 7 hr)

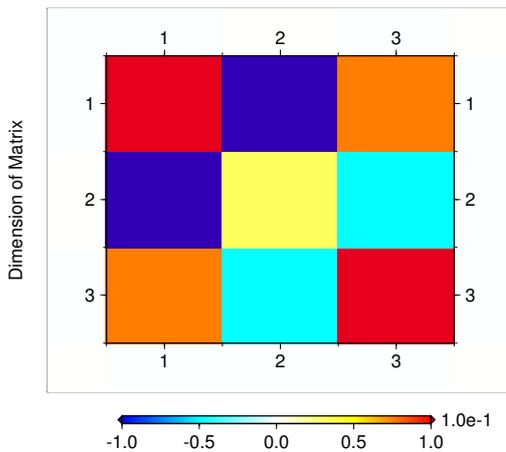
Dimension of Matrix



### Background Error Cov.

Time (KF = 31 hr)

Dimension of Matrix



### Background Error Cov.

Time (KF = 61 hr)

Dimension of Matrix

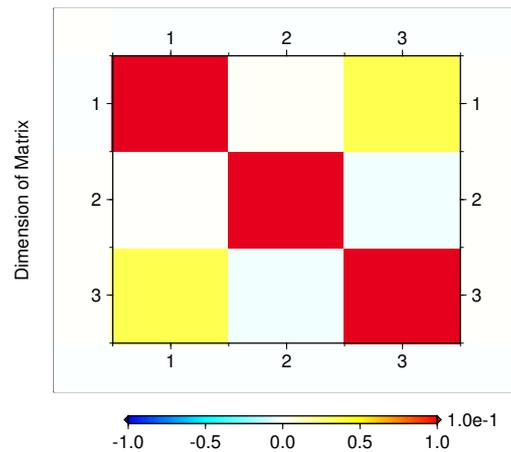
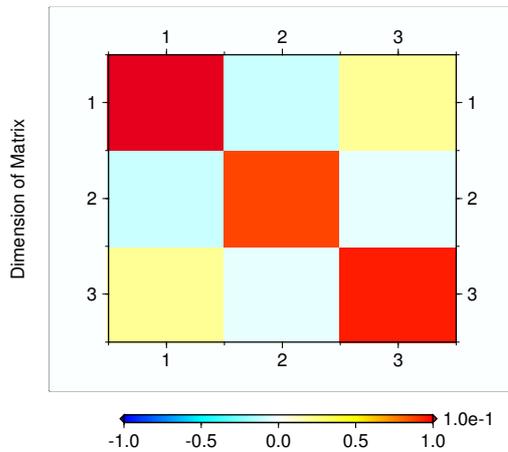


図 4: 線形浅水方程式モデルにおける  $3 \times 3$  の背景誤差共分散行列の構造. カラーシェードは 10 倍して規格化した分散共分散値. 縦軸・横軸ともに行列の行と列番号.

### Background Error Cov.

Time (KF = 103 hr)

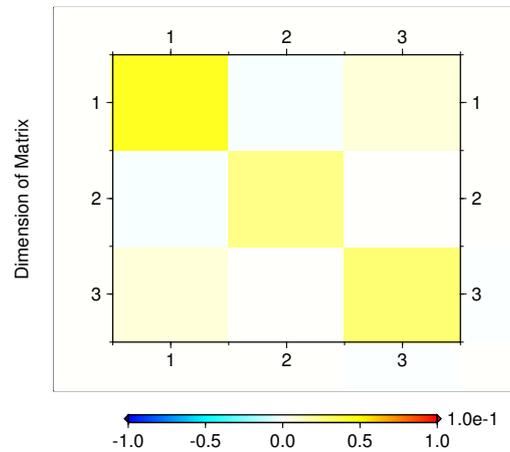
Dimension of Matrix



### Background Error Cov.

Time (KF = 301 hr)

Dimension of Matrix



### Background Error Cov.

Time (KF = 702 hr)

Dimension of Matrix

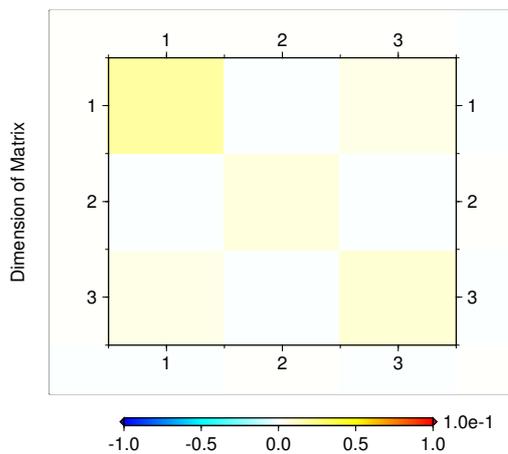


図 5: 線形浅水方程式モデルにおける  $3 \times 3$  の背景誤差共分散行列の構造. カラーシェードは 0.1 倍して規格化した分散共分散値. 縦軸・横軸ともに行列の行と列番号.

## RMSE Smodel KF

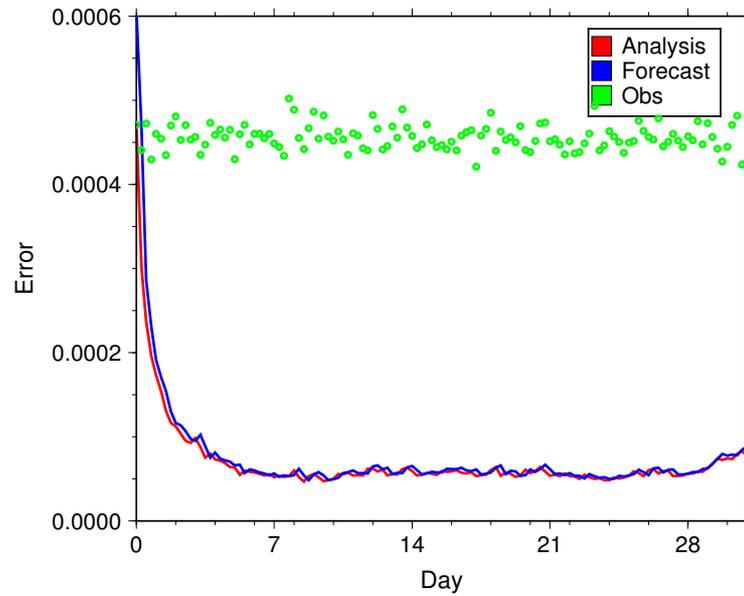


図 6: S-Model における KF の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間. 実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑).

## Trajectory(Smodel Kalman Filter)

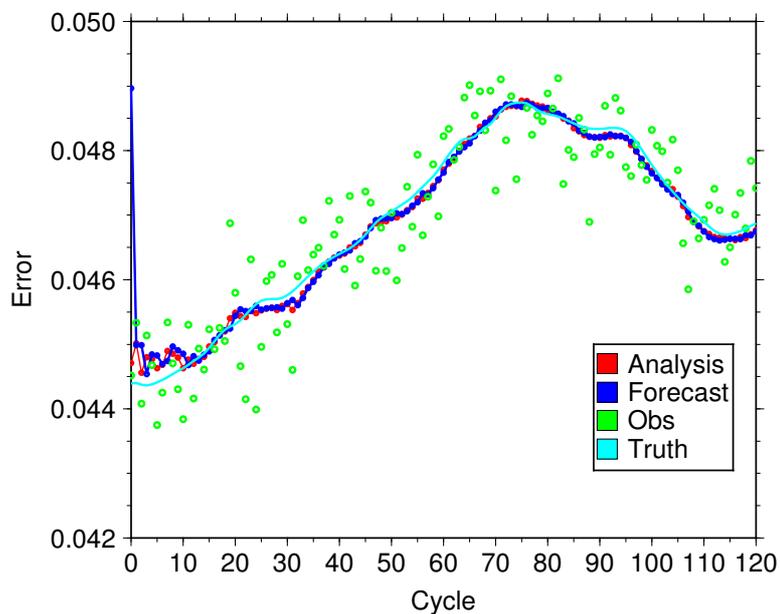
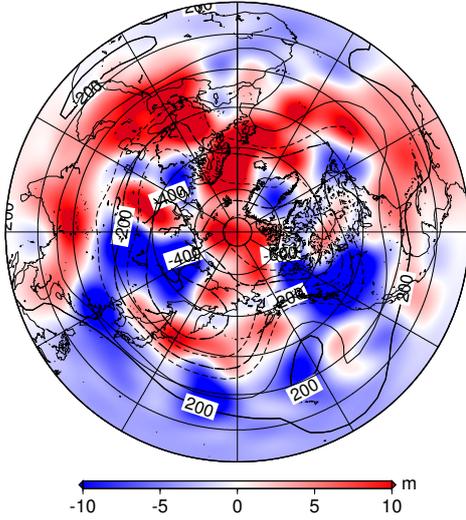


図 7: S-Model における KF の解析値の第一成分の軌跡の時系列変化。縦軸は解析値、横軸は同化開始からの経過時間. 実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、真値 (水色)、観測誤差 (緑).

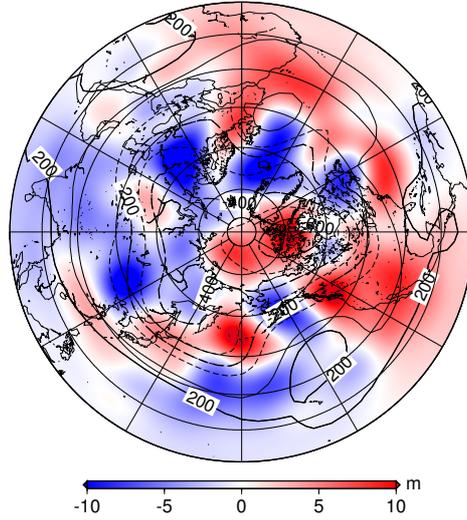
Barotropic Height (Kalman Filter)

18Z Jan 1 1950



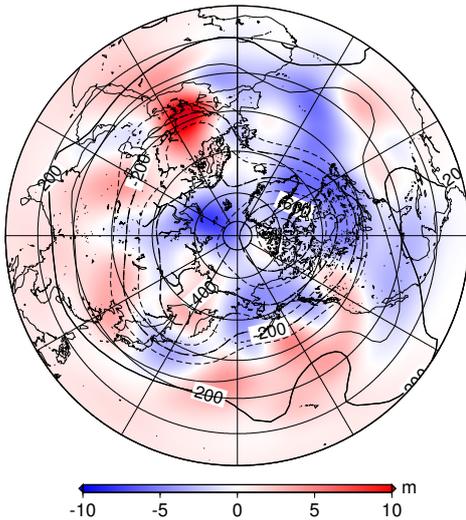
Barotropic Height (Kalman Filter)

18Z Jan 3 1950



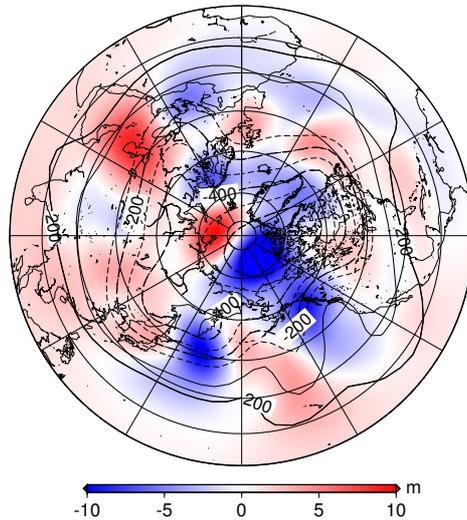
Barotropic Height (Kalman Filter)

18Z Jan 7 1950



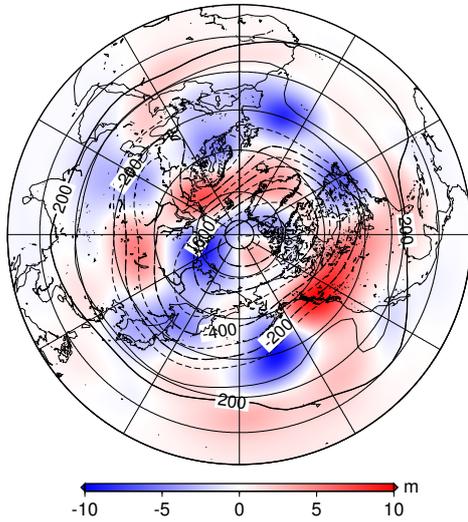
Barotropic Height (Kalman Filter)

18Z Jan 14 1950



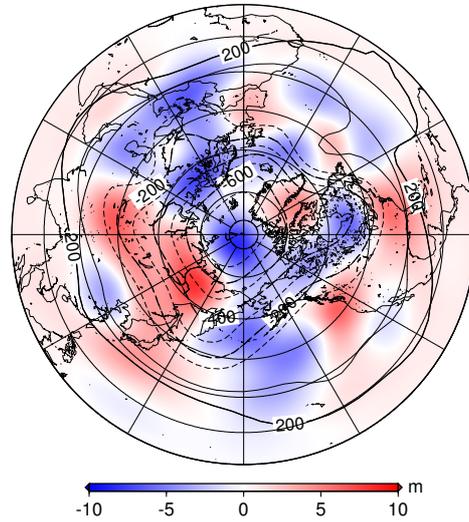
Barotropic Height (Kalman Filter)

18Z Jan 21 1950



Barotropic Height (Kalman Filter)

18Z Jan 28 1950



Barotropic Height (Kalman Filter)

18Z Jan 31 1950

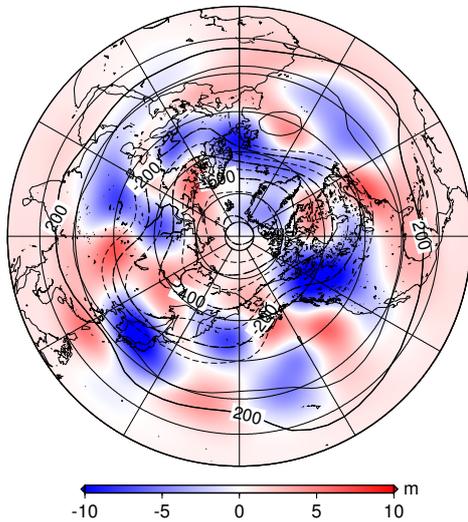


図 8: S-Model での KF による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

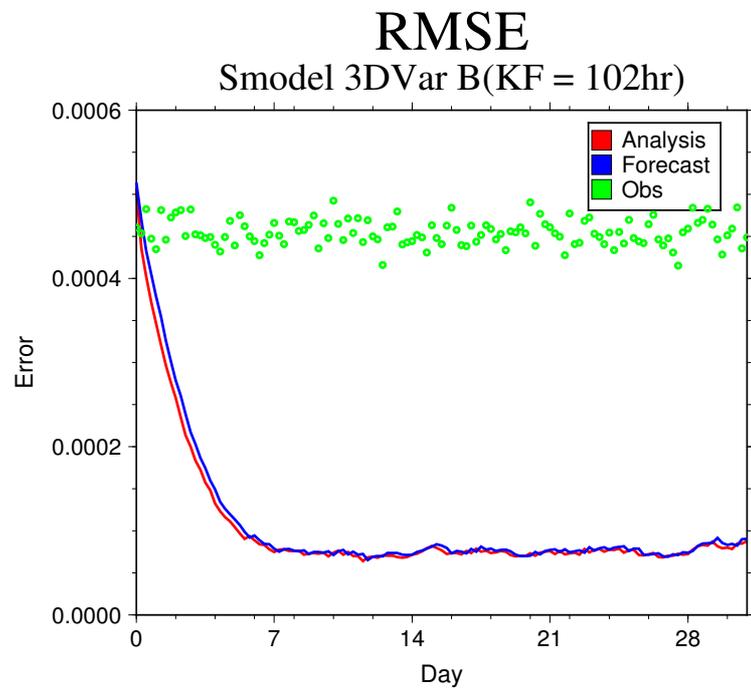


図 9: S-Model における 3DVar の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

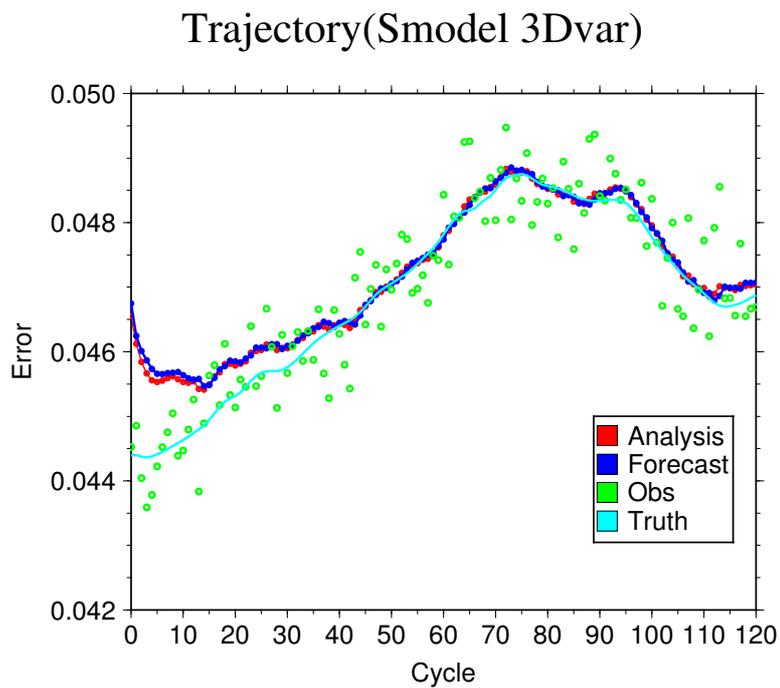
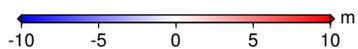
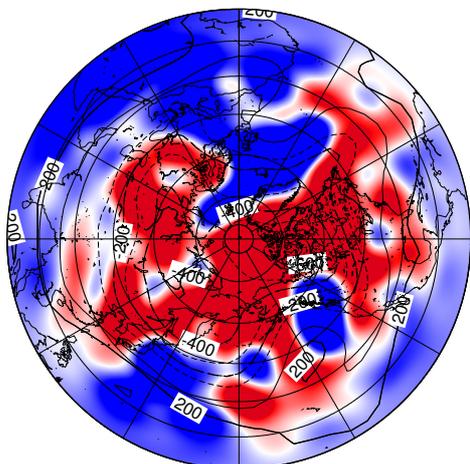


図 10: S-Model における 3DVar の解析値の第一成分の軌跡の時系列変化。縦軸は解析値、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、真値 (水色)、観測誤差 (緑)。

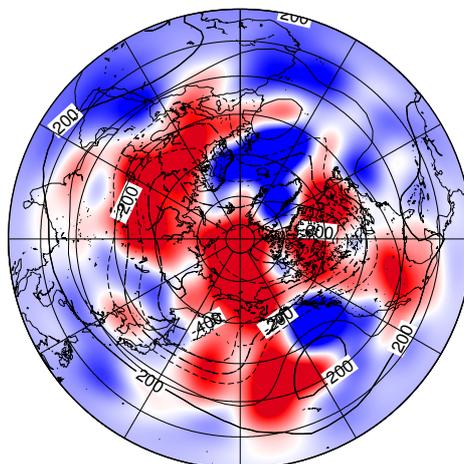
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 1 1950



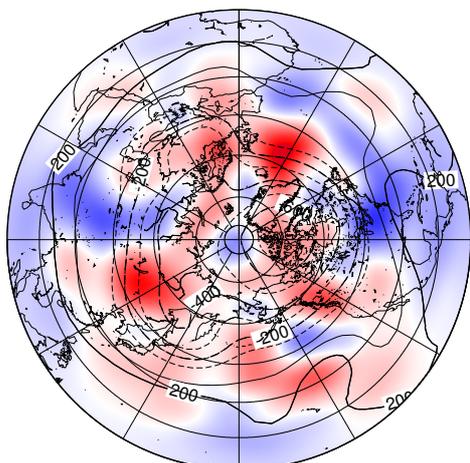
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 3 1950



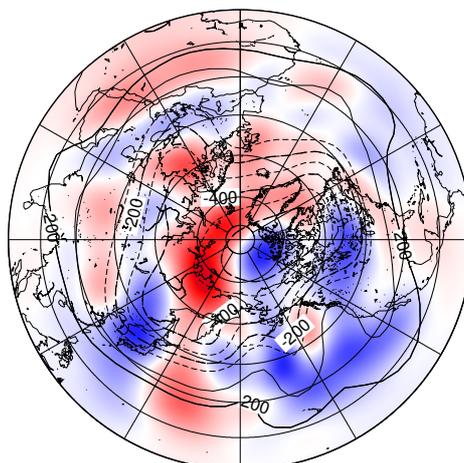
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 7 1950



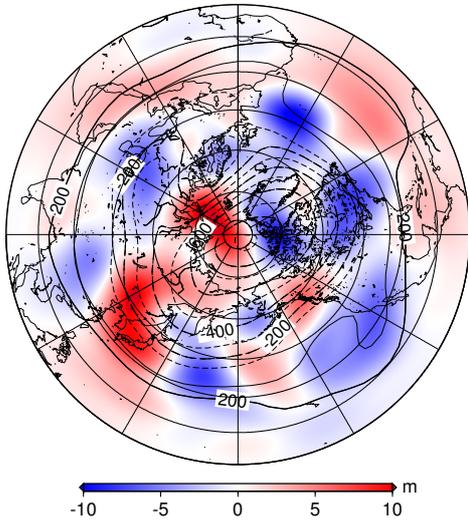
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 14 1950



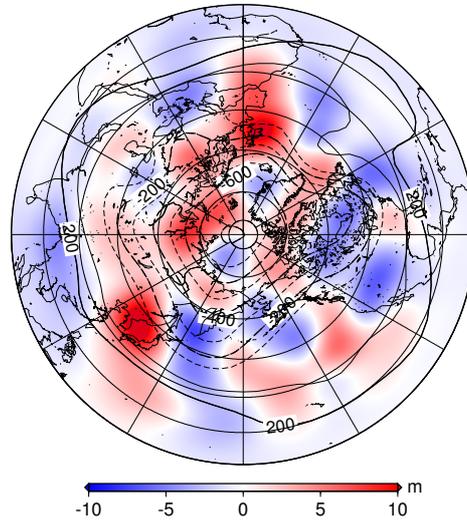
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 21 1950



Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 28 1950



Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 31 1950

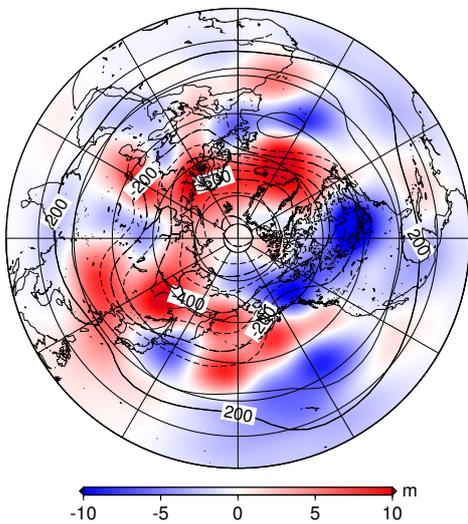


図 11: S-Model での 3DVar による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

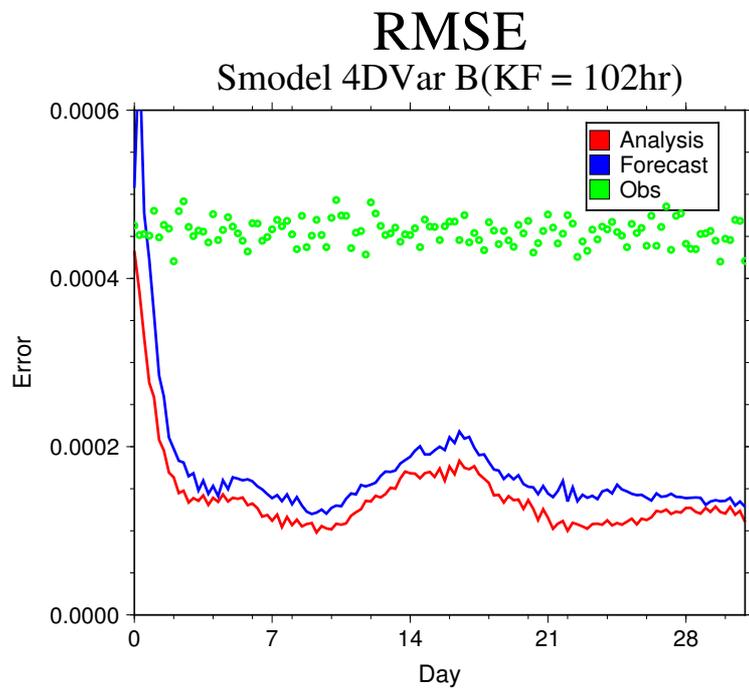


図 12: S-Model における 3DVar の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

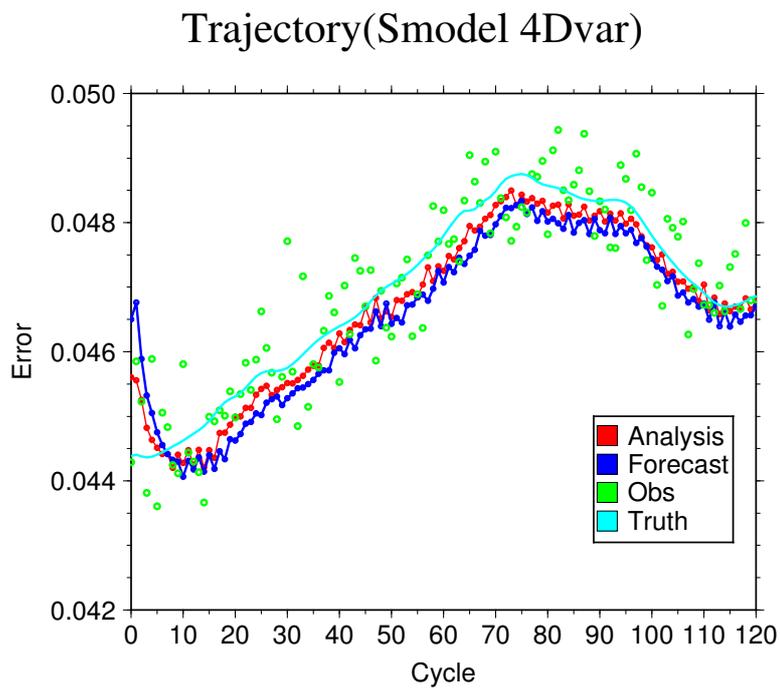
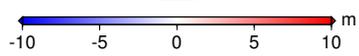
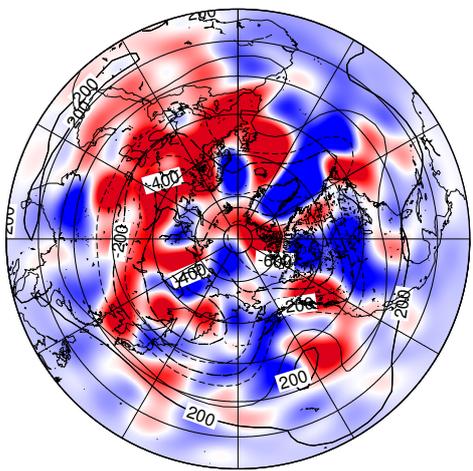


図 13: S-Model における 4DVar の解析値の第一成分の軌跡の時系列変化。縦軸は解析値、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、真値 (水色)、観測誤差 (緑)。

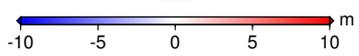
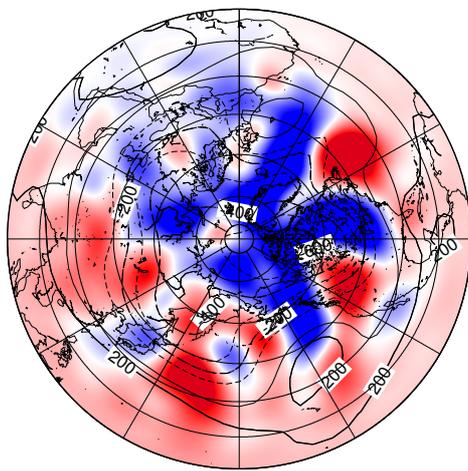
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 1 1950



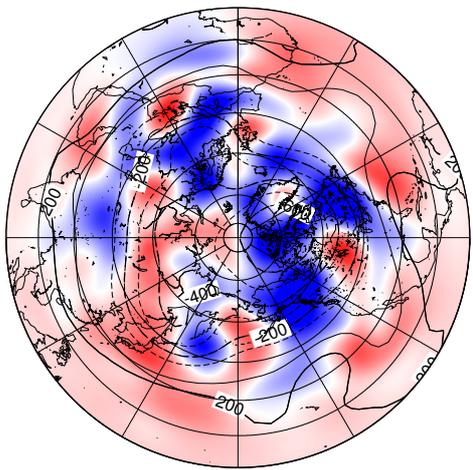
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 3 1950



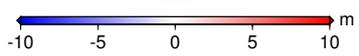
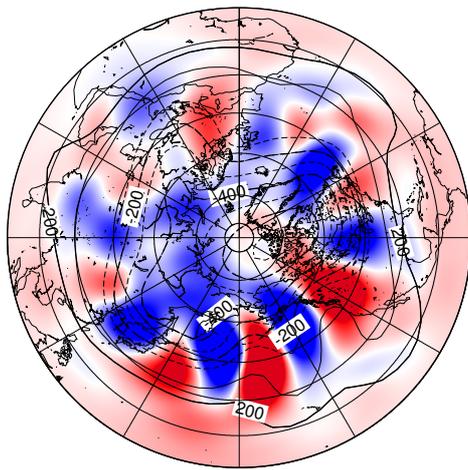
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 7 1950



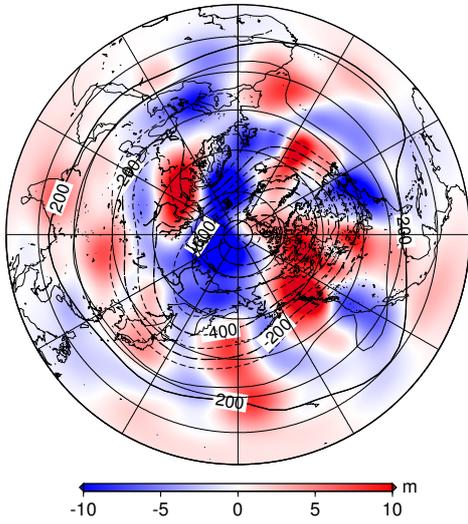
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 14 1950



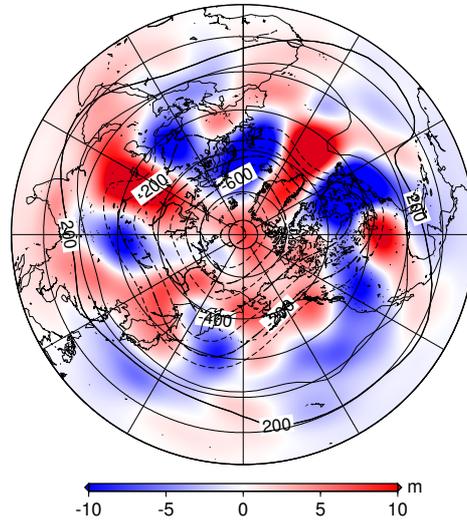
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 21 1950



Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 28 1950



Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 31 1950

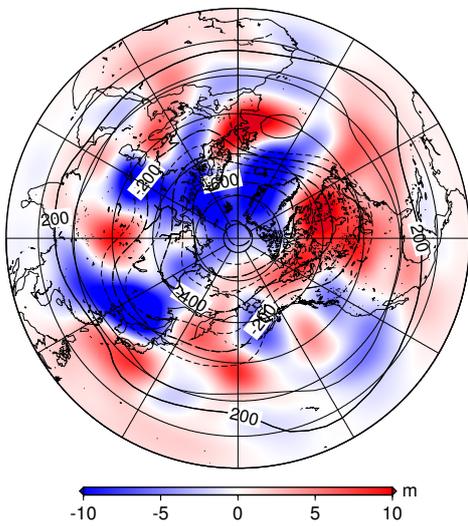


図 14: S-Model での 4DVar による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

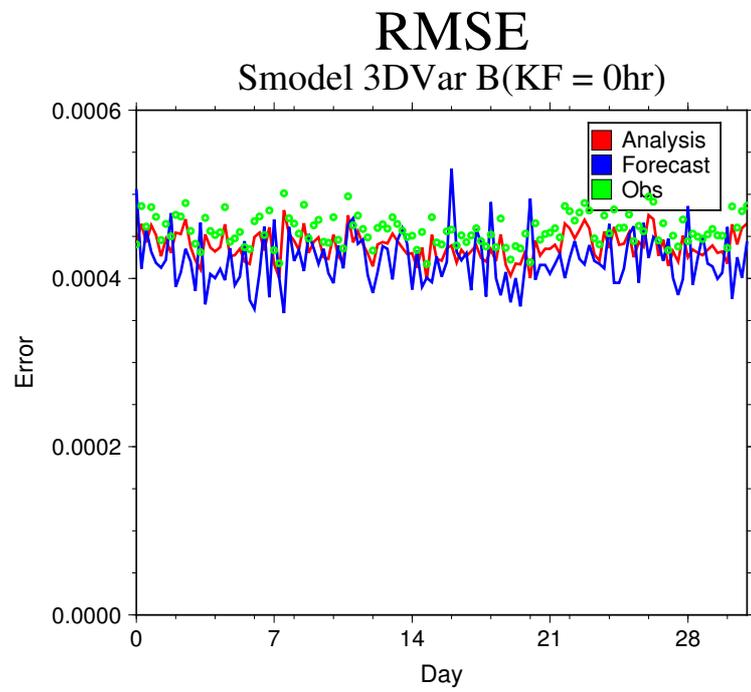


図 15: S-Model における 3DVar (KF が 0 時間目の背景誤差共分散を B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

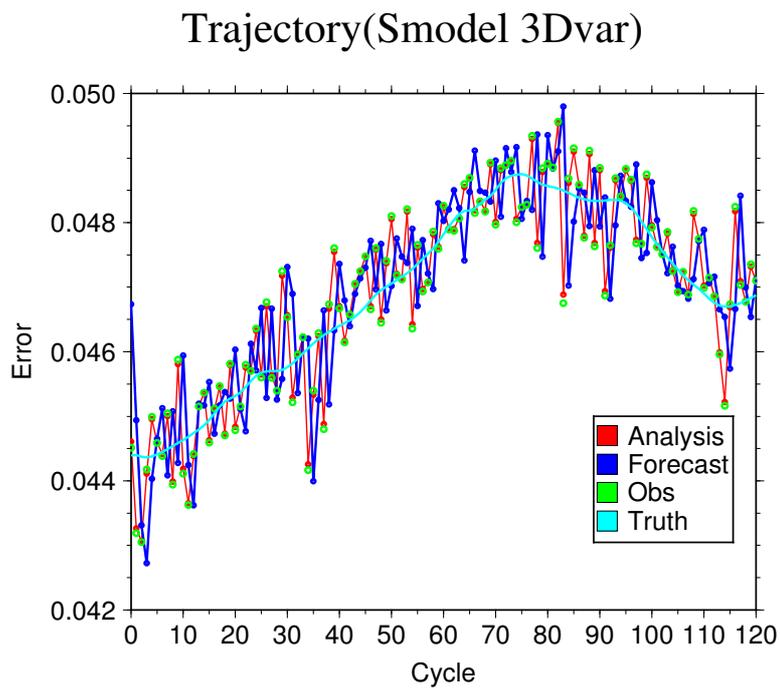
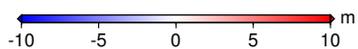
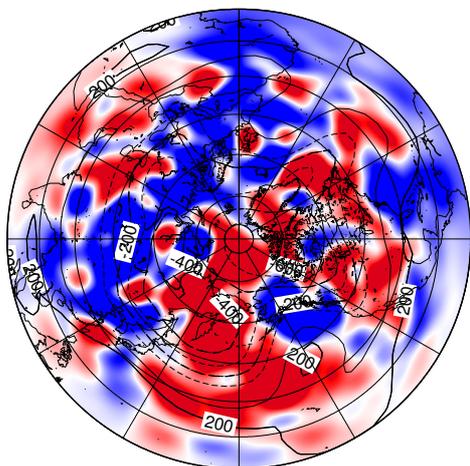


図 16: S-Model における 3DVar (KF が 0 時間目の背景誤差共分散を B とした) の解析値の第一成分の軌跡の時系列変化。縦軸は解析値、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、真値 (水色)、観測誤差 (緑)。

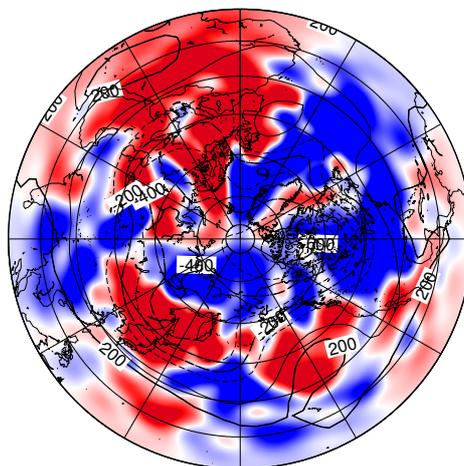
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 1 1950



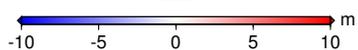
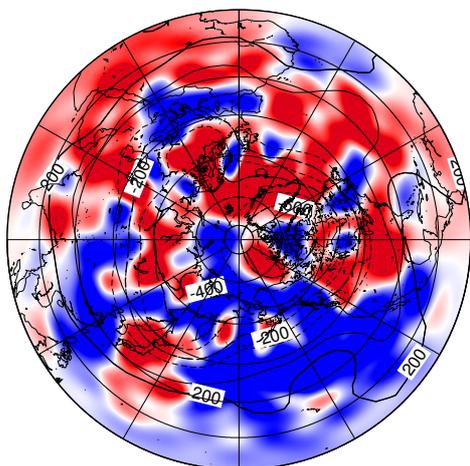
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 3 1950



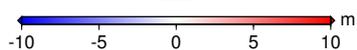
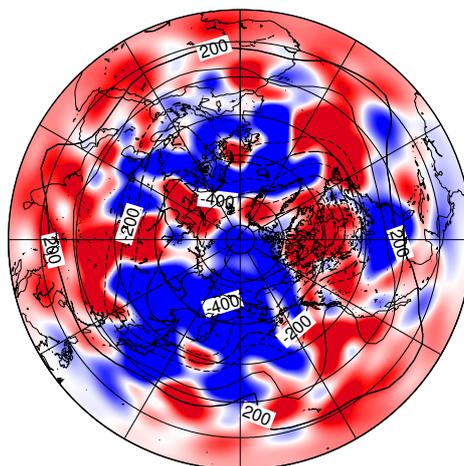
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 7 1950



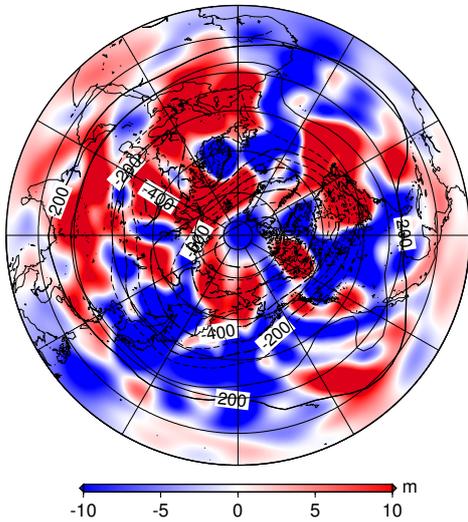
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 14 1950



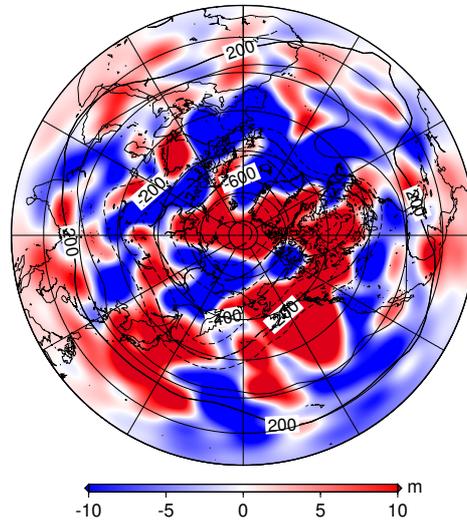
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 21 1950



Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 28 1950



Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 31 1950

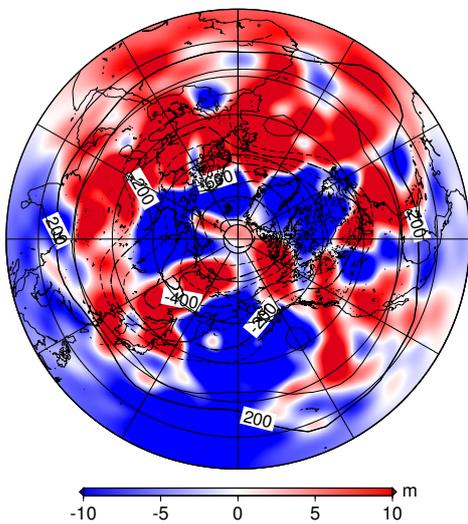


図 17: S-Model での 3DVar (KF が 0 時間目の背景誤差共分散を B とした) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

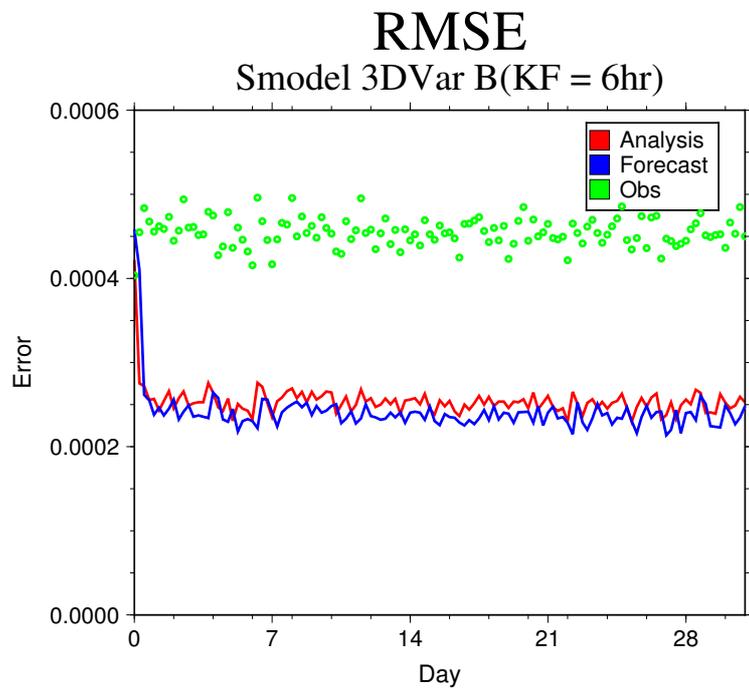


図 18: S-Model における 3DVar (KF が 6 時間目の背景誤差共分散を B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

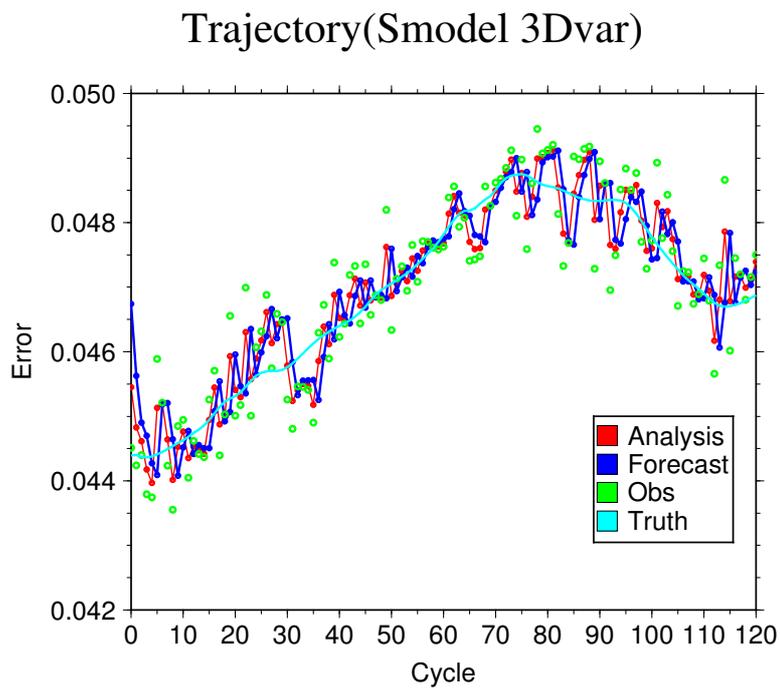
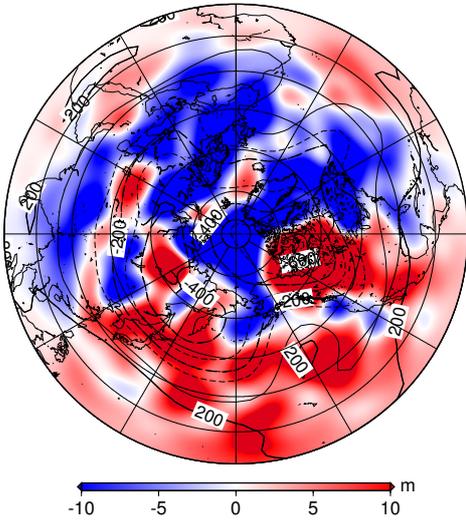


図 19: S-Model における 3DVar (KF が 6 時間目の背景誤差共分散を B とした) の解析値の第一成分の軌跡の時系列変化。縦軸は解析値、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、真値 (水色)、観測誤差 (緑)。

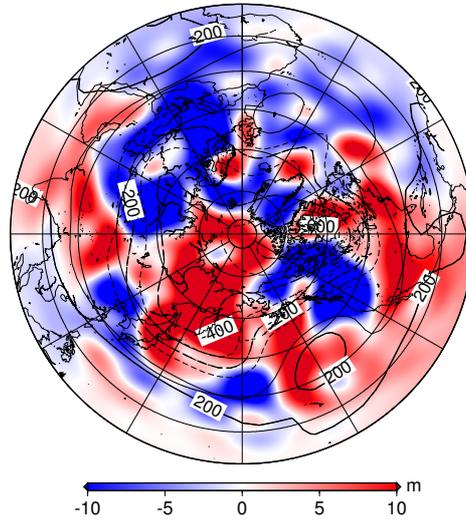
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 1 1950



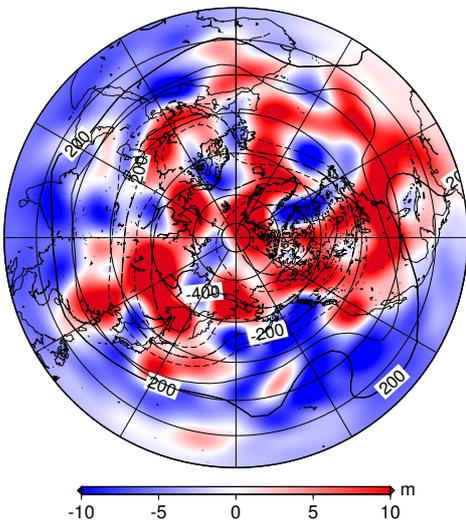
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 3 1950



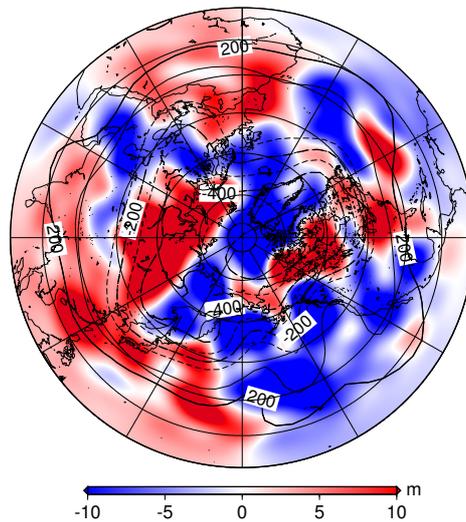
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 7 1950



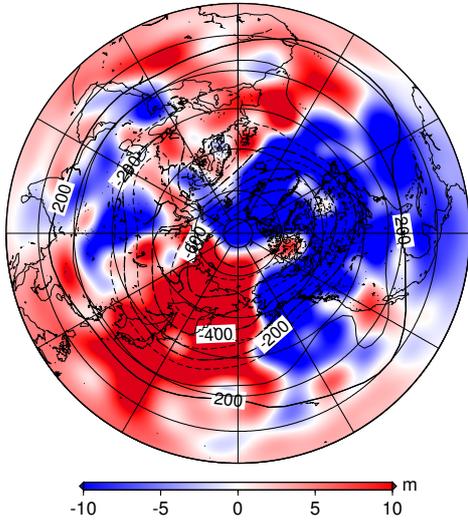
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 14 1950



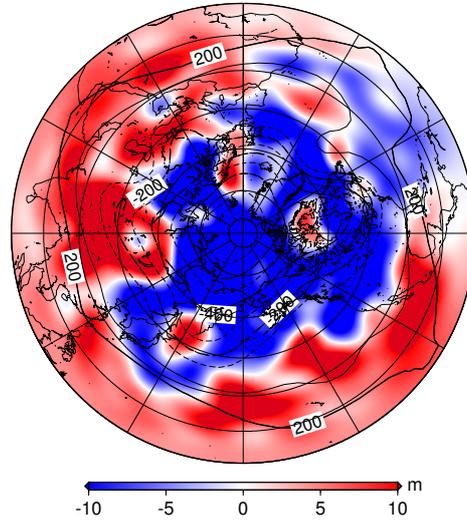
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 21 1950



Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 28 1950



Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 31 1950

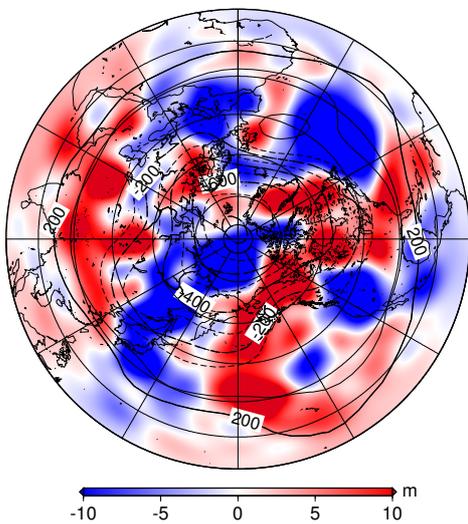


図 20: S-Model での 3DVar (KF が 6 時間目の背景誤差共分散を B とした) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

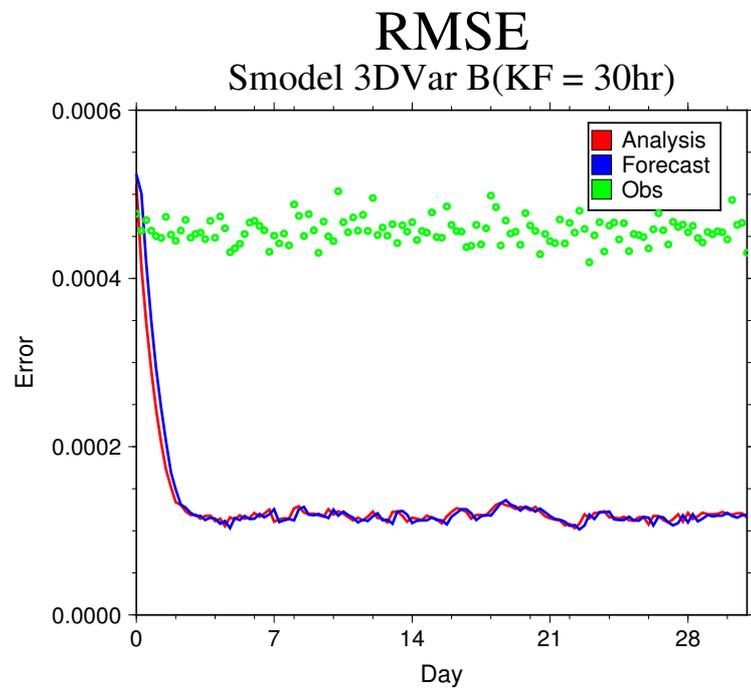


図 21: S-Model における 3DVar (KF が 30 時間目の背景誤差共分散を B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

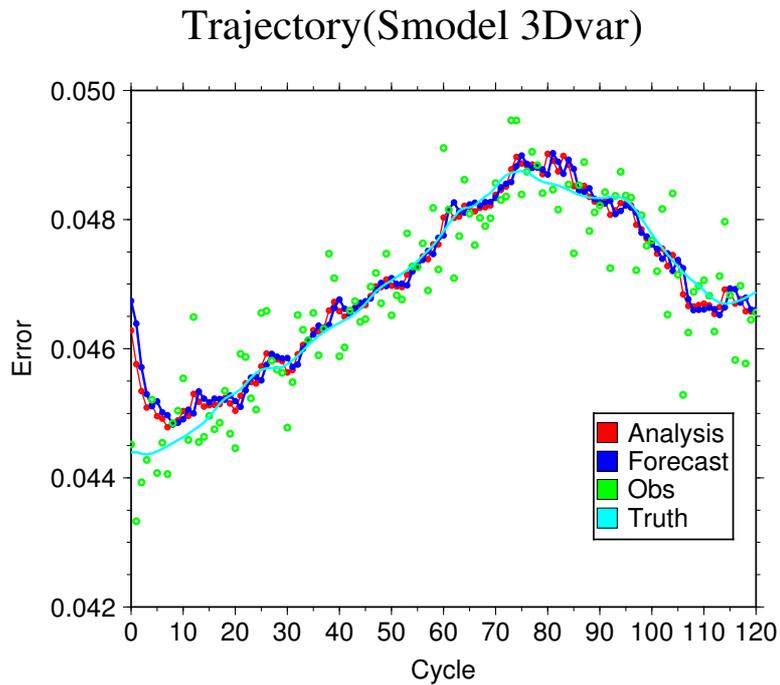
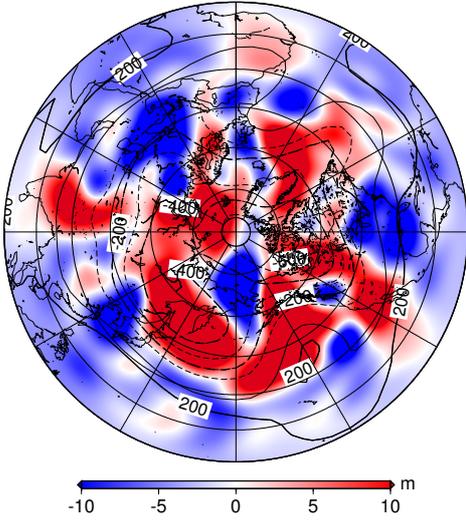


図 22: S-Model における 3DVar (KF が 30 時間目の背景誤差共分散を B とした) の解析値の第一成分の軌跡の時系列変化。縦軸は解析値、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、真値 (水色)、観測誤差 (緑)。

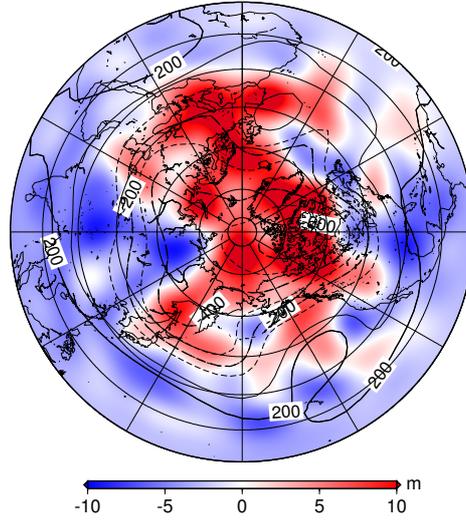
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 1 1950



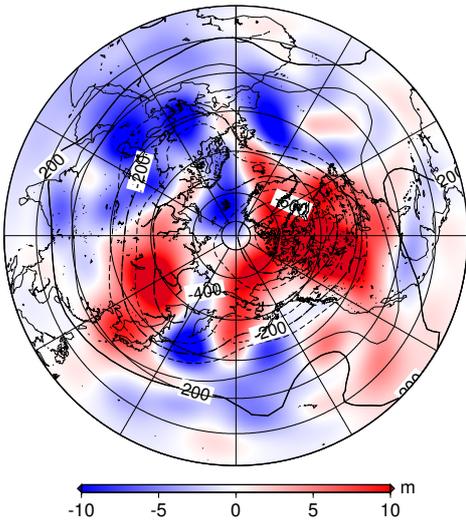
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 3 1950



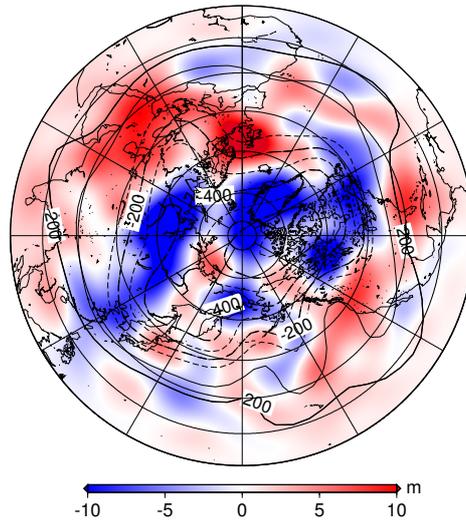
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 7 1950



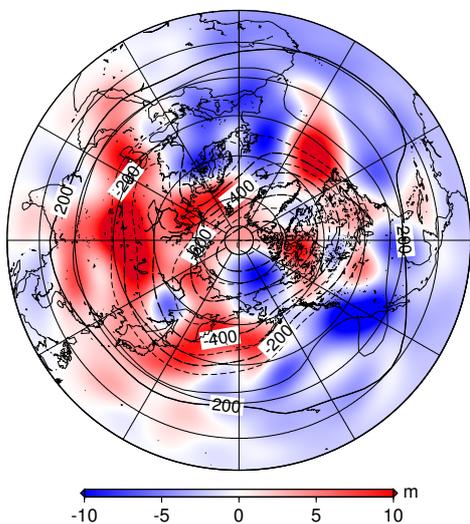
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 14 1950



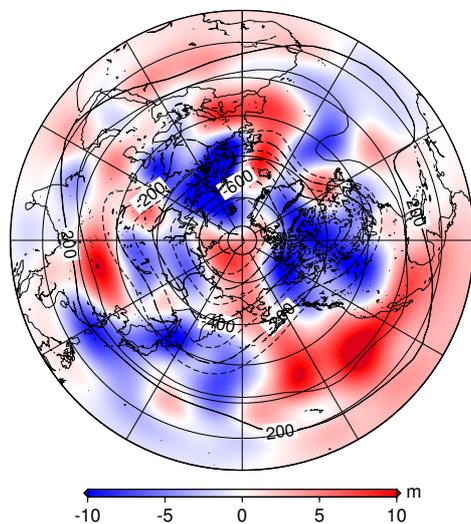
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 21 1950



Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 28 1950



Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 31 1950

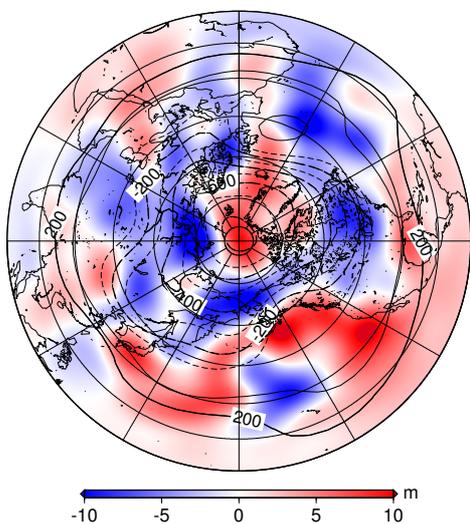


図 23: S-Model での 3DVar (KF が 30 時間目の背景誤差共分散を B とした) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

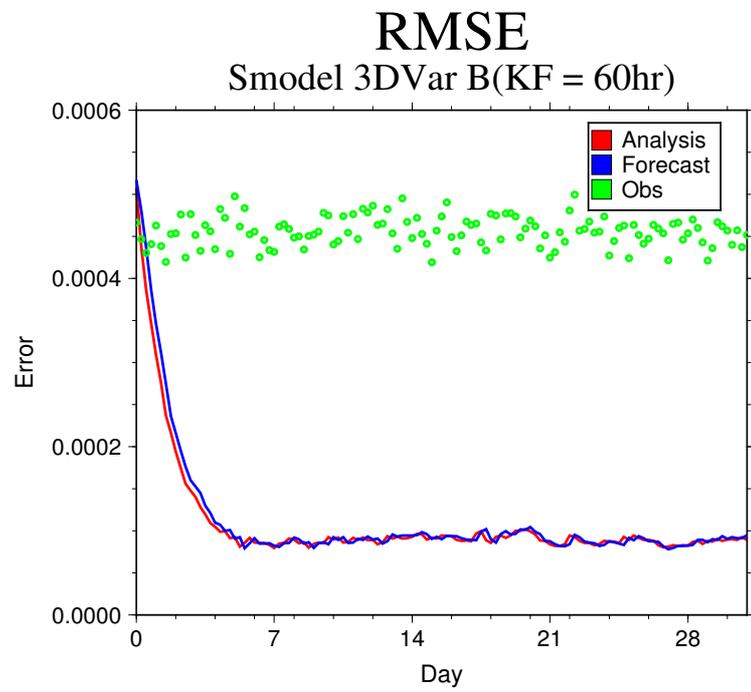


図 24: S-Model における 3DVar (KF が 60 時間目の背景誤差共分散を B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

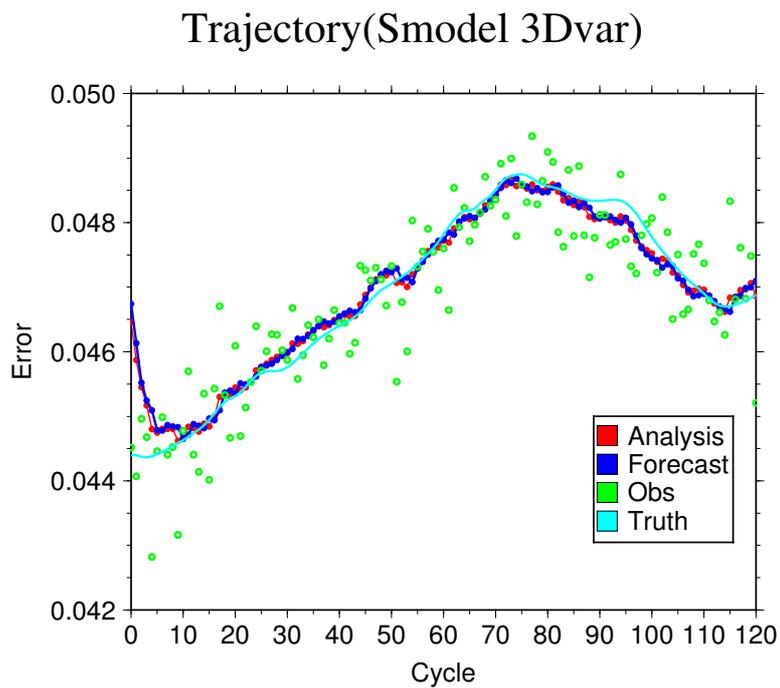
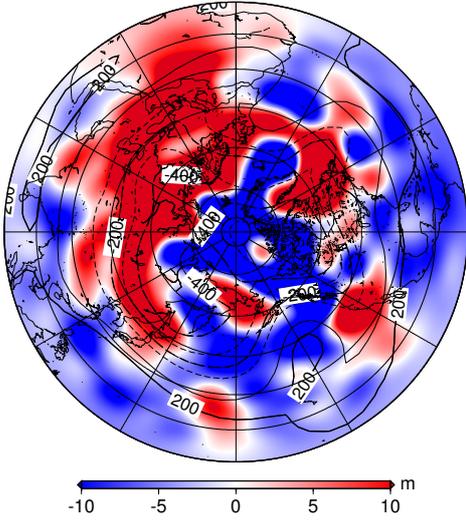


図 25: S-Model における 3DVar (KF が 60 時間目の背景誤差共分散を B とした) の解析値の第一成分の軌跡の時系列変化。縦軸は解析値、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、真値 (水色)、観測誤差 (緑)。

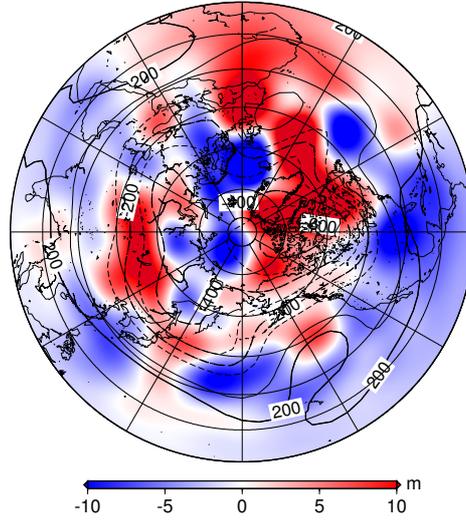
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 1 1950



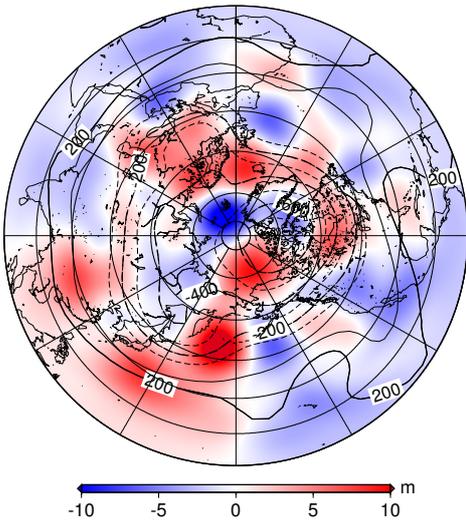
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 3 1950



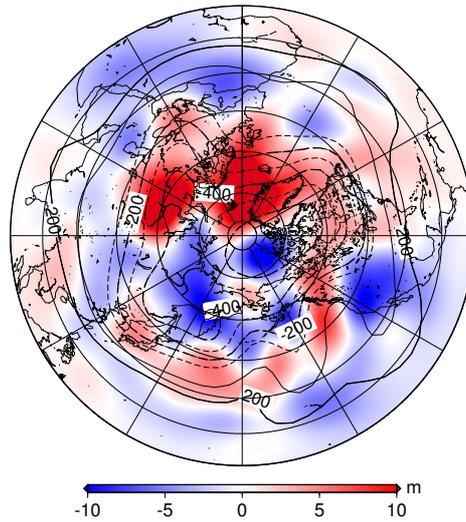
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 7 1950



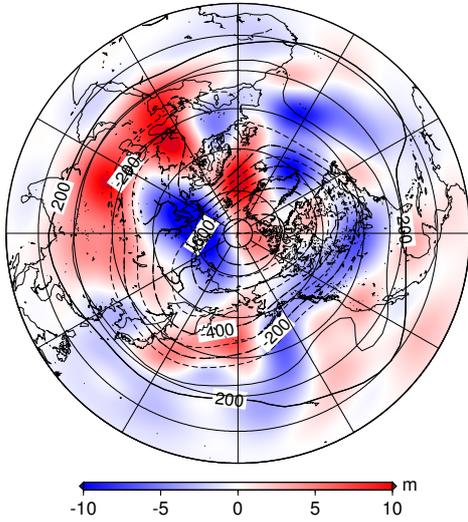
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 14 1950



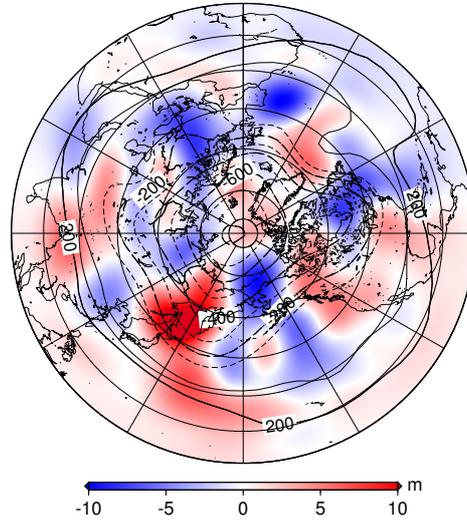
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 21 1950



Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 28 1950



Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 31 1950

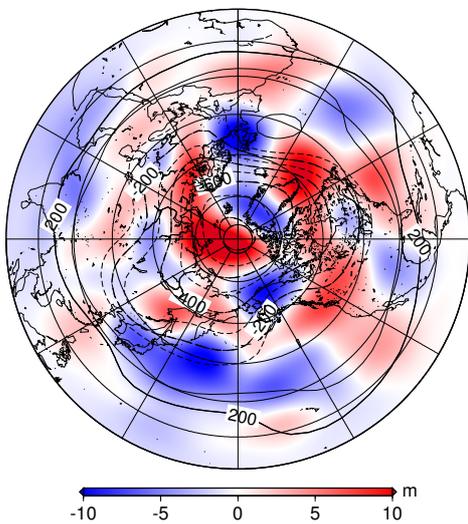


図 26: S-Model での 3DVar (KF が 60 時間目の背景誤差共分散を B とした) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

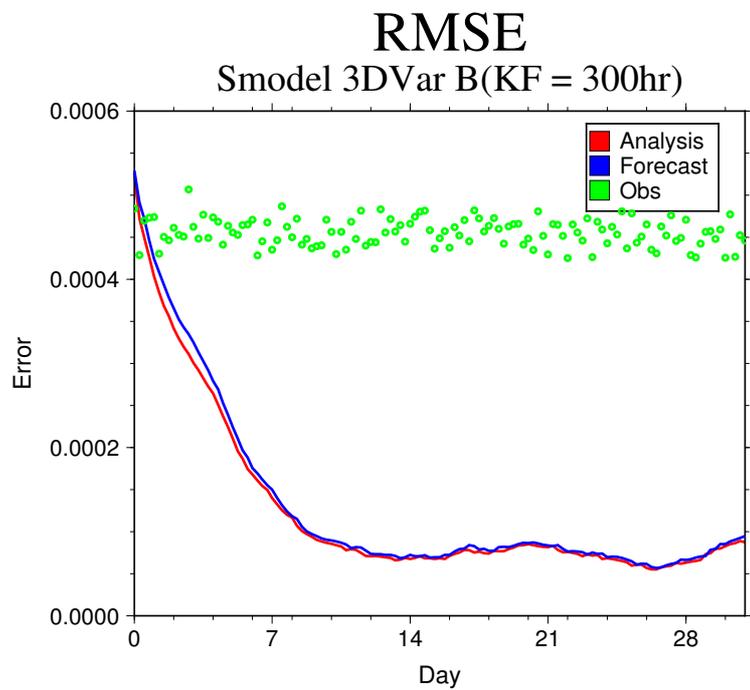


図 27: S-Model における 3DVar (KF が 300 時間目の背景誤差共分散を B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

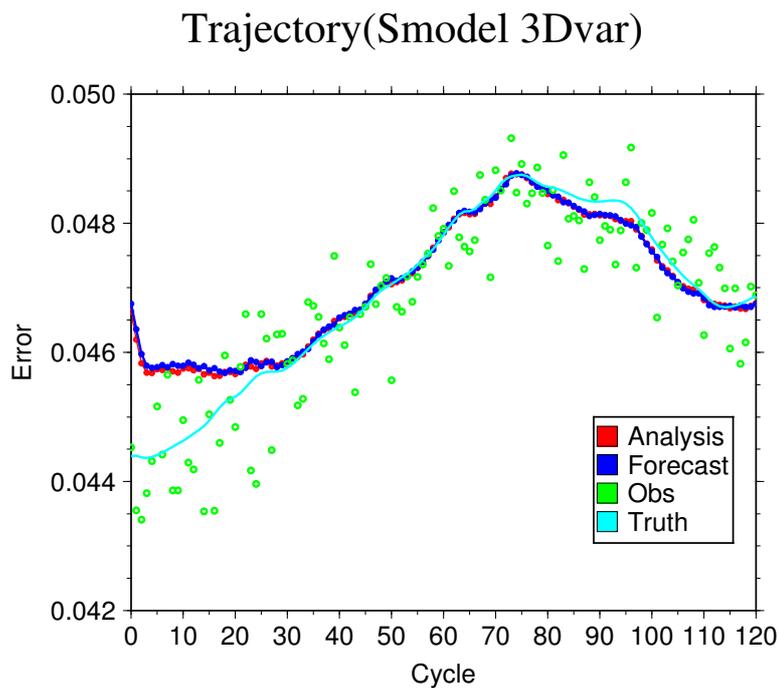
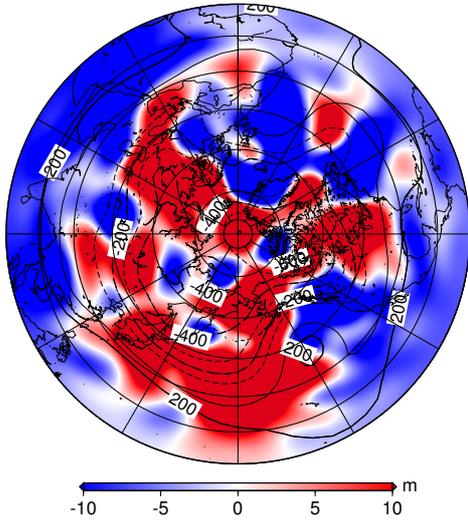


図 28: S-Model における 3DVar (KF が 300 時間目の背景誤差共分散を B とした) の解析値の第一成分の軌跡の時系列変化。縦軸は解析値、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、真値 (水色)、観測誤差 (緑)。

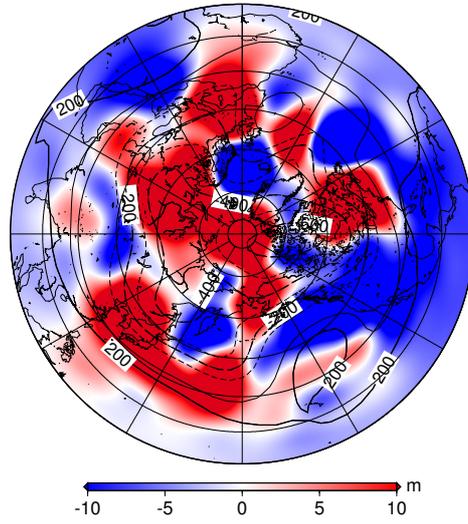
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 1 1950



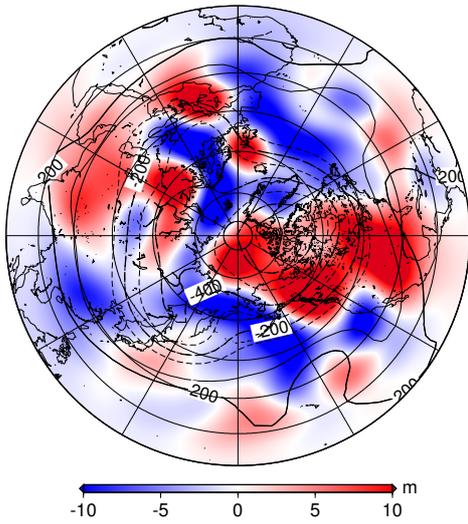
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 3 1950



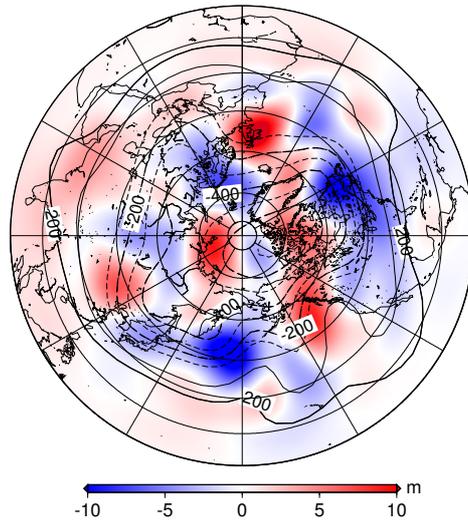
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 7 1950



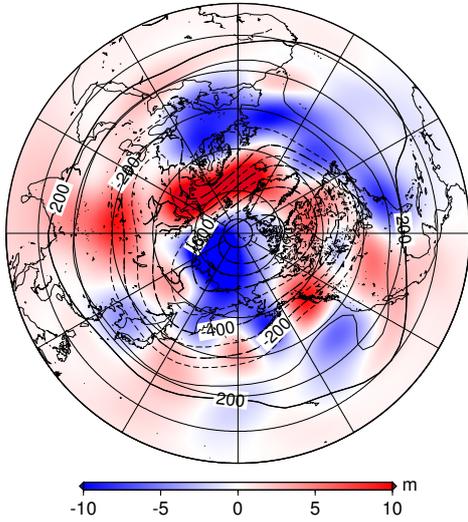
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 14 1950



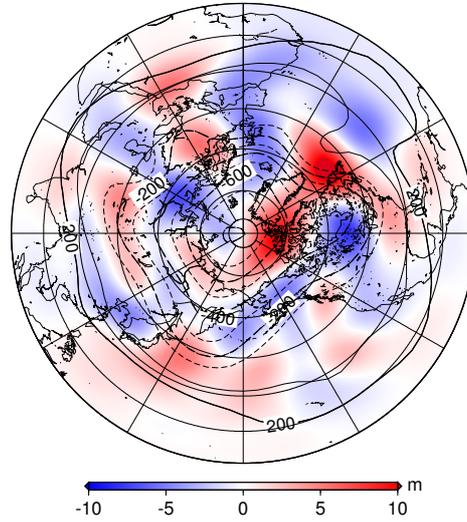
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 21 1950



Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 28 1950



Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 31 1950

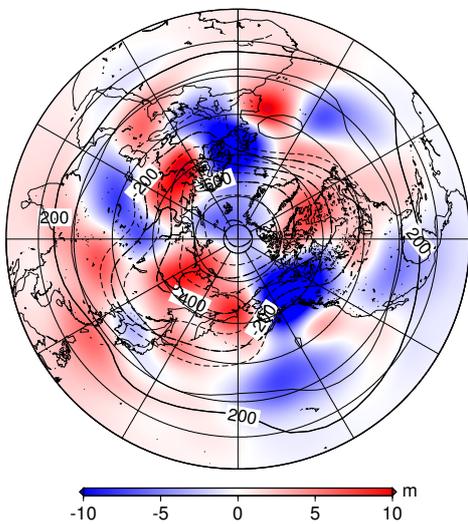


図 29: S-Model での 3DVar (KF が 300 時間目の背景誤差共分散を B とした) による 順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

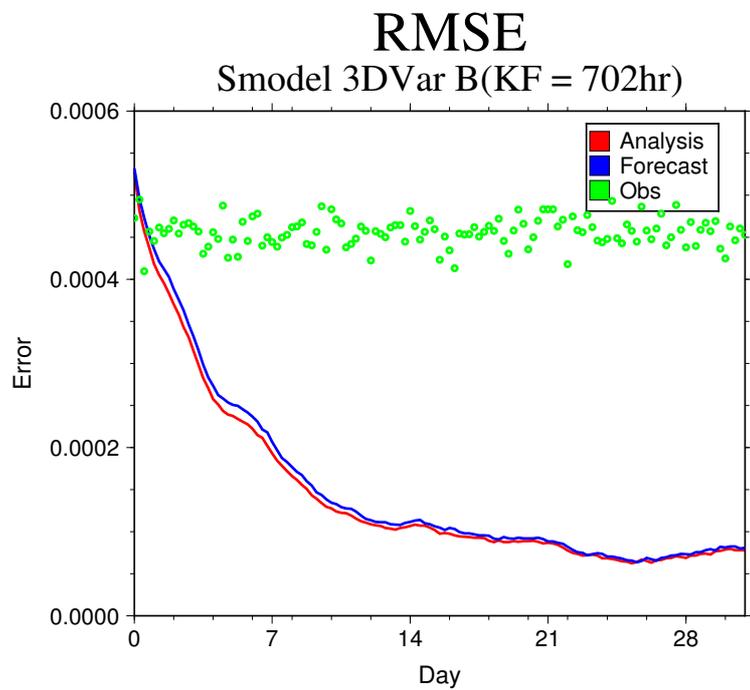


図 30: S-Model における 3DVar (KF が 702 時間目の背景誤差共分散を B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

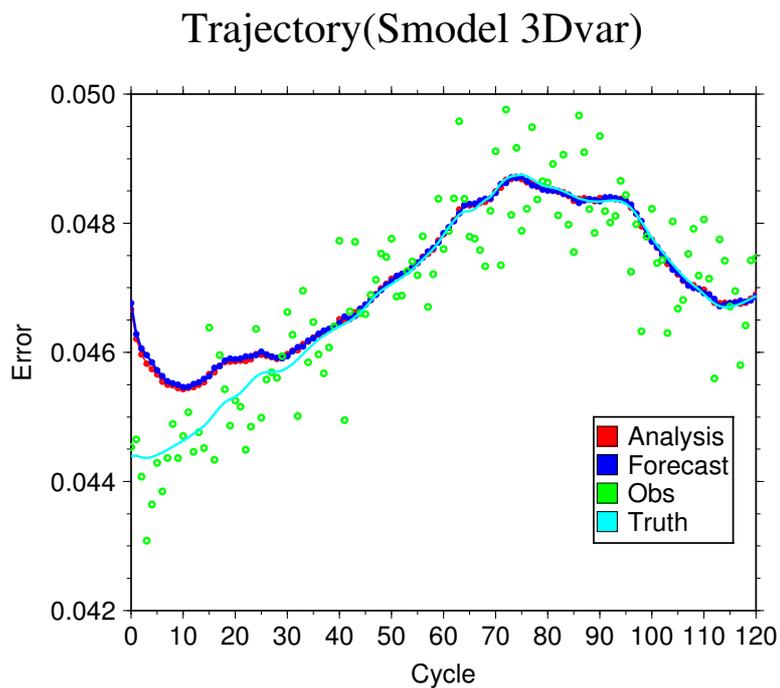
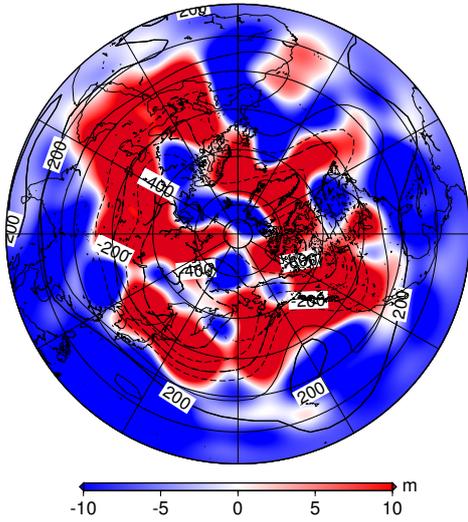


図 31: S-Model における 3DVar (KF が 702 時間目の背景誤差共分散を B とした) の解析値の第一成分の軌跡の時系列変化。縦軸は解析値、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、真値 (水色)、観測誤差 (緑)。

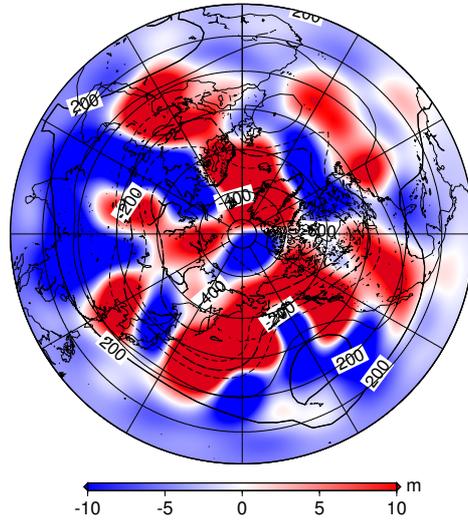
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 1 1950



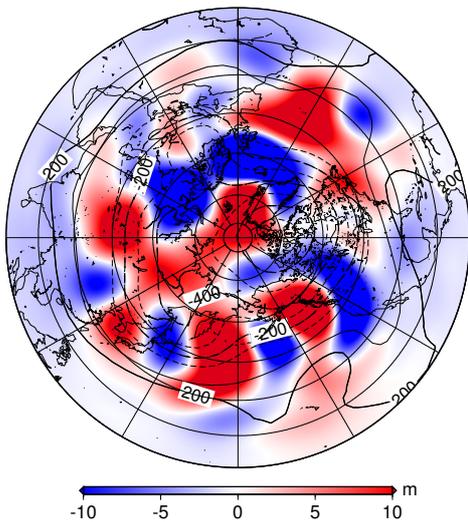
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 3 1950



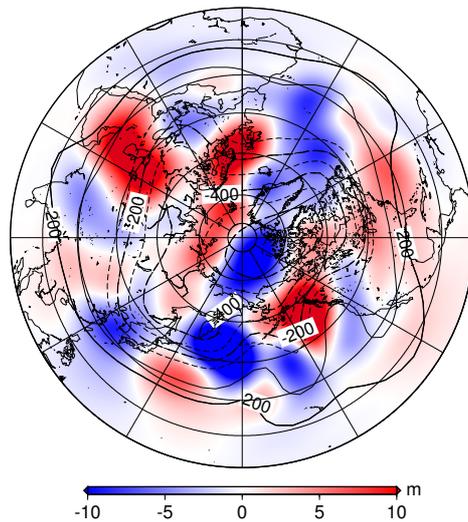
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 7 1950



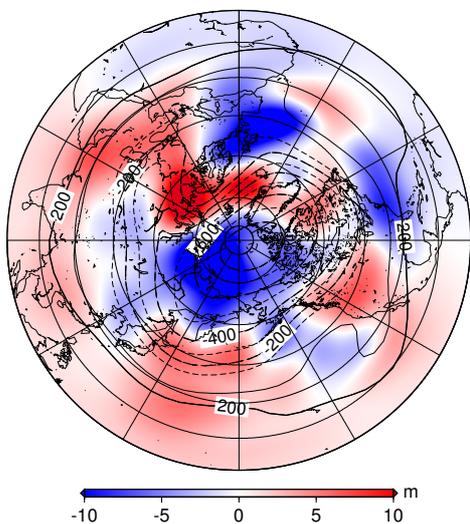
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 14 1950



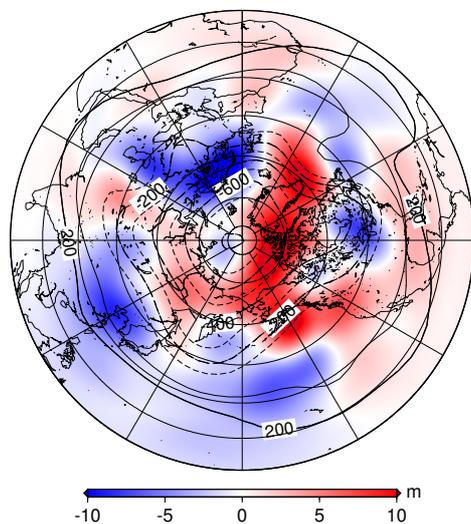
Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 21 1950



Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 28 1950



Barotropic Height (3DVar)

18Z Jan 31 1950

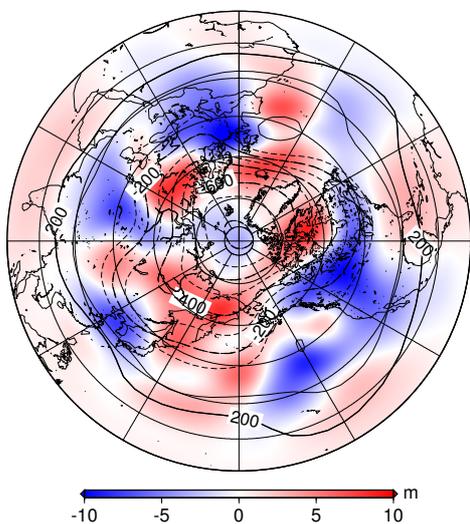


図 32: S-Model での 3DVar (KF が 702 時間目の背景誤差共分散を B とした) による 順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

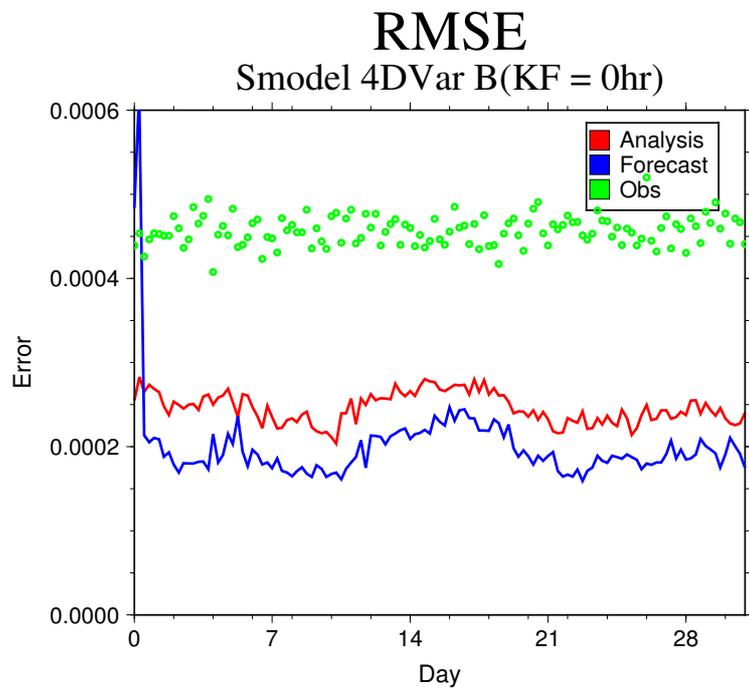


図 33: S-Model における 4DVar (KF が 0 時間目の背景誤差共分散を B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

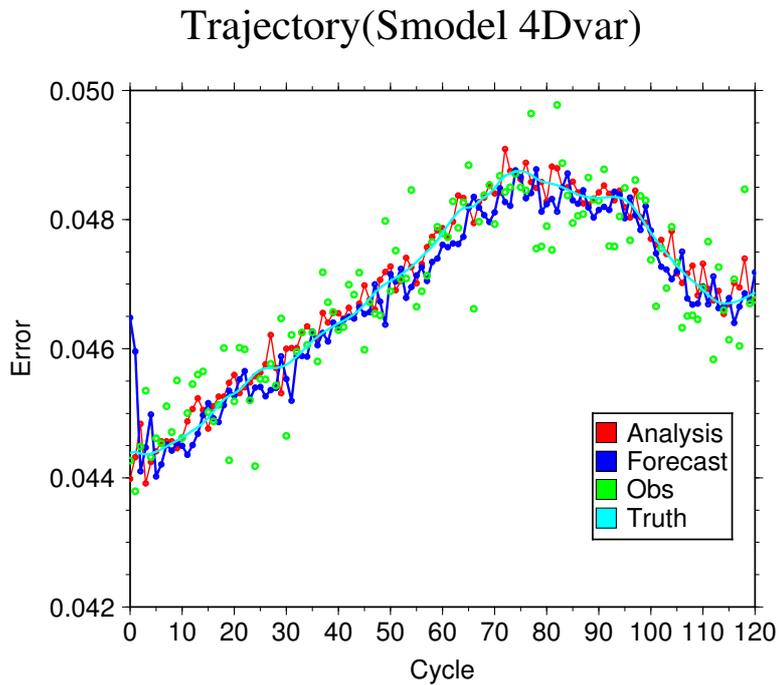
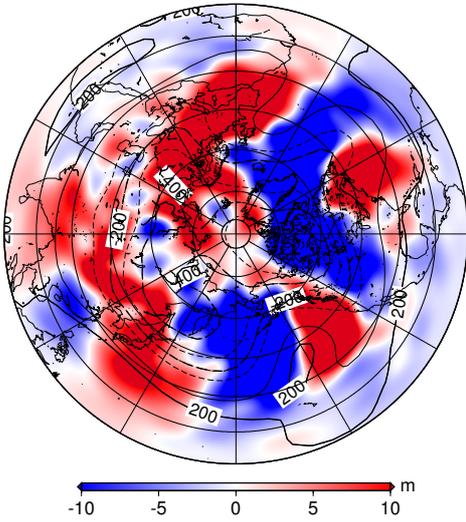


図 34: S-Model における 4DVar (KF が 0 時間目の背景誤差共分散を B とした) の解析値の第一成分の軌跡の時系列変化。縦軸は解析値、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、真値 (水色)、観測誤差 (緑)。

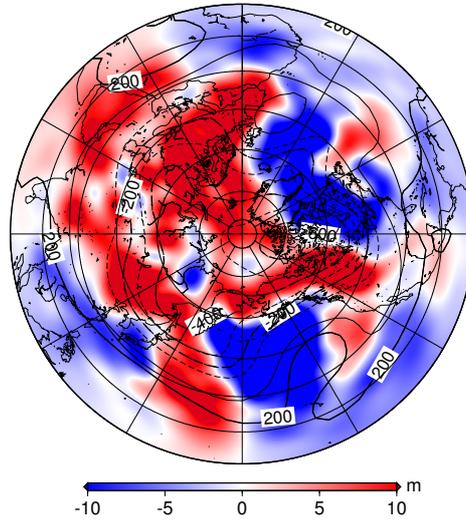
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 1 1950



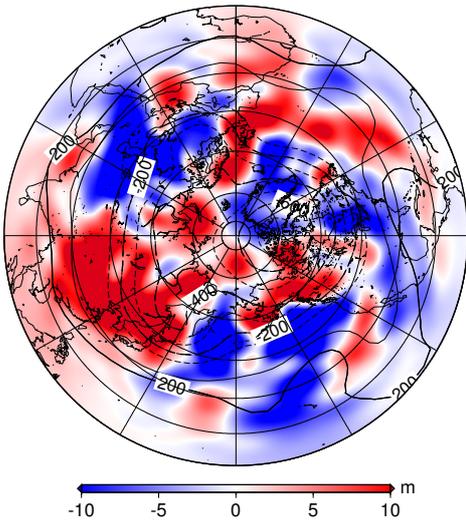
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 3 1950



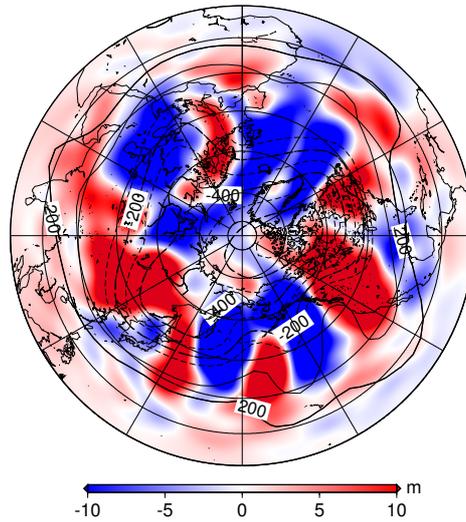
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 7 1950



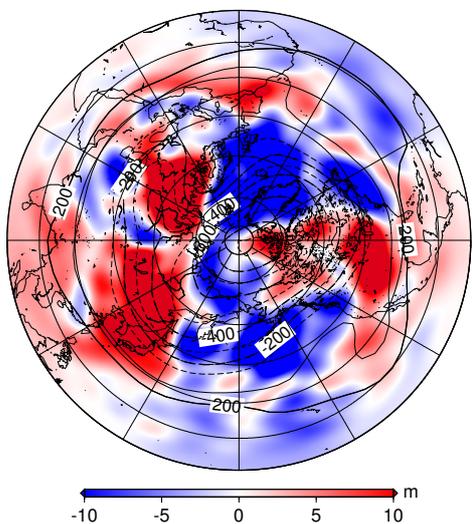
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 14 1950



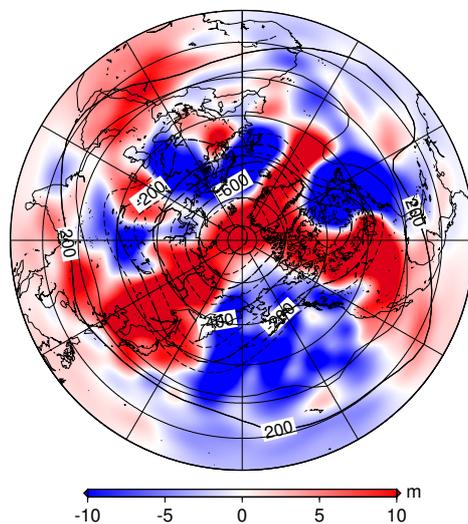
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 21 1950



Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 28 1950



Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 31 1950

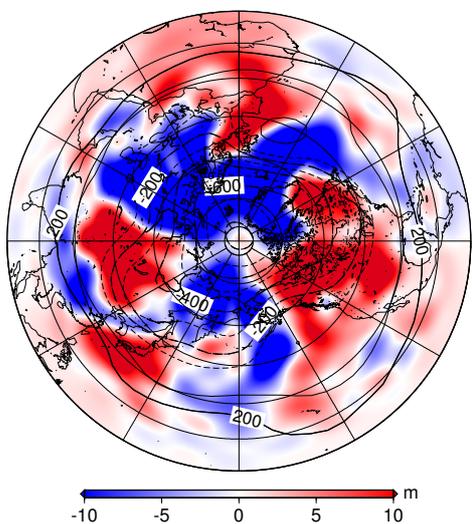


図 35: S-Model での 4DVar (KF が 0 時間目の背景誤差共分散を B とした) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

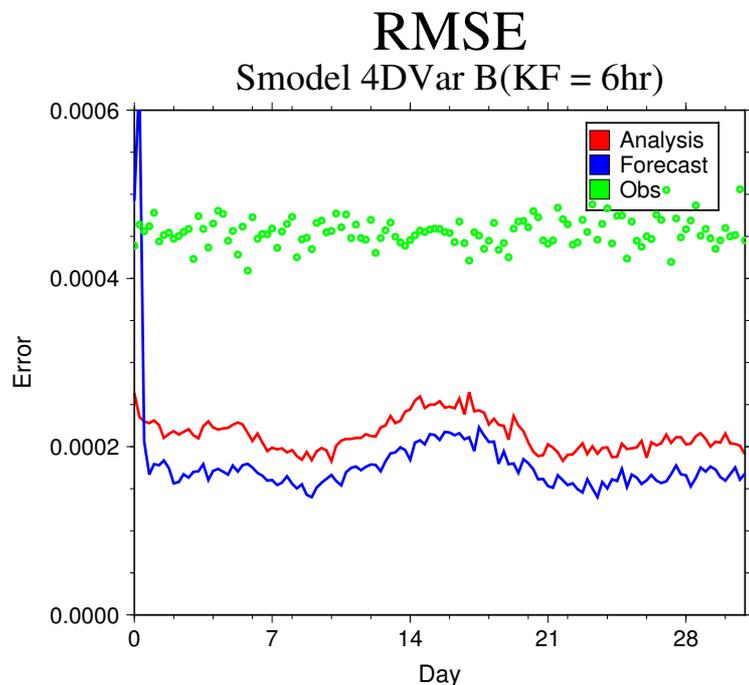


図 36: S-Model における 4DVar (KF が 6 時間目の背景誤差共分散を B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

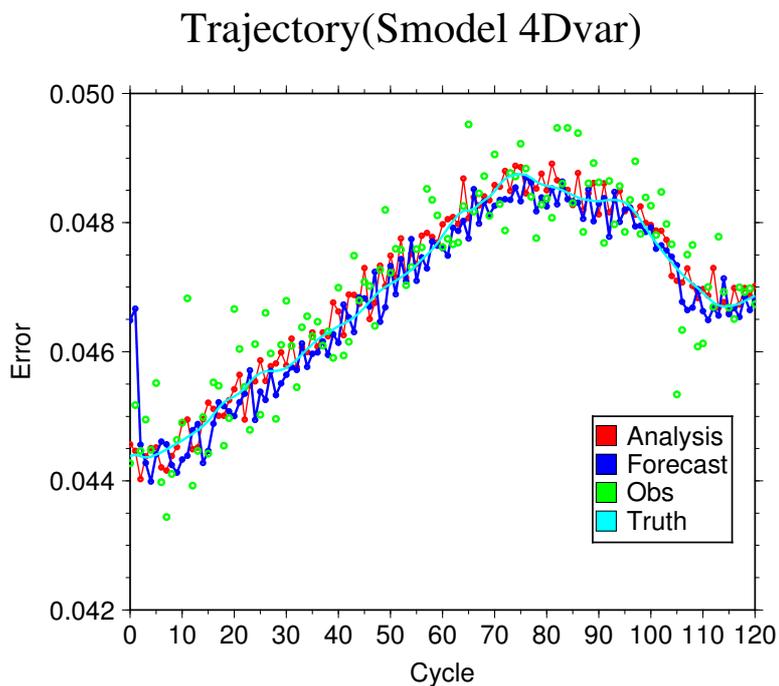
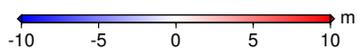
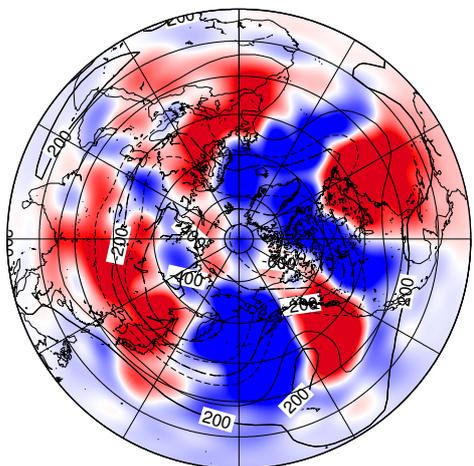


図 37: S-Model における 4DVar (KF が 6 時間目の背景誤差共分散を B とした) の解析値の第一成分の軌跡の時系列変化。縦軸は解析値、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、真値 (水色)、観測誤差 (緑)。

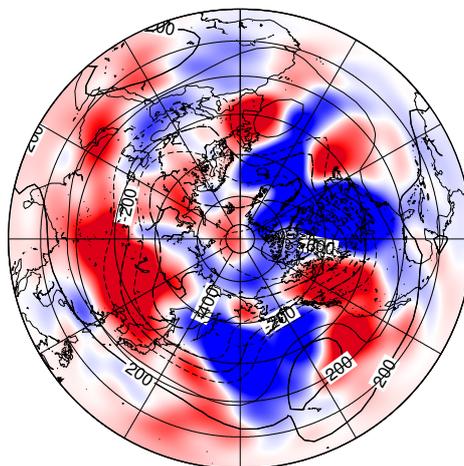
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 1 1950



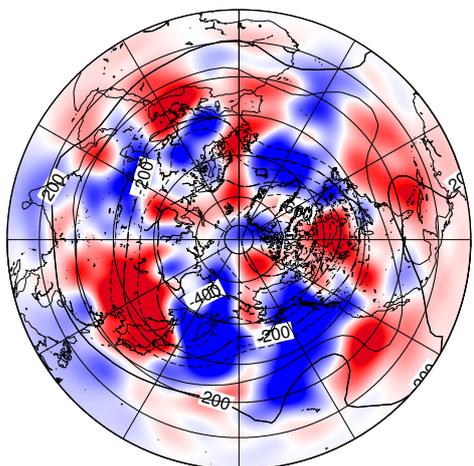
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 3 1950



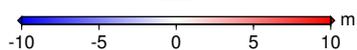
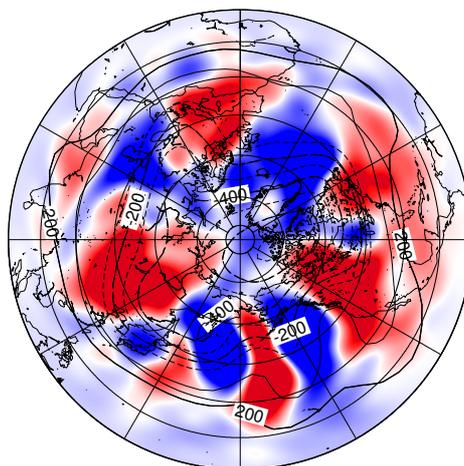
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 7 1950



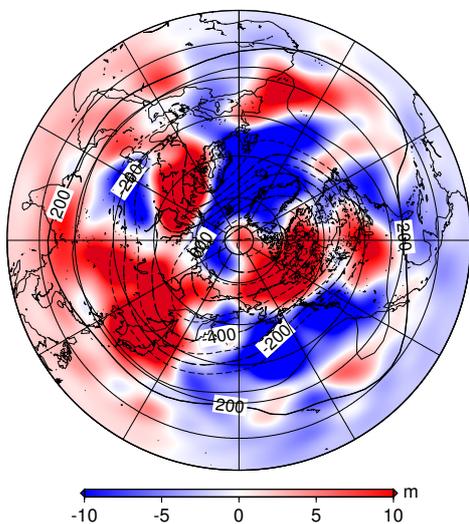
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 14 1950



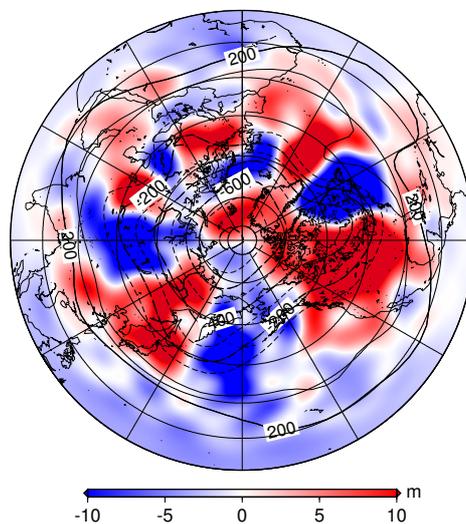
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 21 1950



Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 28 1950



Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 31 1950

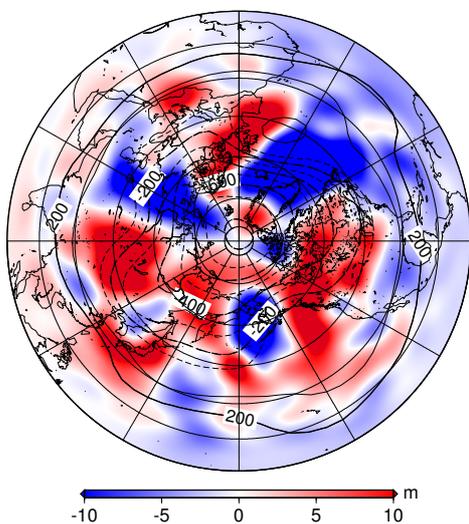


図 38: S-Model での 4DVar (KF が 6 時間目の背景誤差共分散を B とした) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

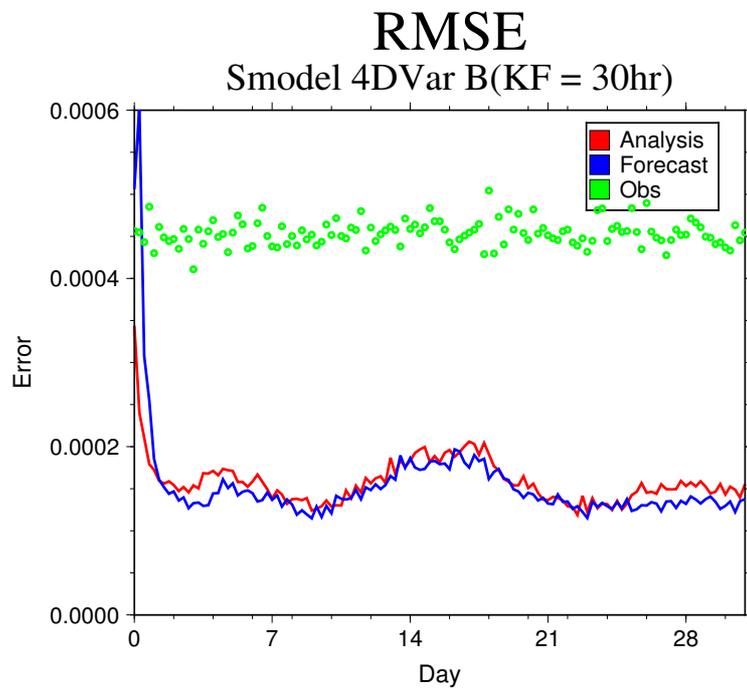


図 39: S-Model における 4DVar (KF が 30 時間目の背景誤差共分散を B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

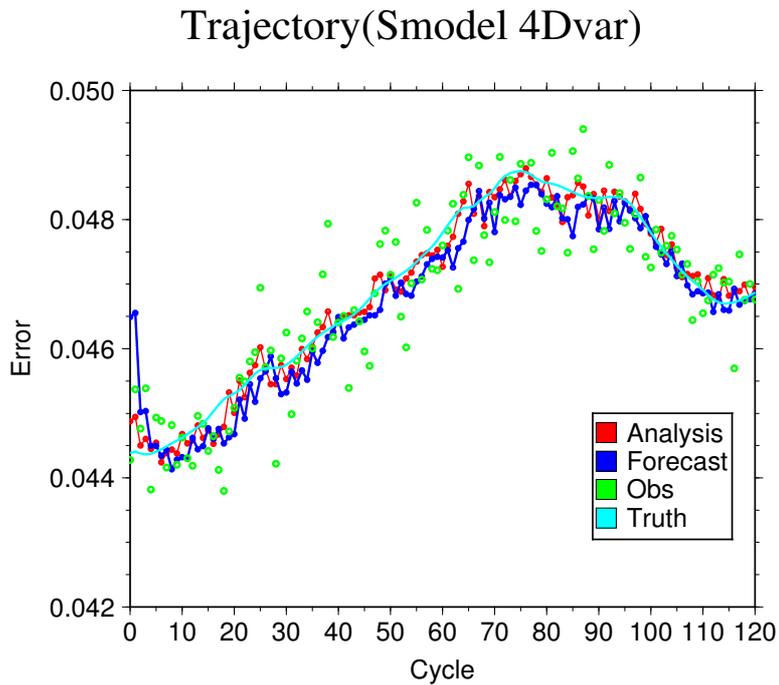
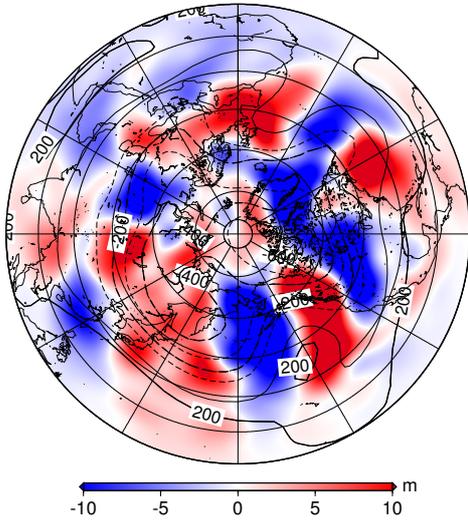


図 40: S-Model における 4DVar (KF が 30 時間目の背景誤差共分散を B とした) の解析値の第一成分の軌跡の時系列変化。縦軸は解析値、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、真値 (水色)、観測誤差 (緑)。

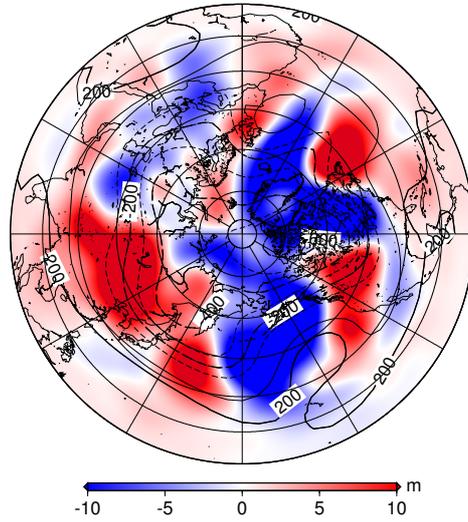
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 1 1950



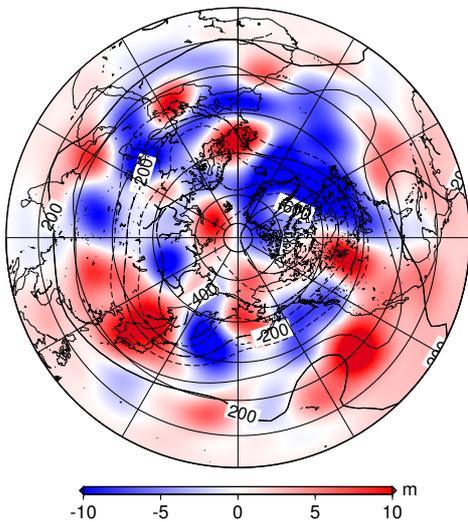
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 3 1950



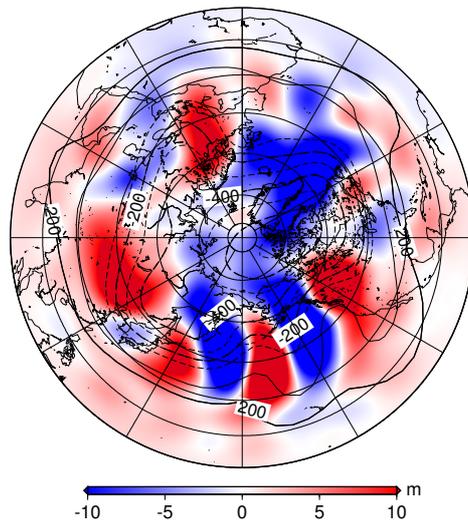
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 7 1950



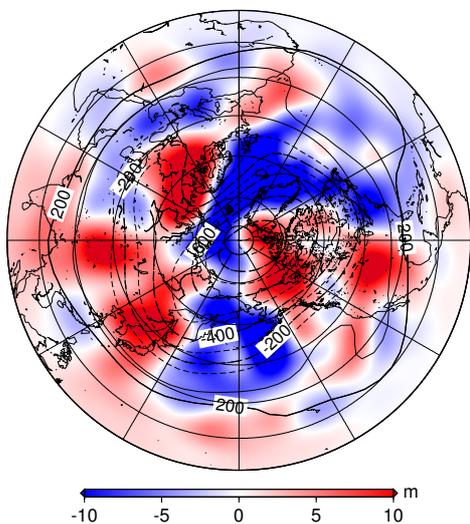
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 14 1950



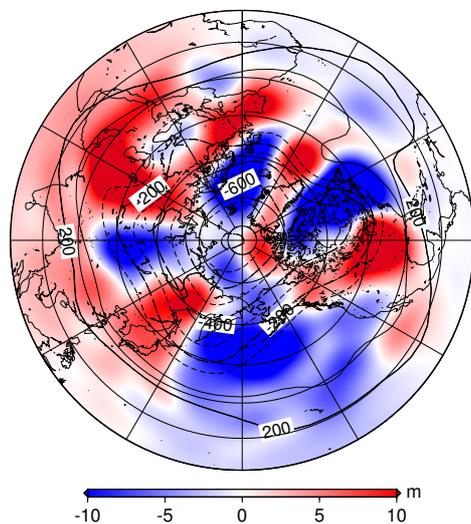
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 21 1950



Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 28 1950



Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 31 1950

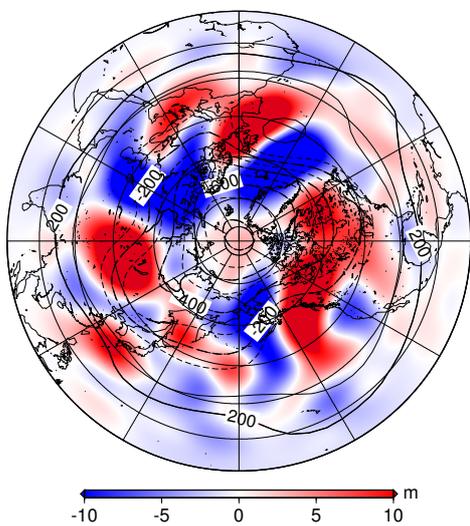


図 41: S-Model での 4DVar (KF が 30 時間目の背景誤差共分散を B とした) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

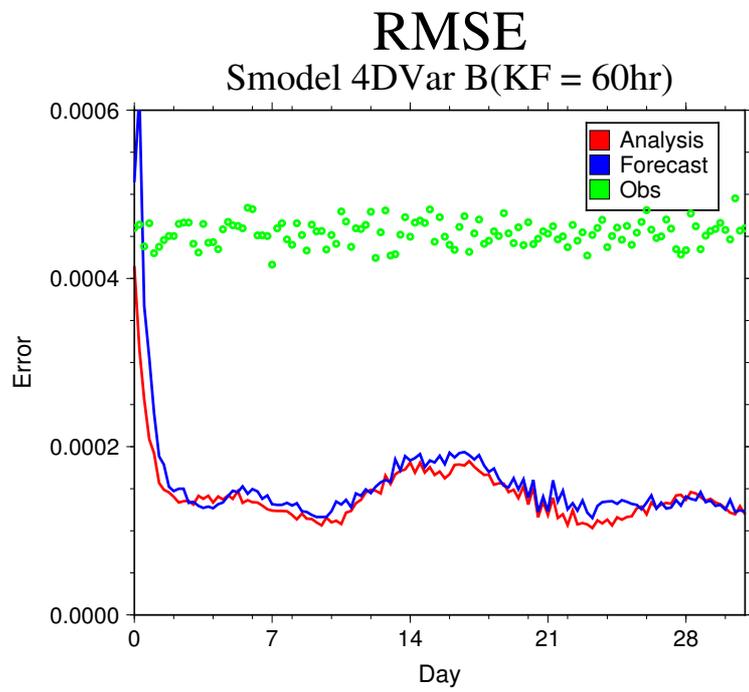


図 42: S-Model における 4DVar (KF が 60 時間目の背景誤差共分散を B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

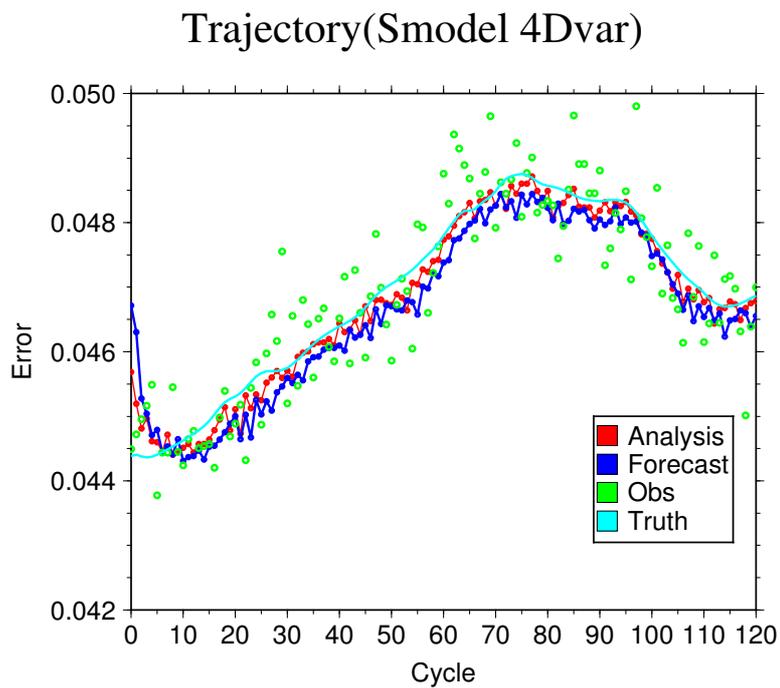
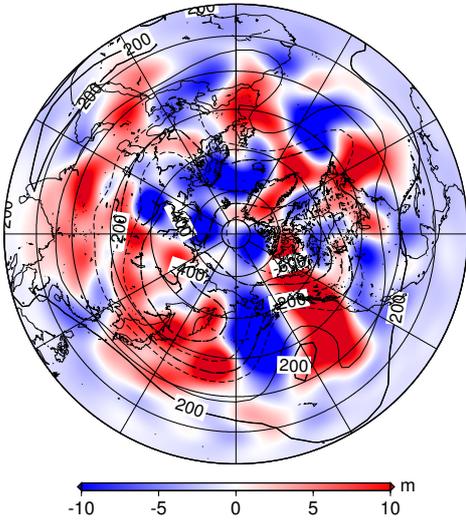


図 43: S-Model における 4DVar (KF が 60 時間目の背景誤差共分散を B とした) の解析値の第一成分の軌跡の時系列変化。縦軸は解析値、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、真値 (水色)、観測誤差 (緑)。

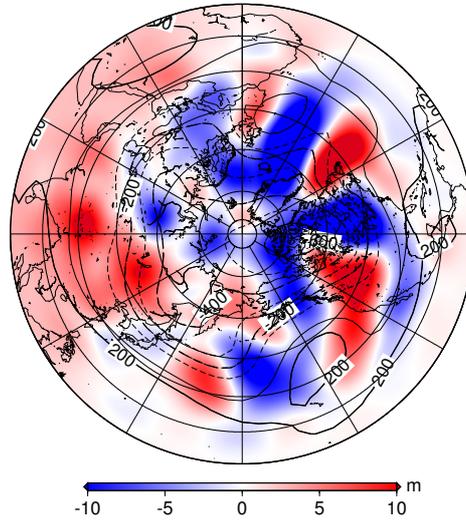
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 1 1950



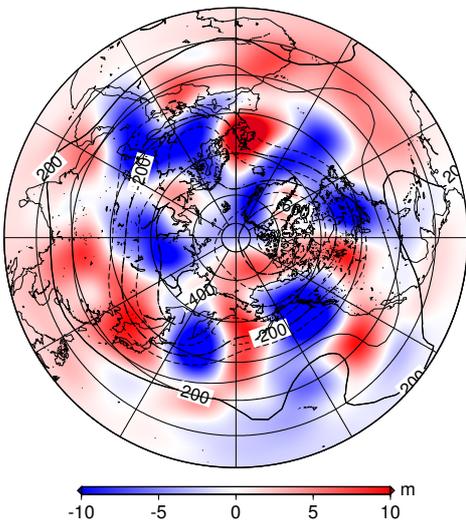
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 3 1950



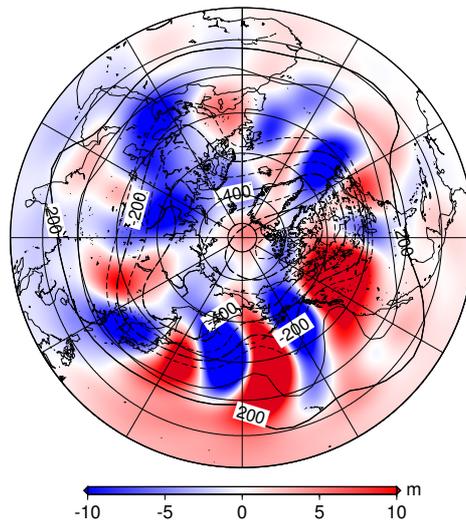
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 7 1950



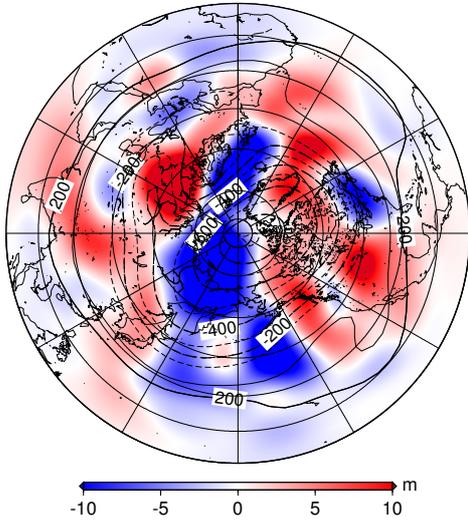
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 14 1950



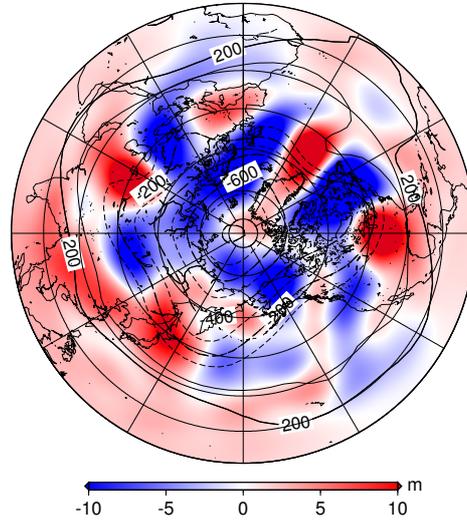
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 21 1950



Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 28 1950



Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 31 1950

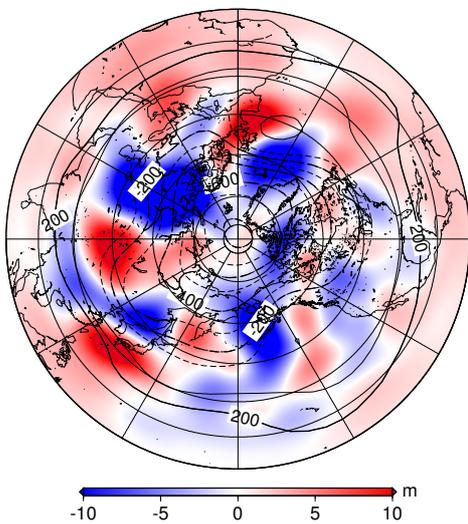


図 44: S-Model での 4DVar (KF が 60 時間目の背景誤差共分散を B とした) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

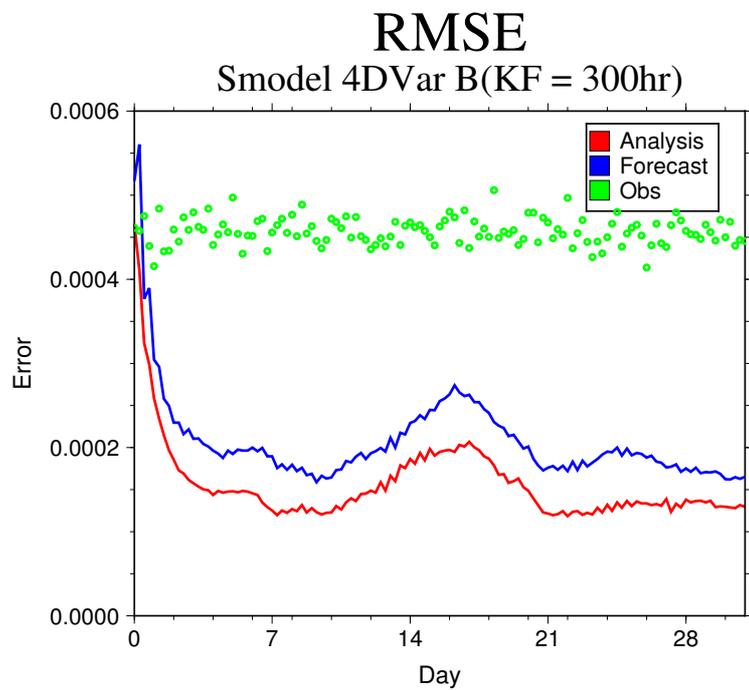


図 45: S-Model における 4DVar (KF が 300 時間目の背景誤差共分散を B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

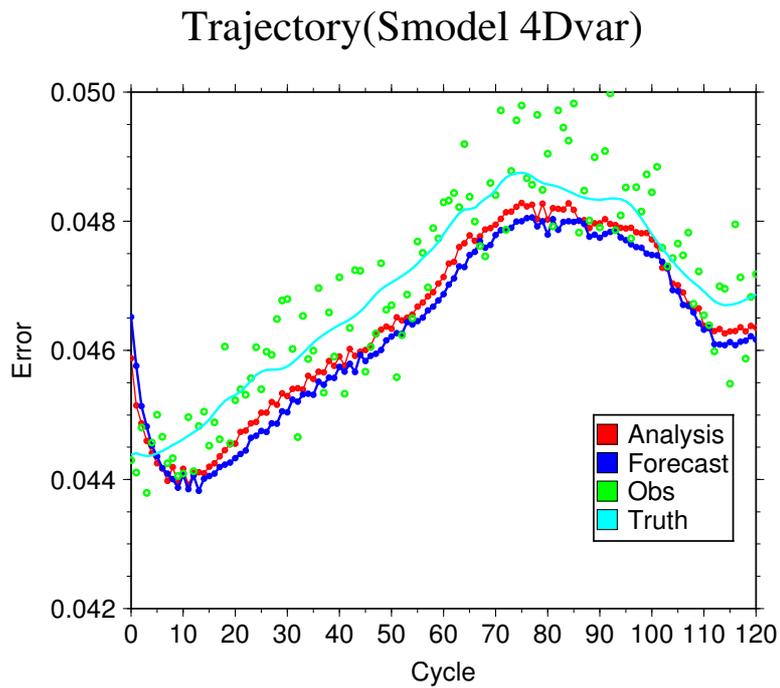
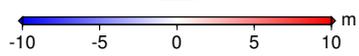
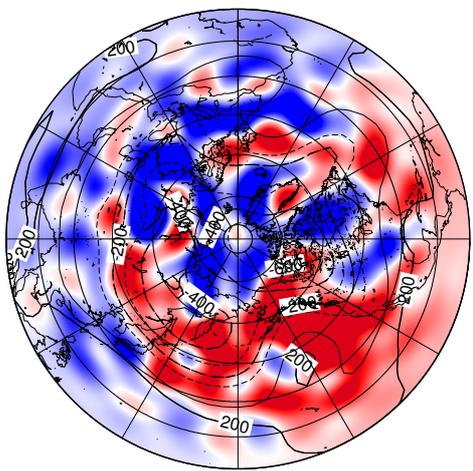


図 46: S-Model における 4DVar (KF が 300 時間目の背景誤差共分散を B とした) の解析値の第一成分の軌跡の時系列変化。縦軸は解析値、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、真値 (水色)、観測誤差 (緑)。

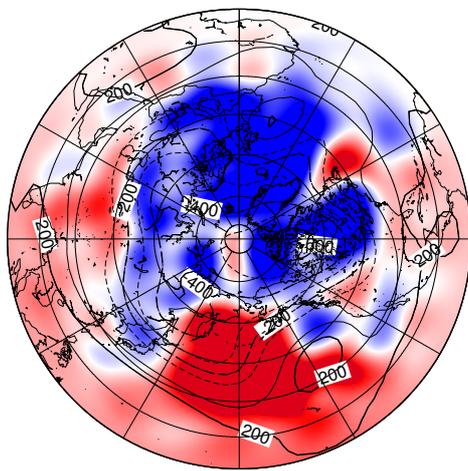
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 1 1950



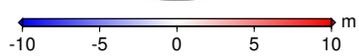
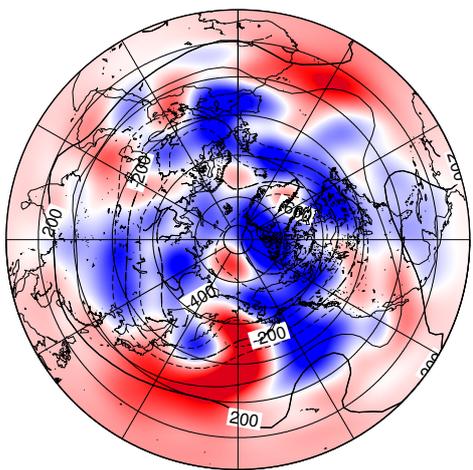
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 3 1950



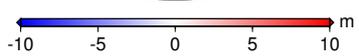
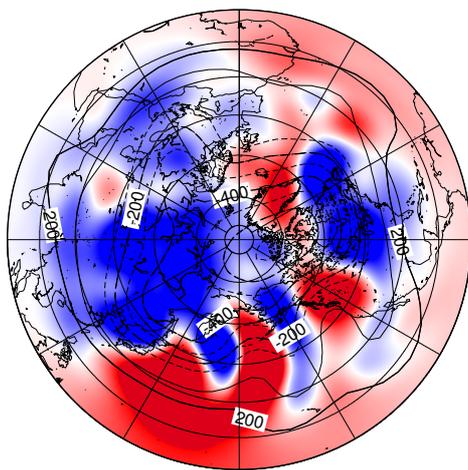
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 7 1950



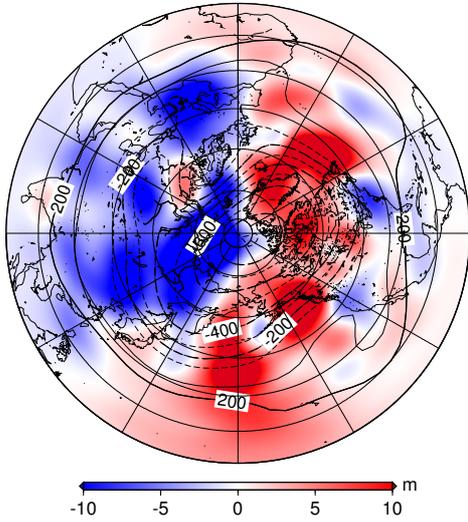
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 14 1950



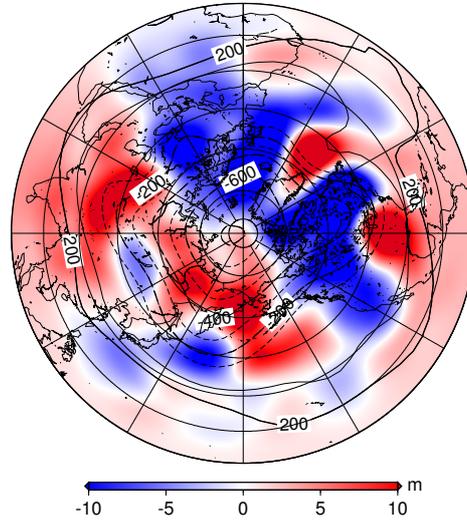
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 21 1950



Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 28 1950



Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 31 1950

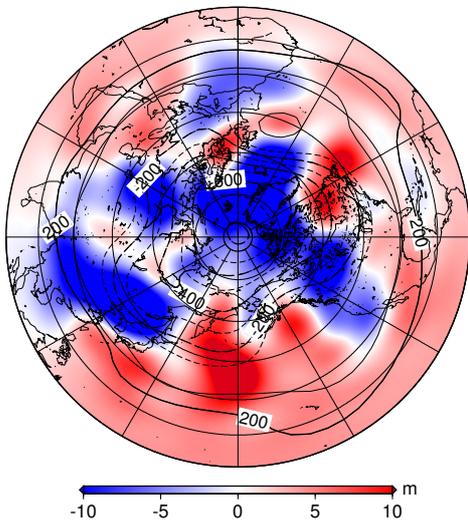


図 47: S-Model での 4DVar (KF が 300 時間目の背景誤差共分散を B とした) による 順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

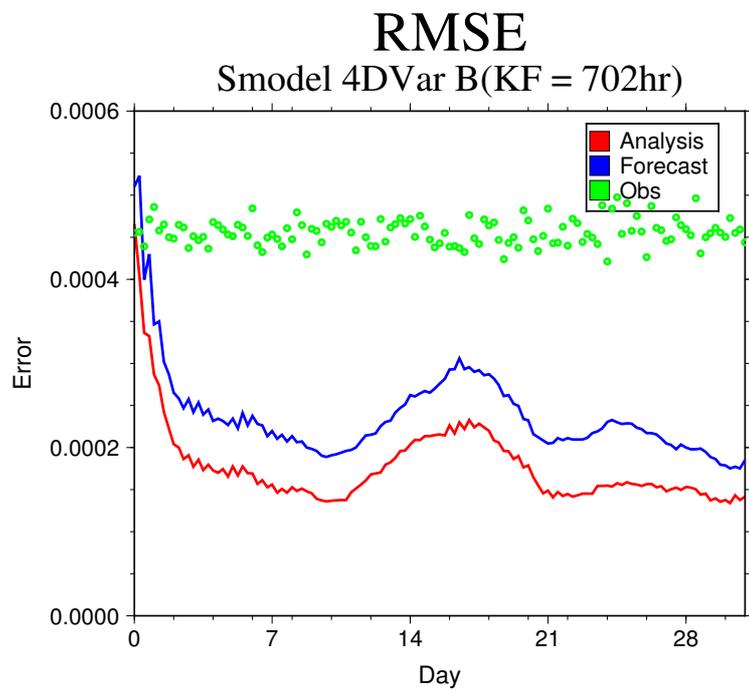


図 48: S-Model における 4DVar (KF が 702 時間目の背景誤差共分散を B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

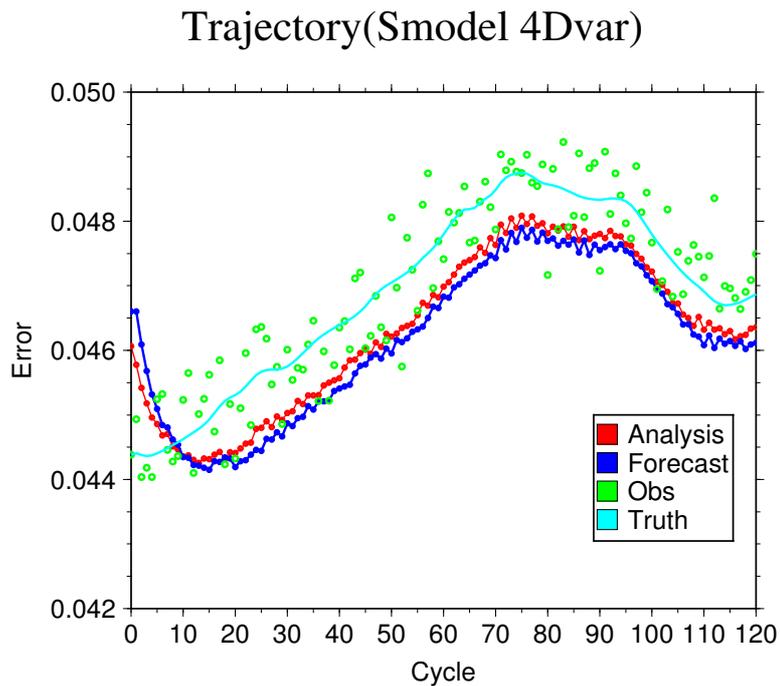
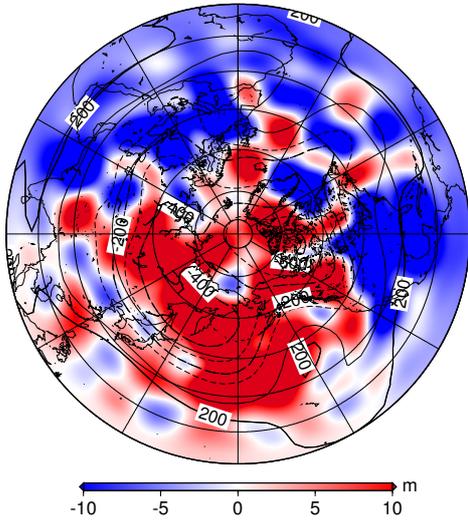


図 49: S-Model における 4DVar (KF が 702 時間目の背景誤差共分散を B とした) の解析値の第一成分の軌跡の時系列変化。縦軸は解析値、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、真値 (水色)、観測誤差 (緑)。

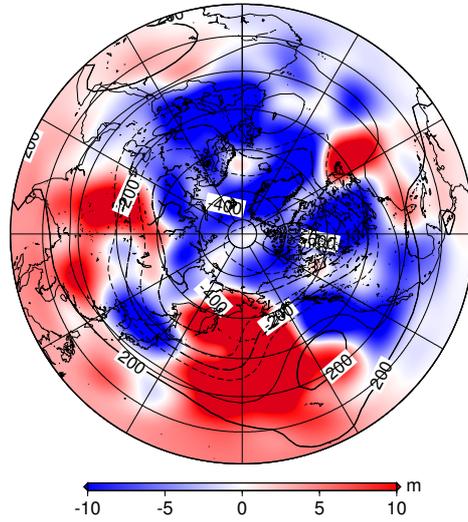
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 1 1950



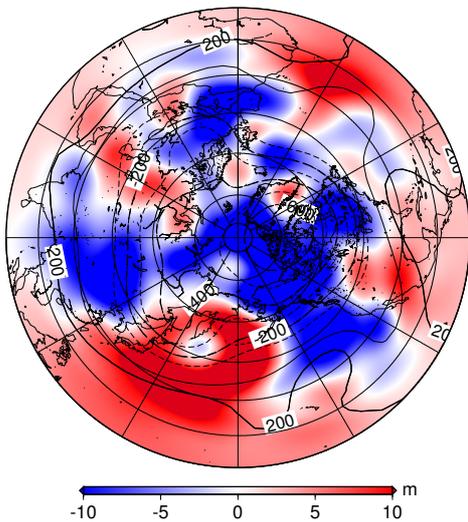
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 3 1950



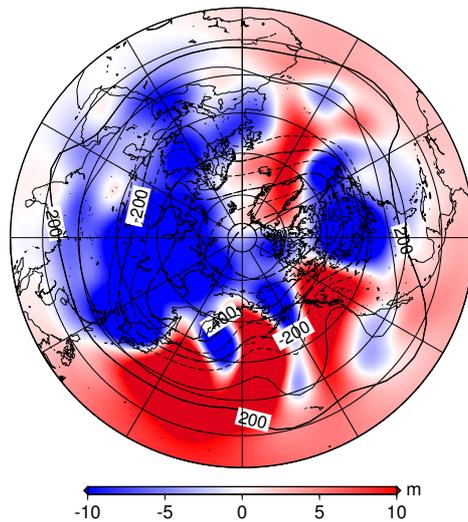
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 7 1950



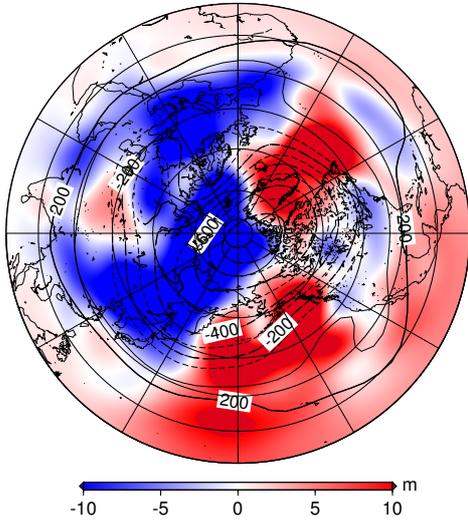
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 14 1950



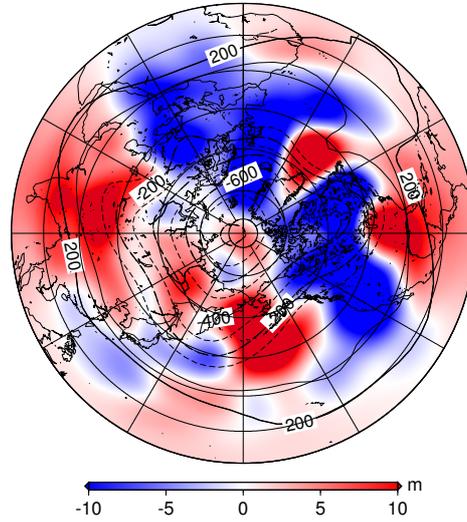
Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 21 1950



Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 28 1950



Barotropic Height (4DVar)

18Z Jan 31 1950

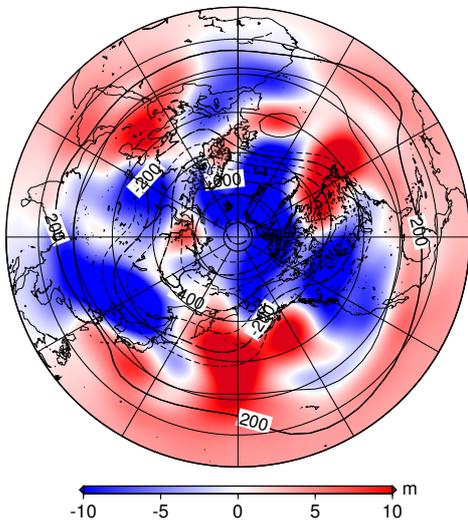


図 50: S-Model での 4DVar (KF が 702 時間目の背景誤差共分散を B とした) による 順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

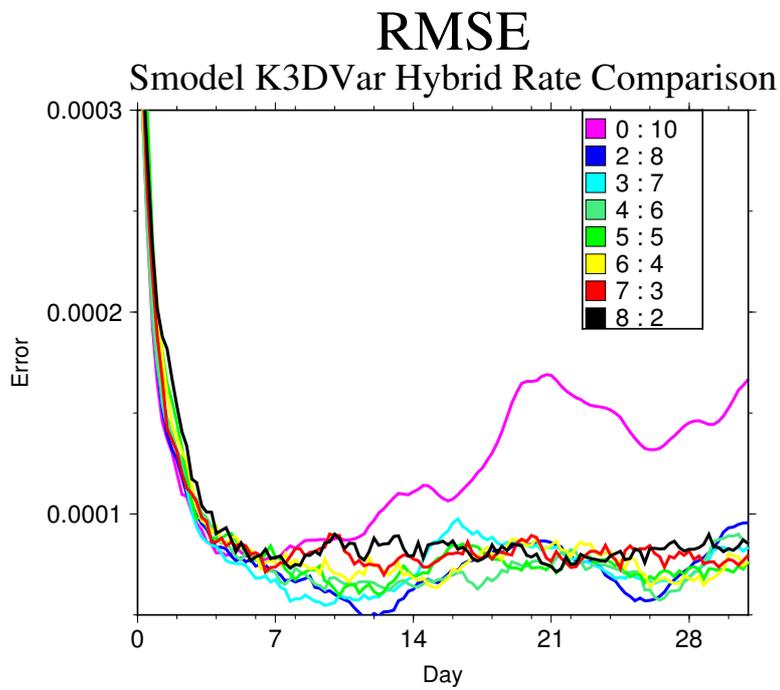


図 51: S-Model における Hybrid 3DVar (KF が 60 時間目の背景誤差共分散を固定の B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

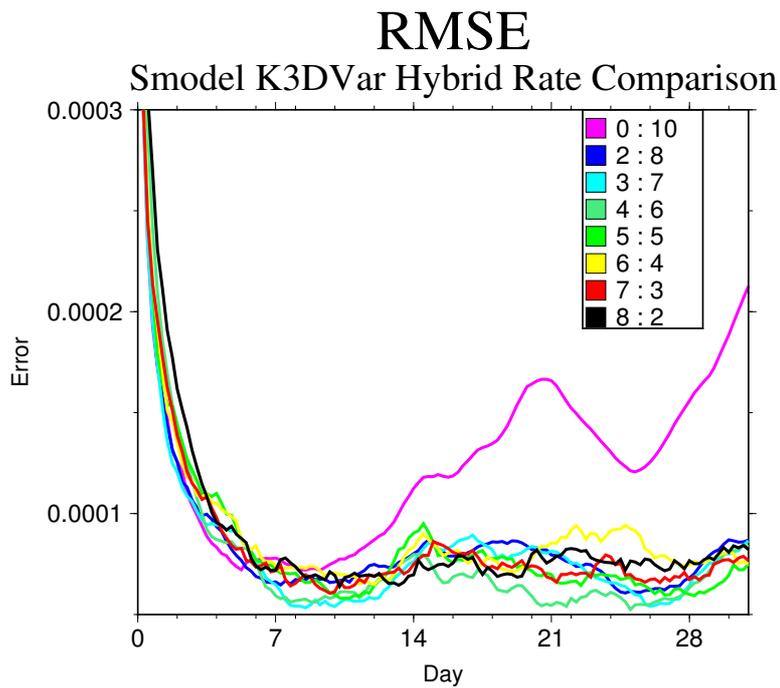


図 52: S-Model における Hybrid 3DVar (KF が 102 時間目の背景誤差共分散を固定の B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

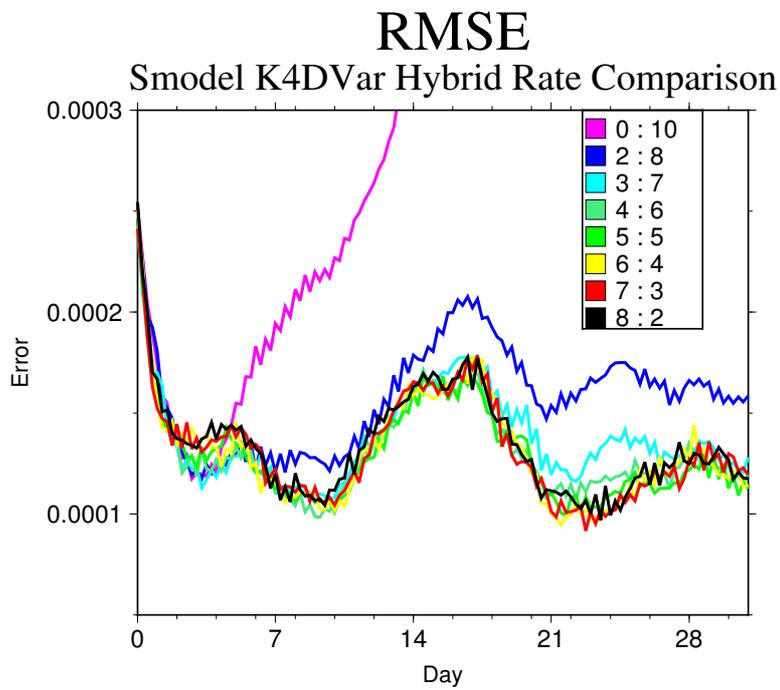


図 53: S-Model における Hybrid 4DVar (KF が 60 時間目の背景誤差共分散を固定の B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。

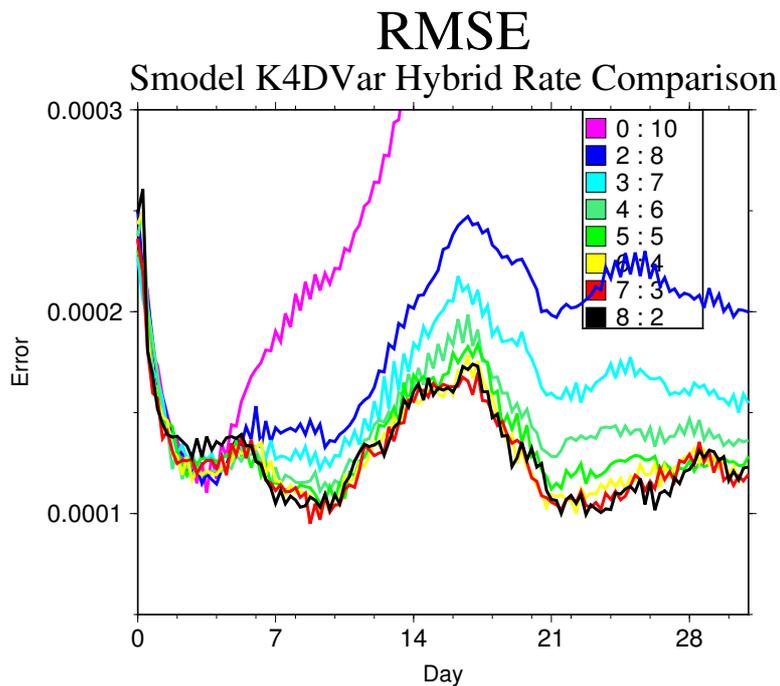
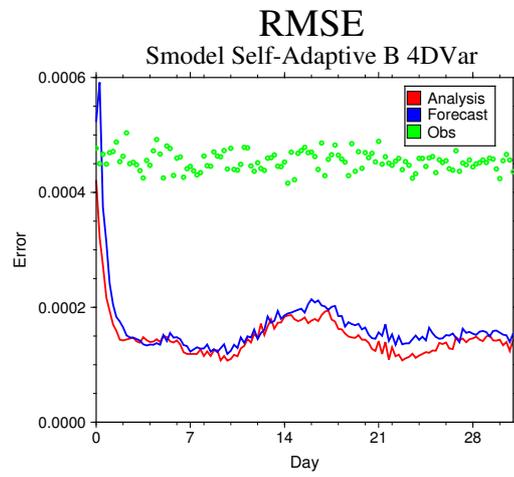
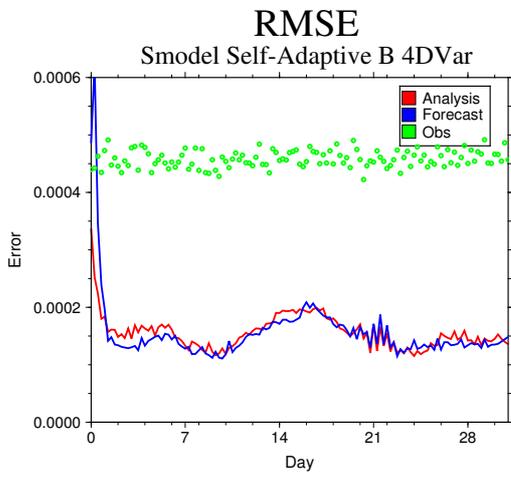
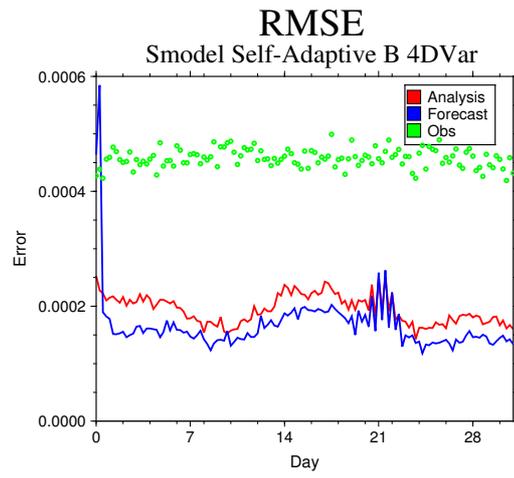
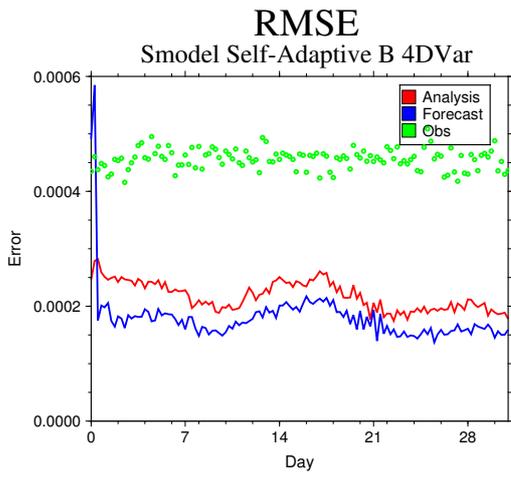


図 54: S-Model における Hybrid 4DVar (KF が 102 時間目の背景誤差共分散を固定の B とした) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。



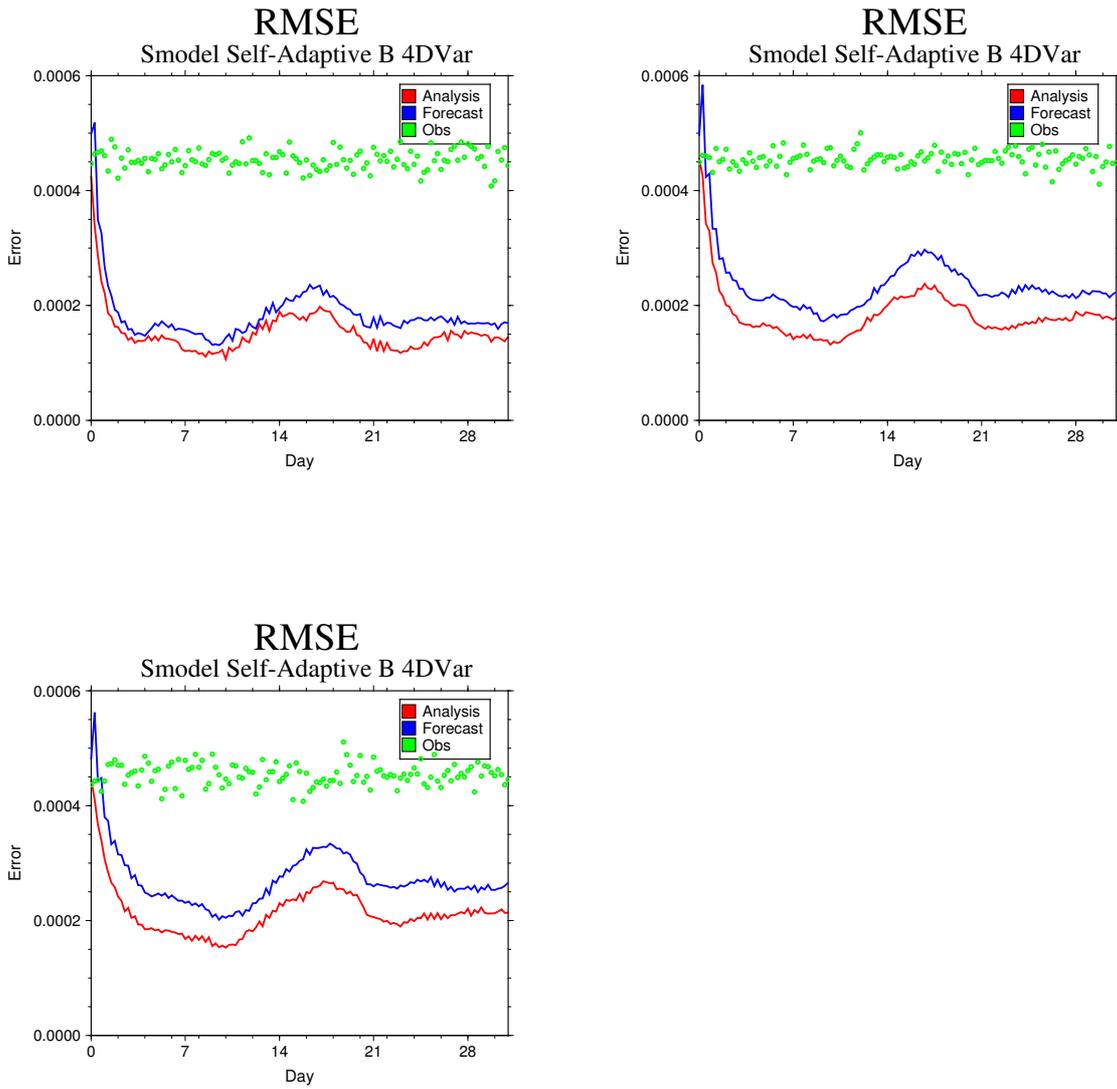
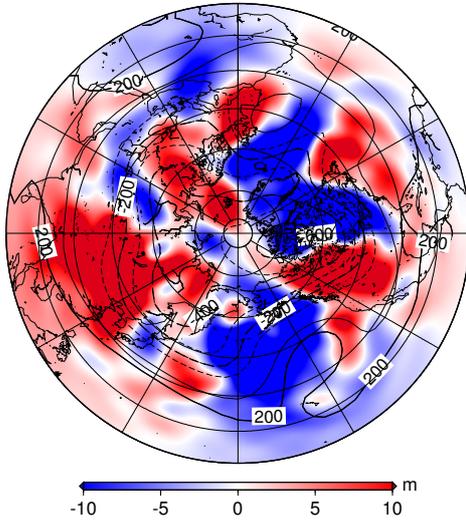
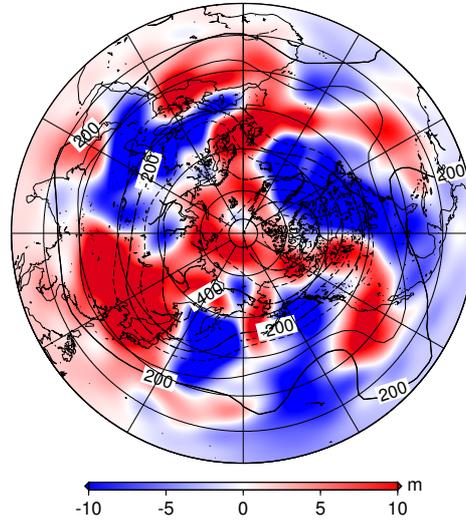


図 55: S-Model での 新型 4DVar (Self-Adaptive 4DVar / S4DVar) の RMSE 値の時系列変化。縦軸は RMSE、横軸は同化開始からの経過時間。実線及び点の色はそれぞれ解析誤差 (赤)、予報誤差 (青)、観測誤差 (緑)。左から右、上段から下段へ向けて 0、6、30、60、102、300、702 時間目の KF の背景誤差共分散を B とした。

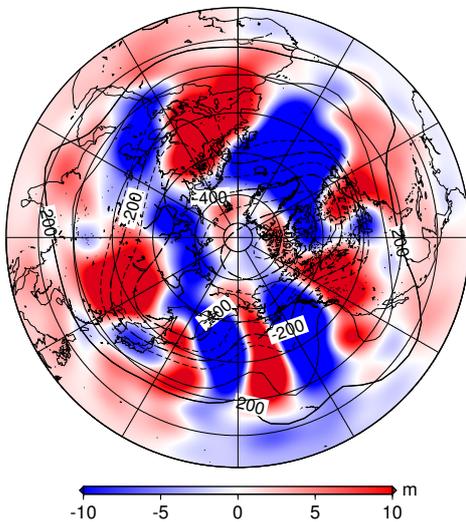
Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 3 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 7 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 14 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 31 1950

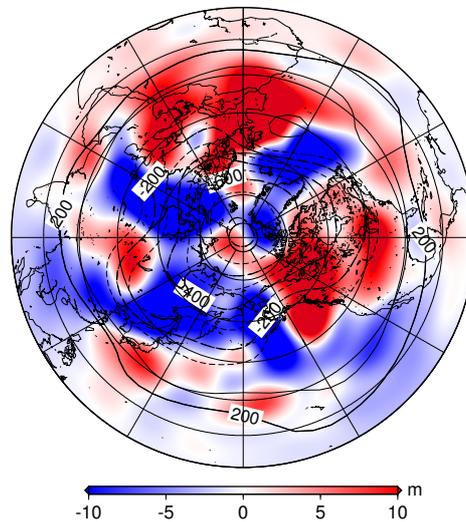
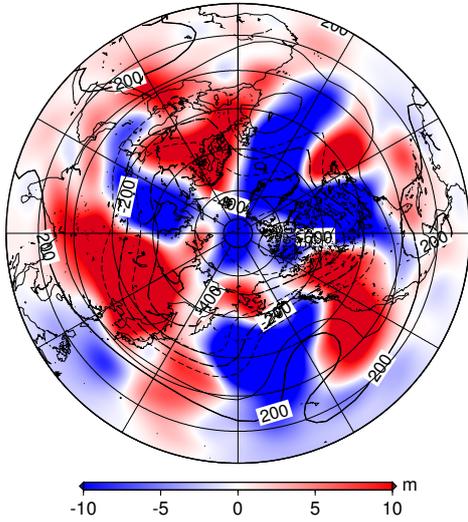
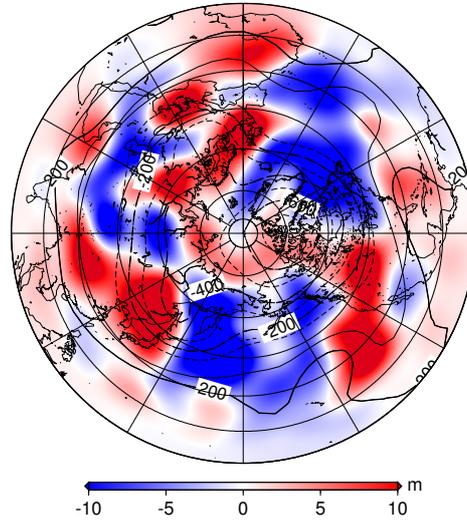


図 56: S-Model での Self-Adaptive 4DVar (KF が 0 時間目の背景誤差共分散を B とした) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

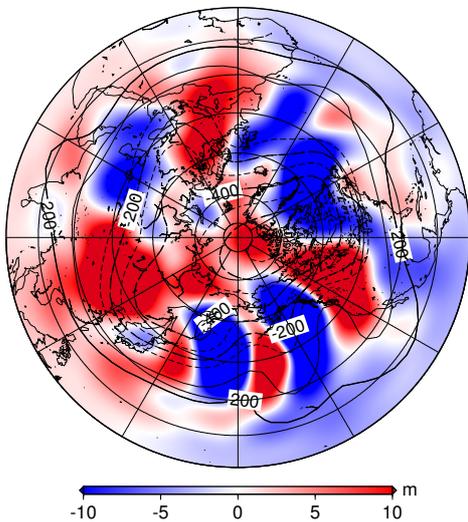
Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 3 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 7 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 14 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 31 1950

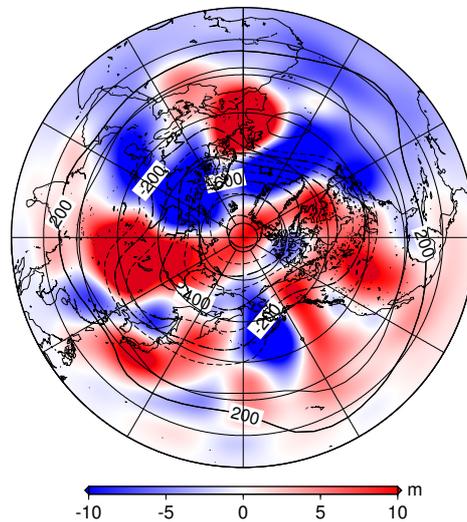
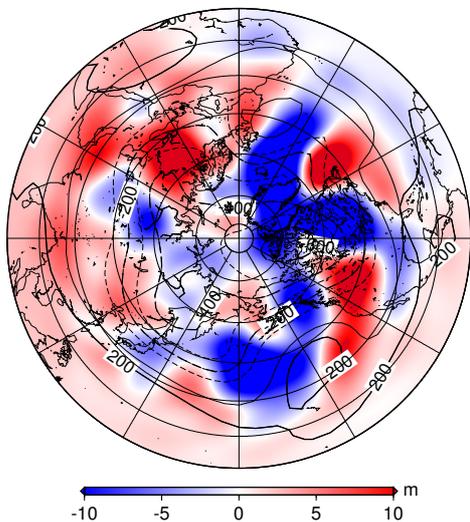
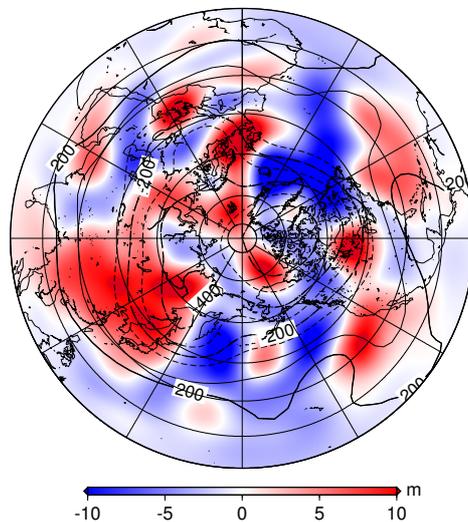


図 57: S-Model での Self-Adaptive 4DVar (KF が 6 時間目の背景誤差共分散を B とした) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

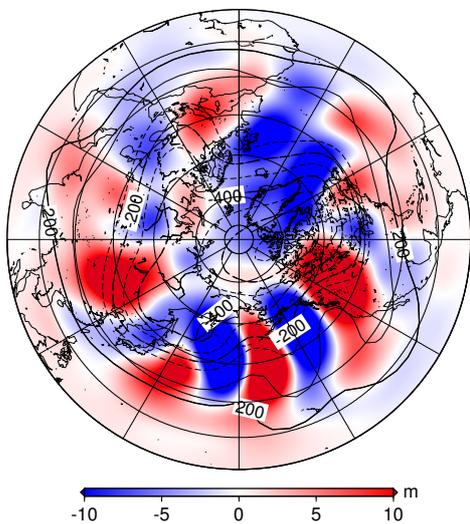
Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 3 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 7 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 14 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 28 1950

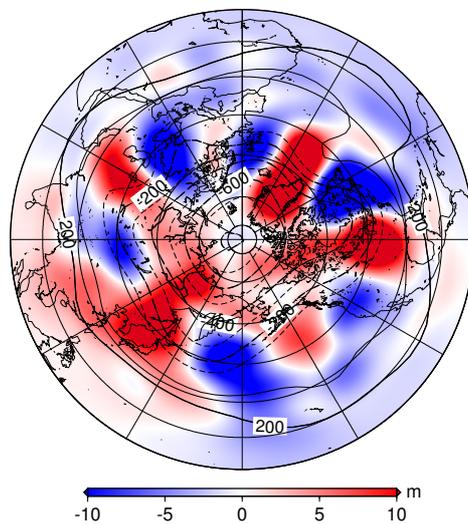
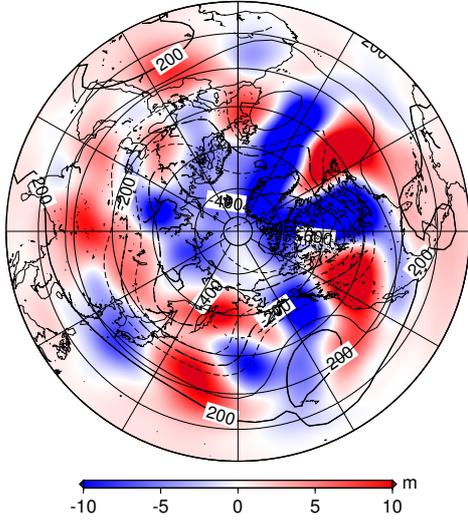
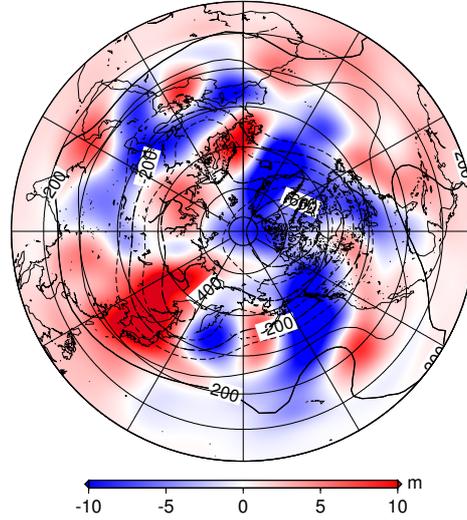


図 58: S-Model での Self-Adaptive 4DVar (KF が 30 時間目の背景誤差共分散を B とした) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

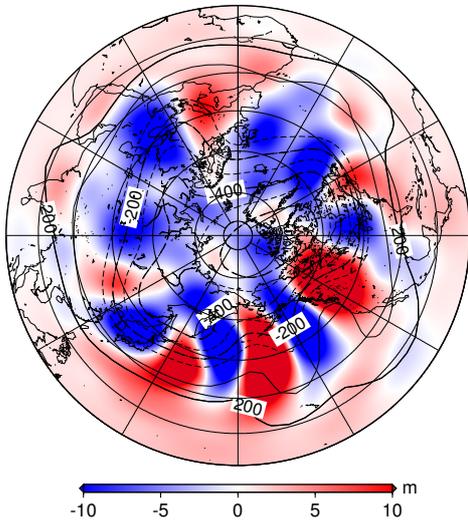
Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 3 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 7 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 14 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 31 1950

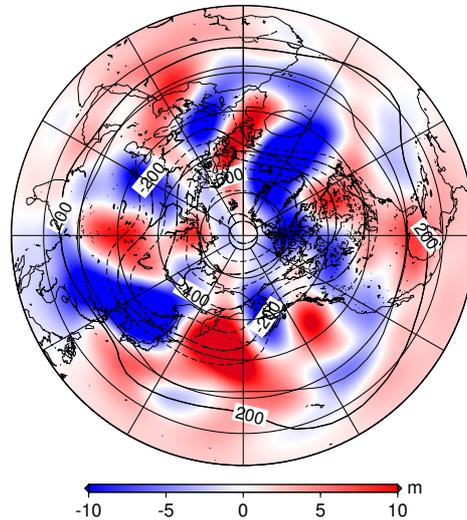
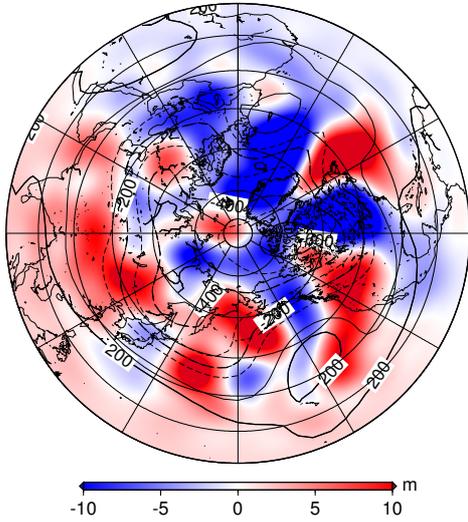
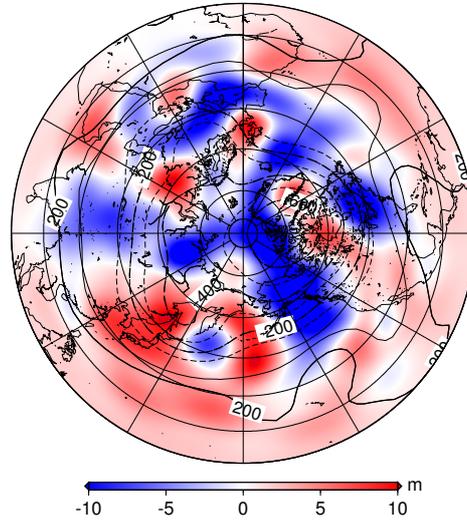


図 59: S-Model での Self-Adaptive 4DVar (KF が 60 時間目の背景誤差共分散を B とした) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

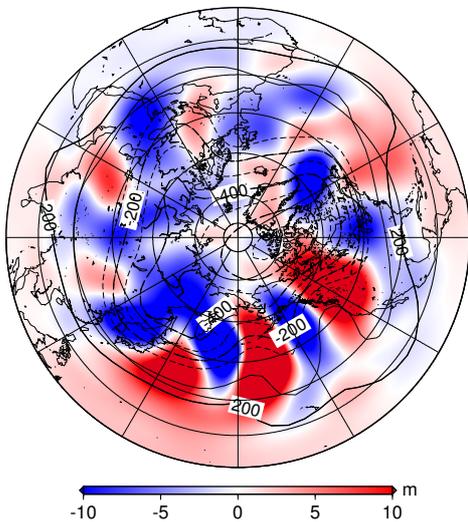
Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 3 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 7 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 14 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 31 1950

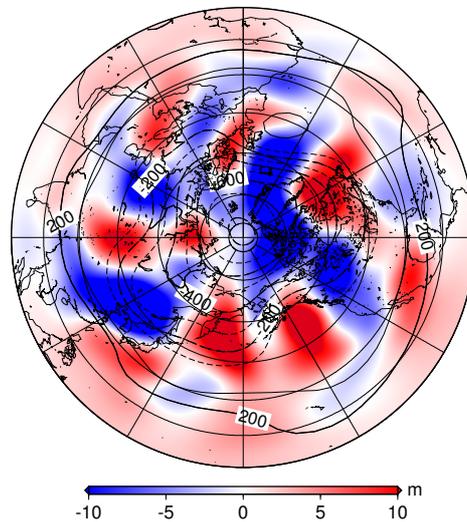
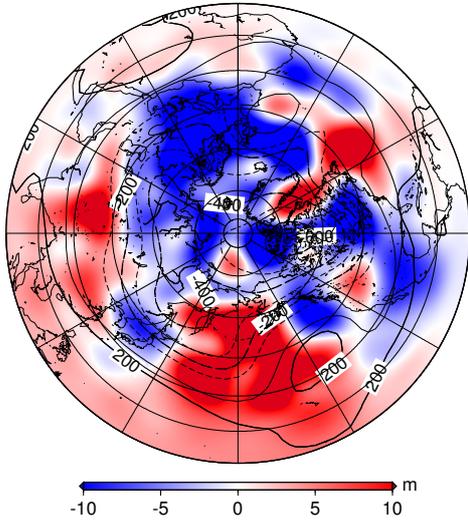
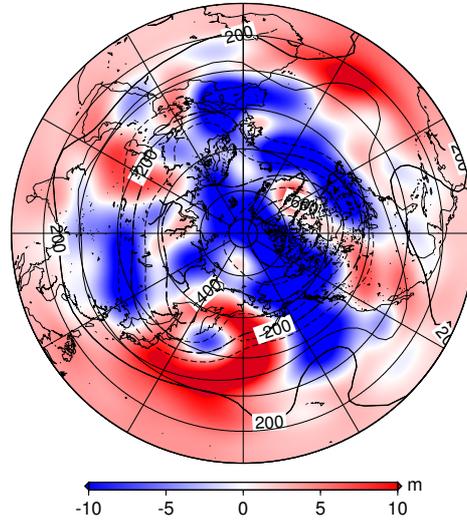


図 60: S-Model での Self-Adaptive 4DVar (KF が 102 時間目の背景誤差共分散を B とした) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

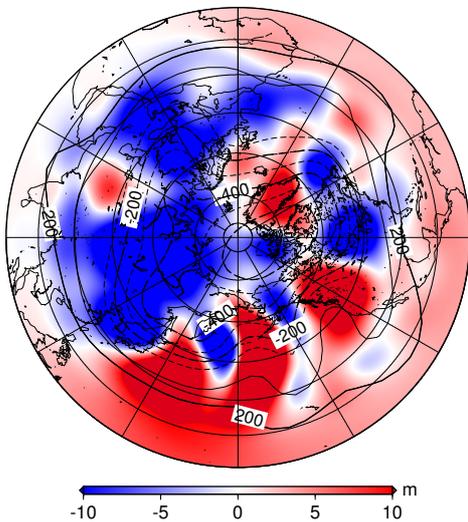
Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 3 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 7 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 14 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 31 1950

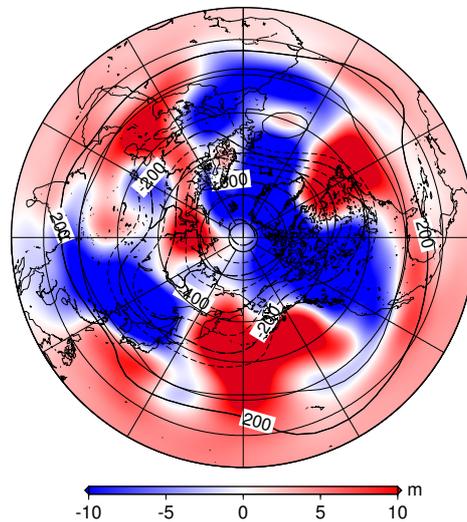
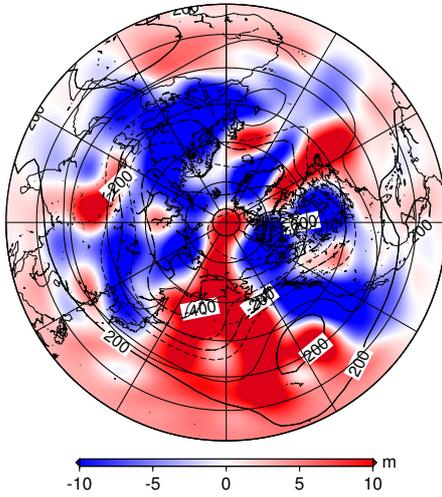
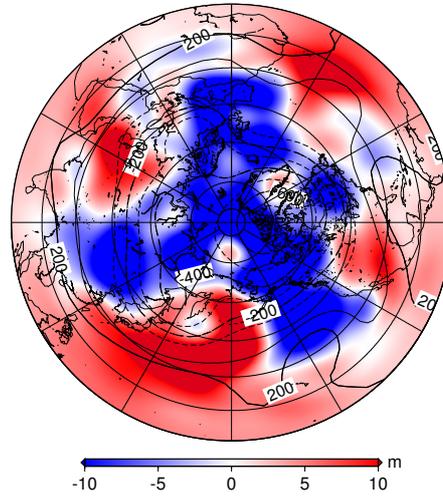


図 61: S-Model での Self-Adaptive 4DVar (KF が 300 時間目の背景誤差共分散を B とした) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

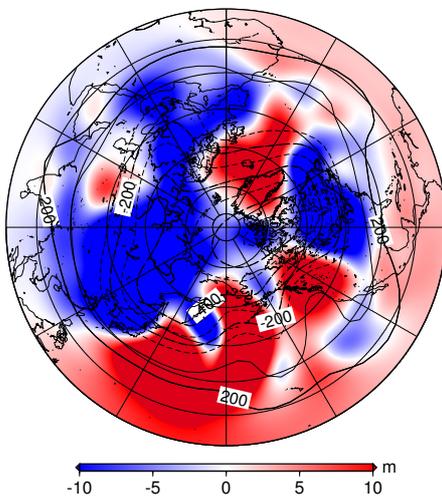
Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 3 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 7 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 14 1950



Barotropic Height  
( Self-Adaptive 4DVar )  
18Z Jan 31 1950

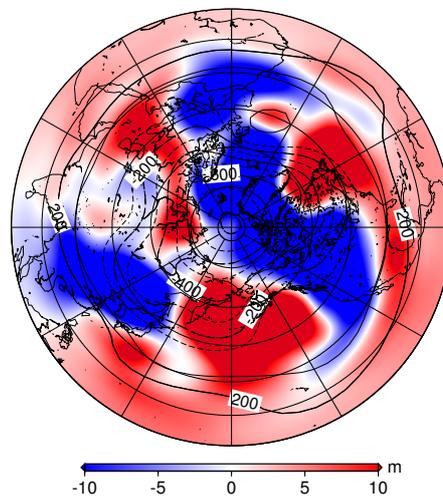


図 62: S-Model での Self-Adaptive 4DVar (KF が 702 時間目の背景誤差共分散を B とした) による順圧高度場の解析誤差の空間分布 (m). カラーシェードは 順圧高度場の解析値が真値より高い場合赤. 低い場合青.

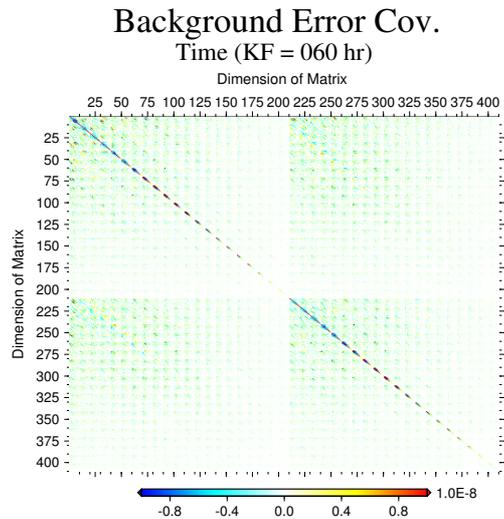
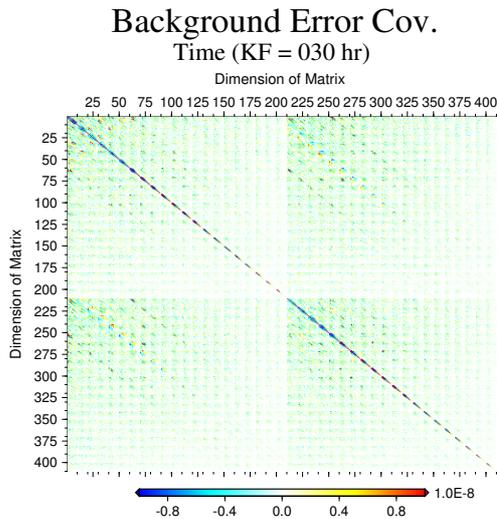
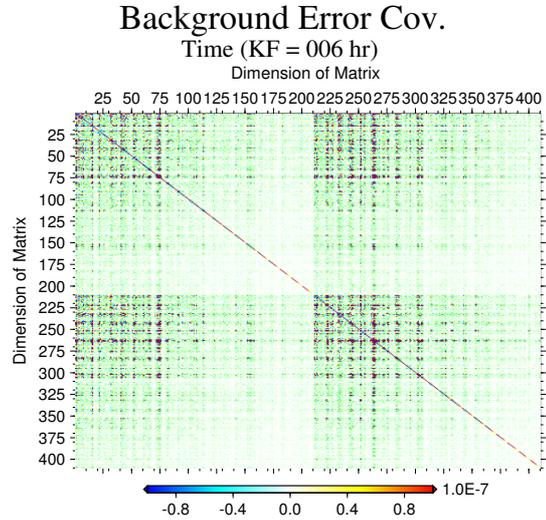
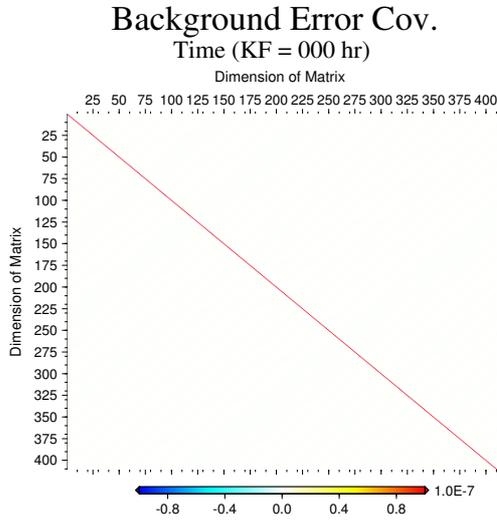


図 63: S-Model における  $410 \times 410$  の背景誤差共分散行列の構造. カラーシェードは 0、6 時間目は  $1.0 \times 10^7$  倍して規格化し、30、60 時間目は  $1.0 \times 10^8$  倍して規格化した分散共分散値. 縦軸・横軸ともに行列の行と列番号.

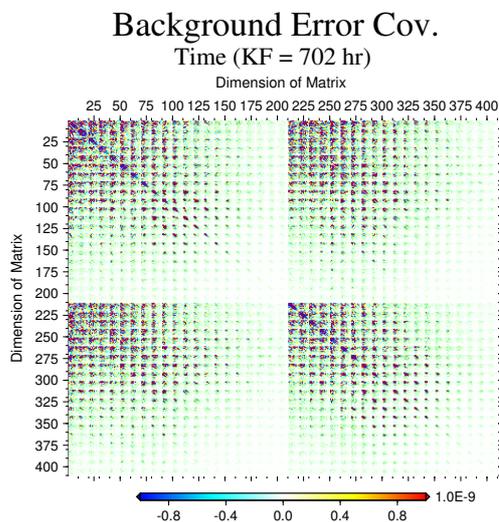
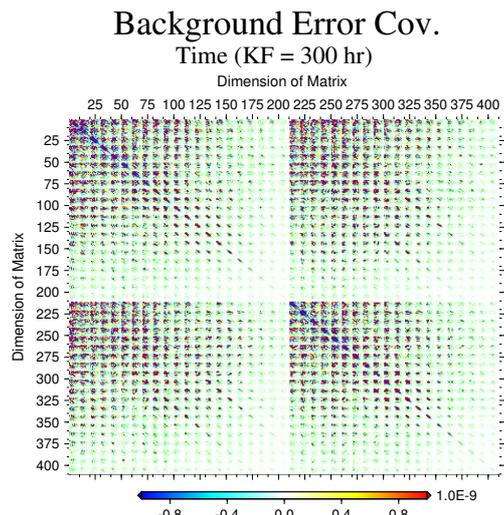
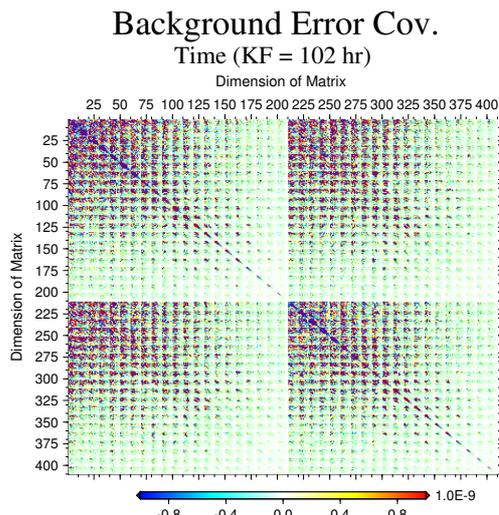


図 64: S-Model における  $410 \times 410$  の背景誤差共分散行列の構造. カラーシェードは  $1.0 \times 10^9$  倍して規格化した分散共分散値. 縦軸・横軸ともに行列の行と列番号.