

平成24年度 卒業論文

線形化した順圧大気大循環モデルを用いた
北極振動と外力の関係の研究

筑波大学生命環境学群地球学類

地球環境学主専攻

200910794

越前谷 渉

2013年2月

目次

要旨	iii
Abstract	iv
図目次	v
1 はじめに	1
2 目的	3
3 使用データ	4
4 解析手法	6
4.1 基礎方程式	6
4.2 スペクトルプリミティブ方程式の導出	10
4.2.1 鉛直構造関数	10
4.2.2 水平構造関数	11
4.2.3 3次元ノーマルモード関数展開	14
4.3 外力の算出	19
4.4 AOI 方程式	20
4.5 線形定常応答	22
5 結果	24
5.1 北極振動の正負における順圧高度と外力の構造	24
5.2 順圧高度の EOF 解析	24
5.3 順圧高度と外力、AOI 方程式の項との SVD 解析	24
5.3.1 日データを用いた解析	25
5.3.2 月平均データを用いた解析	26
5.4 線形定常応答	27
5.4.1 線形マトリックスの構造の検証	28
5.4.2 線形定常応答と観測値の比較	28
6 まとめと考察	29
6.1 高度場と外力、AOI 方程式の各項の関係	29

6.2 線形マトリックスによる定常応答	29
7 結論	31
8 謝辞	32
参考文献	33
Appendix	35
EOF 解析	35
EOF 解析とは	35
EOF 解析における固有ベクトルの計算方法	37
ラグランジュの未定乗数法	40
SVD 解析	41
SVD 解析とは	41
SVD 解析における特異ベクトルの計算方法	43

線形化した順圧大気大循環モデルを用いた 北極振動と外力の関係の研究

越前谷 渉

要旨

北極振動 (AO: Arctic Oscillation) は北半球冬季に北緯約 60 度を挟んで北極域と中緯度地域で海面更正気圧が逆相関を持つ現象であり、北半球中高緯度の気候に大きな影響を与える。AO の変動は北極振動指数 (AOI: AO Index) で表すが、2009/10 年冬季には標準偏差の 3 倍となる負の AOI が現れた。

本研究では、2009/10 年冬季の AO について外力の分布を明らかにすること、また順圧大気大循環モデルを線形化した方程式系において定常状態を仮定し、順圧高度、外力を与えたときの線形応答する気象要素の分布を解析することを目的とする。

本研究の結果、2009/10 年冬季、あるいは AO が顕著に現れた事例において、順圧高度と外力の空間構造は正反対の分布をしており、外力は AO の構造を減衰させていることが分かった。続いて順圧高度と外力について SVD 解析を行い、月平均データでは統計的にも外力が AO を減衰させている関係が強いことが示された。日データの SVD 解析では外力が高度場を東進させている関係性を捉えた。また、定常状態での線形応答では、観測値の外力と線形応答で求めた外力が似た構造をしていた。一方で観測値の順圧高度と線形応答で求めた順圧高度は大きく異なる構造をしており、観測値と計算結果の誤差が線形マトリックスの逆行列で増幅していることが明らかとなった。

キーワード: 北極振動, 順圧モデル, 線形モデル, SVD 解析, 定常応答

The Relationship between the Arctic Oscillation and its Forcing Analyzed by the Linear Barotropic Model

Wataru Echizenya

Abstract

The Arctic Oscillation (AO) has an impact on the climate in the Northern Hemisphere. The AO is characterized as the opposite sea level pressure pattern between the middle and high latitudes. The Arctic Oscillation Index (AOI) expresses the change of the AO, and it reached negative three times of the standard deviation in the winter 2009/10.

This study aims to examine the structure of the barotropic forcing in the winter 2009/10 and analyze the barotropic height and forcing calculated as the linear response to the barotropic atmosphere general circulation model assuming the steady state.

This study shows that the barotropic height and forcing are distributed in opposite sense to each other during the extreme events of the AO including the winter 2009/10. It means that the barotropic forcing damps the AO. This result is supported statistically by the monthly data Singular Value Decomposition (SVD) analysis. The daily data SVD analysis implies that the barotropic forcing moves the barotropic height eastward on the daily cycle. The linear response to the barotropic height on the steady state is similar to the observed barotropic forcing, while the response to the barotropic forcing do not match the observed barotropic height. The inverse matrix amplifies the error between the observed barotropic forcing and the computed barotropic forcing as the linear response.

Key Words: Arctic Oscillation, Barotropic model, Linear model, SVD analysis, Steady state response

目 次

1	2009/10 年冬季 (DJF) の北半球の海面更正気圧 (気象庁提供)	47
2	定常応答計算に用いた線形マトリックスの構造	48
3	1975/76 年冬季 (DJF) の順圧高度と外力	49
4	1976/77 年冬季 (DJF) の順圧高度と外力	50
5	1988/89 年冬季 (DJF) の順圧高度と外力	51
6	2009/10 年冬季 (DJF) の順圧高度と外力	52
7	NCEP/NCAR のデータを用いた 1950-2011 年の順圧高度の EOF-1 .	53
8	1950-2011 年の順圧高度と外力の SVD-1(日データ)	54
9	1950-2011 年の順圧高度と外力の SVD-2(日データ)	55
10	1950-2011 年の順圧高度と AOI 方程式の線形項の SVD-1(日データ)	56
11	1950-2011 年の順圧高度と AOI 方程式の線形項の SVD-2(日データ)	57
12	1950-2011 年の順圧高度と AOI 方程式の非線形項の SVD-1(日データ)	58
13	1950-2011 年の順圧高度と AOI 方程式の非線形項の SVD-2(日データ)	59
14	1950-2011 年の順圧高度と外力の SVD-1(月データ)	60
15	1950-2011 年の順圧高度と外力の SVD-2(月データ)	61
16	1950-2011 年の順圧高度と AOI 方程式の線形項の SVD-1(月データ)	62
17	1950-2011 年の順圧高度と AOI 方程式の線形項の SVD-2(月データ)	63
18	1950-2011 年の順圧高度と AOI 方程式の非線形項の SVD-1(月データ)	64
19	1950-2011 年の順圧高度と AOI 方程式の非線形項の SVD-2(月データ)	65
20	線形マトリックスに粘性項を含めて計算した順圧高度の定常応答と しての外力	66
21	2009/10 年冬季 (DJF) の順圧高度と外力の観測値と線形定常応答 . .	67
22	1975/76 年冬季 (DJF) の順圧高度と外力の観測値と線形定常応答 . .	68
23	1976/77 年冬季 (DJF) の順圧高度と外力の観測値と線形定常応答 . .	69
24	1988/89 年冬季 (DJF) の順圧高度と外力の観測値と線形定常応答 . .	70
25	2009/10 年冬季 (DJF) の線形項、非線形項、外力項の比較	71

1 はじめに

北極振動 (AO: Arctic Oscillation) とは、Thompson and Wallace (1998) により提唱された、北半球冬季に北緯約 60 度を挟んで北極域と中緯度地域で海面更正気圧が逆相関を持つ現象である。AO は北半球冬季の海面更正気圧を経験直交関数 (EOF: Empirical Orthogonal Function) 展開したときの第一主成分として定義される。また、その北極域と中緯度の気圧の変動の指標を北極振動指数 (AOI: AO Index) で表す。2009/10 年冬季には標準偏差の 3 倍となる負の AOI が現れた。図 1 は 2009/10 年冬季における北半球中高緯度の海面更正気圧とその気候値からの偏差を示している。北極域で正偏差、それを取り囲むように中緯度地域で負偏差となっている。AOI が正のときはポーラージェットが強化されており、ヨーロッパでは温和で雨が多くなり、日本でも温和となる。AOI が負のときは対称的にジェットが弱まり、寒気が流入してヨーロッパ、日本で寒くなる傾向がある (田中 2004)。

Matsueda and Tanaka (2005) は大気の順圧成分を SVD 解析し、線形項、非線形項、外力項が高度場に与える影響を解明した。この結果では、AO が顕著に現れた季節において、外力は高度場を減衰させる働きをしていることが示された。また、非線形相互作用が高度場と共鳴関係にあり、非線形相互作用の中でも線形プロセスがその共鳴関係の多くを占めていることが示された。下 (2010) では順圧大気大循環モデルから作成した AOI 方程式により、AOI の変動に寄与する項を解析した。これによると、線形項は AOI の変動に大きく寄与しており、外力項は AOI の変動に対し、負のフィードバックを持つことが示された。その後、木野 (2012) ではクロススペクトル解析を用いて AOI 方程式各項の AO に対する寄与を求めた。その結果、1 か月程度までの周期の AO では線形項、非線形項、外力項ともに AOI の変動の原因となっており、特に非線形項が大きく寄与していること、1 年程度の周期では AOI 方程式の時間変化項に対して、線形項が共鳴、非線形項が原因、外力項が減衰の意味をもつことが明らかとなった。

AO をもたらすメカニズムについてであるが、Kimoto et al. (2001) では線形化した方程式系において特異値の最も小さい、減衰が最小のモードにおいて AO に似た構造が得られることを示した。このモードを中立モードと呼び、Watanabe and Jin (2004) では波-波相互作用を含む行列に拡張して解析を行い、中立モードとして AO に近い構造ベクトルが得られることを示した。中立モードは特別な外部強制力によって卓越するモードであり、特異値分解の数学的構造から AO の構造のベクトルと組で外部強制のベクトルが得られ、その外部強制力の構造を明らかに

した。Tanaka and Matsueda (2005) は、順圧大気大循環モデルを冬季気候値を用いて線形化し、固有値が 0 となる特異固有解において AO が現れ、任意の準定常外力の応答として AO が励起されると提唱した。その後、関 (2012) では順圧大気に埋め込まれた微小擾乱が外力に共鳴して AO を発達させるプロセスもあり得ることを明らかにした。

AO が物理的な実体を持つかどうかについては未だに論争となっており、Itoh (2002) では、AO は統計的な虚像であり、北大西洋振動 (NAO: North Atlantic Oscillation)、太平洋・北米パターン (PNA: Pacific - North American Pattern) の合成から説明できると主張した。この研究では、AO はほぼ見かけの現象であり、真の AO があってもその貢献はごくわずかであると結論付けている。

このように AO を励起するメカニズムについては様々な研究がなされているが、未解明な部分が多い。特に 2009/10 年冬季は AOI が極端な負の値をとっており、このような異常気象について、外力を解析することは重要である。

2 目的

本研究では 2009/10 年冬季の AO について外力の分布を明らかにすること、また順圧大気大循環モデルを線形化した方程式系において定常状態を仮定し、順圧高度、外力を与えたときの線形応答する気象要素の分布を解析することを目的とする。

3 使用データ

解析に使用するデータは、アメリカ環境予報センター (National Centers for Environmental Prediction; NCEP)/アメリカ大気研究センター (National Center for Atmospheric Research; NCAR) による再解析データ (Kalnay et al. 1996) である。データの詳細は以下の通りである。

使用期間	1950年1月 – 2011年12月
時間間隔	00, 06, 12, 18Z
気象要素	u (m/s), v (m/s), Z (gpm)
水平グリッド間隔	$2.5^\circ \times 2.5^\circ$
鉛直グリッド間隔	1000, 925, 850, 700, 600, 500, 400, 300, 200, 150, 100, 70, 50, 30, 20, 10 hPa の 17 層
解析範囲	北半球

再解析データとは、同一の数値予報モデルとデータ同化手法を用いて過去数十年間にわたりデータ同化を行い、長期間にわたって出来る限り均質になるように作成したデータセットのことである。このような均質な大気解析データセットは、きわめて信頼度の高い基礎資料になりうる。特に気候変動の解明、大気大循環の解析と全球のエネルギー循環の研究の際には有用である。

NCEP/NCAR では 1949 年 1 月から 50 年以上という長期にわたって同一のデータ同化手法により再解析が行われており、このデータは解析に用いることが出来る。ただし、1979 年に初めて人工衛星 TIROS が打ち上げられ、客観解析に初めて衛星データが導入されたことにより、1979 年を境にデータの不連続的な変動が残っていることに留意しなくてはならない。モデルや解析スキーム等による見かけの気候変動は取り除かれているが、入力データの質の不連続は明瞭に残っている。また、 $2.5^\circ \times 2.5^\circ$ の等圧面データには、すべての変数に対して T30 の波数切断で平滑化施されているため、高緯度地方では波動状の誤差が顕著に現れる。しかし長周期の変動の研究では、長期間にわたる均質なデータである再解析データは貴重である。

NCEP/NCAR 再解析データに用いられている予報モデルの水平分解能は T62、鉛直分解能は 30 層、データ同化手法は 3 次元変分法で、その解析レベルはモデル

面である。ただし、先に述べたように等圧面データには平滑化のために T30 の波数切断が行われている。

4 解析手法

本研究では Tanaka(1985) に基づきプリミティブ方程式を 3次元ノーマルモード展開したスペクトルプリミティブモデルを用いる。本章では、スペクトルプリミティブ方程式と線形応答に用いる線形マトリックスの導出について述べる。

4.1 基礎方程式

このモデルの基礎方程式系は、球面座標系 (緯度 θ 、経度 λ 、気圧 p) で表された水平方向の運動方程式、熱力学第一法則の式、質量保存則、状態方程式、静力学平衡の式から表現される (小倉 1978)。

- 水平方向の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv + F_u \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv + F_v \quad (2)$$

- 熱力学第一法則の式

$$\frac{\partial c_p T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla c_p T + \omega \frac{\partial c_p T}{\partial p} = \omega \alpha + Q \quad (3)$$

- 質量保存則

$$\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (4)$$

- 状態方程式

$$p\alpha = RT \quad (5)$$

- 静力学平衡の式

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha \quad (6)$$

これらの方程式で用いられている記号は以下の通りである。

θ : 緯度	α : 比容
λ : 経度	ω : 鉛直 p 速度
u : 東西方向の風速	F_u : 東西方向の摩擦
v : 南北方向の風速	F_v : 南北方向の摩擦
V : 水平方向の風速	Q : 非断熱加熱率
ϕ : ジオポテンシャル	Ω : 地球の自転角速度 ($7.29 \times 10^{-5} rad/s$)
p : 気圧	a : 地球の半径 ($6.371 \times 10^6 m$)
t : 時間	c_p : 定圧比熱 ($1004 JK^{-1} kg^{-1}$)
T : 気温	R : 乾燥気体の気体定数 ($287.04 JK^{-1} kg^{-1}$)

そして上記の方程式の中で熱力学第一法則の式に質量保存則、状態方程式、静力学平衡の式を代入することで、これらの基礎方程式系を3つの従属変数 (u, v, ϕ) のそれぞれの予報方程式で表すことができる (Tanaka 1991)。

まず始めに気温 T と比容 α 、ジオポテンシャル ϕ について以下のような摂動を与える。

$$T = T_0 + T' \quad (7)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha' \quad (8)$$

$$\phi = \phi_0 + \phi' \quad (9)$$

ここで T_0, α_0, ϕ_0 はそれぞれ全球平均量であり、 T', α', ϕ' は全球平均量からの偏差である。(7) から (9) 式を状態方程式と静力学平衡の式に適用すると、

$$p\alpha_0 = RT_0 \quad (10)$$

$$p\alpha' = RT' \quad (11)$$

$$\frac{d\phi_0}{dp} = -\alpha_0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial p} = -\alpha' \quad (13)$$

これら (7) ~ (13) 式を用いて熱力学第一法則の式を変形すると、

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T' + \omega \left(\frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{RT'}{pc_p} \right) + \omega \left(\frac{dT_0}{dp} - \frac{RT_0}{pc_p} \right) = \frac{Q}{c_p} \quad (14)$$

となる。ここで $T_0 \gg T'$ であるため、(14) 式の左辺の第 3 項において気温の摂動の断熱変化項は無視することができる。つまり、

$$\omega \frac{RT_0}{pc_p} \gg \omega \frac{RT'}{pc_p} \quad (15)$$

である。また左辺の第 4 項において、全球平均気温 T_0 を用いることで以下のような大気の静的安定度パラメータ γ を導入することができる (Tanaka 1985)。

$$\gamma = \frac{RT_0}{c_p} - p \frac{dT_0}{dp} \quad (16)$$

よってこの関係式を用いて (14) 式を変形すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{p^2}{\gamma R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} - \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \omega = \frac{Qp}{c_p \gamma} \quad (17)$$

さらに (17) 式の両辺を p で微分し、質量保存則を適用すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\gamma R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} \\ & = \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{\gamma R} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{Qp}{c_p \gamma} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

となる。以上より熱力学第一法則の式 (3) から気温 T と比容 α を消去し、摂動ジオポテンシャル ϕ' の予報方程式を導くことができた。これによって 3 つの従属変数 (u, v, ϕ') に対して 3 つの予報方程式 (1)、(2)、(19) が存在するので解を一意的に求めることができる。

これらの 3 つの式をまとめてベクトル表示すると次式のようなになる (Tanaka 1991)。

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{N} + \mathbf{F} \quad (19)$$

τ は無次元化された時間であり、 $\tau = 2\Omega t$ である。式 (19) の各記号は以下の通りである。

\mathbf{U} : 従属変数ベクトル

$$\mathbf{U} = (u, v, \phi')^T \quad (20)$$

M, L : 線形演算子

$$\mathbf{M} = 2\Omega \text{diag} \left(1, 1, -\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \right) \quad (21)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \sin \theta & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ 2\Omega \sin \theta & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial(\cdot) \cos \theta}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

N : 非線形項ベクトル

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv \\ -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + \omega p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (23)$$

F : 外部強制項からなるベクトル

$$\mathbf{F} = \left(F_u, F_v, \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{pQ}{c_p \gamma} \right) \right)^T \quad (24)$$

ただし、

$\text{diag}()$: 対角行列

$()^T$: 転置行列

とする。

式 (19) の基礎方程式系の基本状態として、断熱かつ摩擦なし、つまり ($F = 0$) の静止大気 ($\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi}$) = 0 を考え、そこに微小擾乱 (u', v', ϕ') を与える。このとき式 (19) の非線形演算子 N は、

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u' - \omega' \frac{\partial}{\partial p} u' + \frac{\tan \theta}{a} u' v' \\ -\left(\frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) v' - \omega' \frac{\partial}{\partial p} v' - \frac{\tan \theta}{a} u' u' \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{R\gamma} \left(\frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \omega' p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] \end{pmatrix}$$

2 次以上の摂動項を無視すると、結局 $\mathbf{N} = 0$ となり、式 (19) を線形化した基本状態は以下のように表せる。

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial \tau} + \mathbf{L} \mathbf{U}' = 0 \quad (25)$$

$$\mathbf{U}' = (u', v', \phi')^T$$

これ以降は簡単のため、 $\mathbf{U}' = (u', v', \phi')^T$ を $\mathbf{U} = (u, v, \phi)^T$ と略記する。

4.2 スペクトルプリミティブ方程式の導出

4.2.1 鉛直構造関数

このベクトル方程式 (25) において、鉛直構造関数 $G_m(p)$ を導入して鉛直方向と水平方向に変数分離を行う。

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\lambda, \theta, p, \tau) &= (u, v, \phi)^T \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (u_m, v_m, \phi_m)^T G_m(p) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} U_m(\lambda, \theta, \tau) G_m(p) \end{aligned} \quad (26)$$

ここで添字の m は鉛直モード番号 (vertical mode number) を意味する。これを式 (27) に代入し、分離された各変数に関する方程式を導く。

$$\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m}{dp} + \frac{1}{gh_m} G_m = 0 \quad (27)$$

$$\frac{1}{gh_m} \frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (28)$$

常微分方程式 (27) を鉛直構造方程式 (vertical structure equation) と呼ぶ。また水平風成分についても同様に鉛直構造関数を導入して、

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v_m + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi_m}{\partial \lambda} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u_m + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi_m}{\partial \theta} = 0 \quad (30)$$

と導ける。式 (28)、(29)、(30) をまとめて水平構造方程式 (horizontal structure equation) と呼ぶ。ここで分離定数中の h_m は長さの次元 (L) をもち、鉛直構造方程式 (27) の固有関数である鉛直構造関数 $G_m(p)$ に対する固有値として求まる。また、水平構造方程式 (28) は流体層の厚さ h_m の線形浅水方程式系と同じ形であることから、 h_m は等価深度 (equivalent height) の意味を持つ。

鉛直構造関数 $G_m(p)$ の正規直交性により、気圧 p の任意の関数 $f(p)$ について次の鉛直変換を導くことができる。

$$f(p) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m G_m(p) \quad (31)$$

$$f_m = \frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} f(p) G_m(p) dp \quad (32)$$

ここで f_m は第 m 鉛直モードの鉛直変換係数である。

鉛直モード $m = 0$ は順圧 (barotropic) モード、または外部 (external) モードと言いい、鉛直方向に節を持たずほとんど全層で一定のまま変化しないモードである。これに対して鉛直モード $m \geq 1$ は傾圧 (baroclinic) モード、または内部 (internal) モードと言いい、 m 番目のモードに関しては鉛直方向に m 個の節を持つ。本研究で用いた順圧スペクトルモデルは、鉛直モード $m = 0$ の順圧モードだけを考慮したモデルであり、鉛直方向に平均した大気の特徴を考慮するのに適したモデルであるといえる。また、順圧モード $m = 0$ における等価深度 h_0 は 9728.4m である。

4.2.2 水平構造関数

前節において第 m 鉛直モードの鉛直構造関数の固有値として得た等価深度を用いて、水平構造方程式 (28)、(29)、(30) を解く。ここで式 (28)、(29)、(30) を

$$\mathbf{M}_m \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U}_m + \mathbf{L} \mathbf{U}_m = 0 \quad (33)$$

と行列表記する。添字の m は第 m 鉛直モードを意味する。ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m &= 2\Omega \text{diag} \left(1, 1, \frac{1}{gh_m} \right) \\ \mathbf{U}_m &= (u_m, v_m, \phi_m)^T \end{aligned}$$

である。ここで次のスケール行列 \mathbf{X}_m 、 \mathbf{Y}_m を導入する。

$$\mathbf{X}_m = \text{diag} \left(\sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, gh_m \right) \quad (34)$$

$$\mathbf{Y}_m = 2\Omega \text{diag} \left(\sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, 1 \right) \quad (35)$$

これらを式 (33) に以下のように作用させる。

$$\left(\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m \right) + \left(\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m \right) \left(\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m \right) = 0 \quad (36)$$

ここで、

$$\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m = \text{diag} (1, 1, 1) \quad (37)$$

であるから式 (36) は

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m \right) + \left(\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m \right) \left(\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m \right) = 0 \quad (38)$$

と書ける。尚、

$$\mathbf{L}_m = \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta & \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ \sin \theta & 0 & \alpha_m \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial(\cdot) \cos \theta}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

である。式 (39) 中の α_m は次のように定義した笠原パラメータと呼ばれるものである。

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{gh_m}}{2\Omega a} \quad (40)$$

このことは、浅水方程式中の 4 つの惑星パラメータ (g : 重力、 h_m : 等価深度、 Ω : 地球の自転速度、 a : 惑星半径) が唯一の惑星固有パラメータ α_m だけであらわせることを示している (Tanaka 1985)。

式 (38) は時間 τ の線形システムであるから次のように解を仮定して、水平方向成分と時間成分とに変数分離することができる。

$$\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m(\lambda, \theta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} w_{nlm} \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) e^{-i\sigma_{nlm}\tau} \quad (41)$$

$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ は水平構造関数 (horizontal structure function)、または Hough 関数と呼ばれる。Hough 関数は第 m 鉛直モードに相当する水平ノーマルモード、すなわち水平自由振動を意味し、経度 λ と緯度 θ の関数である。添字の n は東西波数、 l は南北モード番号を示している。

式 (41) を水平構造方程式 (38) に代入すると、

$$-i\sigma_{nlm} \mathbf{H}_{nlm} + \mathbf{L}_m \mathbf{H}_{nlm} = 0 \quad (42)$$

となる。この固有値問題を解くことで固有関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ と対応する固有値 σ_{nlm} を求めることが出来る。式 (39) は経度方向にパラメータが一定であるから、Hough ベクトル関数 $\Theta_{nlm}(\theta)$ を用いて $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ を次のように経度依存と緯度依存とに変数分離できる。

$$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) = \Theta_{nlm}(\theta) e^{in\lambda} \quad (43)$$

ただし、

$$\Theta_{nlm}(\theta) = \begin{pmatrix} U_{nlm}(\theta) \\ -iV_{nlm}(\theta) \\ Z_{nlm}(\theta) \end{pmatrix} \quad (44)$$

とする。南北風成分に関しては位相を $\pi/2$ だけずらすために $i = \sqrt{-1}$ が掛けられている。南北モードは3種類の異なるモードから構成される。一つは低周波の西進するロスビーモード (Rossby mode) l_r で、残りの二つは高周波の西進、および東進する重力波モード (gravity mode) l_{wg} 、 l_{eg} である。

Swartrauber and Kasahara (1985) によると、水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ は球面調和関数展開の和として得られる。この方法で求められる水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ が正規直交性をもつならば、これを基底にして波数展開することが出来る。水平構造関数が直交関数であることは以下のように示される。

緯度と経度に関する内積は以下のように表される。

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (U_{nlm} U_{n'l'm}^* + V_{nlm} V_{n'l'm}^* + Z_{nlm} Z_{n'l'm}^*) e^{-i(n-n')\lambda} \cos \theta d\lambda d\theta \quad (45)$$

アスタリスクは複素共役を意味し、 nlm と $n'l'm$ は東西波数と南北モード番号の異なるモードを示している。式 (39) の線形演算子 $\mathbf{L}_m = \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m$ は非対称のエルミート行列であるため、次の関係 (skew-self adjoint) が成立する。

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{L}_m \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle + \langle \mathbf{L}_m \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0 \quad (46)$$

式 (46) に式 (42) を代入して、

$$(\sigma_{nlm} - \sigma_{n'l'm}^*) \langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0 \quad (47)$$

を得る。ただし $n = 0$ を除く。式 (47) から以下の二つの条件が課せられる。

• $n = n'$ かつ $l = l'$ のとき

$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle$ は線形浅水方程式系の全エネルギー量に比例する量であり、決して0にはならない。よって式 (47) を満たすためには $\sigma_{nlm} = \sigma_{nlm}^*$ である必要があり、従って σ_{nlm} は実数でなくてはならない。

• それ以外のとき

$\sigma_{nlm} \neq \sigma_{nlm}^*$ であれば式 (47) を満たすためには $\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0$ が成り立つ必要がある。すなわち固有振動数 σ_{nlm} に相当する固有関数 \mathbf{H}_{nlm} が、固有振動数 $\sigma_{n'l'm}$ に相当する固有関数 $\mathbf{H}_{n'l'm}$ と直交関係にあることを示している。

以上の二つの条件から、任意のモード nlm について、以下の正規直交関係が成立する。

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_{nlm} \cdot \mathbf{H}_{n'l'm}^* \cos \theta d\lambda d\theta = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \quad (48)$$

以上の水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ の直交性から、次のフーリエハフ変換が導かれる。

第 m 鉛直モードに相当する物理空間において、 λ, θ, τ を変数とする任意のベクトル関数を $\mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau)$ とすると、

$$\mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{nlm}(\tau) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \quad (49)$$

$$a_{nlm}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau) \cdot \mathbf{H}_{nlm}^* \cos \theta d\lambda d\theta \quad (50)$$

となる。

4.2.3 3次元ノーマルモード関数展開

鉛直構造関数と水平構造関数を結合させ、3次元ノーマルモード関数 $\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p)$ を構成し、式(19)を展開する。3次元ノーマルモード関数 $\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p)$ は鉛直構造関数 $G_m(p)$ と水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ とのテンソル積であり、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) &= G_m(p) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \\ &= G_m(p) \mathbf{\Theta}_{nlm}(\theta) e^{in\lambda} \end{aligned} \quad (51)$$

この3次元ノーマルモード関数も以下に示す内積の下で、直交関係を満たす。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{\Pi}_{nlm}, \mathbf{\Pi}_{n'l'm'} \rangle &= \frac{1}{4\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{\Pi}_{nlm} \cdot \mathbf{\Pi}_{n'l'm'}^* \cos \theta d\lambda d\theta dp \\ &= \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (52)$$

この関係により、3次元ノーマルモード関数展開が導かれる。式(19)中の \mathbf{U} と \mathbf{N} と \mathbf{F} は3次元ノーマルモード関数によって次のように展開される。

$$\mathbf{U}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M w_{nlm}(\tau) \mathbf{X}_m \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (53)$$

$$\mathbf{N}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M n_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (54)$$

$$\mathbf{F}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M f_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (55)$$

ここで $w_{nlm}(\tau)$, $n_{nlm}(\tau)$, $f_{nlm}(\tau)$ はそれぞれ、従属変数ベクトル \mathbf{U} 、非線形項ベクトル \mathbf{N} 、外部強制ベクトル \mathbf{F} についての展開係数である。 $w_{nlm}(\tau)$, $n_{nlm}(\tau)$, $f_{nlm}(\tau)$ は展開基底の正規直交性式 (52) より、以下のフーリエ変換で求められる。

$$w_{nlm}(\tau) = \langle U(\lambda, \theta, p, t), \mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \rangle \quad (56)$$

$$n_{nlm}(\tau) = \langle N(\lambda, \theta, p, t), \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \rangle \quad (57)$$

$$f_{nlm}(\tau) = \langle F(\lambda, \theta, p, t), \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \rangle \quad (58)$$

同様の内積を式 (19) 全体に施すことによって、プリミティブ方程式系の 3 次元スペクトルモデルが導かれる。

$$\left\langle \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} + \mathbf{L} \mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F}, \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm} \right\rangle = 0 \quad (59)$$

この式を、次のように線形項、非線形項、外力項に分ける。

$$\left\langle \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} + \mathbf{L} \mathbf{U} \right\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm} \rangle + \langle \mathbf{F}, \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm} \rangle \quad (60)$$

まず、線形項を 3 次元スペクトルモデルに書き換える。鉛直微分オペレータである線形演算子 \mathbf{M} は、鉛直構造方程式 (27) により固有値に置き換えることができる。添字の i, j は東西、南北、鉛直波数の添字 nlm を簡略化したものである。

$$\mathbf{M} \mathbf{\Pi}_i = \text{diag} \left(1, 1, \frac{1}{gh_m i} \right) \mathbf{\Pi}_i \quad (61)$$

無次元化した水平微分行列 \mathbf{L}_m の固有値が i となる (42) より、以下の関係を満たす。

$$(\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_i) \mathbf{\Pi}_i = i \mathbf{\Pi}_i \quad (62)$$

この式と \mathbf{U} をノーマルモードで展開する (58) を (59) に代入し無次元化し、 \mathbf{L}_m の直交を用い、(61) を用いれば

$$\sum_j \langle 2\Omega \mathbf{Y}_i^{-1} \mathbf{M} \mathbf{X}_j \mathbf{\Pi}_j, \mathbf{\Pi}_i \rangle \frac{dw_j}{d\tau} + \langle \mathbf{Y}_i^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_j \mathbf{\Pi}_j, \mathbf{\Pi}_i \rangle w_j = \frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i \quad (63)$$

となり線形項が導かれる。

次に非線形項を 3 次元スペクトルモデルに書き換える。ここからは 3 重の添字 $nlm, n'l'm', n''l''m''$ をそれぞれ i, j, k と表し、 i で示される波数はそれぞれ n_i, k_i, m_i のように示して区別する。 j, k についても同様である。

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{N}, \mathbf{Y}_{m_i}^{-1} \mathbf{\Pi}_i \rangle &= \frac{1}{2\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} G_{m_i} e^{in\lambda} \\
&\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2\Omega\sqrt{gh_m}} U_i \\ \frac{1}{2\Omega\sqrt{gh_m}} (iV_i) \\ \frac{1}{2\Omega} Z_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan\theta}{a} uv \\ -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan\theta}{a} uv \\ \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right) \end{pmatrix} \cos\theta d\lambda d\theta dp
\end{aligned} \tag{64}$$

(58) を成分で書くと以下のようになる。

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=0}^K w_i \sqrt{gh_{m_i}} U_i G_{m_i} e^{in_i\lambda} \\
v &= \sum_{i=0}^K w_i \sqrt{gh_{m_i}} (-iV_i) G_{m_i} e^{in_i\lambda} \\
\phi &= \sum_{i=0}^K w_i gh_{m_i} Z_i G_{m_i} e^{in_i\lambda}
\end{aligned} \tag{65}$$

この級数展開の式 (58) を式 (64) の各変数に代入する。

また、鉛直 p 速度 ω は発散と関係することから、以下のように $\sigma_i Z_i$ を用いた級数展開を導くことができる (田中 他, 1997)。まず質量保存則 (4) を鉛直積分して式 (58) を代入する。

$$\begin{aligned}
\omega &= - \int_0^p \nabla \cdot \mathbf{V} dp \\
&= - \int_0^p \left(\frac{1}{a \cos\theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos\theta} \frac{\partial v \cos\theta}{\partial \theta} \right) dp \\
&= - \sum_{i=0}^K w_i \int_0^p G_{m_i} dp \frac{\sqrt{gh_{m_i}}}{a \cos\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} U_i e^{in_i\lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (-iV_i \cos\theta) e^{in_i\lambda} \right]
\end{aligned} \tag{66}$$

ここで、水平構造方程式より、

$$i\sigma_i \frac{2\Omega}{\sqrt{gh_m}} Z_i e^{in_i\lambda} = \frac{1}{a \cos\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} U_i e^{in_i\lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (-iV_i \cos\theta) e^{in_i\lambda} \right] \tag{67}$$

であるから、これを式 (66) 代入して、

$$\omega = \sum_{i=0}^K w_i 2\Omega \int_0^p G_{m_i} dp (-i\sigma_i Z_i) e^{in_i\lambda} \tag{68}$$

を得る。式 (68) 中の G_{m_i} の不定積分は鉛直構造方程式を積分することによって G_{m_i} の 1 階微分で表すことができる。

$$\int_0^p G_{m_i} dp = -\frac{gh_{m_i}}{R\gamma} p^2 \frac{dG_{m_i}}{dp} \quad (69)$$

以上の式 (66) と式 (67) を式 (65) に代入することで次式のような式に変形することができる。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}, \mathbf{Y}_{m_i}^{-1} \mathbf{\Pi}_i \rangle = & -i \sum_{j=1} \sum_{k=1} w_j w_k \frac{1}{2\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \\ & \begin{pmatrix} U_i \\ V_i \\ Z_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_1 \left(\frac{n_k U_k}{\cos \theta} + \tan \theta V_k \right) & -P_1 \frac{dU_k}{d\theta} & P_2 U_k \\ P_1 \left(\frac{n_k V_k}{\cos \theta} + \tan \theta U_k \right) & -P_1 \frac{dV_k}{d\theta} & P_2 V_k \\ P_3 \frac{n_k Z_k}{\cos \theta} & -P_3 \frac{dZ_k}{d\theta} & -P_4 Z_k \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} U_j \\ V_j \\ \sigma_j Z_j \end{pmatrix} e^{i(-n_i + n_j + n_k)\lambda} \cos \theta d\lambda d\theta dp \end{aligned} \quad (70)$$

ただし、

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\sqrt{gh_{m_j}} \sqrt{gh_{m_k}}}{2\Omega a \sqrt{gh_{m_i}}} G_{m_i} G_{m_j} G_{m_k} \\ P_2 &= \frac{\sqrt{gh_{m_k}} gh_{m_j}}{\sqrt{gh_{m_i}} R\gamma} p^2 G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} \frac{dG_{m_k}}{dp} \\ P_3 &= \frac{\sqrt{gh_{m_j}}}{2\Omega} G_{m_i} G_{m_j} G_{m_k} - \frac{\sqrt{gh_{m_k}} gh_{m_j}}{2\Omega a R\gamma} p^2 G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} \frac{dG_{m_k}}{dp} \\ P_4 &= G_{m_i} G_{m_j} G_{m_k} + \frac{gh_{m_k}}{R\gamma} p G_{m_i} G_{m_j} \frac{dG_{m_k}}{dp} + \frac{gh_{m_j}}{R\gamma} p G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} G_{m_k} \\ &+ \left(\frac{gh_{m_k}}{R\gamma} - 1 \right) \frac{gh_{m_j}}{R\gamma} p^2 G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} \frac{dG_{m_k}}{dp} \end{aligned} \quad (71)$$

とする。

式 (53)、(54)、(55) で展開した大気変数を式 (58) の各項に代入し、内積の積分計算を実行すると、空間依存は消えて時間のみの関数となり、最終的に行列表記のプリミティブ方程式は以下のようなスペクトル表記のプリミティブ方程式系に書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i = & -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w_j w_k + f_i \\ & i = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (72)$$

ここで、 τ は無次元時間、 σ_i はラプラス潮汐方程式の固有振動数、 r_{ijk} は非線形相互作用係数で実数となる。非線形項中の r_{ijk} は非線形の波-波相互作用 (wave-wave interaction) および帯状-波相互作用 (zonal-wave interaction) に関する相互作用係数 (interaction coefficients) で実数である。 K は全波数で、 $K = (2N + 1)(L + 1)(M + 1)$ である。 N は東西全波数、 L は南北全波数、 M は鉛直全波数を示す。厳密には $K \rightarrow \infty$ としなくてはならないが、通常はある波数で切断して方程式系を構成する。

以上より、順圧成分と傾圧成分からなる鉛直構造関数、ロスビーモードと重力波モードからなる水平構造関数の両方を用いることで、プリミティブ方程式系をスペクトル表示で表すことができた。

鉛直モード $m = 0$ だけで方程式系 (59) を閉じると、

$$\left\langle \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} + \mathbf{L}\mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F}, \mathbf{Y}_0^{-1} \mathbf{\Pi}_{nl0} \right\rangle = 0 \quad (73)$$

であり、これをスペクトル表記すると、

$$\frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i = -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w_j w_k + s_i \quad (74)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, K$$

となる。ここで、 K は式(72)の K とは異なり、順圧スペクトルモデルにおける全波数を意味し、 $K = (2N + 1)(L + 1)$ である。最後に、順圧成分のプリミティブ方程式 (73) を成分表記すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = -\mathbf{V} \cdot \nabla u + \frac{\tan \theta}{a} uv + F_x \quad (75)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \frac{\tan \theta}{a} uv + F_y \quad (76)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gh_0 \nabla \cdot \mathbf{V} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \phi + F_z \quad (77)$$

と表される。

4.3 外力の算出

本研究ではスペクトルプリミティブ方程式を東西波数は $n = 0, 1, \dots, 20$ で、南北モードはロスビーモード $l_r = 0, 1, \dots, 20$ の赤道対称モード (奇数モード) で波数切断している。鉛直波数 $m = 0$ のみで方程式系を閉じ、外力は時間変化項、線形項、非線形項の残差として算出する。

4.4 AOI 方程式

1950 年から 2010 年までの順圧大気場に対して EOF 解析を行い、その結果得られた EOF-1 を本研究で用いる AO の構造ベクトル (w_{AO}) とする。この AO の構造ベクトルと時々刻々と変化する順圧大気場との内積を計算することで、AOI の時系列 ($AOI = (w_i \cdot w_{AO})$) を得ることができる。

続いて AOI 方程式を導出する。まず、スペクトルプリミティブ方程式の各項を展開係数を気候値と気候値からの偏差に分けると以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{w}_i + w'_i)}{d\tau} = & -i\sigma_i \bar{w}_i - i\sigma_i w'_i - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \bar{w}_j \bar{w}_k \\ & - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} (\bar{w}_j w'_k + \bar{w}_k w'_j) - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w'_j w'_k + \bar{s}_i + s'_i \end{aligned} \quad (78)$$

ここでバーは基本場、ダッシュは基本場からの偏差を表す。

さらに式 (78) を平均すると以下の式となる。

$$0 = -i\sigma_i \bar{w}_i - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \bar{w}_j \bar{w}_k - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \overline{w'_j w'_k} + \bar{s}_i \quad (79)$$

式 (78) と式 (79) から、

$$\begin{aligned} \frac{dw'_i}{d\tau} = & -i\sigma_i w'_i - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} (\bar{w}_j w'_k + \bar{w}_k w'_j) \\ & + i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \overline{w'_j w'_k} - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w'_j w'_k + s'_i \end{aligned} \quad (80)$$

となる。

式 (80) と、AO として得られる EOF1 ベクトルとの内積を施すことで AOI の時間変化を計算すると代数方程式にすることができ、以下のように表す。

$$\begin{aligned} \frac{d(w'_i \cdot w_{AO})}{d\tau} = & \left\langle -i\sigma_i w'_i - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} (\bar{w}_j w'_k + \bar{w}_k w'_j) \right\rangle \cdot w_{AO} \\ & + \left\langle i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \overline{w'_j w'_k} - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w'_j w'_k \right\rangle \cdot w_{AO} + s'_i \cdot w_{AO} \end{aligned} \quad (81)$$

ここで、左辺は AOI の時間変化項となり、右辺第一項は線形項、第二項は非線形項、第三項は外力項となる。このようにしてモデル各項による AOI への寄与を定

量的に示す AOI 方程式を構築することができる。ただし、特異固有解理論により外力項の中の粘性項は線形項に含め解析した。線形項第一項は中立波であり、エネルギーが一定で増幅も減衰もしない自由振動の波である。線形項第二項は気候値と擾乱との相互作用を表す。非線形項第一項は非定常擾乱との相互作用の平均で定数項であり、非線形項第二項は非定常擾乱との相互作用を表す。

4.5 線形定常応答

スペクトルプリミティブ方程式 (74) を摂動法により AOI 方程式の際と同様に基本場とそこからの偏差に分けて線形化すると、

$$\frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i = -i \sum_{j=1}^K \left(\sum_{k=1}^K (r_{ijk} + r_{ikj}) \bar{w}_k \right) w_j + s_i \quad (82)$$

となる (簡単のため、擾乱項のダッシュは削除している)。負の東西波数成分は正の東西波数成分の複素共役として得られることから、式 (82) は東西波数 $n \geq 0$ について行列の形でまとめることができる。

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\tau} + i\mathbf{D}\mathbf{w} = -i\mathbf{B}\mathbf{w} - i\mathbf{C}\mathbf{w}^* + \mathbf{f} \quad (83)$$

このとき、

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_i, \dots, w_K)^T, \text{ for } n_i \geq 0 \quad (84)$$

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_i, \dots, f_K)^T, \text{ for } n_i \geq 0 \quad (85)$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_K) \quad (86)$$

$$\mathbf{B} = \sum_{j=1}^K \left(\sum_{k=1}^K (r_{ijk} + r_{ikj}) \bar{w}_k \right) w_j, \text{ for } n_j \geq 0 \quad (87)$$

$$\mathbf{C} = \sum_{j=1}^K \left(\sum_{k=1}^K (r_{ijk} + r_{ikj}) \bar{w}_k \right) w_j, \text{ for } n_j < 0 \quad (88)$$

である。この方程式において外力を 0 とし、解を波動解で与える。B、C は複素数であるから \mathbf{w} は実数部分 \mathbf{w}_R と虚数部分 \mathbf{w}_I に分かれる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_R \\ \mathbf{w}_I \end{bmatrix} (\tau) = \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix} \exp(\nu\tau) \quad (89)$$

ξ と ζ は波動解の構造ベクトルであり、 ν は振動数である。これを式 (83) に代入すると、以下の固有値問題として捉えることができる。

$$\nu \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_I + \mathbf{C}_I & \mathbf{B}_R - \mathbf{C}_R + \mathbf{D} \\ -\mathbf{B}_R - \mathbf{C}_R - \mathbf{D} & \mathbf{B}_I - \mathbf{C}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (90)$$

ここで行列 \mathbf{A} を、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_I + \mathbf{C}_I & \mathbf{B}_R - \mathbf{C}_R + \mathbf{D} \\ -\mathbf{B}_R - \mathbf{C}_R - \mathbf{D} & \mathbf{B}_I - \mathbf{C}_I \end{bmatrix} \quad (91)$$

とおく。すると、式 (83) はこの行列 A を用いて、

$$\frac{dx}{d\tau} = Ax + y \quad (92)$$

と表すことができる。この方程式において定常状態を仮定して時間変化項を 0 とおくと、

$$y = -Ax \quad (93)$$

となり、定常応答としての外力を求めることができる。また、

$$x = -A^{-1}y \quad (94)$$

とすれば、外力の定常応答としての順圧高度が求まる。本研究の定常応答においては、粘性項を線形マトリックスから除外して計算している。 A の詳細な構造は図 2 に示す。この構造の通り行列 A は逆行列を持たないが、東西波数 0 の虚部に対応する成分を除いて逆行列を求め、その後波数 0 の成分を 0 として付け加えることで行列を作成し、それを便宜的に A^{-1} としている。

5 結果

5.1 北極振動の正負における順圧高度と外力の構造

本節では、1950-2011年のデータ期間の中から北極振動が大きく正や負に振れた期間について、順圧高度と外力の空間構造の特徴を説明する。取り上げる期間は、北極振動プラスの事例として1975/76年DJF、1988/89年DJF、北極振動マイナスの事例として1976/77年DJF、2009/10年DJFである。

図3～図6は1975/76年、1976/77年、1988/89年、2009/10年DJFにおける北半球の順圧高度(上)と外力(下)である。実線のコンターが正の値、破線のコンターが負の値を示している。順圧高度のコンター間隔は20 m であり、外力のコンター間隔は 50×10^{-6} m/s である。図3、図5の順圧高度は北極域で負、それを取り囲むように中緯度地域で正の値となっており、北極振動プラスの構造が現れている。一方、外力は北極域で正、中緯度地域で負の値となっている。図4、図6の順圧高度は北極域で正、中緯度地域で負の値となっており、北極振動マイナスの構造となっている。外力は北極域で負、中緯度地域で正の値となっている。これらの期間をまとめると、順圧高度と外力が正反対の構造となっていることが分かる。

5.2 順圧高度のEOF解析

図7はNCEP/NCARのデータを用いた1950-2011年の順圧高度のEOF-1を示している。第1モードの固有ベクトル(上)とそのスコア時系列(下)になっている。スコア時系列に関しては、365日の移動平均をかけており、縦軸のスコアは正規化した値である。第1モードの固有ベクトルは北極振動の構造をしており、スコア時系列は固有ベクトルの構造の時間変動を表している。この対応関係から、スコア時系列の1988/89年の大きな正の値と2009/10年の大きな負の値はそれぞれ北極振動プラス、マイナスの構造に対応しており、北極振動の定義である海面更正気圧を基にした北極振動の変動と一致する。

5.3 順圧高度と外力、AOI方程式の項とのSVD解析

本節では、1950-2011年のNCEP/NCARのデータを用いて順圧高度と外力、AOI方程式の線形項、非線形項のSVD解析の結果を示す。図8～図19中のモードの右

にある値は二乗共分散寄与率、VARF はそれぞれの場での全分散に対する各モードの分散の割合、 r は二つの場のスコア時系列の相関係数をそれぞれ表している。特異ベクトルの構造については、実線のコンターが正、破線のコンターが負の値を示している。

5.3.1 日データを用いた解析

図8は日データでの順圧高度と外力のSVD-1を示している。第1モードの順圧高度の特異ベクトル(左上)、外力の特異ベクトル(右上)、1988年1月のスコア時系列(下)である。スコア時系列は実線が順圧高度、破線が外力を表しており、縦軸のスコアは正規化した値である。日データを用いているため順圧高度、外力ともに傾圧不安定波のパターンが現れている。しかし、外力の位相が順圧高度の位相に比べて東に 90° ずれている。また、振幅は東太平洋から北米大陸で最大となっており、ユーラシア大陸上では波列は見られない。

図9は日データでの順圧高度と外力のSVD-2を示している。第2モードの順圧高度の特異ベクトル(左上)、外力の特異ベクトル(右上)、1988年1月のスコア時系列(下)である。スコア時系列の実線、破線、軸に関しては第1モードと同様である。第2モードも第1モードと同様に傾圧不安定波のパターンが現れており、位相が 90° ずれている。ただし、振幅については太平洋上で最大となっており、大西洋上では波列があまり見られない。

図10は日データでの順圧高度とAOI方程式の線形項のSVD-1を示している。第1モードの順圧高度の特異ベクトル(左上)、AOI方程式の線形項の特異ベクトル(右上)、1988年1月のスコア時系列(下)である。スコア時系列は実線が順圧高度、破線がAOI方程式の線形項を表しており、縦軸のスコアは正規化した値である。順圧高度と外力のSVDと同様に傾圧不安定波のパターンが現れている。AOI方程式の線形項の位相は順圧高度の位相に比べて東に 90° ずれている。振幅は大西洋上で最大となっており、ユーラシア大陸上では波列が見られない。スコアは1-2日ごとに正負が入れ替わっている。

図11は日データでの順圧高度とAOI方程式の線形項のSVD-2を示している。第2モードの順圧高度の特異ベクトル(左上)、AOI方程式の線形項の特異ベクトル(右上)、1988年1月のスコア時系列(下)である。スコア時系列の実線、破線、軸については第1モードと同様である。第1モードと同様に傾圧不安定波のパターンとなっており、位相が 90° ずれている。振幅が最大となっているのは大西洋上で

ある。スコアは第1モードと同様に1-2日ごとに正負が入れ替わっている。

図12は日データでの順圧高度とAOI方程式の非線形項のSVD-1を示している。第1モードの順圧高度の特異ベクトル(左上)、AOI方程式の非線形項の特異ベクトル(右上)、1988年1月のスコア時系列(下)である。スコア時系列は実線が順圧高度、破線がAOI方程式の非線形項を表しており、縦軸のスコアは正規化した値である。順圧高度はAOのパターンが現れており、AOI方程式の非線形項はグリーンランド付近で大きな正の値となっているが、それを除くとおおむね北極域で負、中緯度地域で正の値となっている。ただしこの二つの場のスコア時系列の相関係数は0.39と小さい。

図13は日データでの順圧高度とAOI方程式の非線形項のSVD-2を示している。第2モードの順圧高度の特異ベクトル(左上)、AOI方程式の非線形項の特異ベクトル(右上)、1988年1月のスコア時系列(下)である。スコア時系列の実線、破線、軸に関しては第1モードと同様である。順圧高度は波数4の構造をしている。AOI方程式の非線形項は太平洋から北米大陸、大西洋にかけては順圧高度に対応するような波列があるが、順圧高度ほど明瞭ではない。また、第1モード同様二つの場のスコア時系列の相関係数は小さい。

5.3.2 月平均データを用いた解析

図14は月平均データでの順圧高度と外力のSVD-1を示している。第1モードの順圧高度の特異ベクトル(左上)、外力の特異ベクトル(右上)、スコア時系列(下)である。スコア時系列は12か月の移動平均をかけており、縦軸のスコアは正規化した値である。実線が順圧高度、破線が外力を表している。月平均データでは傾圧不安定波の構造は消え、順圧高度は北極域と中緯度地域で符号が反転して北極振動の構造が現れている。また、外力の構造は、順圧高度の構造と正反対の符号となっている。スコア時系列に関しては、順圧高度は北極振動の構造であるため、北極振動と同じ変動を示している。

図15は月平均データでの順圧高度と外力のSVD-2を示している。第2モードの順圧高度の特異ベクトル(左上)、外力の特異ベクトル(右上)、スコア時系列(下)である。スコア時系列の実線、破線、軸に関しては第1モードと同様である。順圧高度は北太平洋、北米大陸南東部に負の値があり、中央太平洋、北米大陸北西部に正の値のPNAパターンが見られる。また、シベリアに正、グリーンランド付近に負の極が見られる。

図 16 は月平均データでの順圧高度と AOI 方程式の線形項の SVD-1 を示している。第 1 モードの順圧高度の特異ベクトル(左上)、AOI 方程式の線形項の特異ベクトル(右上)、スコア時系列(下)である。スコア時系列は 12 か月の移動平均をかけており、縦軸のスコアは正規化した値である。実線が順圧高度、破線が AOI 方程式の線形項を表している。順圧高度は北極振動の空間構造となっており、AOI 方程式の線形項は北極域からヨーロッパ、北米大陸西部にかけて負となっており、それ以外の中緯度地域で正の値となり、順圧高度と似た構造をしている。

図 17 は月平均データでの順圧高度と AOI 方程式の線形項の SVD-2 を示している。第 1 モードの順圧高度の特異ベクトル(左上)、AOI 方程式の線形項の特異ベクトル(右上)、スコア時系列(下)である。スコア時系列の実線、破線、軸に関しては第 1 モードと同様である。順圧高度の空間構造は外力との SVD 解析の第 2 モードと同じパターンが現れている。

図 18 は月平均データでの順圧高度と AOI 方程式の非線形項の SVD-1 を示している。第 1 モードの順圧高度の特異ベクトル(左上)、AOI 方程式の非線形項の特異ベクトル(右上)、スコア時系列(下)である。スコア時系列は 12 か月の移動平均をかけており、縦軸のスコアは正規化した値である。実線が順圧高度、破線が AOI 方程式の非線形項を表している。順圧高度は北極振動の空間構造となっており、AOI 方程式の非線形項もグリーンランド付近の海上で大きな正の値となっているが、北極域で負、中緯度地域で正となっている順圧高度に近い構造をしている。

図 19 は月平均データでの順圧高度と AOI 方程式の非線形項の SVD-2 を示している。第 1 モードの順圧高度の特異ベクトル(左上)、AOI 方程式の非線形項の特異ベクトル(右上)、スコア時系列(下)である。スコア時系列の実線、破線、軸に関しては第 1 モードと同様である。順圧高度の空間構造は外力との SVD 解析の第 2 モードと同じパターンが現れている。

5.4 線形定常応答

本節では、順圧高度に線形マトリックス、または外力にその逆行列を作用させることによって得られる定常応答について結果を示す。図 20 ~ 図 24 の実線のコンターは正、破線のコンターは負の値を示している。

5.4.1 線形マトリックスの構造の検証

本研究で用いた線形マトリックスには粘性項を含めていない。粘性項を含めて計算すると、順圧高度の線形応答として求まる外力は、小さいスケールの粘性を減衰させるように働くため、図 20 のような小さいスケールの構造が卓越する。本研究ではよりスケールの大きい北極振動と外力の関係性に焦点を当てるため、粘性項を含めずに計算した。

5.4.2 線形定常応答と観測値の比較

図 21 ~ 図 24 は線形定常応答として求めたものと観測値を比較する図になっている。

図 21 は 2009/10 年 DJF の観測値の順圧高度 (左上)、外力の線形定常応答として求めた順圧高度 (右上)、観測値の外力 (左下)、順圧高度の線形定常応答として求めた外力 (右下) の気候値からの偏差である。順圧行動の線形定常応答は観測値と似た構造をしている。一方、外力の線形定常応答は北極域の正偏差と中緯度地域の負偏差を表現しているが、負偏差のピークの位置が観測値と異なっており、加えて全体的に大きな値を示している。北極振動プラス、マイナスの他の事例について解析した図 22 の 1975/76 年 DJF、図 23 の 1976/77 年 DJF、図 24 の 1988/89 年 DJF に関しても、外力の観測値と線形定常応答は似た構造をしているが、順圧高度の観測値と線形定常応答は大きく異なる構造をしている。

6 まとめと考察

6.1 高度場と外力、AOI方程式の各項の関係

北極振動が大きく正負に振れた 1975/76 年、1976/77 年、1988/89 年、2009/10 年 DJF の順圧高度と外力の空間構造を見ると、順圧高度の構造と外力の構造は正反対の符号となっていた。式 (72) より外力は順圧高度の時間微分の一つの項であるため、外力が正の値となっているところでは高度を上昇させようと働き、外力が負の値となっているところでは高度を低下させようと働いている。つまり、この 4 事例の場合では外力が高度場を減衰させていることが分かる。この関係性を 4 事例だけでなく、統計的に解析した結果が SVD 解析の結果である。SVD 解析では二つの場の共分散が最も大きいパターンが第 1 モードとして現れる。つまり、二つの場で類似した変動パターンを持つ空間構造がペアで抽出されることになる。日データを用いた SVD 解析では、順圧高度と外力は正反対の符号とはならず、外力の位相が順圧高度の位相に比べて 90° 東にずれていることから、外力が高度場を東進させている関係性が強いことが分かる。月平均データでは順圧高度と外力が正反対の符号となっており、外力が AO の構造をした高度場を減衰させている関係性が最も大きいことが統計からも確認された。月平均データの結果は順圧大気大循環モデルの各項と高度場の SVD 解析を行った Matsueda and Tanaka (2005) の結果と一致している。

また、順圧高度と AOI 方程式の線形項、非線形項を SVD 解析した結果については、外力と同様に方程式系を考えると、日データでは AOI 方程式の線形項は高度場を東進させるように働くことが分かる。日データでの順圧高度と AOI 方程式の非線形項は SVD-1、SVD-2 のスコア時系列の相関係数が小さく、卓越した関係性を見出すことはできない。月平均データでは AOI 方程式の線形項、非線形項ともに高度場に似た構造をしているため、AO に似た構造の高度場と共鳴関係にあることが分かる。月平均データでのこの結果は木野 (2012) を支持している。

6.2 線形マトリックスによる定常応答

線形マトリックスを用いて順圧高度、外力の定常応答を求め、観測値と比較した。順圧高度の線形定常応答としての外力は観測値と似た構造をしていた。この結果より、AO の構造から外力を推定することができた。しかしながら、外力の線

形定常応答としての順圧高度は観測値と異なる構造となった。この原因として、観測値の外力と線形定常応答で求めた外力は似た構造ではあるものの、非線形項や時間変化項が含まれていない分の誤差が線形マトリックスの逆行列によって増幅された可能性が考えられる。図 25 に示す通り、外力項は線形項と非線形項の和とバランスするように存在している。観測値の外力と線形定常応答で求めた外力の微小な誤差を ϵ とすると、

$$\mathbf{f} = -\mathbf{A}\mathbf{w} + \epsilon$$

と表せる。左から \mathbf{A}^{-1} を掛けると、

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{A}^{-1}\epsilon$$

整理して、

$$\mathbf{w} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} + \mathbf{A}^{-1}\epsilon$$

となり、誤差が逆行列によって増幅されている。

7 結論

本研究では、北半球の気候に大きな影響を与える北極振動をもたらす外力に注目して、SVD 解析により高度場と外力の関係性を統計的に抽出した。また、順圧高度と外力の線形定常応答を求めた。

北極振動が顕著に現れた季節では順圧高度と外力の空間構造は正反対の分布をしており、外力は高度場を減衰させていることが分かった。SVD 解析を用いてこの関係性を統計的に探ると、月平均のデータでは第 1 モードの高度場のパターンに北極振動の構造が現れ、外力はその構造を減衰させるように、AOI 方程式の線形項、非線形項は共鳴するように働いていることが示された。また、日データでは外力、AOI 方程式の線形項は高度場を東進させるように働き、AOI 方程式の非線形項については高度場と卓越した関係性は見られなかった。

順圧大気大循環モデルから作成した線形マトリックスを用いた定常応答では、観測値の外力と、順圧高度の線形定常応答として求めた外力が似た構造をしていたが、外力の線形定常応答として求めた順圧高度は観測値とは異なる構造をしていた。この結果より、AO の構造から外力を推定することはできたが、外力から AO の構造を求めるときには、近似の過程で生じた観測値と計算結果の誤差が逆行列で増幅していることが明らかとなった。

8 謝辞

本研究を進めるにあたり、指導教員である筑波大学計算科学研究センターの田中博教授には、本研究の動機となる論文の紹介、解析手法の提案、私の些細な質問や結果に対する考察などへの丁寧な御指導、御助言を賜り、心より感謝しております。

本研究を進めるにあたり、同大学生命環境科学研究科の植田宏昭教授、上野健一准教授、日下博幸准教授、若月泰孝助教や大学院生の皆様には、方針発表、中間発表、最終発表、ポスター発表の場で貴重な御助言を多く頂き有難うございました。

最後に、国立極地研究所、同大学計算科学研究センター寺崎康児共同研究員をはじめとして大気大循環研究室の先輩方には大変お世話になりました。また、共に机を並べ卒論作業を進めてきた地球学類の4年生の皆様には、良き相談相手となって頂きました。

本論文は以上の皆様の御協力により完成させることができました。心より感謝いたします。

尚、本研究で用いた主な図は、The Generic Mapping Tools System (Wessel and Smith 1991) にて作成いたしました。

参考文献

- Itoh, H., 2002: True versus apparent arctic oscillation. *Geophys. Res. Lett.*, **29**, 8, doi:10.1029/2001GL013978.
- Kalnay, E., M. Kanamitsu, R. Kistler, W. Collins, D. Deaven, L. Gandin, M. Iredell, S. Saha, G. White, J. Woollen, Y. Zhu, A. Leetmaa, B. Reynolds, M. Chelliah, W. Ebisuzaki, W. Higgins, J. Janowiak, K. C. Ropelewski, J. Wang, R. Jenne, and D. Joseph., 1996 : The NCEP/NCAR 40-Year Reanalysis Project. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **77**, 437-472.
- Kimoto, M., F-F. Jin, M. Watanabe, and N. Yasutomi, 2001: Zonal-eddy coupling and a neutral mode theory for the Arctic Oscillation. *Geophys. Res. Lett.*, **28**, 737-740.
- Matsueda, M., and H. L. Tanaka, 2005: EOF and SVD analyses of the low-frequency variability of the barotropic component of the atmosphere. *J. Meteor. Soc. Japan*, **83**, 517-529.
- Tanaka, H. L., 1985: Global energetics analysis by expansion into three-dimensional normal mode function during the FGGE winter *J. Meteor. Soc. Jpn.*, **63**, 180-200.
- Tanaka, H. L., 1991: A numerical simulation of amplification of low-frequency planetary waves and blocking formations by the upscale energy cascade. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 2919-2935.
- Tanaka, H. L., 2003: Analysis and modeling of the Arctic Oscillation using a simple barotropic model with baroclinic eddy forcing. *J. Atmos. Sci.*, **28**, 737-740.
- Tanaka, H. L., and M. Matsueda, 2005: Arctic Oscillation analyzed as a singular eigenmode of the global atmosphere. *J. Meteor. Soc. Japan*, **83**, 611-619.
- Thompson, D. W. and J. M. Wallace, 1998: Arctic Oscillation signature in the wintertime geopotential height and temperature field. *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 1297-1300.

Watanabe, M. and F. F. Jin, 2004: Dynamical prototype of the Arctic Oscillation as revealed by a neutral singular vector. *J. Climate*, **17**, 2119-2138.

小倉義光, 1978: 気象力学通論. 東京大学出版会, 249pp

気象庁, 2010: 北半球中緯度帯に顕著な寒波をもたらした大気の流れについて, 平成21年度異常気象分析検討会資料.

木野公朝, 2012: AOI 方程式を用いた 10 年スケールの北極振動の成因解明. 筑波大学地球学類卒業論文, 97pp.

下悠子, 2011: 北極振動方程式を用いた北極振動の解析的研究 筑波大学生命環境科学研究科修士論文, 51pp

関佐和香, 2012: 大気大循環の線形傾圧モデルの開発と 3 次元線形不安定解析への応用. 筑波大学大学院生命環境科学研究科修士論文, 90pp.

田中博, 2003: 力学的長期予報の展望: 長周期変動の力学と予測可能性の探求. グロースベッター、気象庁, **41**, 51-88.

田中博, 2004: 順圧大気大循環モデルによる北極振動の数値実験およびその力学的考察. 気象研究ノート, **206**, 71-107.

田中博, 早崎正光, 安成哲三, 1997: 1993/94 年夏の日本付近における異常気象の熱収支解析. 気象研究ノート, **189**, 97-125.

Appendix

EOF 解析

大気科学の中でよく使われる解析手法である EOF 解析について解説する。

EOF 解析とは

AO は北半球における海面更正気圧を EOF 解析 (主成分解析) したものの第一主成分により定義される。

EOF 解析は、いくつかの地点における時系列データの主要な変動パターンを抽出して変動の特徴を把握するための統計的手法であり、北半球における大気の変動パターンを見るためにこれを行う。

一般に何らかの相関関係がある p 個の地点でのデータ $x_1, x_2, \dots, x_p (p \geq 2)$ で、時系列方向に N 個のデータ $x_{1\lambda}, x_{2\lambda}, \dots, x_{p\lambda} (\lambda = 1, 2, \dots, N)$ が得られたとする。これらの N 個の時系列データは、それぞれ p 個の地点での気象要素が相互に関連のある変動を示しているとみなせるので、この変動を説明する関数として、 p 個の変量の一次結合で表すことができ、これを

$$z = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_p x_p \quad (95)$$

と仮定し、 l_1, l_2, \dots, l_p を変化させ、

$$\sum_{i=1}^p l_i^2 = 1 \quad (96)$$

の条件の下で、 z の分散が最大になるときの z を第一主成分という。このときの係数を $l_{1i} (i = 1, 2, \dots, p)$ で表すと、

$$z_1 = l_{11} x_1 + l_{12} x_2 + \dots + l_{1p} x_p \quad (97)$$

となる。

次に z_1 とは無相関な z のうちで、式 (97) を満たす最大の分散を持つ z_2 が決定できる。この z_2 を第二主成分という。この時の係数を $l_{2i} (i = 1, 2, \dots, p)$ とすると z_2 は、

$$z_2 = l_{21} x_1 + l_{22} x_2 + \dots + l_{2p} x_p \quad (98)$$

と表すことができる。以下同様にして第 m 成分 z_m までで全変動の大部分が説明できればこれ以上を求める必要はない。ここで、 z_m を、

$$z_m = l_{m1}x_1 + l_{m2}x_2 + \cdots + l_{mp}x_p \quad (99)$$

と書く。従って各係数は、

$$l_{\alpha 1}^2 + l_{\alpha 2}^2 + \cdots + l_{\alpha p}^2 = \sum_{k=1}^p l_{\alpha k}^2 = 1 \quad (100)$$

を満たし、各主成分は下の条件を満たすように定まる。

- 第一主成分 z_1 の分散が最大である。
- 第 i 主成分と第 j 主成分 ($i \neq j$) は直交する (無相関である)。

各主成分の計算は、 $p \times p$ の分散共分散行列の固有値問題に帰着する。これについては次小節に記すこととする。

全球再解析データに対して EOF 解析をする際には注意が必要である。なぜなら、全球再解析データはどの緯度帯でも経度方向には同じ数のグリッドが存在するからである。地球は球形であるので、全球再解析データのままだでは高緯度になるほど各グリッドあたりの面積が小さくなる。そのため、面積荷重を考慮せずに EOF 解析を行ってしまうと低緯度と比較して高緯度の変動が相対的に大きく見積もられてしまい、実際に変動を特徴付けるパターンとは異なるパターンが現れる恐れがある。このグリッドの偏りを修正するために、緯度方向に面積荷重 $\sqrt{\cos \theta}$ をデータにかけて偏りを解消する。

EOF 解析における固有ベクトルの計算方法

一般に、 p 変数データ、すなわち N 個の各標本について、 p 種類の変数 x_1, x_2, \dots, x_p が測定されたとし、そのデータに基づき、主成分 $z_1, z_2, \dots, z_m (m \leq p)$ を求める方法について以下で述べる。

まず、得られたデータより各変数の分散共分散 σ_{ij} を求め、それを

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{pmatrix} \quad (101)$$

と表す。ここでの σ_{ij} は各変数の分散共分散の不偏推定値であり、

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{N-1} \left\{ \sum_{\lambda=1}^n (x_{i\lambda} - \bar{x}_i)(x_{j\lambda} - \bar{x}_j) \right\} \quad (102)$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{\lambda=1}^N x_{i\lambda} \quad (103)$$

とし、さらに相関行列を求め、それを

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & r_{pp} \end{pmatrix} \quad (104)$$

$$(r_{ii} = 1; i = 1, 2, \dots, p)$$

と表す。

ここで、 p 個の変数 x_1, x_2, \dots, x_p からなるベクトル変数を

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad (105)$$

とする。ここで、 \mathbf{X} のとりうる量は、

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{p1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{p2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{1N} \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{pN} \end{pmatrix}$$

である。また、各主成分を式 (95) の形で求めるために各主成分の変量 x_i の係数をそれぞれベクトル

$$\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} l_{11} \\ l_{21} \\ \vdots \\ l_{p1} \end{pmatrix}, \mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} l_{12} \\ l_{22} \\ \vdots \\ l_{p2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{l}_m = \begin{pmatrix} l_{1m} \\ l_{2m} \\ \vdots \\ l_{pm} \end{pmatrix}$$

で表し、 l_α の転置行列を \mathbf{l}_α^T で表すと主成分は

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1^T \\ \mathbf{l}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{l}_m^T \end{pmatrix} \mathbf{X} \quad (106)$$

と書くことができる。ただし、各 \mathbf{l}_α^T は単位ベクトル ($\mathbf{l}_\alpha^T \cdot \mathbf{l}_\alpha = 1$) とする。

これより、各成分 z_α が条件 (100) を満たすように係数を求めればよい。したがって、

$$V\{z_1\} = v\{\mathbf{l}_1^T \mathbf{X}\} = \mathbf{l}_1^T V\{\mathbf{X}\} \mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_1^T \mathbf{S} \mathbf{l}_1 \quad (107)$$

z_1 の分散 $V\{z_1\}$ が最大になるような \mathbf{l}_1 を求めるために、ラグランジュの未定乗数法を用いる (次小節参照)。ここで、ラグランジュ未定乗数を λ として、

$$v = \mathbf{l}_1^T \mathbf{S} \mathbf{l}_1 - \lambda(\mathbf{l}_1^T \mathbf{l}_1 - 1) \quad (108)$$

の両辺を \mathbf{l}_1^T で微分すると、微分方程式

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{l}_1^T} = (\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{l}_1 \quad (109)$$

\mathbf{I} : p 次の単位行列

が得られ、ラグランジュの未定乗数法よりこの微分方程式が0になるときに z_1 の分散 $V\{z_1\}$ は最大になる。すなわち、以下の連立方程式

$$(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{l}_1 = 0 \quad (110)$$

を解けばよい。ここで、式(106)のベクトル \mathbf{l}_1 の要素がすべて0以外の解を持つためには λ が固有方程式

$$|\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (111)$$

の解(固有値)でなければならない。また、 z_1 の分散 $V\{z_1\}$ を最大にするものが存在するとすれば、式(109)より

$$V\{z_1\} = \lambda \quad (112)$$

であり、式(111)の固有値に等しくなるので、 z_1 における係数ベクトル \mathbf{l}_1 としては、式(111)の最大の固有値 λ_1 に対応する単位固有ベクトルとして第一主成分 z_1 を決定することができる。一方、式(111)の固有値を展開すると λ についての p 次方程式になるので、 p 個の固有値(重複するものを含めて数えると)が存在し、しかも \mathbf{S} は非負の対称行列であるから固有値はすべて非負の実数である。その中の最大のものを λ_1 として \mathbf{l}_1 を求める。さらに大きさの順に $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ を抽出し、 $\lambda_k (1 \leq k \leq m)$ に対応する単位固有ベクトルを第 k 主成分 z_k における係数ベクトル \mathbf{l}_k として、全部で m 個の主成分を求めるとこれらは条件を満たす。

ラグランジュの未定乗数法

関数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ について、条件 $h(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$ のもとで、その極大、もしくは極小を求めるために以下の関数を導入する。

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_p) + \lambda h(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (113)$$

この仮定した関数において、 z を最大にすることは、 y を $h = 0$ のもとで極大、もしくは極小にすることと同値である。したがって、

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial z}{\partial x_p} = h(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0 \quad (114)$$

を解いて、 x_1, x_2, \dots, x_p を求めると、この x_1, x_2, \dots, x_p に対する y の値が極大、もしくは極小となる。さらに条件が次のように二個以上あるときにおいても、

$$h_1(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0, h_2(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0, \dots, h_p(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0 \quad (115)$$

上記の場合と同じように、次の関数について、

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_p) + \lambda_1 h_1(x_1, x_2, \dots, x_p) + \lambda_2 h_2(x_1, x_2, \dots, x_p) + \dots + \lambda_p h_p(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (116)$$

上記の場合と同じように式 (114) を解くことにより y を極大、もしくは極小にすることができる。

SVD 解析

SVD 解析とは

SVD(特異値分解)解析とは、いくつかの地点における時系列データについて、異なる二つの物理量の場の関係性が強いパターンを抽出する解析手法である。EOF解析では一つの物理量のデータから分散共分散行列を求め、固有値問題に帰着させて固有ベクトルを求めた。一方、SVD解析では、二つの場を用いるため共分散行列は一般的に長方形となる。そこで特異値分解により、二つの場の特異ベクトルを得る。第1モードは二つの場の共分散の二乗が最も大きいモードであり、先に述べた通り、二つの場の変動の関連性が強いパターンが現れることになる。数学的構造はEOF解析と同様であり、SVD解析において二つの物理量に同一のデータを与えるとEOF解析に帰着させることができる。以下詳細を述べる。

任意の行列 C について特異値分解をすることができ、

$$C = U\Sigma V^T \quad (117)$$

と表せる。ここで U, V は正規直交行列であり、 Σ は特異値を成分とする対角行列である。このとき行列 C とその転置行列の積は、

$$\begin{cases} CC^T = U\Sigma\Sigma^T U^T \\ C^T C = V\Sigma^T \Sigma V^T \end{cases} \quad (118)$$

となる。

ある物理量について p 個の地点でのデータ x_1, x_2, \dots, x_p ($p \geq 2$)、と別の物理量について q 個の地点でのデータ y_1, y_2, \dots, y_q ($q \geq 2$) があり、それぞれ時系列方向に N 個のデータ $x_{1\lambda}, x_{2\lambda}, \dots, x_{p\lambda}$ $y_{1\lambda}, y_{2\lambda}, \dots, y_{q\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, \dots, N$) が得られたとする。EOF解析と同様に地点数の変量の一次結合で変動を表すと、

$$z_x = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_p x_p \quad (119)$$

$$z_y = k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_q y_q \quad (120)$$

となる。 $l_1, l_2, \dots, l_p, k_1, k_2, \dots, k_q$ を変化させ、

$$\sum_{i=1}^p l_i^2 = 1 \quad (121)$$

$$\sum_{j=1}^q k_j^2 = 1 \quad (122)$$

の条件の下で、 z_x と z_y の共分散が最大になるときの係数 $l_1, l_2, \dots, l_p, k_1, k_2, \dots, k_q$ を求める。

SVD 解析における特異ベクトルの計算方法

得られた二つの場のデータの共分散行列 σ_{ij} を求め、それを

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1q} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pq} \end{pmatrix} \quad (123)$$

と表す。ここでの σ_{ij} は二つの場の不偏共分散であり、

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{N-1} \left\{ \sum_{\lambda=1}^n (x_{i\lambda} - \bar{x}_i)(y_{j\lambda} - \bar{y}_j) \right\} \quad (124)$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{\lambda=1}^N x_{i\lambda}, \quad \bar{y}_j = \frac{1}{N} \sum_{\lambda=1}^N y_{j\lambda} \quad (125)$$

である。

ここで、 p 個の変量 x_1, x_2, \dots, x_p からなるベクトル変量を

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad (126)$$

q 個の変量 y_1, y_2, \dots, y_q からなるベクトル変量を

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} \quad (127)$$

とする。ここで、 \mathbf{X} のとりうる量は、

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{p1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{p2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{1N} \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{pN} \end{pmatrix}$$

Y のとりうる量は、

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{q1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{q2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_{1N} \\ y_{2N} \\ \vdots \\ y_{qN} \end{pmatrix}$$

である。また、 z_x と z_y を式 (119)、(120) の形で求めるために変数 x_i, y_i の係数をそれぞれベクトル

$$\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} l_{11} \\ l_{21} \\ \vdots \\ l_{p1} \end{pmatrix}, \mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} l_{12} \\ l_{22} \\ \vdots \\ l_{p2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{l}_m = \begin{pmatrix} l_{1m} \\ l_{2m} \\ \vdots \\ l_{pm} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{q1} \end{pmatrix}, \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{q2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{k}_m = \begin{pmatrix} k_{1m} \\ k_{2m} \\ \vdots \\ k_{qm} \end{pmatrix}$$

で表し、 l_α の転置行列を l_α^T 、 k_α の転置行列を k_α^T で表すと

$$\begin{pmatrix} z_{x1} \\ z_{x2} \\ \vdots \\ z_{xm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^T \\ l_2^T \\ \vdots \\ l_m^T \end{pmatrix} \mathbf{X} \quad (128)$$

$$\begin{pmatrix} z_{y1} \\ z_{y2} \\ \vdots \\ z_{ym} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1^T \\ \mathbf{k}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{k}_m^T \end{pmatrix} \mathbf{Y} \quad (129)$$

と書くことができる。ただし、各 $l_\alpha^T, \mathbf{k}_\alpha^T$ は単位ベクトル ($l_\alpha^T \cdot l_\alpha = 1, \mathbf{k}_\alpha^T \cdot \mathbf{k}_\alpha = 1$) とする。これより、 z_x と z_y が条件 (121)、(122) を満たすように係数を求めればよい。

$$Cov(z_x, z_y) = \mathbf{l}_1^T \mathbf{C} \mathbf{k}_1 \quad (130)$$

であるから、EOF 解析と同様にラグランジュの未定乗数法を用いて z_x と z_y の共分散が最大となるような l, k を求める。ラグランジュ未定乗数を λ_1, λ_2 として、

$$v = \mathbf{l}_1^T \mathbf{C} \mathbf{k}_1 - \lambda_1 (\mathbf{l}_1^T \mathbf{l}_1 - 1) - \lambda_2 (\mathbf{k}_1^T \mathbf{k}_1 - 1) \quad (131)$$

の両辺を $\mathbf{l}_1, \mathbf{k}_1$ で微分すると、微分方程式

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{l}_1} = \mathbf{k}_1^T \mathbf{C}^T - 2\lambda_1 \mathbf{l}_1^T \quad (132)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{k}_1} = \mathbf{l}_1^T \mathbf{C} - 2\lambda_2 \mathbf{k}_1^T \quad (133)$$

が得られ、ラグランジュの未定乗数法よりこの微分方程式が 0 になるときに z_x と z_y の共分散が最大になる。すなわち、以下の連立方程式

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1^T \mathbf{C}^T = 2\lambda_1 \mathbf{l}_1^T \\ \mathbf{l}_1^T \mathbf{C} = 2\lambda_2 \mathbf{k}_1^T \end{cases} \quad (134)$$

を解けばよい。この 2 式より $\lambda_1 = \lambda_2$ であり、 $\lambda = 2\lambda_1$ とおくと、

$$\text{Cov}(z_x, z_y) = \mathbf{l}_1^T \mathbf{C} \mathbf{k}_1 = \lambda \quad (135)$$

と表せる。ここで、式 (134) のそれぞれにおいて転置行列との積を考える。つまり、

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1^T \mathbf{C}^T = \lambda \mathbf{l}_1^T \\ \mathbf{l}_1^T \mathbf{C} = \lambda \mathbf{k}_1^T \end{cases} \quad (136)$$

の両辺にその転置

$$\begin{cases} \mathbf{C} \mathbf{k}_1 = \lambda \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{C}^T \mathbf{l}_1 = \lambda \mathbf{k}_1^T \end{cases} \quad (137)$$

を右から掛ける。すると、

$$\begin{cases} \mathbf{l}_1^T \mathbf{C} \mathbf{C}^T \mathbf{l}_1 = \lambda^2 \\ \mathbf{k}_1^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{k}_1 = \lambda^2 \end{cases} \quad (138)$$

となる。次に、左から $\mathbf{l}_1, \mathbf{k}_1$ をそれぞれ掛ける。

$$\begin{cases} (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_1^T) \mathbf{C} \mathbf{C}^T \mathbf{l}_1 = \lambda^2 \mathbf{l}_1 \\ (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1^T) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{k}_1 = \lambda^2 \mathbf{k}_1 \end{cases} \quad (139)$$

いま、行列 $\mathbf{C} \mathbf{C}^T$ によるベクトル \mathbf{l}_1 の一次変換を考えて、

$$\mathbf{C} \mathbf{C}^T \mathbf{l}_1 = a \mathbf{l}_1 + \mathbf{b} \quad (140)$$

とする。左から $\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_1^T$ を掛けて、

$$\begin{aligned} (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_1^T) \mathbf{C} \mathbf{C}^T \mathbf{l}_1 &= a (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_1^T) \mathbf{l}_1 + (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_1^T) \mathbf{b} \\ &= a \mathbf{l}_1 + (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_1^T) \mathbf{b} \end{aligned} \quad (141)$$

となるが、式 (139) より $a = \lambda^2$, $b = 0$ と求まる。すなわち、

$$CC^T \mathbf{l}_1 = \lambda^2 \mathbf{l}_1 \quad (142)$$

である。また、 \mathbf{k}_1 についても同様にして

$$C^T C \mathbf{k}_1 = \lambda^2 \mathbf{k}_1 \quad (143)$$

となる。ここで式 (118) より、共分散を最大にする、つまり λ^2 を最大にする \mathbf{l}_1 , \mathbf{k}_1 は、行列 C の最大特異値に対する左右の特異ベクトルに他ならない。

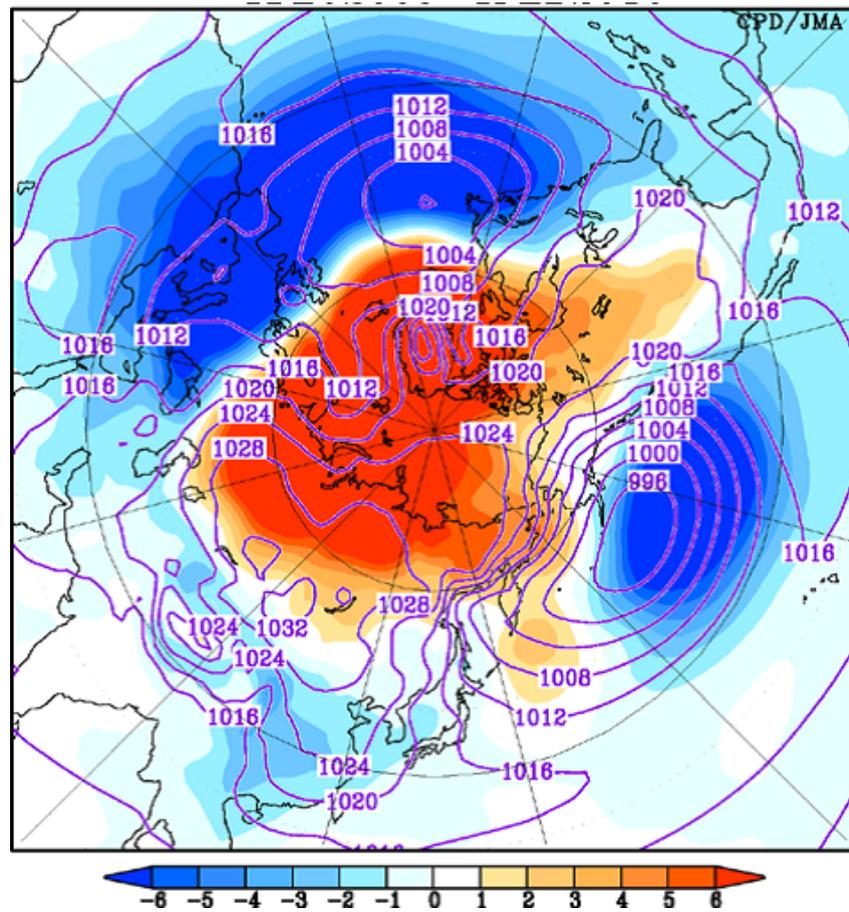
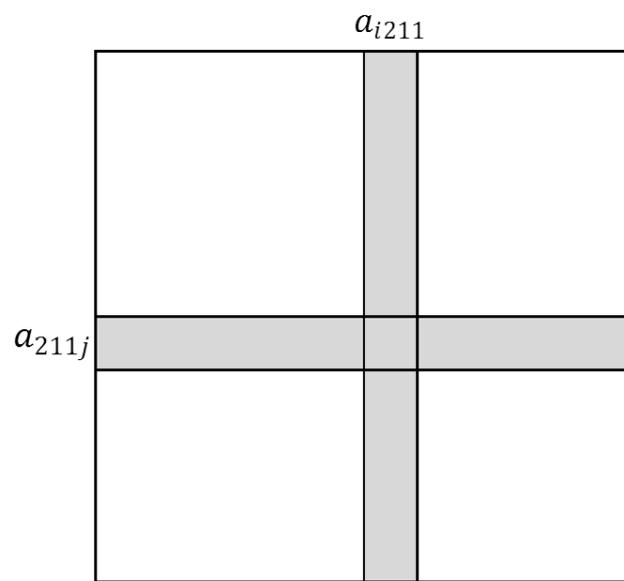


図 1: 2009/10 年冬季 (DJF) の北半球の海面更正気圧 (気象庁提供)。北極域で正偏差、中緯度地域で負偏差。

A



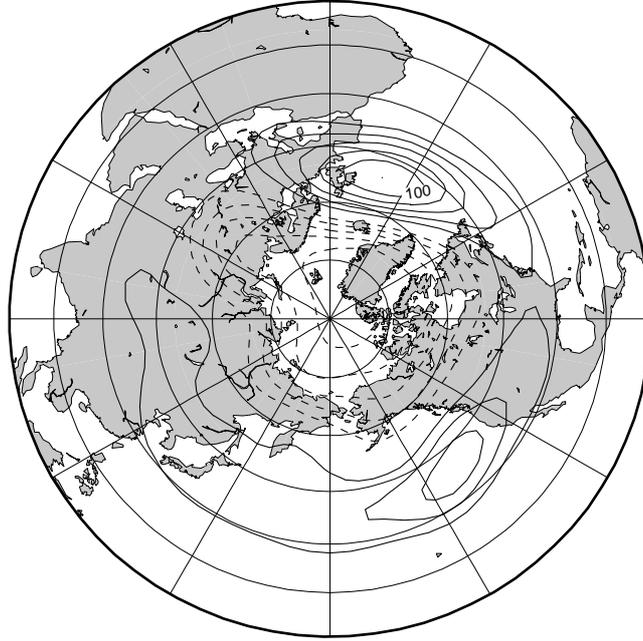
$$\mathbf{A} = a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, 420, j = 1, 2, \dots, 420)$$

$$a_{211j} = 0$$

図 2: 定常応答計算に用いた線形マトリックスの構造。

DJF 1975/76

Barotropic Height



Barotropic Forcing

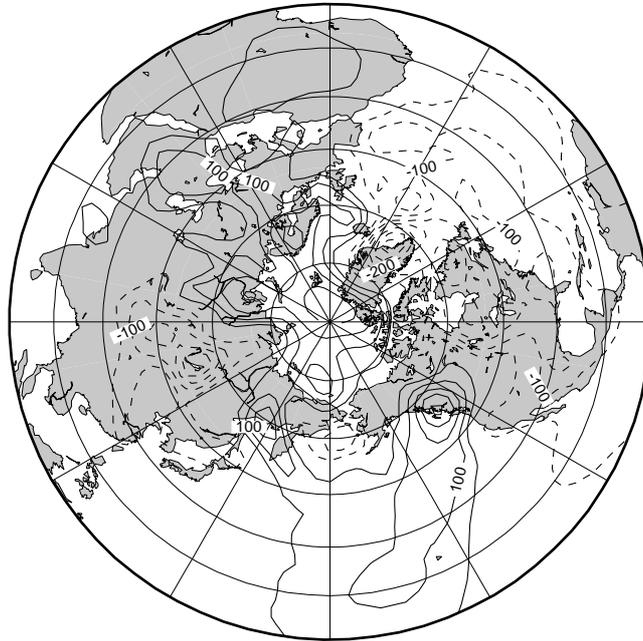
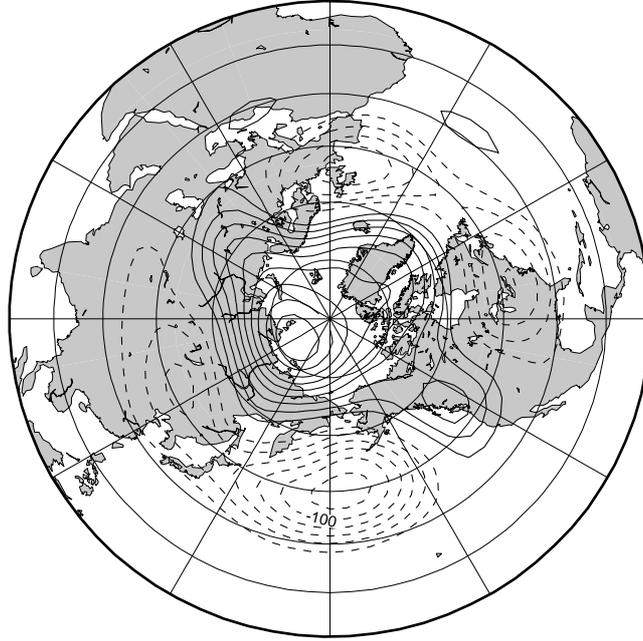


図 3: 1975/76 年冬季 (DJF) の順圧高度 (上) と外力 (下)。

DJF 1976/77

Barotropic Height



Barotropic Forcing

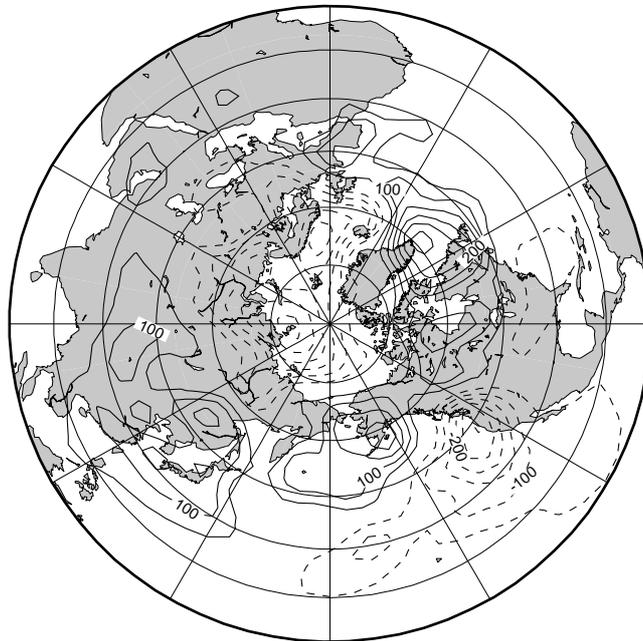
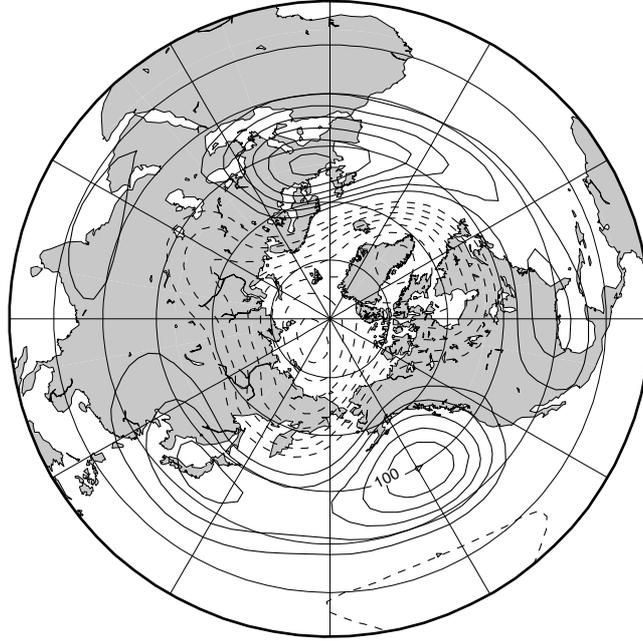


図 4: 1976/77 年冬季 (DJF) の順圧高度 (上) と外力 (下)。

DJF 1988/89

Barotropic Height



Barotropic Forcing

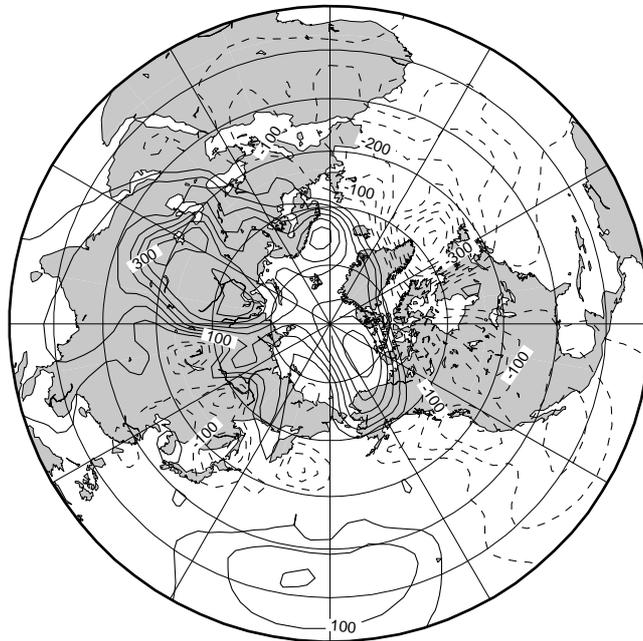
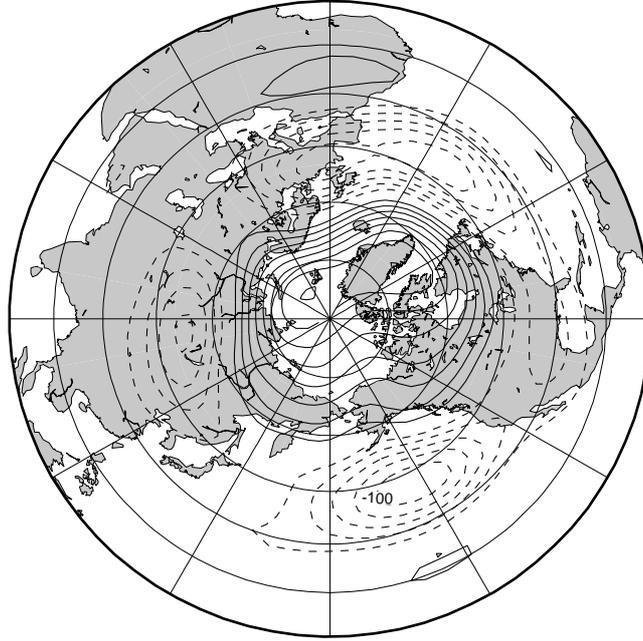


図 5: 1988/89 年冬季 (DJF) の順圧高度 (上) と外力 (下)。

DJF 2009/10

Barotropic Height



Barotropic Forcing

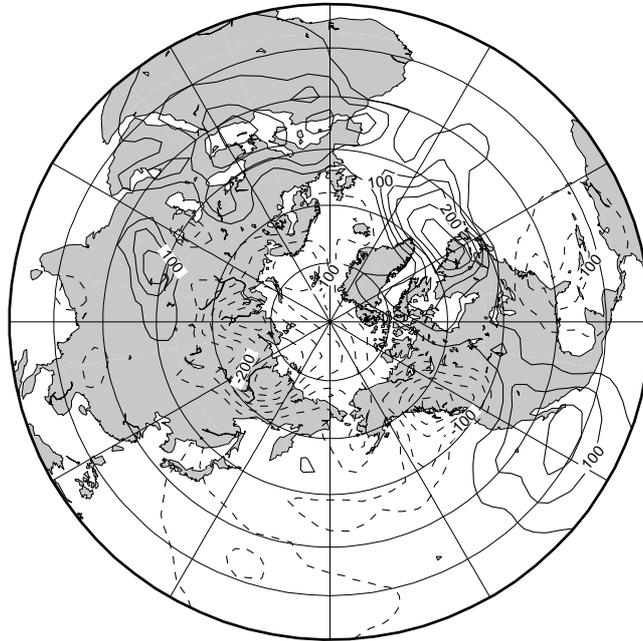
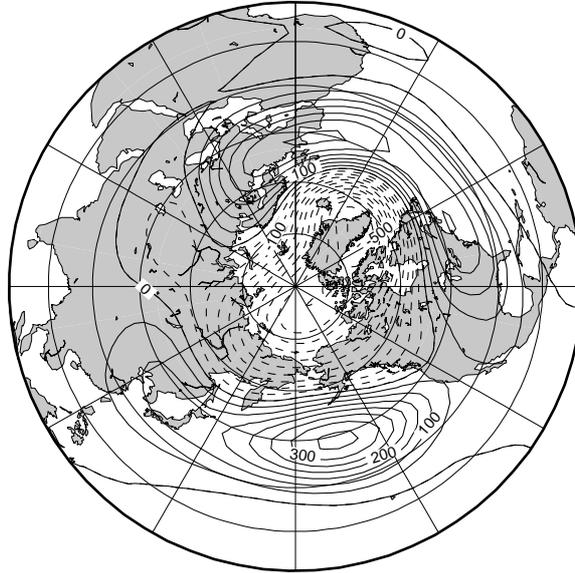


図 6: 2009/10 年冬季 (DJF) の順圧高度 (上) と外力 (下)。

Barotropic Height

EOF-1 (5.8%)



Score Time Series

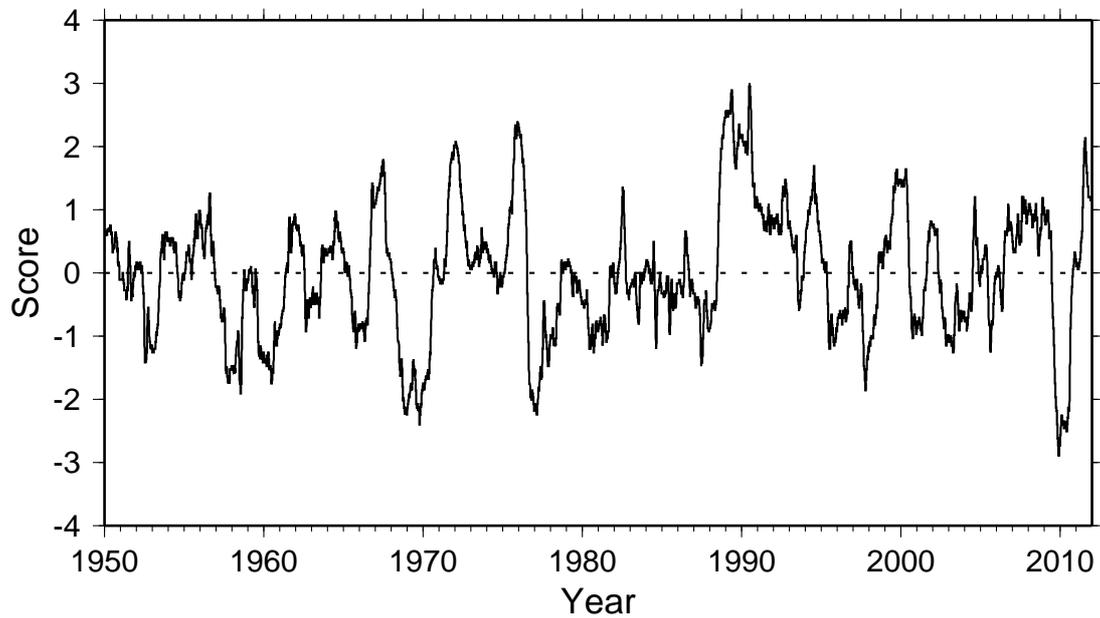
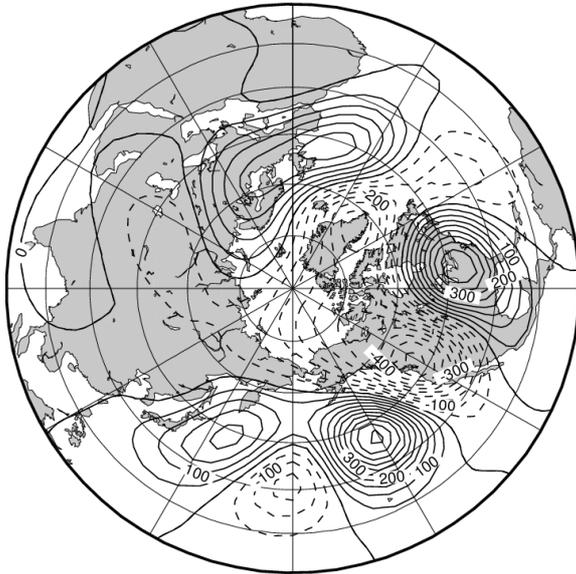


図 7: NCEP/NCAR のデータを用いた 1950-2011 年の順圧高度の EOF-1。固有ベクトル(上)とスコア時系列(下)。スコア時系列は 365 日の移動平均をかけており、正規化している。

SVD1: 10.7% 1950-2011 Daily

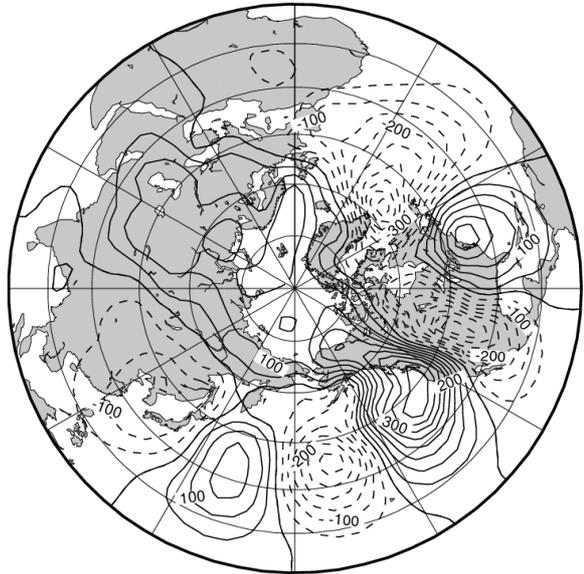
Barotropic Height

VARF=3.9%



Barotropic Forcing

VARF=1.6%



Score Time Series

$r=0.74$

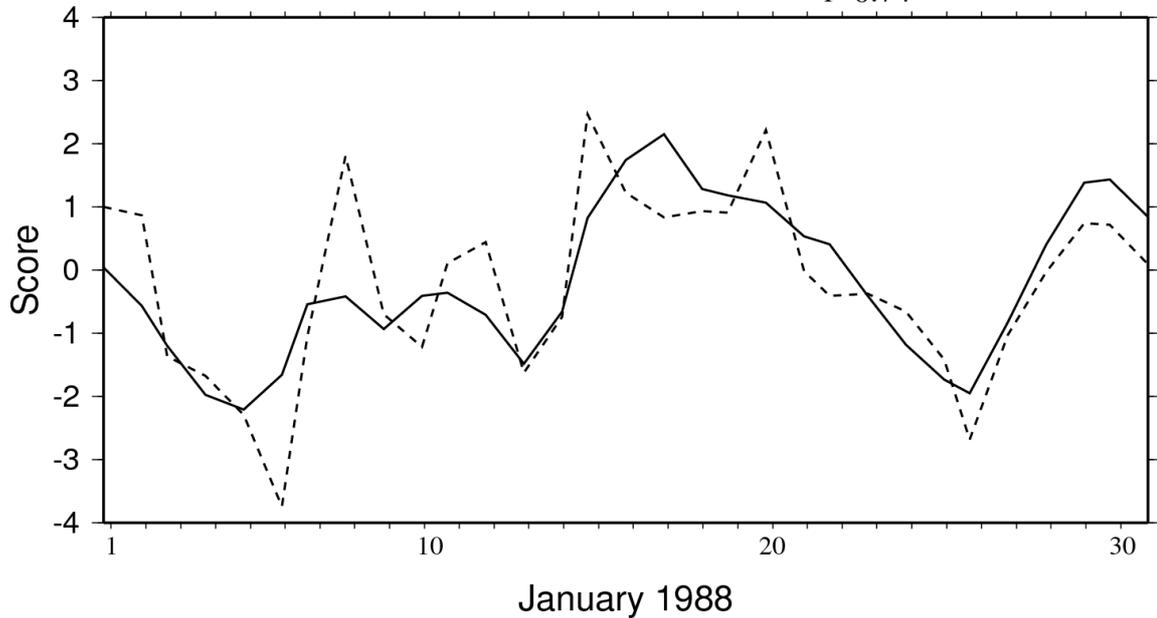
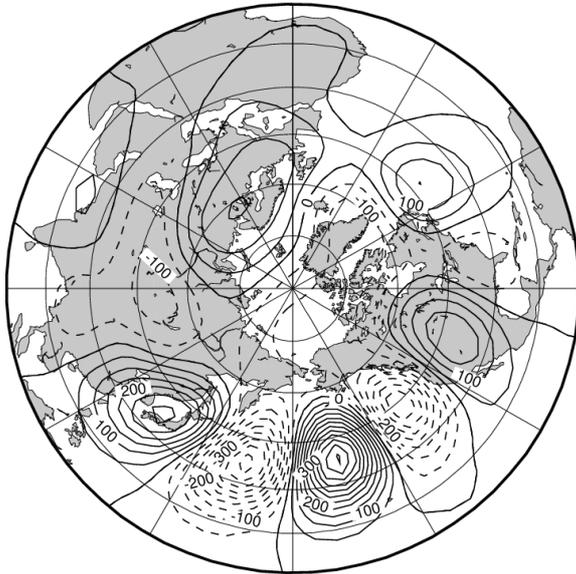


図 8: 1950-2011 年の日データでの順圧高度と外力の SVD-1。高度の特異ベクトル (左上)、外力の特異ベクトル (右上)、1988 年 1 月のスコア時系列 (下)。スコア時系列は正規化しており、実線が高度、破線が外力を表す。

SVD2: 9.9% 1950-2011 Daily

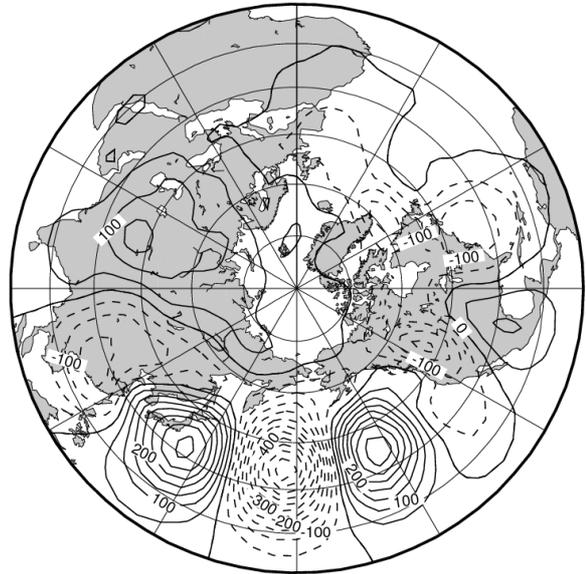
Barotropic Height

VARF=2.6%



Barotropic Forcing

VARF=2.0%



Score Time Series

$r=0.78$

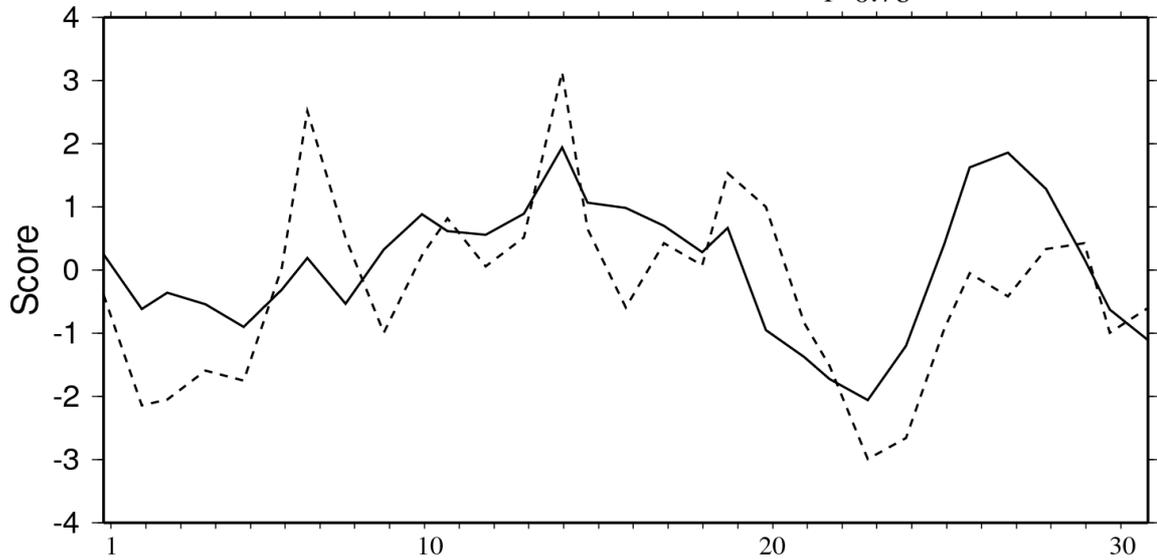


図 9: 1950-2011 年の日データでの順圧高度と外力の SVD-2。高度の特異ベクトル (左上)、外力の特異ベクトル (右上)、1988 年 1 月のスコア時系列 (下)。スコア時系列は正規化しており、実線が高度、破線が外力を表す。

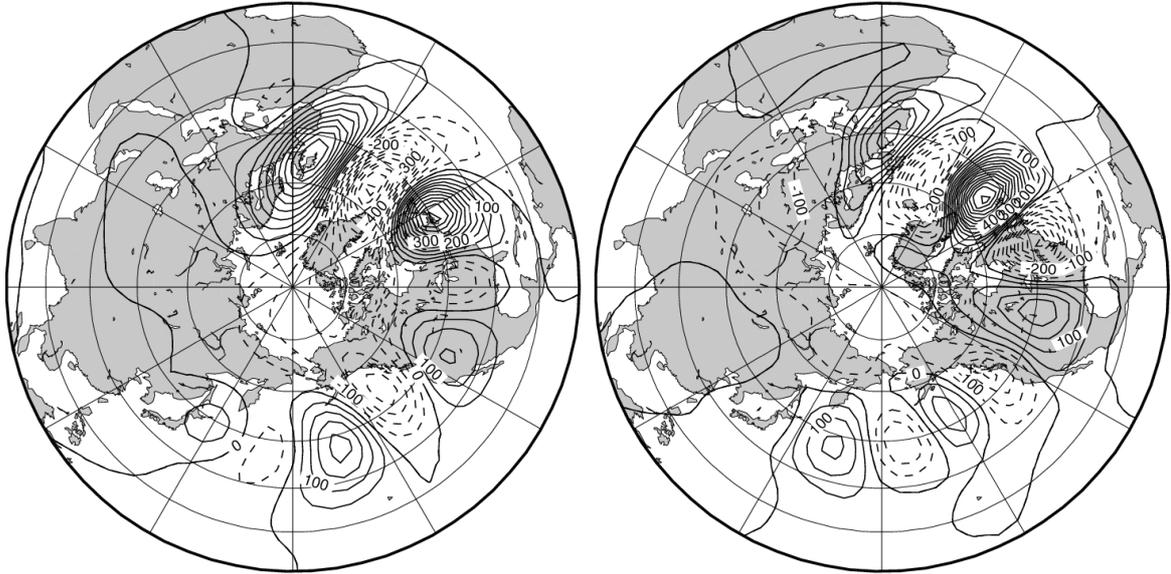
SVD1: 10.4% 1950-2011 Daily

Barotropic Height

VARF=2.7%

Linear Term(AOI Eq.)

VARF=3.2%



Score Time Series

$r=0.77$

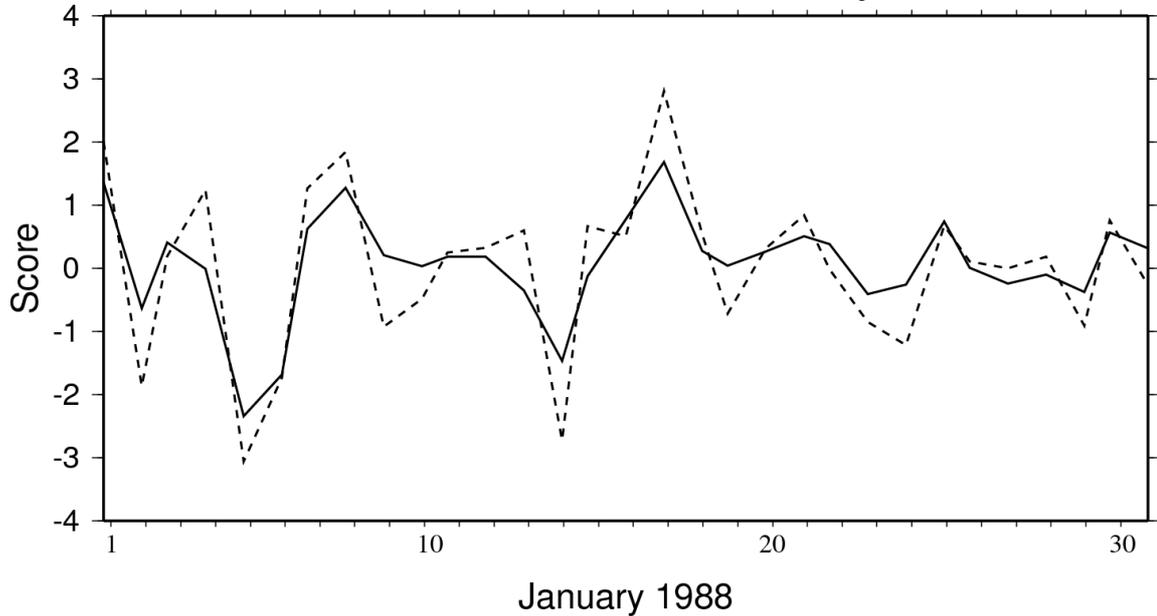
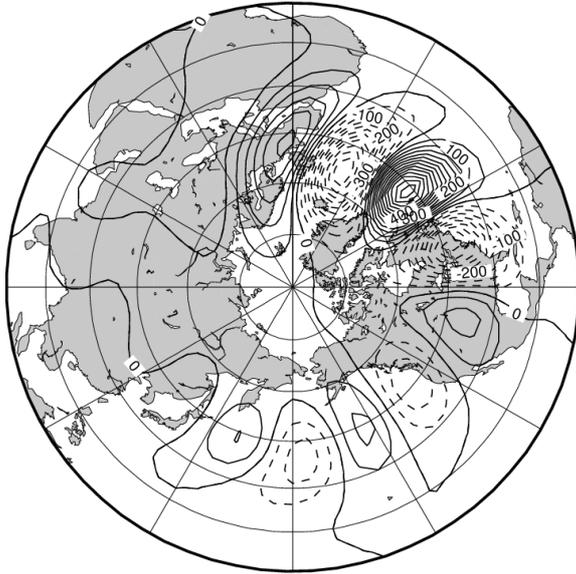


図 10: 1950-2011 年の日データでの順圧高度と AOI 方程式の線形項の SVD-1。高度の特異ベクトル (左上)、線形項の特異ベクトル (右上)、1988 年 1 月のスコア時系列 (下)。スコア時系列は正規化しており、実線が高度、破線が線形項を表す。

SVD2: 9.5% 1950-2011 Daily

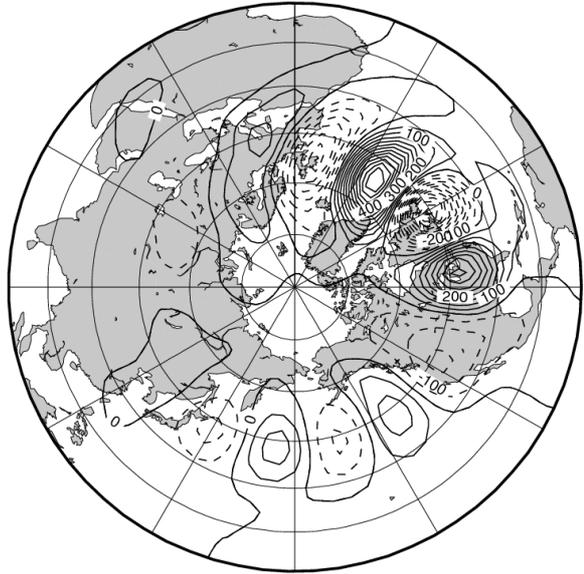
Barotropic Height

VARF=2.2%



Linear Term(AOI Eq.)

VARF=3.3%



Score Time Series

$r=0.80$

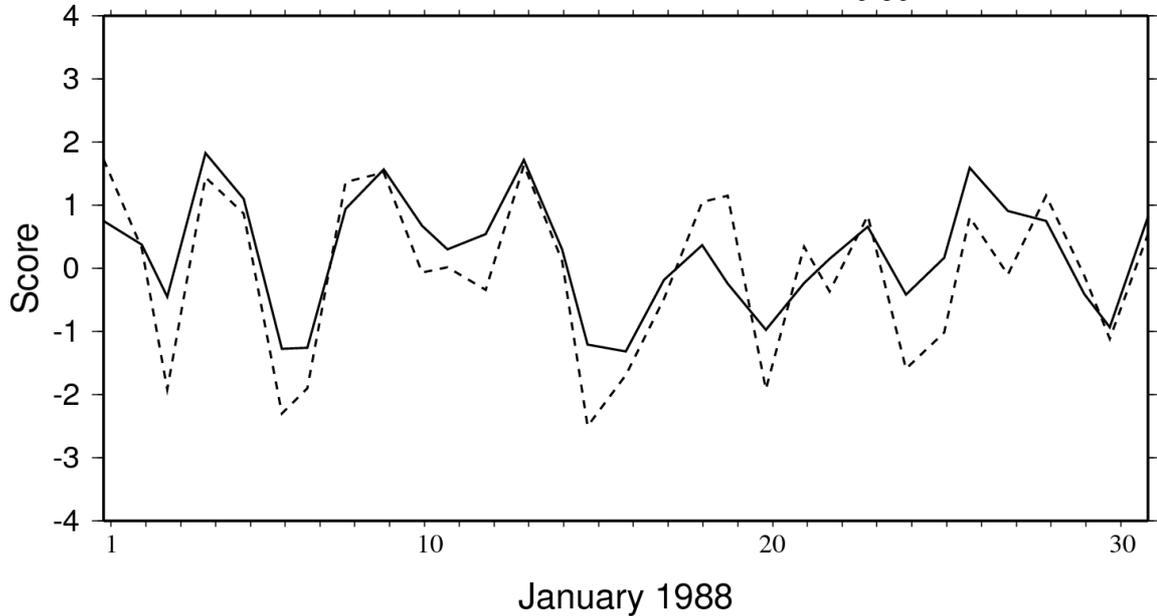


図 11: 1950-2011 年の日データでの順圧高度と AOI 方程式の線形項の SVD-2。高度の特異ベクトル (左上)、線形項の特異ベクトル (右上)、1988 年 1 月のスコア時系列 (下)。スコア時系列は正規化しており、実線が高度、破線が線形項を表す。

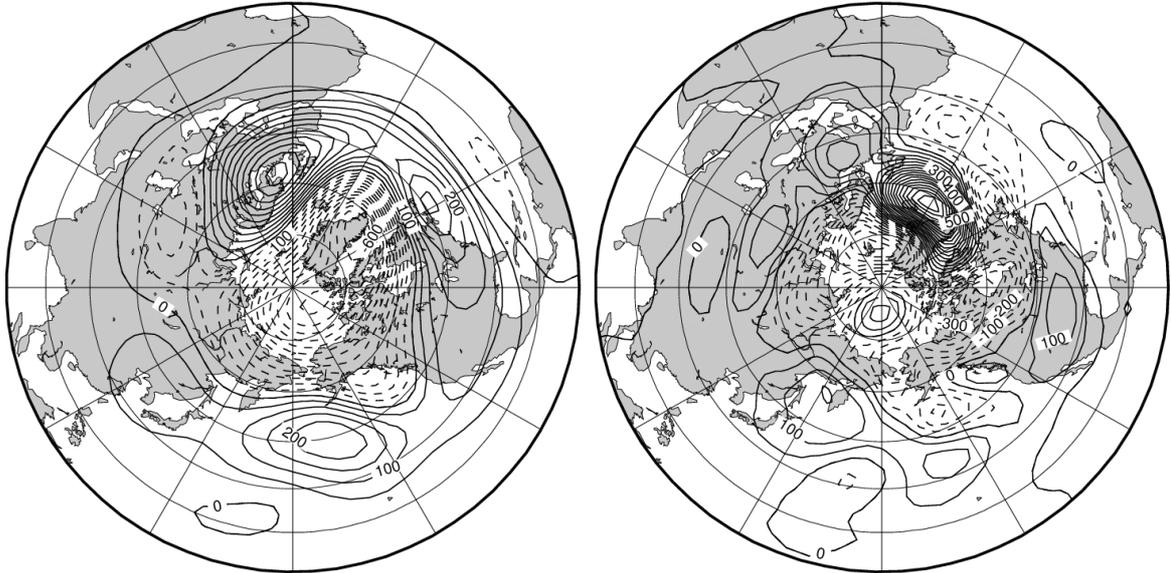
SVD1: 13.3% 1950-2011 Daily

Barotropic Height

VARF=5.3%

Nonlinear Term(AOI Eq.)

VARF=1.4%



Score Time Series

$r=0.39$

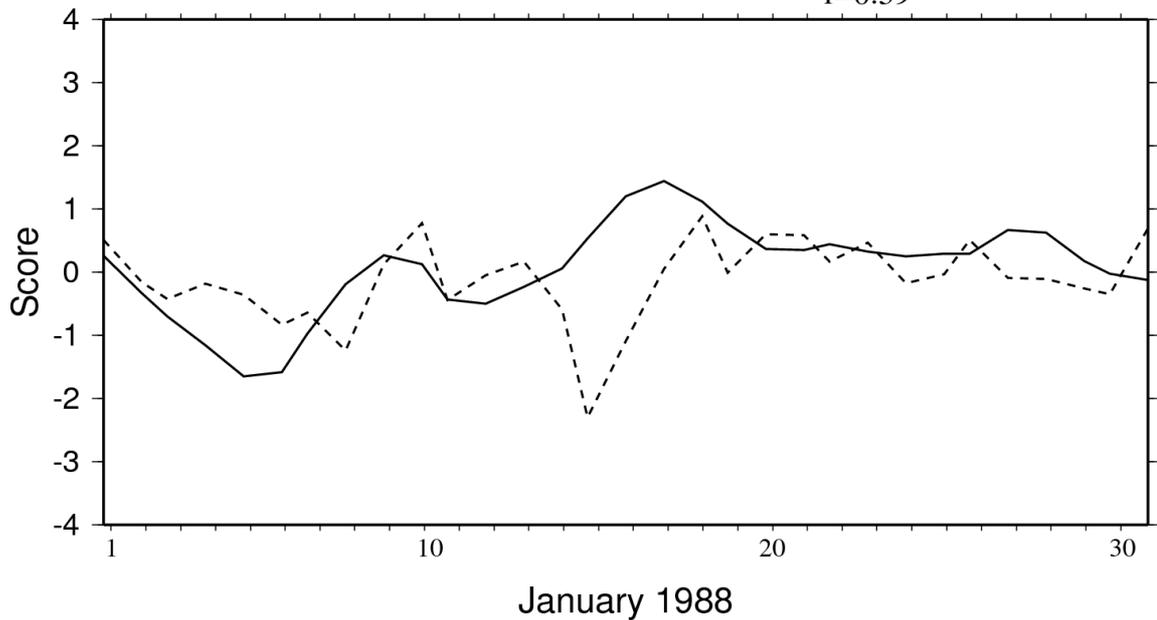


図 12: 1950-2011 年の日データでの順圧高度と AOI 方程式の非線形項の SVD-1。高度の特異ベクトル (左上)、非線形項の特異ベクトル (右上)、1988 年 1 月のスコア時系列 (下)。スコア時系列は正規化しており、実線が高度、破線が非線形項を表す。

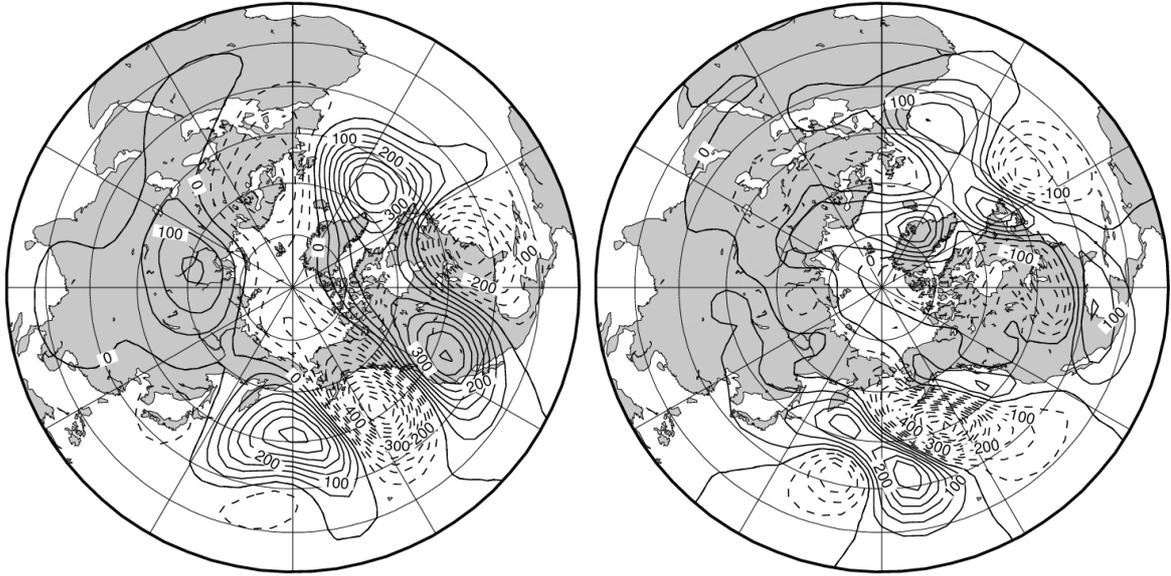
SVD2: 8.5% 1950-2011 Daily

Barotropic Height

VARF=3.1%

Nonlinear Term(AOI Eq.)

VARF=1.4%



Score Time Series

$r=0.42$

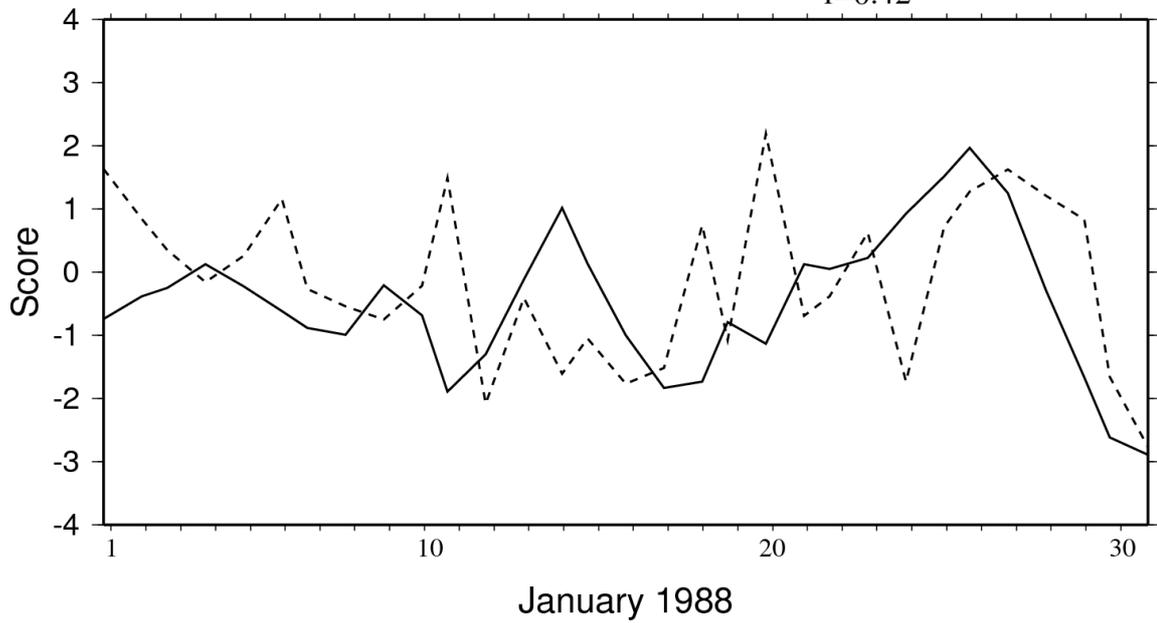
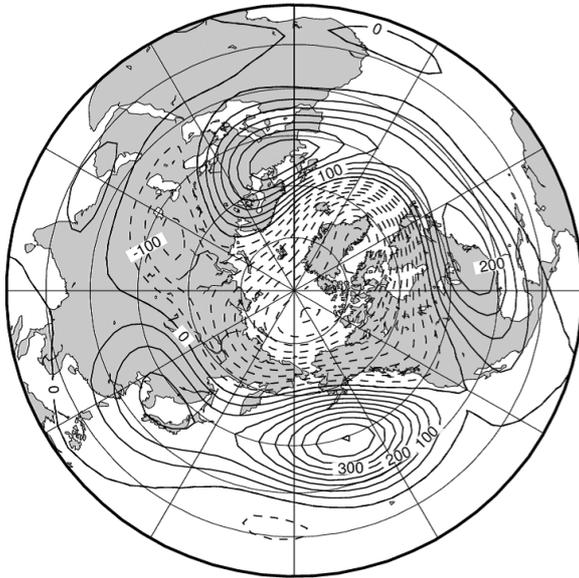


図 13: 1950-2011 年の日データでの順圧高度と AOI 方程式の非線形項の SVD-2。高度の特異ベクトル (左上)、非線形項の特異ベクトル (右上)、1988 年 1 月のスコア時系列 (下)。スコア時系列は正規化しており、実線が高度、破線が非線形項を表す。

SVD1: 30.3% 1950-2011 Monthly

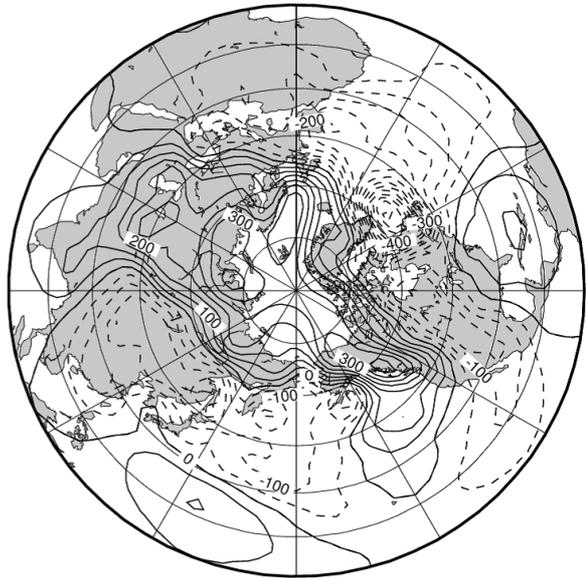
Barotropic Height

VARF=13.6%



Barotropic Forcing

VARF=3.6%



Score Time Series

$r=0.88$

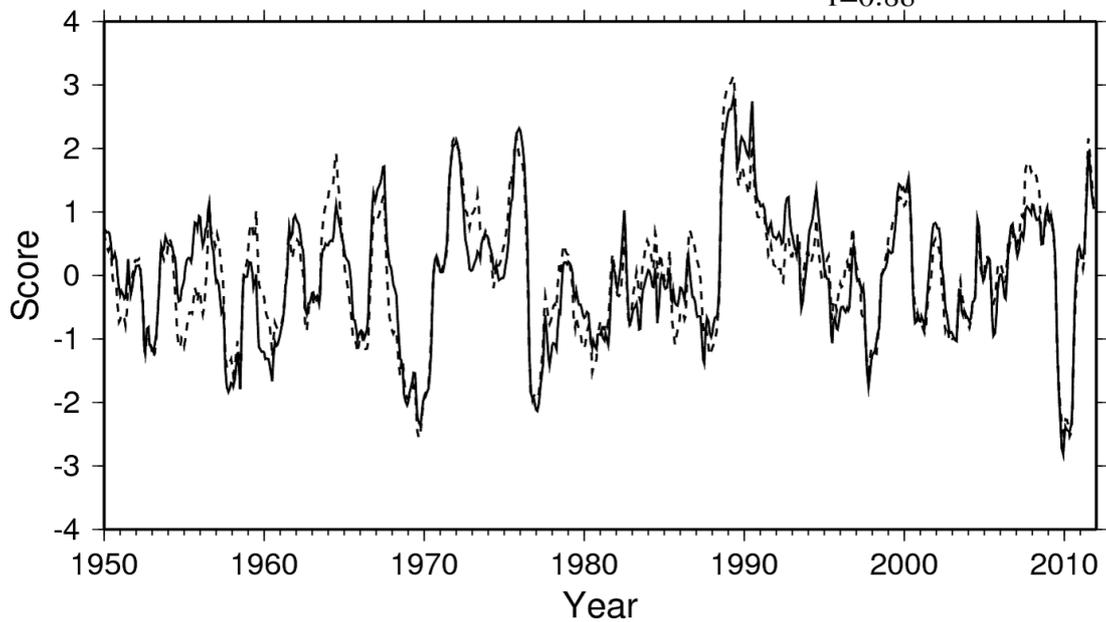
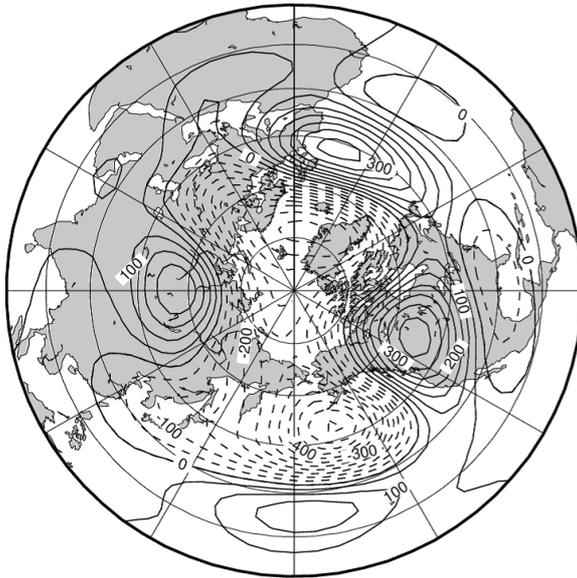


図 14: 1950-2011 年の月データでの順圧高度と外力の SVD-1。高度の特異ベクトル(左上)、外力の特異ベクトル(右上)、スコア時系列(下)。スコア時系列は12か月の移動平均をかけ、正規化しており、実線が高度、破線が外力を表す。

SVD2: 11.9% 1950-2011 Monthly

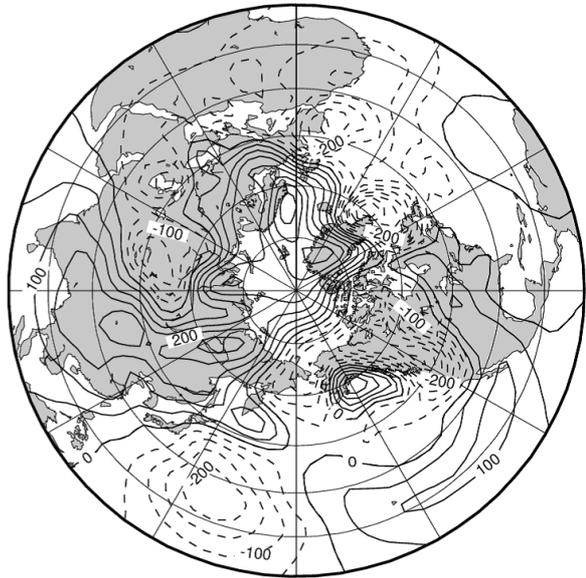
Barotropic Height

VARF=7.2%



Barotropic Forcing

VARF=2.8%



Score Time Series

$r=0.85$

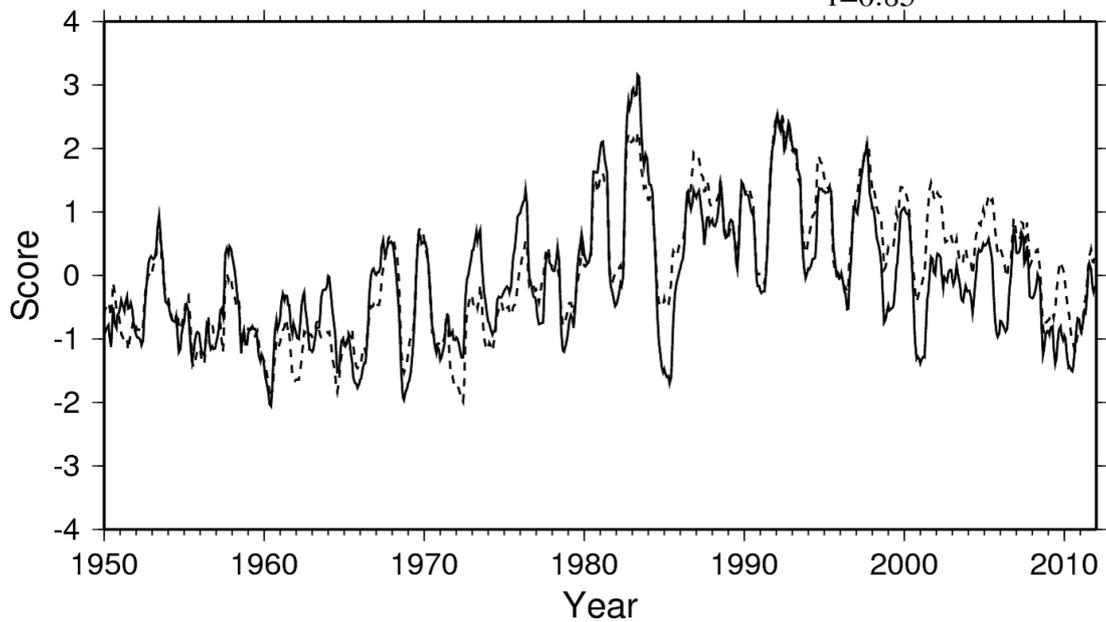


図 15: 1950-2011 年の月データでの順圧高度と外力の SVD-2。高度の特異ベクトル (左上)、外力の特異ベクトル (右上)、スコア時系列 (下)。スコア時系列は 12 か月の移動平均をかけ、正規化しており、実線が高度、破線が外力を表す。

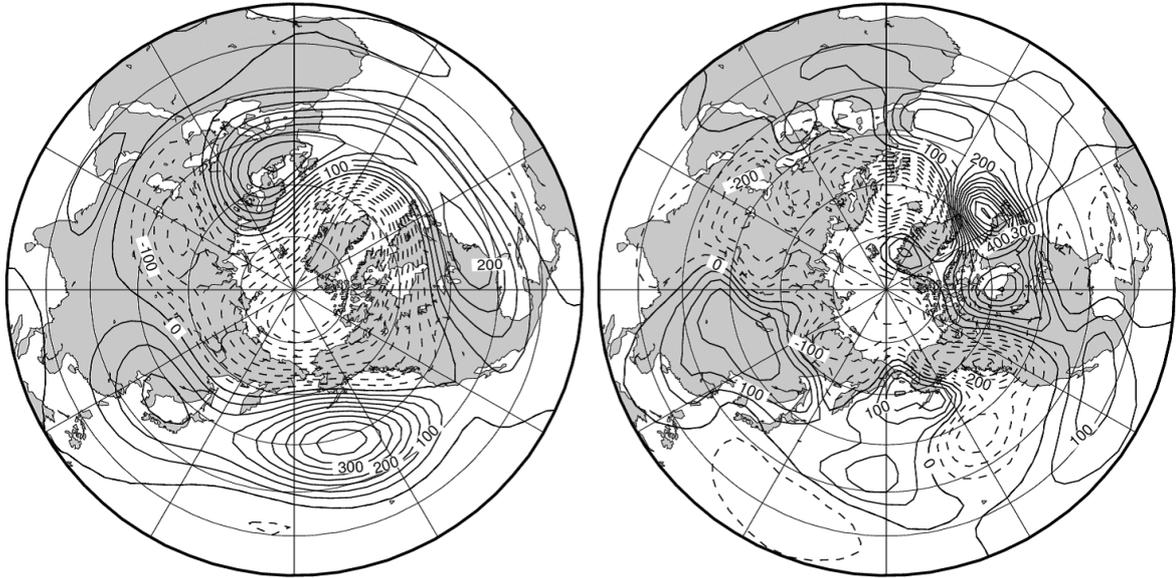
SVD1: 29.2% 1950-2011 Monthly

Barotropic Height

VARF=13.4%

Linear Term(AOI Eq.)

VARF=3.4%



Score Time Series

$r=0.85$

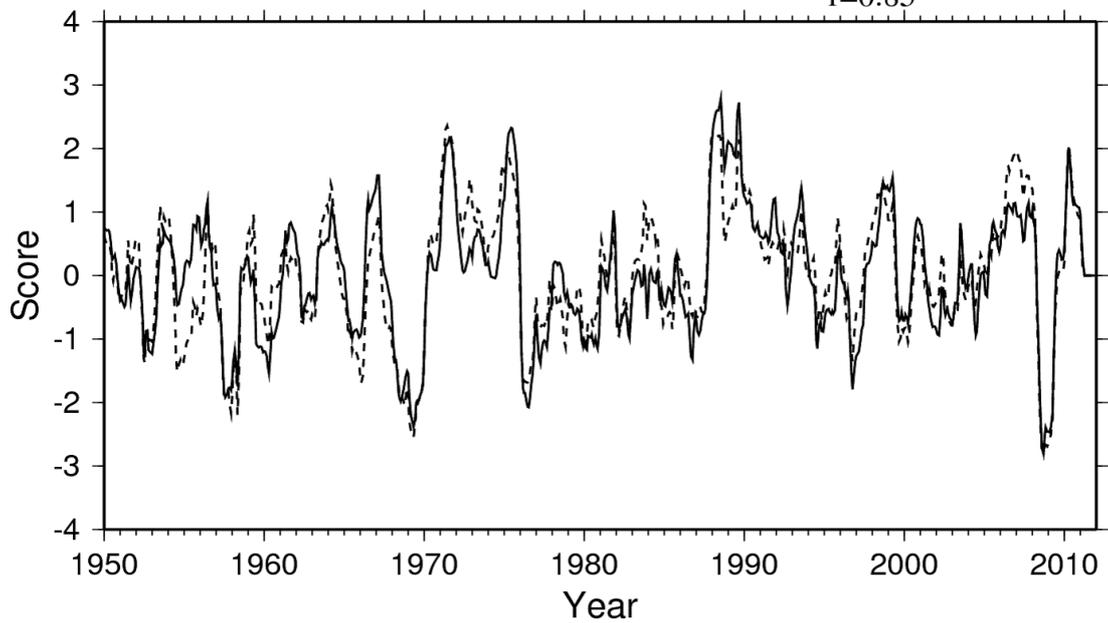


図 16: 1950-2011 年の月データでの順圧高度と AOI 方程式の線形項の SVD-1。高度の特異ベクトル (左上)、線形項の特異ベクトル (右上)、スコア時系列 (下)。スコア時系列は 12 か月の移動平均をかけ、正規化しており、実線が高度、破線が線形項を表す。

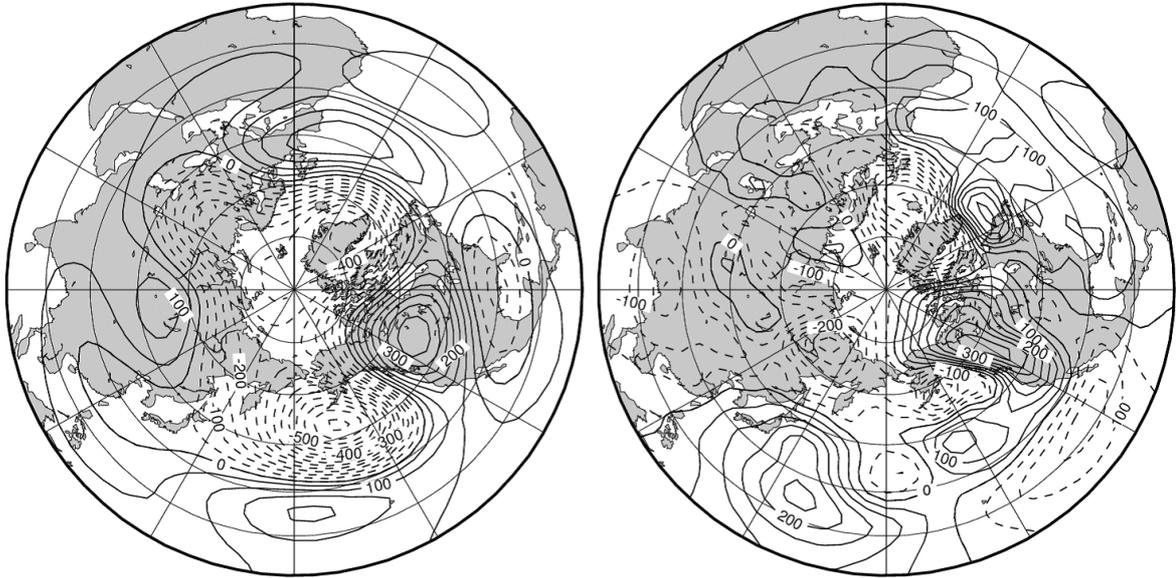
SVD2: 12.1% 1950-2011 Monthly

Barotropic Height

VARF=6.9%

Linear Term(AOI Eq.)

VARF=2.6%



Score Time Series

$r=0.87$

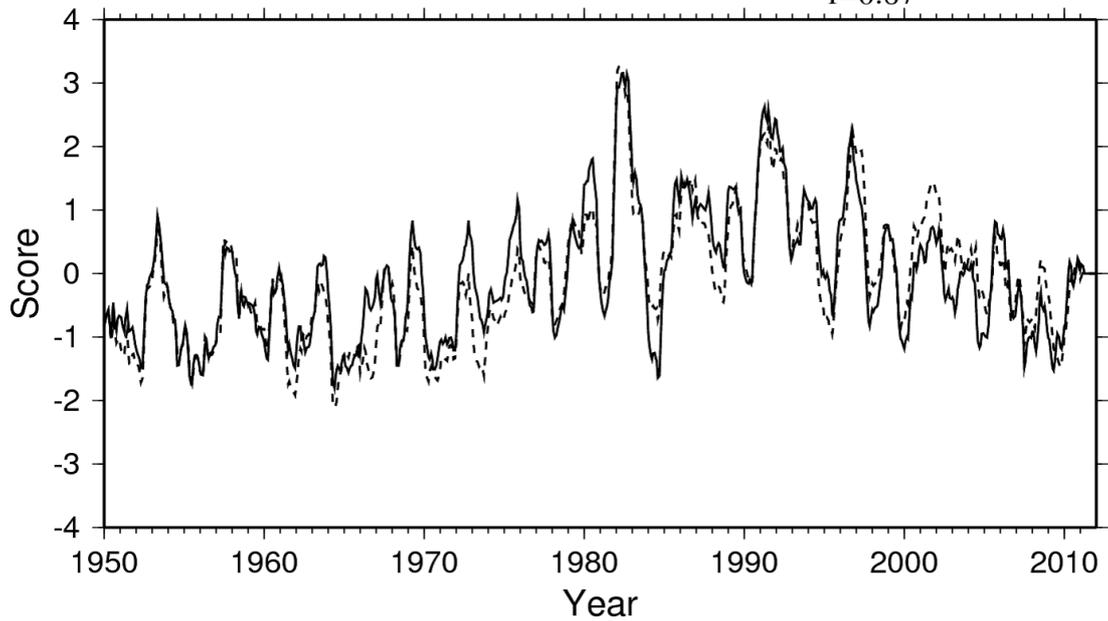


図 17: 1950-2011 年の月データでの順圧高度と AOI 方程式の線形項の SVD-2。高度の特異ベクトル (左上)、線形項の特異ベクトル (右上)、スコア時系列 (下)。スコア時系列は 12 か月の移動平均をかけ、正規化しており、実線が高度、破線が線形項を表す。

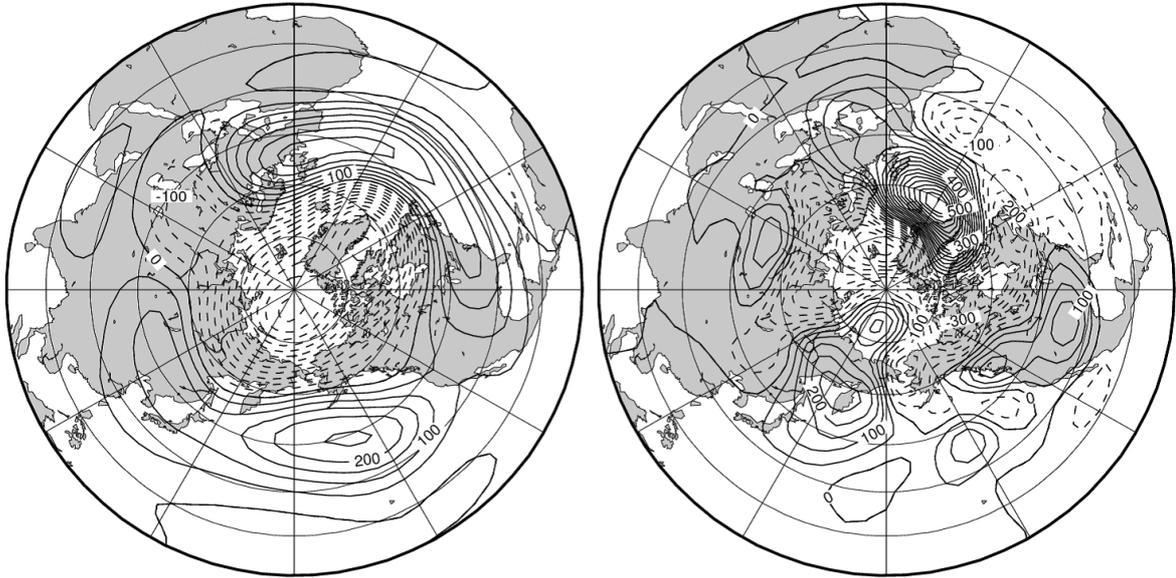
SVD1: 28.3% 1950-2011 Monthly

Barotropic Height

VARF=13.7%

Nonlinear Term(AOI Eq.)

VARF=2.5%



Score Time Series

$r=0.76$

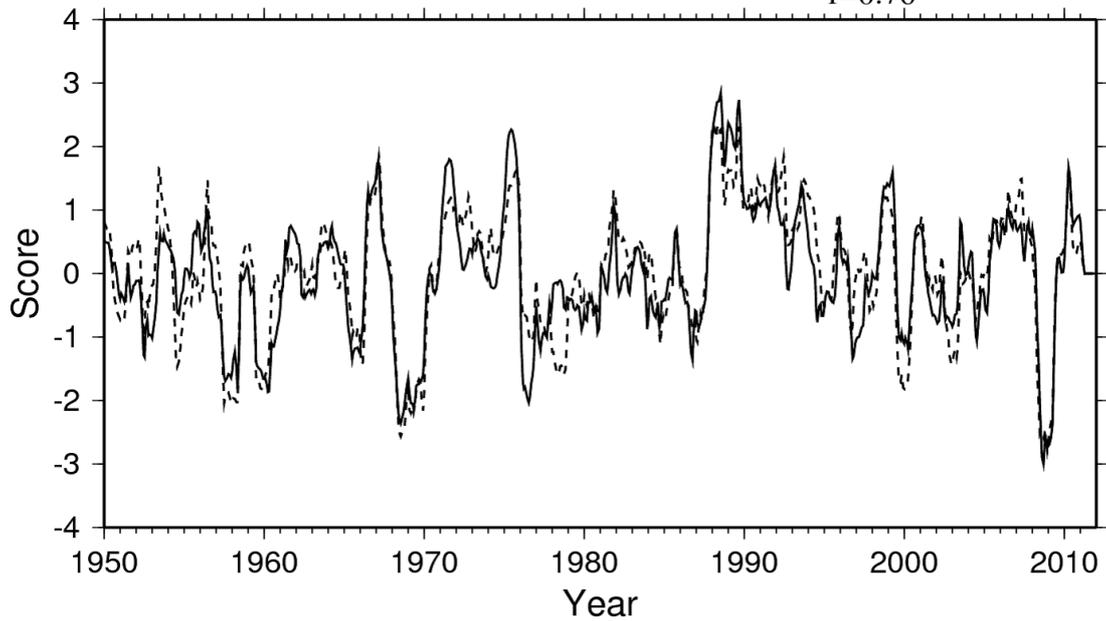


図 18: 1950-2011 年の月データでの順圧高度と AOI 方程式の非線形項の SVD-1。高度の特異ベクトル (左上)、非線形項の特異ベクトル (右上)、スコア時系列 (下)。スコア時系列は 12 か月の移動平均をかけ、正規化しており、実線が高度、破線が非線形項を表す。

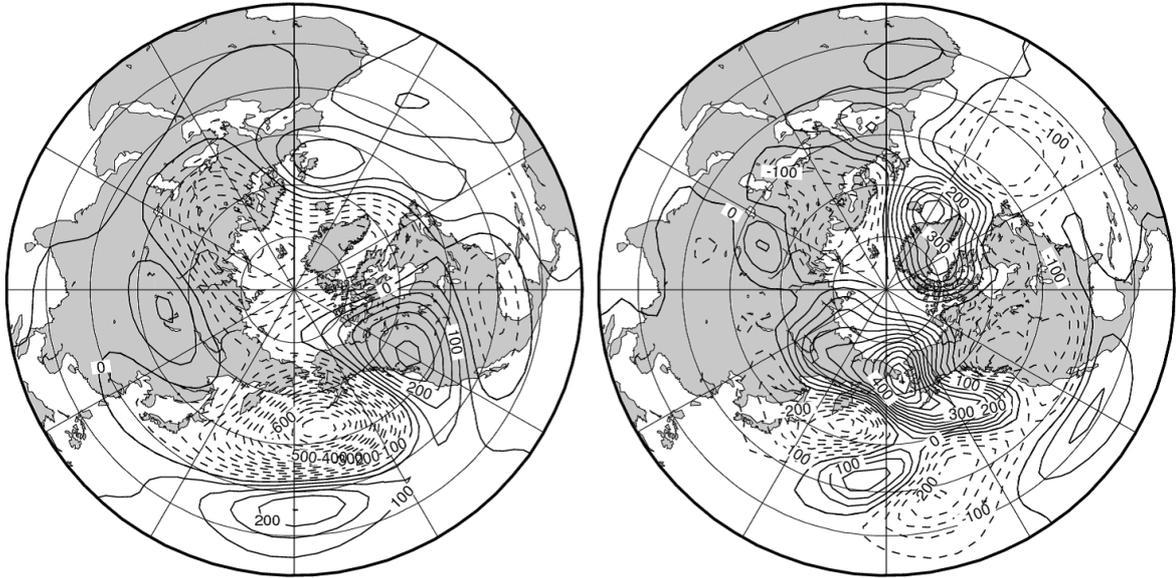
SVD2: 12.1% 1950-2011 Monthly

Barotropic Height

VARF=6.7%

Nonlinear Term(AOI Eq.)

VARF=2.4%



Score Time Series

$r=0.71$

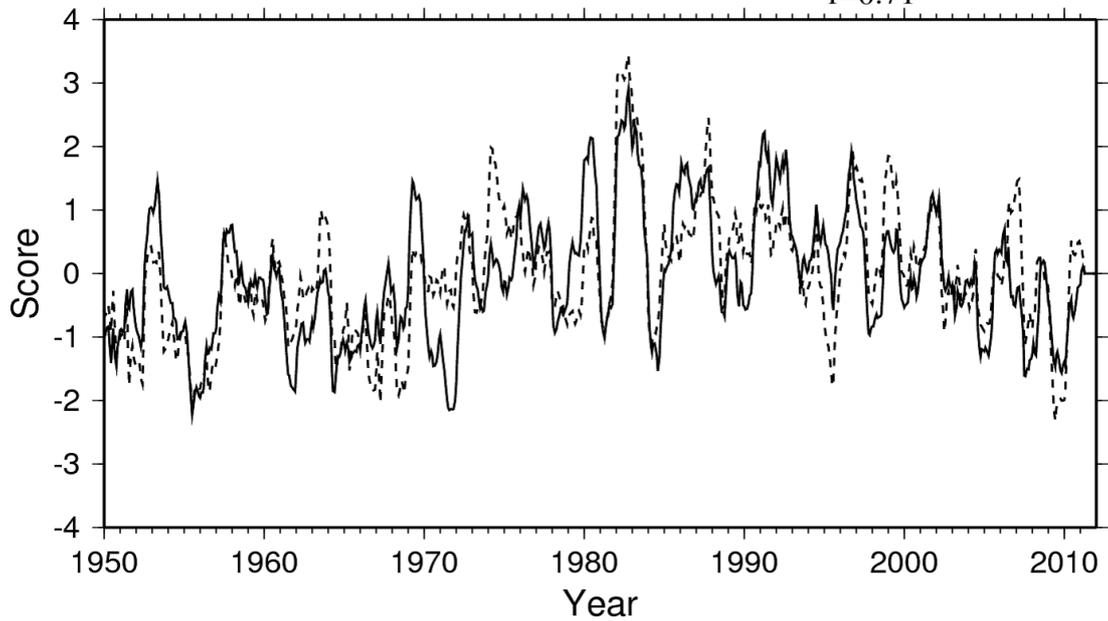


図 19: 1950-2011 年の月データでの順圧高度と AOI 方程式の非線形項の SVD-2。高度の特異ベクトル (左上)、非線形項の特異ベクトル (右上)、スコア時系列 (下)。スコア時系列は 12 か月の移動平均をかけ、正規化しており、実線が高度、破線が非線形項を表す。

Barotropic Forcing

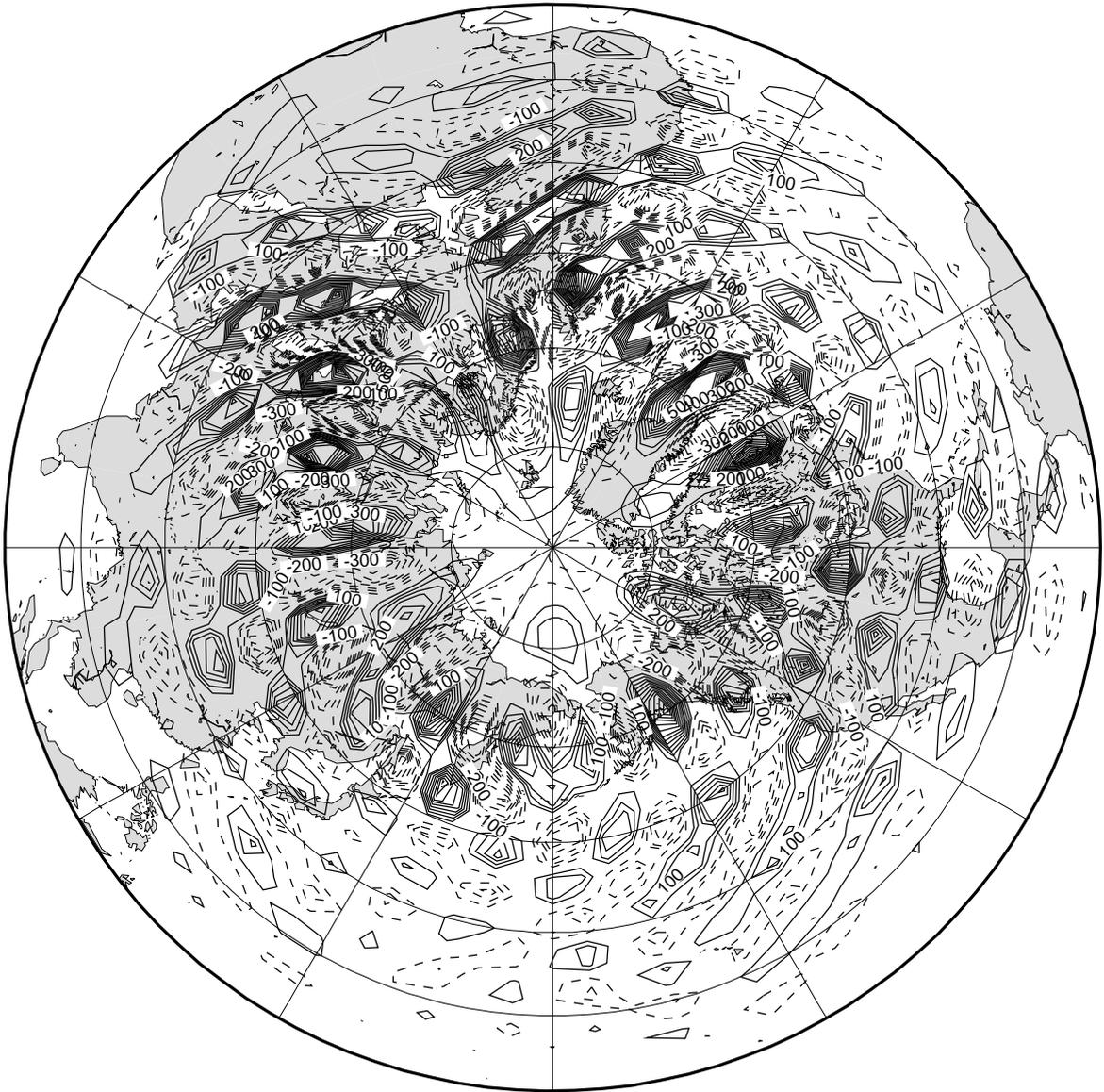
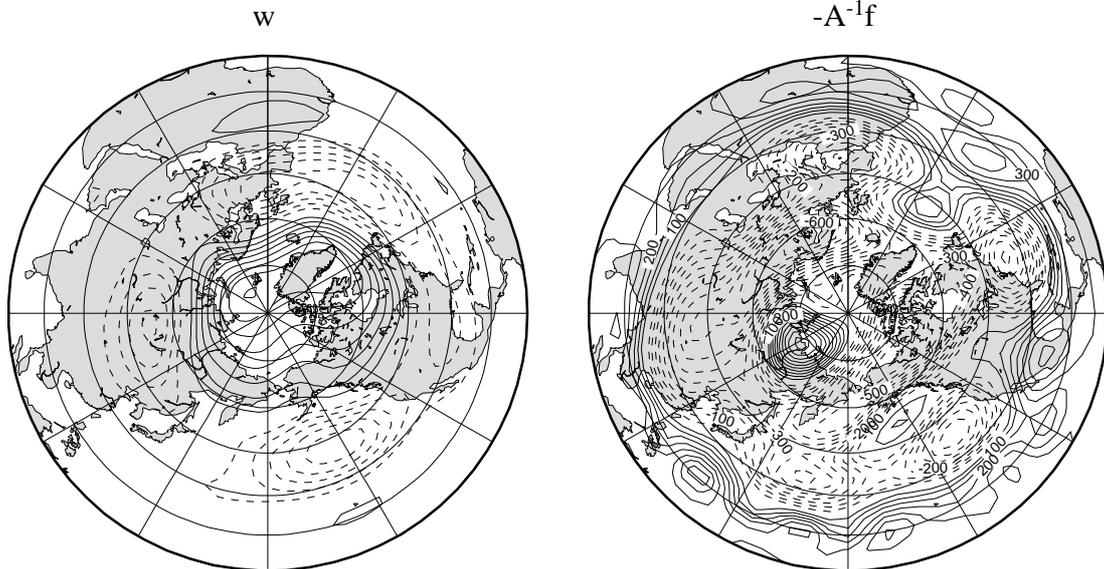


図 20: 線形マトリクスに粘性項を含めて計算した順圧高度の定常応答としての外力。

DJF 2009/10

Barotropic Height



Barotropic Forcing

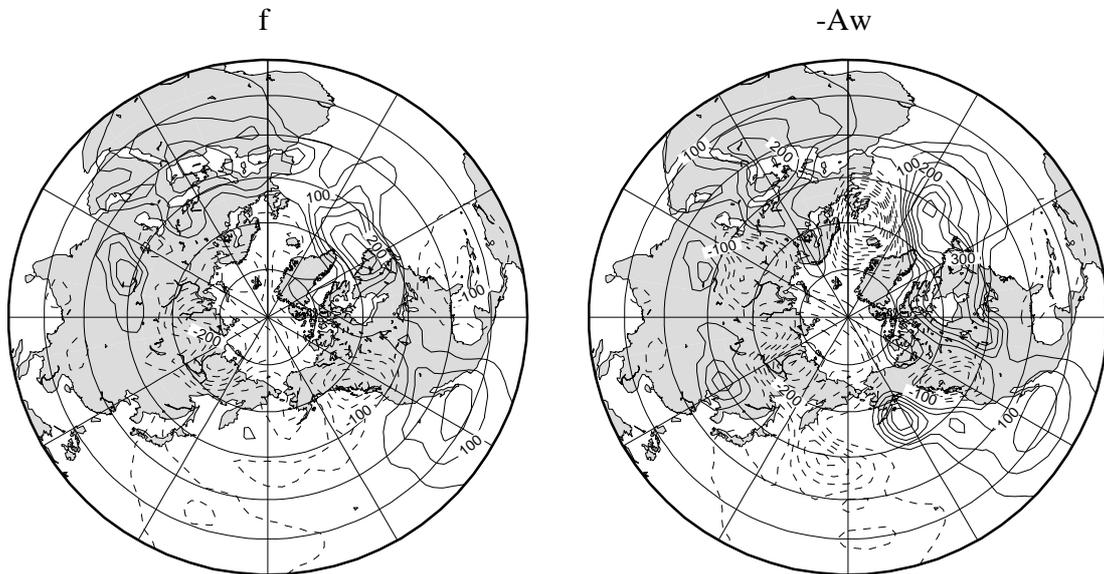
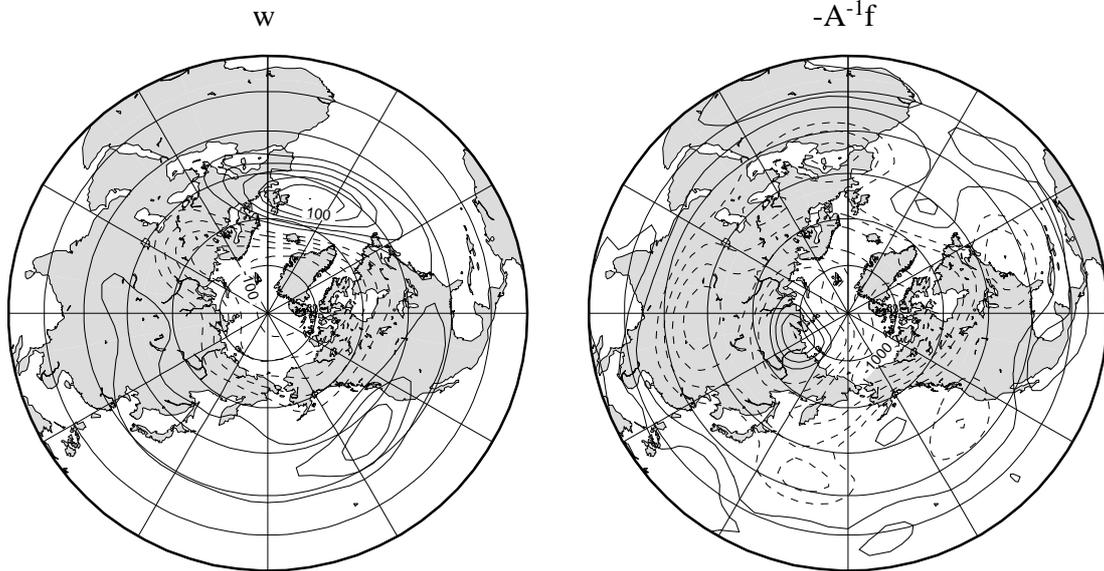


図 21: 2009/10 年冬季 (DJF) の順圧高度と外力の観測値と線形定常応答。観測値の順圧高度 (左上)、外力の線形定常応答として求めた順圧高度 (右上)、観測値の外力 (左下)、順圧高度の線形定常応答として求めた外力 (右下) の気候値からの偏差。右上のコンター間隔は左上のコンター間隔の 3 倍で描画している。

DJF 1975/76

Barotropic Height



Barotropic Forcing

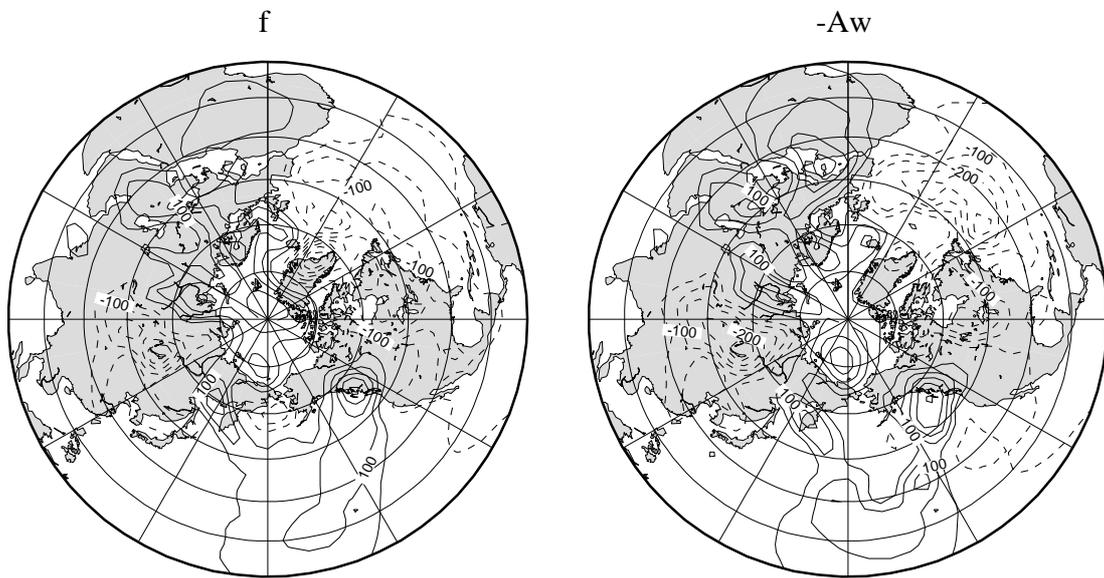
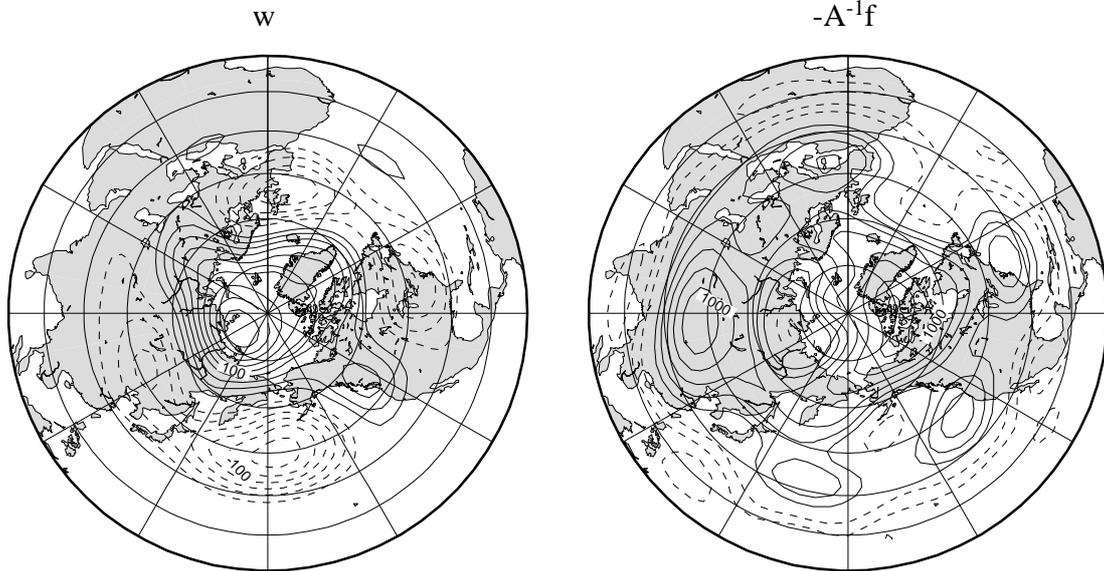


図 22: 1975/76 年冬季 (DJF) の順圧高度と外力の観測値と線形定常応答。観測値の順圧高度 (左上)、外力の線形定常応答として求めた順圧高度 (右上)、観測値の外力 (左下)、順圧高度の線形定常応答として求めた外力 (右下) 気候値からの偏差。右上のコンター間隔は左上のコンター間隔の 10 倍で描画している。

DJF 1976/77

Barotropic Height



Barotropic Forcing

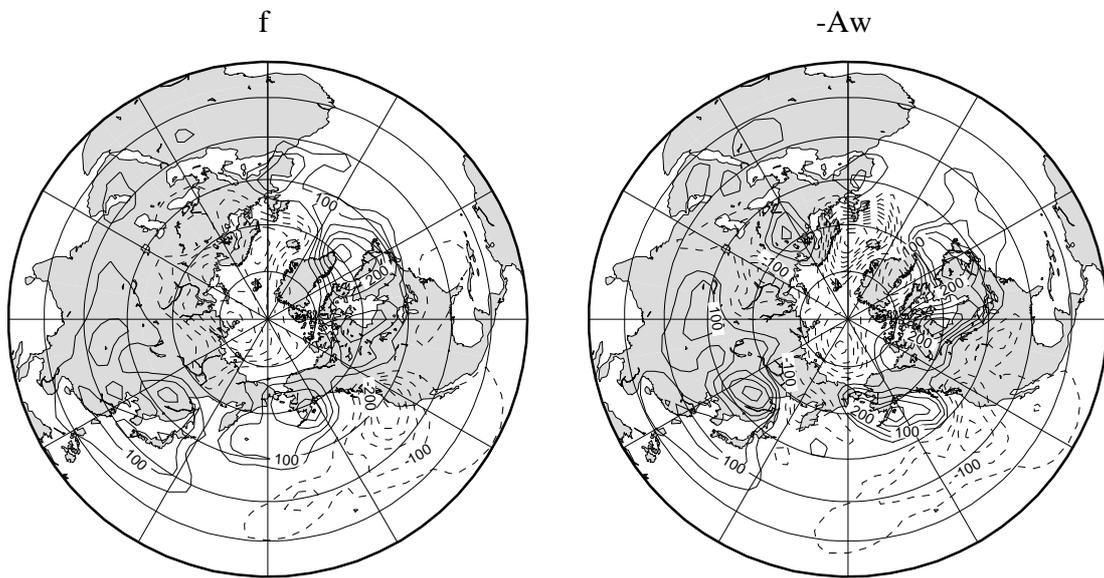
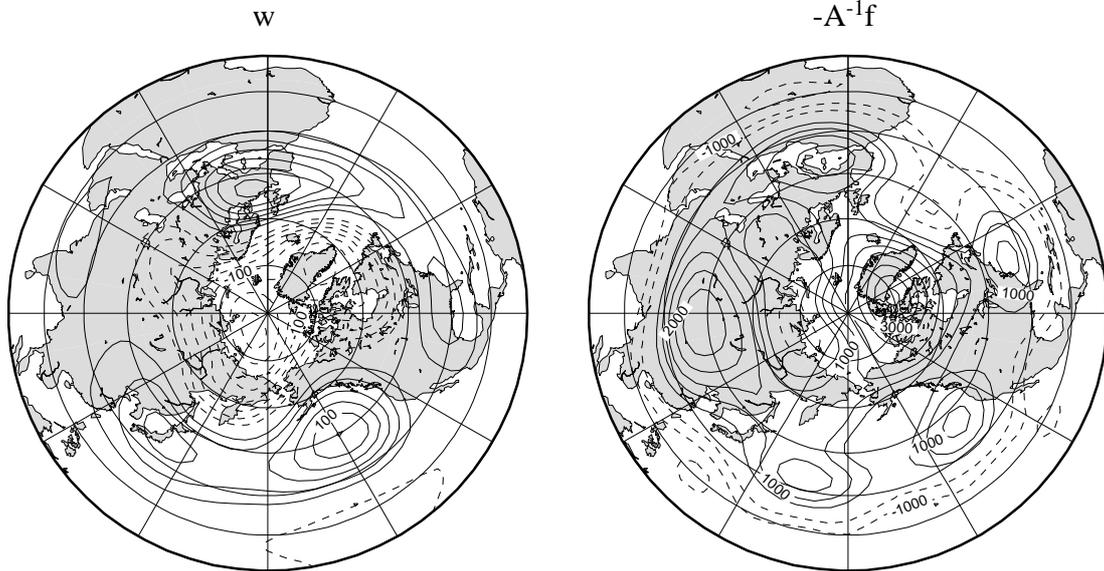


図 23: 1976/77 年冬季 (DJF) の順圧高度と外力の観測値と線形定常応答。観測値の順圧高度 (左上)、外力の線形定常応答として求めた順圧高度 (右上)、観測値の外力 (左下)、順圧高度の線形定常応答として求めた外力 (右下) 気候値からの偏差。右上のコンター間隔は左上のコンター間隔の 10 倍で描画している。

DJF 1988/89

Barotropic Height



Barotropic Forcing

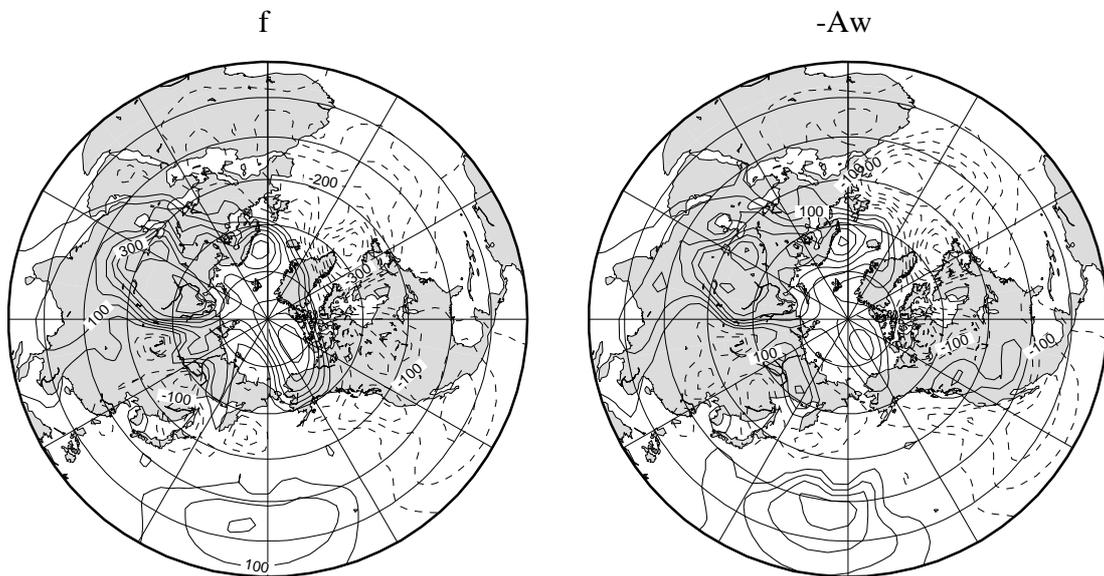
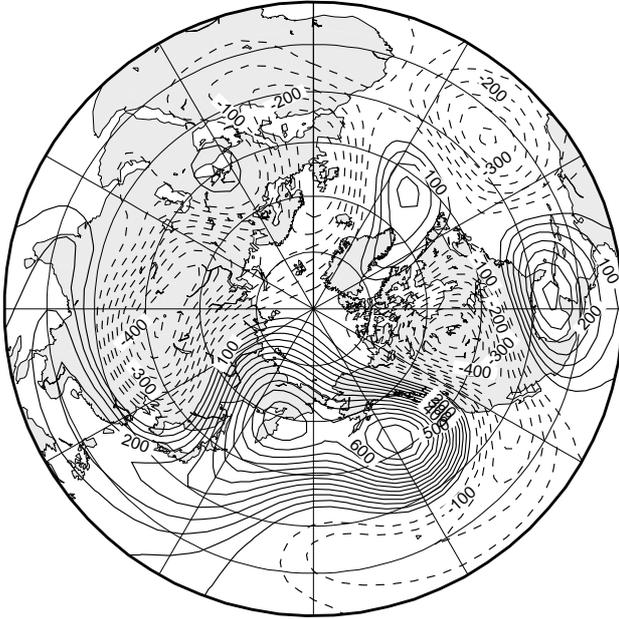


図 24: 1988/89 年冬季 (DJF) の順圧高度と外力の観測値と線形定常応答。観測値の順圧高度 (左上)、外力の線形定常応答として求めた順圧高度 (右上)、観測値の外力 (左下)、順圧高度の線形定常応答として求めた外力 (右下) 気候値からの偏差。右上のコンター間隔は左上のコンター間隔の 10 倍で描画している。

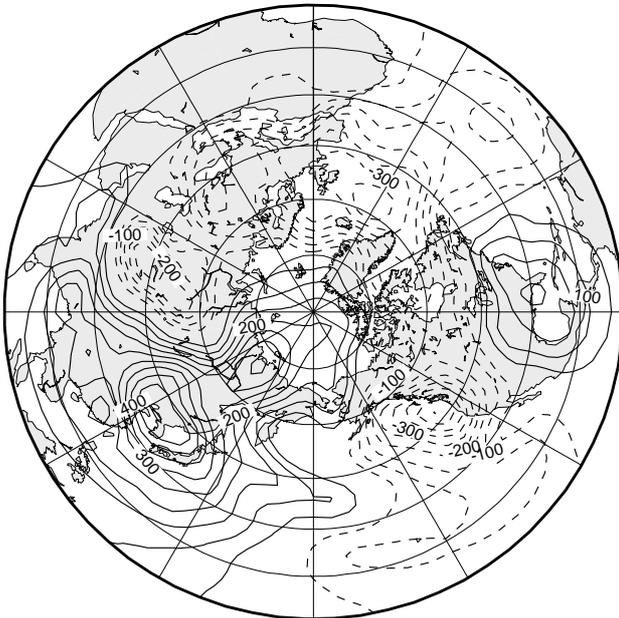
Linear Term



Nonlinear Term



Linear + Nonlinear



Barotropic Forcing

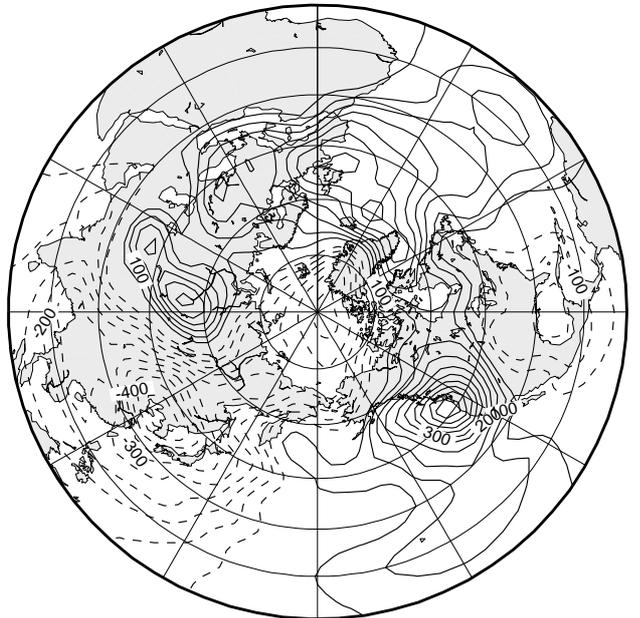


図 25: 順圧大気大循環モデルにおける線形項、非線形項、外力項の比較。2009/10 年冬季 (DJF) の線形項 (左上)、非線形項 (右上)、線形項と非線形項の和 (左下)、外力項 (右下)。