

平成23年度 卒業論文

AOI方程式を用いた10年スケールの
北極振動の成因解明

筑波大学生命環境学群地球学類

地球環境学主専攻

200810795

木野公朝

2012年2月

目次

要旨	iii
Abstract	iv
表目次	vi
図目次	vii
1 はじめに	1
2 目的	4
3 使用データ	5
4 解析手法	6
4.1 順圧大気大循環モデル	6
4.2 スペクトル表記プリミティブ方程式の導出	10
4.2.1 鉛直構造関数	10
4.2.2 水平構造関数	11
4.2.3 3次元ノーマルモード関数展開	14
4.3 順圧S-モデル	19
4.3.1 外力の推定	19
4.3.2 物理過程	22
4.4 AOI 方程式	25
4.5 スペクトル解析	27
5 結果	28
5.1 1950年から2010年までの北極振動の変動の概観	28
5.1.1 10年スケールの北極振動	28
5.1.2 1950年から2010年までのAOI方程式各項の変動の概観	29
5.2 AOI方程式各項の空間分布の考察	31
5.3 北極振動の原因	33
5.3.1 AOIとAOIの時間微分(AOI方程式の時間変化項)の関係	33
5.3.2 AOI方程式各項と時間変化項との関係	34

5.3.3	外力項の細分化	37
5.3.4	線形項の細分化	39
5.3.5	非線形項の細分化	41
6	まとめと考察	42
6.1	AOIの10年スケールの変動	42
6.2	AOI方程式を用いたクロススペクトル解析	43
7	結論	46
8	謝辞	48
	参考文献	49
	Appendix	52
	EOF解析	52
	EOF解析とは	52
	EOF解析における固有ベクトルの計算方法	54
	ラグランジュの未定乗数法	57
	周期関数と周期関数の微分の関係性	58

AOI方程式を用いた10年スケールの 北極振動の成因解明

木野 公朝

要旨

近年の地球温暖化には人為的な二酸化炭素の増大に伴う部分の他に、北極振動 (Arctic Oscillation : AO) の10年スケールの変動に伴う部分が重なっている。AOは北半球の気候を大きく支配し日本を含む中高緯度の気候に大きな影響を与える。AOの変動は複雑でカオス的に変動することが知られ、特に近年、10年スケールのAOの変動が顕著に表れている。

このような背景に基づき、本研究ではTanaka(2003)で開発された順圧大気大循環モデルを応用して作成された北極振動指数 (Arctic Oscillation : AOI) の変動を力学的に表現したAOI方程式を用いて解析を行う。本研究の目的は、AOI方程式を用いてAOIの変動要因を内部力学の線形項に依存する部分、非定常擾乱との相互作用による部分 (非線形項)、そして外部強制による部分 (外力項) に分離し、10年スケールのAOの変動の原因を解明することである。

本研究の結果、10年スケールのAOIは線形項と共鳴関係にあり、非線形項及び外力項はAOIとは抑制関係にあることが分かった。このことは線形項はAOIに正のフィードバックをもたらしており、非線形項及び外力項はAOIに負のフィードバックをもたらしていることを意味する。また、10年スケールのAOIの変動の大部分は、線形項、非線形項によってもたらされていることが分かった。このことは、北半球の大気の10年スケールの変動が外部強制によるものではなく、地球大気の内部変動によってもたらされていることを意味する。

また、1カ月程度までの短周期の変動においてはAOIの変動の大部分は非線形項によってもたらされていることが明らかになった。20~30年程度の長周期では海洋・海水変動等によりAOIが変動していることが示唆された。

キーワード: 北極振動, 気候変動, 順圧モデル, AOI方程式

The Origin Elucidation of the Arctic Oscillation of the Decadal Variability using the AOI Equation

Masatomo KINO

Abstract

Besides the increase of artificial carbon dioxide, decadal variability of the Arctic Oscillation (AO) is overlapped with recent global warming. The AO is a dominant atmospheric phenomenon in the Northern Hemisphere, so that it influences on climate including Japan. The AO have chaotic property, and a decadal variability of the AO appears notably in recent years.

In this study, we investigated the dynamic origin of the Arctic Oscillation Index (AOI) using the AOI equation to which is applied the Barotropic atmosphere general circulation model developed by Tanaka (2003). The purpose of this study is dividing the change factor of AOI into the portion depending on the linear term of internal dynamics, the portion depending on an interaction with unsteady turbulence (the nonlinear term), and the portion depending on external forcing (the force term) using an AOI equation, and solving the origin elucidation of the AOI of decadal variability.

This study shows that the AOI has a resonance relation as for linear term and a control relation as for a nonlinear term and a force term. This means that the linear term has positive feedback to AOI and the nonlinear term and the force term have negative feedback to AOI. Moreover, it shows that the most of AOI of decadal variability is caused by the linear term and the nonlinear term. This means that the decadal variability of the atmosphere of the Northern Hemisphere is not based on external forcing but is brought about by internal change of the earth atmosphere.

On the other hand, it becomes clear that the great portion of change of AOI is brought about by the nonlinear term in change of the short cycle by about one

month. In the long cycle of about 20–30 years, it is suggested that AOI is changed by the ocean, sea water change.

Key Words: Arctic Oscillation, Climate change, Decadal variability, Barotropic model, AOI Equation

表目次

1	10日移動平均したAOIと各項との相関係数	59
2	5年移動平均したAOIと各項との相関係数	59

目 次

1	北極振動 (プラス) の概念図	60
2	北極振動 (マイナス) の概念図	60
3	AOI のパワースペクトル (北極振動研究ノート, 2004 より引用)	61
4	AOI 方程式に用いる AO の構造ベクトル	62
5	1950 年から 2010 年までの AOI の時系列 (1 年移動平均と 5 年移動平均)	63
6	季節別 AOI 時系列	64
7	1950 年から 2010 年までの AOI に回帰した冬の東西風のアノマリー	65
8	1950 年から 2010 年までの AO に回帰した冬の 500hPa ジオポテンシャル高度のアノマリー	66
9	1950 年から 2010 年までの AOI と AOI 方程式線形項の時系列 (1 年移動平均と 5 年移動平均)	67
10	1950 年から 2010 年までの AOI と AOI 方程式非線形項の時系列 (1 年移動平均と 5 年移動平均)	68
11	1950 年から 2010 年までの AOI と AOI 方程式外力項の時系列 (1 年移動平均と 5 年移動平均)	69
12	AOI と線形項スコアの散布図 (10 日移動平均と 5 年移動平均)	70
13	AOI と非線形項スコアの散布図 (10 日移動平均と 5 年移動平均)	71
14	AOI と外力項スコアの散布図 (10 日移動平均と 5 年移動平均)	72
15	季節別 AOI 方程式各項の時系列	73
16	AOI と AOI 方程式の時間変化項のパワースペクトル	74
17	AOI 方程式の線形項と AOI 方程式の非線形項のパワースペクトル	75
18	AOI 方程式の外力項と粘性項のパワースペクトル	76
19	傾圧不安定と地形海陸分布の熱的効果のパワースペクトル	77
20	エクマン摩擦のパワースペクトル	78
21	1950 年から 2010 年までの AOI が ± 1.5 以上の時の線形項の順圧高度場	79
22	1950 年から 2010 年までの AOI が ± 1.5 以上の時の外力項の順圧高度場	80
23	1950 年から 2010 年までの AOI が ± 1.5 以上の時の非線形項の順圧高度場	81

24	1950年から2010年までのAOI + 1.5 から-1.5 を引いた線形項 と外力項の順圧高度場	82
25	1950年から2010年までのAOI + 1.5 から-1.5 を引いた非線形 項の順圧高度場	83
26	1950年から2010年までの線形項の順圧高度場のホフメラー図 . . .	84
27	1950年から2010年までの非線形項の順圧高度場のホフメラー図 . .	85
28	1950年から2010年までの外力項の順圧高度場のホフメラー図 . . .	86
29	AOIとAOI方程式の時間変化項のコヒーレンスとフェーズ	87
30	AOI方程式の線形項とAOI方程式の時間変化項のコヒーレンスと フェーズ	88
31	AOI方程式の非線形項とAOI方程式の時間変化項のコヒーレンス とフェーズ	89
32	AOI方程式の外力項とAOI方程式の時間変化項のコヒーレンスと フェーズ	90
33	エクマン摩擦とAOI方程式の時間変化項のコヒーレンスとフェーズ	91
34	傾圧不安定とAOI方程式の時間変化項のコヒーレンスとフェーズ .	92
35	地形・海陸分布の熱的效果とAOI方程式の時間変化項のコヒーレン スとフェーズ	93
36	粘性摩擦とAOI方程式の時間変化項のコヒーレンスとフェーズ . .	94
37	中立波 (Transient) とAOI方程式の時間変化項のコヒーレンスとフ ェーズ	95
38	気候値と擾乱との相互作用とAOI方程式の時間変化項のコヒーレ ンスとフェーズ	96
39	$i \sum \sum w'_j w'_k$ とAOI方程式の時間変化項のコヒーレンスとフェーズ .	97

1 はじめに

北極振動 (Arctic Oscillation : AO) とは、Thompson and Wallace (1998) で提唱された冬季北半球で卓越する大気の変動モードのことであり、北緯約 60 度を挟んで北極域と北半球中緯度地域の海面更正気圧が逆相関を持つ現象のことである。AO は冬季 (11 月 ~ 4 月) の北半球 (北緯 20 度以北) の海面更正気圧を経験直交関数 (Empirical Orthogonal Function : EOF) 展開したときの第 1 主成分として定義される (Thompson and Wallace 1998)。また、EOF 解析によって得られた第 1 主成分の気圧偏差の程度を表わす指標を北極振動指数 (Arctic Oscillation Index : AOI) と呼ぶ。北極域の気圧偏差が負で中緯度域の気圧偏差が正の時は AO が正 (プラス) であると定義する (図 1)。また、北極域の気圧偏差が正で中緯度域の気圧偏差が負の時は AO が負 (マイナス) であると定義する (図 2)。Lorenz and Hartmann (2003) では、傾圧不安定波動が AO の構造に影響を与えていると述べており、AO 正時には寒帯前線ジェットが強化され、寒気が中緯度地域に流れ込みにくくなり、例えばヨーロッパでは温和で雨が多くなり、日本でも暖冬傾向となる。逆に AO 負時には亜熱帯ジェットが強化され、寒気が中緯度に流れ込みやすくなり、日本では寒冬傾向となる。

このように AO は北半球の気候に大きな影響を与えることから、AO の成因、AO の変動が地球環境に与える影響等様々な研究が行われてきた。例えば、成層圏循環との関係をした研究 (Baldwin and Dunkerton 2001) では、成層圏極夜西風ジェットの変動が対流圏に伝播して AO が形成されると述べている。太陽活動との関連を指摘した研究 (Kodera and Kuroda 2005) では、太陽活動活発時に東西平均風のダイポール構造が強化され、AO が卓越することを示した。また、長期にわたる極域のアイスコアの酸素同位体を用いてグリーンランドとスバルバルの間に相対する変動が存在することを調べた研究 (藤井 2005) 等も存在する。Ohashi and Tanaka (2010) では IPCC-AR4 のモデル群は 20 世紀の AOI を再現することができないため AO は非線形内部力学によりカオス的に変動する自然変動であると述べている。

力学的な観点からの AO の研究も存在する。Kimoto et al. (2001) では Zonal-eddy coupling を考慮した支配方程式を線形化した時に、最も減衰の少ない第一特異モードとして AO の東西平均風の構造を得ることを示した。この時得られた第一特異モードを中立モードと呼び、AO が特定の外部強制のもとで最も強く励起されるパターンであることを示した。その後、Watanabe and Jin (2004) では 3 次

元に拡張し、計算の都合上 Kimoto et al. (2001) では波-帯状相互作用のみを考慮していたが、波-波相互作用を考慮したモデルを用いて中立モードを求めた。その結果、同様に AO に近いパターンを得ることができた。ところで、Kimoto et al. (2001) では Tilted trough メカニズムにより東西風の南北ダイポールモードが加速されると主張しているが、田中 (2007) では Tilted trough メカニズムに必要な渦の等方性が何によって決まるのか明らかではないとしている。Tanaka (2003) では AO が順圧的な構造であることに着目し、順圧大気大循環モデルを用いた AO のシミュレーションを行ったところ、50 年積分から得られた順圧高度場の EOF1 は観測でみられるような AO の構造を再現した。また、Tanaka and Matsueda (2005) では、同モデルを冬季気候値で線形化した時の固有モードおよび中立モードを求め、固有値が 0 になる特異解が AO であるとした。しかし、現実的な摩擦を導入すると固有値は 0 にならないため、渋谷 (2010) では線形化で無視された非線形の 2 次の項を考慮し解析した。その結果、実数固有値がほぼ 0 となり、レイリー摩擦と非線形項によって AO が力学的に励起されることを定量的に示した。下 (2010) では順圧大気大循環モデルを応用し作成された AOI 方程式を用いて、AO が卓越した年 (1990 年、2010 年等) について、一冬程度の短周期の AO の力学的成因について調査した。その結果、主に非線形項がトリガーとなり線形項により AO が持続することを示した。

統計学的な観点から AOI の時系列データを解析した研究も存在する (Hirata et al. 2011)。この研究では、非線形時系列分析における一種の仮説検定であるサロゲートデータ法を用いて AOI の 1950 年から 2010 年までの 6 時間ごとのデータを解析した。その結果、AOI は決定論的カオスでホワイトノイズでは無く、AOI は初期値鋭敏性のため短期的な予測はできるが長期的な予測はすることができないと述べている。

このような AO の研究が様々行われる一方で、AO は北大西洋振動 (North Atlantic Oscillation : NAO)、太平洋・北米パターン (Pacific - North American Pattern : PNA) 等の変動がもたらす統計的な虚像であり、AO はあったとしてもその貢献がわずかである (Itoh 2002) と主張する研究やアリューシャン低気圧 (Aleutian Low : AL) とアイスランド低気圧 (Icelandic Low : IL) のシーソー関係 (Aleutian - Icelandic Low Seesaw : AIS) に依存している (Honda and Nakamura 2001) と主張している研究も存在し、AO が物理的実体を持つかどうか未だ論争となっていることも忘れてはならない。

また、本研究の研究テーマである 10 年スケールの変動は地球温暖化のような長期

の変動と比較すれば小さいものであるが、20～30年後の予測には無視できるものではないとして、IPCC 第5次報告書 (AR5) では10年スケールの気候変動を考慮した「近未来気候変動」に関する章が新たに設けられるなど近年では重要視されている。10年スケールの北極振動に着目した研究は少ないものの、Overland (2005) では近年 AOI が減少傾向にある一方、夏の氷床、春の気温、雲量、生態系等が線形トレンドにあることのパラドックスに着目し、AO の変動を多角的な側面から検討している。

ところで、AO は順圧的な構造を持ち、AO の本質が順圧成分の力学にあると考えられている。その理由は以下の式から理解される。

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} \simeq - \int_0^{p_s} \nabla \cdot V dp \simeq -p_s \nabla \cdot V_0 \simeq \frac{p_s}{gh_0} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} \quad (1)$$

この式を見ると海面更正気圧と順圧高度場の変動が等しいことが分かる。そのため本研究で用いる順圧高度場で定義した AOI の時系列と Thompson and Wallace (1998) が海面更正気圧が AOI の時系列が一致するのは当然であると考えられている。また、長周期変動を持つ AO 以外の NAO 等のテレコネクションやブロッキングも順圧構造を持つ。本研究でもこの理論に基づき順圧モデルを用いて解析を行う。

以上のように北極振動の成因は徐々に解明されてきているが、まだ統一した見解も存在せず、北極振動の成因の特定には至っていない。

2 目的

本研究の目的は AOI の変動を表現した AOI 方程式 (下 2011) を用いることで、その要因を内部力学の線形項に依存する部分、非線形項 (非定常擾乱との相互作用) による部分、そして外力項に依存する部分に分解し、10 年スケールの AO の変動の原因を解明することである。

3 使用データ

順圧 S モデルにおける解析およびモデルの初期値や外力を求めるために使用するデータは、アメリカ環境予報センター (National Centers for Environmental Prediction; NCEP)/アメリカ大気研究センター (National Center for Atmospheric Research; NCAR) による再解析データである。その詳細は以下のとおりである。

使用期間	1950 年 1 月 – 2000 年 12 月
時間間隔	00, 06, 12, 18Z
気象要素	u (m/s), v (m/s), Z (gpm)
水平グリッド間隔	$2.5^\circ \times 2.5^\circ$
鉛直グリッド間隔	1000, 925, 850, 700, 600, 500, 400, 300, 200, 150, 100, 70, 50, 30, 20, 10 hPa の 17 層
解析範囲	北半球

再解析データとは、同一の数値予報モデルとデータ同化手法を用いて過去数十年間にわたりデータ同化を行い、長期間にわたって出来る限り均質になるように作成したデータセットのことである。このような均質な大気解析データセットは、きわめて信頼度の高い基礎資料になりうる。特に気候変動の解明、大気大循環の解析と全球のエネルギー循環の研究の際には有用である。

NCEP/NCAR では 1949 年 1 月から 50 年以上という長期にわたって同一のデータ同化手法により再解析が行われており、このデータは解析に用いることが出来る。ただし、1979 年に初めて人工衛星 TIROS が打ち上げられ、客観解析に初めて衛星データが導入されたことにより、1979 年を境にデータの不連続的な変動が残っていることに留意しなくてはならない。モデルや解析スキーム等による見かけの気候変動は取り除かれているが、入力データの質の不連続は明瞭に残っている。また、 $2.5^\circ \times 2.5^\circ$ の等圧面データには、すべての変数に対して T30 の波数切断で平滑化施されているため、高緯度地方では波動状の誤差が顕著に現れる。しかし長周期の変動の研究では、長期間にわたる均質なデータである再解析データは貴重である。

NCEP/NCAR 再解析データに用いられている予報モデルの水平分解能は T62、鉛直分解能は 30 層、データ同化手法は 3 次元変分法で、その解析レベルはモデル面である。ただし、先に述べたように等圧面データには平滑化のために T30 の波数切断が行われている。

4 解析手法

4.1 順圧大気大循環モデル

本研究では Tanaka (2003) で開発された順圧大気大循環モデル (順圧 S-モデル) を用いた。

このモデルの基礎方程式系は, 球面座標系 (緯度 θ , 経度 λ , 気圧 p) で表された水平方向の運動方程式, 熱力学第一法則の式, 質量保存則, 状態方程式, 静力学平衡の式から成り立つ (小倉 1978).

- 水平方向の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv + F_u \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv + F_v \quad (3)$$

- 熱力学第一法則の式

$$\frac{\partial c_p T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla c_p T + \omega \frac{\partial c_p T}{\partial p} = \omega \alpha + Q \quad (4)$$

- 質量保存則

$$\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (5)$$

- 状態方程式

$$p\alpha = RT \quad (6)$$

- 静力学平衡の式

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha \quad (7)$$

これらの方程式で用いられている記号は次の通りである.

θ : 緯度	α : 比容
λ : 経度	ω : 鉛直 p 速度
u : 東西方向の風速	F_u : 東西方向の摩擦
v : 南北方向の風速	F_v : 南北方向の摩擦
V : 水平方向の風速	Q : 非断熱加熱率
ϕ : ジオポテンシャル	Ω : 地球の自転角速度 ($7.29 \times 10^{-5} rad/s$)
p : 気圧	a : 地球の半径 ($6.371 \times 10^6 m$)
t : 時間	c_p : 定圧比熱 ($1004 JK^{-1} kg^{-1}$)
T : 気温	R : 乾燥気体の気体定数 ($287.04 JK^{-1} kg^{-1}$)

そして上記の方程式の中で熱力学第一法則の式に質量保存則, 状態方程式, 静力学平衡の式を代入することによって, これらの基礎方程式系を3つの従属変数 (u, v, ϕ) のそれぞれの予報方程式で表すことができる (Tanaka 1991).

まず始めに気温 T と比容 α , ジオポテンシャル ϕ について以下のような摂動を与える.

$$T = T_0 + T' \quad (8)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha' \quad (9)$$

$$\phi = \phi_0 + \phi' \quad (10)$$

ここで T_0, α_0, ϕ_0 はそれぞれ全球平均量であり, T', α', ϕ' は全球平均量からの偏差である. (7) から (9) 式を状態方程式と静力学平衡の式に適用すると,

$$p\alpha_0 = RT_0 \quad (11)$$

$$p\alpha' = RT' \quad (12)$$

$$\frac{d\phi_0}{dp} = -\alpha_0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial p} = -\alpha' \quad (14)$$

これら (7) ~ (13) 式を用いて熱力学第一法則の式を変形すると,

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T' + \omega \left(\frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{RT'}{pc_p} \right) + \omega \left(\frac{dT_0}{dp} - \frac{RT_0}{pc_p} \right) = \frac{Q}{c_p} \quad (15)$$

となる. ここで $T_0 \gg T'$ が成り立つので, (14) 式の左辺の第3項において, 気温の摂動の断熱変化項は無視することができる. つまり,

$$\omega \frac{RT_0}{pc_p} \gg \omega \frac{RT'}{pc_p} \quad (16)$$

である。また左辺の第4項において、全球平均気温 T_0 を用いることで、以下のような大気の静的安定度パラメータ γ を導入することができる (Tanaka 1985)。

$$\gamma = \frac{RT_0}{c_p} - p \frac{dT_0}{dp} \quad (17)$$

よってこの関係式を用いて (14) 式を変形すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{p^2}{\gamma R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} - \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \omega = \frac{Qp}{c_p \gamma} \quad (18)$$

さらに (17) 式の両辺を p で微分し、質量保存則を適用すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\gamma R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} \\ & = \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{\gamma R} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{Qp}{c_p \gamma} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

となる。以上より熱力学第一法則の式 (3) から気温 T と比容 α を消去し、摂動ジオポテンシャル ϕ' の予報方程式を導くことができた。これによって3つの従属変数 (u, v, ϕ') に対して、3つの予報方程式 (1), (2), (19) が存在するので解を一意的に求めることができる。

これらの3つに式をまとめて行列表示すると次式のようなになる (Tanaka 1991)。

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{N} + \mathbf{F} \quad (20)$$

τ は無次元化された時間であり、 $\tau = 2\Omega t$ である。式 (20) の各記号は以下の通りである。

\mathbf{U} : 従属変数ベクトル

$$\mathbf{U} = (u, v, \phi')^T \quad (21)$$

\mathbf{M}, \mathbf{L} : 線形演算子

$$\mathbf{M} = 2\Omega \text{diag} \left(1, 1, -\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \right) \quad (22)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \sin \theta & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ 2\Omega \sin \theta & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial(\cdot) \cos \theta}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

N : 非線形項ベクトル

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv \\ -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + \omega p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (24)$$

F : 外部強制項からなるベクトル

$$\mathbf{F} = \left(F_u, F_v, \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{pQ}{c_p \gamma} \right) \right)^T \quad (25)$$

ただし,

$diag()$: 対角行列

$()^T$: 転置行列

とする.

式 (20) の基礎方程式系の基本状態として, 断熱かつ摩擦なし, つまり ($F = 0$) の静止大気 ($\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi}$) = 0 を考え, そこに微小擾乱 (u', v', ϕ') を与える. このとき式 (20) の非線形演算子 N は,

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u' - \omega' \frac{\partial}{\partial p} u' + \frac{\tan \theta}{a} u' v' \\ -\left(\frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) v' - \omega' \frac{\partial}{\partial p} v' - \frac{\tan \theta}{a} u' u' \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{R\gamma} \left(\frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \omega' p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] \end{pmatrix}$$

2 次以上の摂動項を無視すると, 結局 $\mathbf{N} = 0$ となり, 式 (20) を線形化した基本状態は以下のように表せる.

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial \tau} + \mathbf{L} \mathbf{U}' = 0 \quad (26)$$

$$\mathbf{U}' = (u', v', \phi')^T$$

これ以降は簡単のため, $\mathbf{U}' = (u', v', \phi')^T$ を $\mathbf{U} = (u, v, \phi)^T$ と略記する.

4.2 スペクトル表記プリミティブ方程式の導出

4.2.1 鉛直構造関数

このベクトル方程式 (26) において, 鉛直構造関数 $G_m(p)$ を導入して, 鉛直方向と水平方向に変数分離を行う.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\lambda, \theta, p, \tau) &= (u, v, \phi)^T \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (u_m, v_m, \phi_m)^T G_m(p) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} U_m(\lambda, \theta, \tau) G_m(p) \end{aligned} \quad (27)$$

ここで添字の m は鉛直モード番号 (vertical mode number) を意味する. これを式 (27) に代入し, 分離された各変数に関する方程式を導く.

$$\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m}{dp} + \frac{1}{gh_m} G_m = 0 \quad (28)$$

$$\frac{1}{gh_m} \frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (29)$$

常微分方程式 (28) を鉛直構造方程式 (vertical structure equation) と呼ぶ. また水平風成分についても同様に鉛直構造関数を導入して,

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v_m + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi_m}{\partial \lambda} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u_m + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi_m}{\partial \theta} = 0 \quad (31)$$

と導ける. 式 (29), (30), (31) をまとめて水平構造方程式 (horizontal structure equation) と呼ぶ. ここで分離定数中の h_m は長さの次元 (L) をもち, 鉛直構造方程式 (28) の固有関数である鉛直構造関数 $G_m(p)$ に対する固有値として求まる. また, 水平構造方程式 (29) は流体層の厚さ h_m の線形浅水方程式系と同じ形であることから, h_m は等価深度 (equivalent height) の意味を持つ.

鉛直構造関数 $G_m(p)$ の正規直交性により, 気圧 p の任意の関数 $f(p)$ について, 次の鉛直変換を導くことができる.

$$f(p) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m G_m(p) \quad (32)$$

$$f_m = \frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} f(p) G_m(p) dp \quad (33)$$

ここで f_m は第 m 鉛直モードの鉛直変換係数である.

鉛直モード $m = 0$ は順圧 (barotropic) モード, または外部 (external) モードといい, 鉛直方向に節を持たず, ほとんど全層で一定のまま変化しないモードである. これに対して鉛直モード $m \geq 1$ は傾圧 (baroclinic) モード, または内部 (internal) モードといい, m 番目のモードに関しては鉛直方向に m 個の節を持つ. 本研究で用いた順圧スペクトルモデルは, 鉛直モード $m = 0$ の順圧モードだけを考慮したモデルであり, 鉛直方向に平均した大気の特性を考慮するのに適したモデルであるといえる. 順圧モード $m = 0$ における等価深度 h_0 は 9728.4m である.

4.2.2 水平構造関数

前節で, 第 m 鉛直モードの鉛直構造関数の固有値として得た等価深度を用いて, 水平構造方程式 (29), (30), (31) を解く. ここで式 (29), (30), (31) を

$$\mathbf{M}_m \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U}_m + \mathbf{L} \mathbf{U}_m = 0 \quad (34)$$

と行列表記する. 添字の m は第 m 鉛直モードを意味する. ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m &= 2\Omega \text{diag} \left(1, 1, \frac{1}{gh_m} \right) \\ \mathbf{U}_m &= (u_m, v_m, \phi_m)^T \end{aligned}$$

である. ここで次のスケール行列 $\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m$ を導入する.

$$\mathbf{X}_m = \text{diag} \left(\sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, gh_m \right) \quad (35)$$

$$\mathbf{Y}_m = 2\Omega \text{diag} \left(\sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, 1 \right) \quad (36)$$

これらを式 (34) に以下のように作用させる.

$$(\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m) \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) = 0 \quad (37)$$

ここで

$$\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m = \text{diag} (1, 1, 1) \quad (38)$$

だから式 (37) は

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) = 0 \quad (39)$$

と書ける。尚,

$$\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{LX} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta & \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ \sin \theta & 0 & \alpha_m \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial(\cdot) \cos \theta}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

である。式 (40) 中の α_m は次のように定義した笠原パラメータと呼ばれるものである。

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{gh_m}}{2\Omega a} \quad (41)$$

このことは、浅水方程式中の 4 つの惑星パラメータ (g : 重力, h_m : 等価深度, Ω : 地球の自転速度, a : 惑星半径) が唯一の惑星固有パラメータ α_m だけであらわせることを示している (Tanaka 1985)。

式 (39) は時間 τ の線形システムであるから次のように解を仮定して、水平方向成分と時間成分とに変数分離することができる。

$$\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m(\lambda, \theta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} w_{nlm} \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) e^{-i\sigma_{nlm}\tau} \quad (42)$$

$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ は水平構造関数 (horizontal structure function), または Hough 関数と呼ばれる。Hough 関数は第 m 鉛直モードに相当する水平ノーマルモード, すなわち水平自由振動を意味し, 経度 λ と緯度 θ の関数である。添字の n は東西波数, l は南北モード番号を示している。

式 (42) を水平構造方程式 (39) に代入して,

$$-i\sigma_{nlm} \mathbf{H}_{nlm} + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{LX}_m) \mathbf{H}_{nlm} = 0 \quad (43)$$

この固有値問題を解くことで固有関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ と対応する固有値 σ_{nlm} を求めることが出来る。式 (40) は経度方向にパラメータが一定だから, Hough ベクトル関数 $\Theta_{nlm}(\theta)$ を用いて $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ を次のように経度依存と緯度依存とに変数分離できる。

$$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) = \Theta_{nlm}(\theta) e^{in\lambda} \quad (44)$$

ただし,

$$\Theta_{nlm}(\theta) = \begin{pmatrix} U_{nlm}(\theta) \\ -iV_{nlm}(\theta) \\ Z_{nlm}(\theta) \end{pmatrix} \quad (45)$$

とする. 南北風成分に関しては位相を $\pi/2$ だけずらすために $i = \sqrt{-1}$ がかけられている. 南北モードは3種類の異なるモードから構成される. 一つは低周波の西進するロスビーモード (Rossby mode) l_r で, 残りの二つは高周波の西進, および東進する重力波モード (gravity mode) l_{wg}, l_{eg} である.

Swartrauber and Kasahara (1985) によると, 水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ は球面調和関数展開の和として得られる. この方法で求められる水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ が正規直交性をもつならば, これを基底にして波数展開することが出来る. 水平構造関数が直交関数であることは以下のように示される.

緯度と経度に関する内積は以下のように表される.

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (U_{nlm} U_{n'l'm}^* + V_{nlm} V_{n'l'm}^* + Z_{nlm} Z_{n'l'm}^*) e^{-i(n-n')\lambda} \cos \theta d\lambda d\theta \quad (46)$$

アスタリスクは複素共役を意味し, nlm と $n'l'm$ は東西波数と南北モード番号の異なるモードを示している. 式 (40) の線形演算子 $\mathbf{L}_m = \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m$ は非対称のエルミート行列であるため, 次の関係 (skew-self adjoint) が成立する.

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{L}_m \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle + \langle \mathbf{L}_m \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0 \quad (47)$$

式 (47) に式 (43) を代入して,

$$(\sigma_{nlm} - \sigma_{n'l'm}^*) \langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0 \quad (48)$$

を得る. 式 (48) から以下の二つの条件が課せられる.

- $n = n'$ かつ $l = l'$ のとき

$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle$ は線形浅水方程式系の全エネルギー量に比例する量であり, 決して0にはならない. よって式 (48) を満たすためには $\sigma_{nlm} = \sigma_{nlm}^*$ である必要があり, 従って σ_{nlm} は実数でなくてはならない.

- それ以外のとき

$\sigma_{nlm} \neq \sigma_{nlm}^*$ であれば式 (48) を満たすためには $\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0$ が成り立つ必要がある. すなわち固有振動数 σ_{nlm} に相当する固有関数 \mathbf{H}_{nlm} が, 固有振動数 $\sigma_{n'l'm}$ に相当する固有関数 $\mathbf{H}_{n'l'm}$ と直交関係にあることを示している.

以上の二つの条件から, 任意のモード nlm について, 以下の正規直交関係が成立する.

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_{nlm} \cdot \mathbf{H}_{n'l'm}^* \cos \theta d\lambda d\theta = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \quad (49)$$

以上の水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ の直交性から、次のフーリエ - ハフ変換が導かれる。

第 m 鉛直モードに相当する物理空間において、 λ, θ, τ を変数とする任意のベクトル関数を $\mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau)$ とすると、

$$\mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{nlm}(\tau) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \quad (50)$$

$$a_{nlm}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau) \cdot \mathbf{H}_{nlm}^* \cos \theta d\lambda d\theta \quad (51)$$

となる。

4.2.3 3次元ノーマルモード関数展開

鉛直構造関数と水平構造関数を結合させ、3次元ノーマルモード関数 $\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p)$ を構成し、式(20)を展開する。3次元ノーマルモード関数 $\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p)$ は鉛直構造関数 $G_m(p)$ と水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ とのテンソル積であり、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) &= G_m(p) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \\ &= G_m(p) \mathbf{\Theta}_{nlm}(\theta) e^{in\lambda} \end{aligned} \quad (52)$$

この3次元ノーマルモード関数も以下に示す内積の下で、直交関係を満たす。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{\Pi}_{nlm}, \mathbf{\Pi}_{n'l'm'} \rangle &= \frac{1}{4\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{\Pi}_{nlm} \cdot \mathbf{\Pi}_{n'l'm'}^* \cos \theta d\lambda d\theta dp \\ &= \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (53)$$

この関係により、3次元ノーマルモード関数展開が導かれる。式(20)中の \mathbf{U} と \mathbf{N} と \mathbf{F} は3次元ノーマルモード関数によって次のように展開される。

$$\mathbf{U}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M w_{nlm}(\tau) \mathbf{X}_m \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (54)$$

$$\mathbf{N}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M n_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (55)$$

$$\mathbf{F}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M f_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (56)$$

ここで $w_{nlm}(\tau)$, $n_{nlm}(\tau)$, $f_{nlm}(\tau)$ はそれぞれ、従属変数ベクトル \mathbf{U} 、非線形項ベクトル \mathbf{N} 、外部強制ベクトル \mathbf{F} についての展開係数である。 $w_{nlm}(\tau)$, $n_{nlm}(\tau)$, $f_{nlm}(\tau)$ は展開基底の正規直交性式 (53) より、以下のフーリエ変換で求められる。

$$w_{nlm}(\tau) = \langle U(\lambda, \theta, p, t), \mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \rangle \quad (57)$$

$$n_{nlm}(\tau) = \langle N(\lambda, \theta, p, t), \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \rangle \quad (58)$$

$$f_{nlm}(\tau) = \langle F(\lambda, \theta, p, t), \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \rangle \quad (59)$$

同様の内積を式 (20) 全体に施すことによって、プリミティブ方程式系の 3 次元スペクトルモデルが導かれる。

$$\left\langle \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} + \mathbf{L} \mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F}, \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm} \right\rangle = 0 \quad (60)$$

この式を、次のように線形項、非線形項、外力項に分ける。

$$\left\langle \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} + \mathbf{L} \mathbf{U} \right\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm} \rangle + \langle \mathbf{F}, \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm} \rangle \quad (61)$$

まず、線形項を 3 次元スペクトルモデルに書き換える。鉛直微分オペレータである線形演算子 \mathbf{M} は、鉛直構造方程式 (28) により固有値に置き換えることができる。添字の i, j は東西、南北、鉛直波数の添字 nlm を簡略化したものである。

$$\mathbf{M} \mathbf{\Pi}_i = \text{diag} \left(1, 1, \frac{1}{gh_m i} \right) \mathbf{\Pi}_i \quad (62)$$

無次元化した水平微分行列 \mathbf{L}_m の固有値が i となる (43) より、以下の関係を満たす。

$$(\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_i) \mathbf{\Pi}_i = i \mathbf{\Pi}_i \quad (63)$$

この式と \mathbf{U} をノーマルモードで展開する (59) を (60) に代入し無次元化し、 \mathbf{L}_m の直行性を用い、(62) を用いれば

$$\sum_j \langle 2\Omega \mathbf{Y}_i^{-1} \mathbf{M} \mathbf{X}_j \mathbf{\Pi}_j, \mathbf{\Pi}_i \rangle \frac{dw_j}{d\tau} + \langle \mathbf{Y}_i^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_j \mathbf{\Pi}_j, \mathbf{\Pi}_i \rangle w_j = \frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i \quad (64)$$

となり線形項が導かれる。

次に非線形項を 3 次元スペクトルモデルに書き換える。ここからは 3 重の添字 $nlm, n'l'm', n''l''m''$ をそれぞれ i, j, k と表し、 i で示される波数はそれぞれ n_i, k_i, m_i のように示して区別する。 j, k についても同様である。

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{N}, \mathbf{Y}_{m_i}^{-1} \mathbf{\Pi}_i \rangle &= \frac{1}{2\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} G_{m_i} e^{in\lambda} \\
&\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2\Omega\sqrt{gh_m}} U_i \\ \frac{1}{2\Omega\sqrt{gh_m}} (iV_i) \\ \frac{1}{2\Omega} Z_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan\theta}{a} uv \\ -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan\theta}{a} uv \\ \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right) \end{pmatrix} \cos\theta d\lambda d\theta dp
\end{aligned} \tag{65}$$

(59) を成分で書くと以下のようになる .

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=0}^K w_i \sqrt{gh_{m_i}} U_i G_{m_i} e^{in_i\lambda} \\
v &= \sum_{i=0}^K w_i \sqrt{gh_{m_i}} (-iV_i) G_{m_i} e^{in_i\lambda} \\
\phi &= \sum_{i=0}^K w_i gh_{m_i} Z_i G_{m_i} e^{in_i\lambda}
\end{aligned} \tag{66}$$

この級数展開の式 (59) を式 (65) の各変数に代入する .

また , 鉛直 p 速度 ω は発散と関係することから , 以下のように $\sigma_i Z_i$ を用いた級数展開を導くことが出来る (田中 他, 1997) . まず質量保存則 (5) を鉛直積分して式 (59) を代入する .

$$\begin{aligned}
\omega &= - \int_0^p \nabla \cdot \mathbf{V} dp \\
&= - \int_0^p \left(\frac{1}{a \cos\theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos\theta} \frac{\partial v \cos\theta}{\partial \theta} \right) dp \\
&= - \sum_{i=0}^K w_i \int_0^p G_{m_i} dp \frac{\sqrt{gh_{m_i}}}{a \cos\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} U_i e^{in_i\lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (-iV_i \cos\theta) e^{in_i\lambda} \right]
\end{aligned} \tag{67}$$

ここで , 水平構造方程式より ,

$$i\sigma_i \frac{2\Omega}{\sqrt{gh_m}} Z_i e^{in_i\lambda} = \frac{1}{a \cos\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} U_i e^{in_i\lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (-iV_i \cos\theta) e^{in_i\lambda} \right] \tag{68}$$

なので , これを式 (67) 代入して ,

$$\omega = \sum_{i=0}^K w_i 2\Omega \int_0^p G_{m_i} dp (-i\sigma_i Z_i) e^{in_i\lambda} \tag{69}$$

を得る。式 (69) 中の G_{m_i} の不定積分は鉛直構造方程式を積分することによって G_{m_i} の 1 階微分で表すことができる。

$$\int_0^p G_{m_i} dp = -\frac{gh_{m_i}}{R\gamma} p^2 \frac{dG_{m_i}}{dp} \quad (70)$$

以上の式 (66) と式 (67) を式 (65) に代入することで次式のような式に変形することができる。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}, \mathbf{Y}_{m_i}^{-1} \mathbf{\Pi}_i \rangle = & -i \sum_{j=1} \sum_{k=1} w_j w_k \frac{1}{2\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \\ & \begin{pmatrix} U_i \\ V_i \\ Z_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_1 \left(\frac{n_k U_k}{\cos \theta} + \tan \theta V_k \right) & -P_1 \frac{dU_k}{d\theta} & P_2 U_k \\ P_1 \left(\frac{n_k V_k}{\cos \theta} + \tan \theta U_k \right) & -P_1 \frac{dV_k}{d\theta} & P_2 V_k \\ P_3 \frac{n_k Z_k}{\cos \theta} & -P_3 \frac{dZ_k}{d\theta} & -P_4 Z_k \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} U_j \\ V_j \\ \sigma_j Z_j \end{pmatrix} e^{i(-n_i + n_j + n_k)\lambda} \cos \theta d\lambda d\theta dp \end{aligned} \quad (71)$$

ただし、

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\sqrt{gh_{m_j}} \sqrt{gh_{m_k}}}{2\Omega a \sqrt{gh_{m_i}}} G_{m_i} G_{m_j} G_{m_k} \\ P_2 &= \frac{\sqrt{gh_{m_k}} gh_{m_j}}{\sqrt{gh_{m_i}} R\gamma} p^2 G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} \frac{dG_{m_k}}{dp} \\ P_3 &= \frac{\sqrt{gh_{m_j}}}{2\Omega} G_{m_i} G_{m_j} G_{m_k} - \frac{\sqrt{gh_{m_k}} gh_{m_j}}{2\Omega a R\gamma} p^2 G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} \frac{dG_{m_k}}{dp} \\ P_4 &= G_{m_i} G_{m_j} G_{m_k} + \frac{gh_{m_k}}{R\gamma} p G_{m_i} G_{m_j} \frac{dG_{m_k}}{dp} + \frac{gh_{m_j}}{R\gamma} p G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} G_{m_k} \\ &+ \left(\frac{gh_{m_k}}{R\gamma} - 1 \right) \frac{gh_{m_j}}{R\gamma} p^2 G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} \frac{dG_{m_k}}{dp} \end{aligned} \quad (72)$$

とする。

式 (54), (55), (56) で展開した大気変数を式 (59) の各項に代入し、内積の積分計算を実行すると、空間依存は消えて時間のみ関数となり、最終的に行列表記のプリミティブ方程式は以下のようなスペクトル表記のプリミティブ方程式系に書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i = & -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w_j w_k + f_i \\ & i = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (73)$$

ここで, τ は無次元時間, σ_i はラプラス潮汐方程式の固有振動数, r_{ijk} は非線形相互作用係数で実数となる. 非線形項中の r_{ijk} は非線形の波-波相互作用 (wave-wave interaction) および帯状-波相互作用 (zonal-wave interaction) に関する相互作用係数 (interaction coefficients) で実数である. K は全波数で, $K = (2N + 1)(L + 1)(M + 1)$ である. N は東西全波数, L は南北全波数, M は鉛直全波数を示す. 厳密には $K \rightarrow \infty$ としなくてはならないが, 通常はある波数で切断して方程式系を構成する.

以上より, 順圧成分と傾圧成分からなる鉛直構造関数, ロスビーモードと重力波モードからなる水平構造関数の両方を用いることで, プリミティブ方程式系をスペクトル表示で表すことができた.

鉛直モード $m = 0$ だけで方程式系 (60) を閉じると

$$\left\langle \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} + \mathbf{L}\mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F}, \mathbf{Y}_0^{-1} \mathbf{\Pi}_{nl0} \right\rangle = 0 \quad (74)$$

これをスペクトル表記すると,

$$\frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i = -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w_j w_k + s_i \quad (75)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, K$$

ここで, K は式 (73) の K とは異なり, 順圧スペクトルモデルにおける全波数を意味し, $K = (2N + 1)(L + 1)$ である. 最後に, 順圧成分のプリミティブ方程式 (74) を成分表記すると,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = -\mathbf{V} \cdot \nabla u + \frac{\tan \theta}{a} uv + F_x \quad (76)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \frac{\tan \theta}{a} uv + F_y \quad (77)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gh_0 \nabla \cdot \mathbf{V} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \phi + F_z \quad (78)$$

と表わされる。

4.3 順圧S-モデル

4.3.1 外力の推定

本研究では東西波数は $n = 0, 1, \dots, 20$ で、南北モードはロスビーモード $l_r = 0, 1, \dots, 20$ の赤道対称モード (奇数モード) で波数切断している. 鉛直波数 $m = 0$ のみで方程式系を閉じたこのモデルは、式 (75) における外力の順圧成分 s_i の他に順圧-傾圧相互作用の項 g_i が新たに加わってくる. ここでは $s_i = f_i + g_i$ を順圧成分の外力と呼ぶことにし、これを $s_i = s_i(w_i, \tau)$ のように従属変数 w_i と時間の関数としてパラメタライズした.

今回使用するモデルは、外力項 s_i を従属変数 w_i から、長期間の観測データより以下の重回帰によって統計的に求めたモデルである. 外力の式から気候値を除いた式は

$$s' = \mathbf{A}_{ij}w_j + \mathbf{B}_{ij}w_j^* + \epsilon_i \quad (79)$$

ここで、 s'_i は s_i のアノマリ、アスタリスクは複素共役であり、残差 ϵ_i のノルムを最小化するように与えられる.

まず $\mathbf{A} = \mathbf{A}_R + i\mathbf{A}_I, \mathbf{B} = \mathbf{B}_R + i\mathbf{B}_I, w = w_R + iw_I, w^* = w_R - iw_I$ とすると

$$\begin{aligned} s' &= \mathbf{A}w + \mathbf{B}w^* + \epsilon \\ &= (\mathbf{A}_R + i\mathbf{A}_I)(w_R + iw_I) + (\mathbf{B}_R + i\mathbf{B}_I)(w_R - iw_I) + \epsilon_R + \epsilon_I \\ &= \mathbf{A}_Rw_R - \mathbf{A}_Iw_I + \mathbf{B}w_R + \mathbf{B}_Iw_I \\ &\quad + i\mathbf{A}_R + i\mathbf{A}_R + i\mathbf{B}_Iw_R - i\mathbf{B}_Rw_I + \epsilon_R + \epsilon_I \end{aligned} \quad (80)$$

上記を行列表記すると、

$$\begin{pmatrix} s_R \\ s_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_R + \mathbf{B}_R & -\mathbf{A}_I + \mathbf{B}_I \\ \mathbf{A}_I + \mathbf{B}_I & \mathbf{A}_R - \mathbf{B}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_I \end{pmatrix} \quad (81)$$

となる. ここで、東西波数 0 はすべて実数のため、東西波数 0 の虚部は存在しないことに注意が必要である. さらに、 $\mathbf{A}_R + \mathbf{B}_R = a$, $-\mathbf{A}_I + \mathbf{B}_I = b$, $\mathbf{A}_I + \mathbf{B}_I = c$, $\mathbf{A}_R - \mathbf{B}_R = d$ とおくと

$$\begin{pmatrix} s_R \\ s_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_I \end{pmatrix} \quad (82)$$

両辺に右から (w_R, w_I) をかける.

$$\begin{pmatrix} s_R \\ s_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^\top + \begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^\top \quad (83)$$

ここで時間平均をとり, 右辺第二項を省略すると以下のような式で書き表わすことができる.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} s_R \\ s_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^\top} \left[\overline{\begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^\top} \right]^{-1} \quad (84)$$

(83) 式の右辺第 2 項が 0 となる (残差 $(\epsilon_R, \epsilon_I)^\top$ のノルムが最小となる) ように (84) 式の右辺を計算することで a, b, c, d が求められ, これらから A_R, A_I, B_R, B_I を同時に求めることができる. 以上より, システム行列 A, B を求めることができる. 観測データとして, 本研究では 1950 年 ~ 1999 年の 50 年間の冬季の NCEP/NCAR 再解析データを用いた. 1 日 4 回の観測データから状態変数 w_i を求め, 日変化を除去してからモデルのタイムステップに時間内挿し, 式 (73) から順圧大気の外力 s_i を診断的に算出する. 力学過程の計算精度は 1 % 以下の誤差の範囲で表現されていることから, 残差として得られた外力 s_i の値は十分に意味のある値と考えられる. こうして得られた 50 年分の外力 s_i のデータから, 気候値 \tilde{s}_i とアノマリ s'_i を計算する. このアノマリ s'_i を状態変数 w_i で回帰することで, 式 (79) のようにシステム行列 A_{ij}, B_{ij} を順次決定することができる. このように, 観測データからモデルの最適外力を統計的 (Statistical) に求めていることから, 式 (79) で表される外力 s_i を用いるモデルを順圧 S モデルと呼ぶ.

順圧 S モデルの詳細については Tanaka and Nohara (2001) に書かれているが, 現実大気 of 順圧成分の予報を行った結果, このモデルは月平均で約 8 日の予報能力を持つことが示され, 長周期変動の力学的解明に十分使える順圧大気大循環モデルであるということが言えた.

ところがこのモデルでは, 統計的処理のためか, 予報誤差の最大要因となる傾圧不安定波の増幅が弱いという特徴があり, このままの順圧 S モデルでは AO の再現はできなかった (岡田, 2003). そこで本研究では, 順圧 B モデル (順圧大気の外力として, 個々の物理過程をパラメタライズしたモデル) のように, 傾圧不安定などの物理過程を再導入し, 以下のように外力 s_i をパラメタライズした.

$$s_i = \tilde{s}_i + \mathbf{A}_{ij}w_j + \mathbf{B}_{ij}w_j^* + (\mathbf{BC})_{ij}w_j + (\mathbf{DF})_{ij}w_j + (\mathbf{DZ})_{ij}w_j + (\mathbf{DE})_{ij}w_j \quad (85)$$

上記の物理過程は次のとおりである.

$$\left\{ \begin{array}{l} (BC)_{ij}w_j : \text{傾圧不安定} \\ (DF)_{ij}w_j : \text{粘性摩擦} \\ (DZ)_{ij}w_j : \text{帯状地表摩擦} \\ (DE)_{ij}w_j : \text{エクマン摩擦} \end{array} \right.$$

以上のように, 外力 s_i を状態変数 w_i の関数として表現することができた. 予報の各ステップにおいて, w_i に応じて s_i が決定し, 次のステップの w_i を求めることができる. これを繰り返すことで, 初期時刻からある時間後の w_i を求めることができる.

4.3.2 物理過程

ここでは全項で紹介した物理過程について詳しく説明する.

傾圧不安定

傾圧不安定は, 先に述べた基本場が東西一様の場合の固有モード理論に即してパラメタライズを行う. 基本場が静止大気の際には $\overline{w_k}$ が 0 となり, 解はノーマルモードとなる. この時, 基本場にエネルギー源がないため, 解はすべて中立波となって不安定は起こらない. 基本場 $\overline{w_k}$ が 0 でない時には, 平均流と波との相互作用により, その基本場のエネルギーを引き寄せる構造を持つ波が不安定波として出現する. その解を固有値問題に帰着させる. こうして, 各東西波数の最大成長モードを計算し, その構造に傾圧大気場を射影する. そして得られた射影成分に対して, 固有値で示された増幅率分だけ成長させるパラメタリゼーションである.

東西波数 n の任意の状態変数 w_i を不安定波の成分 ξ_i に射影し, それに直交する残差成分を ϵ_i とする.

$$w_i(\tau) = a(\tau)\xi_i + \epsilon_i(\tau) \quad (86)$$

ここで ξ_i のノルムは 1 にしておく. ξ_i と ϵ_i が直交するという条件から

$$a(\tau) = \sum_i \xi_i^* w_i \quad (87)$$

のように簡単に振幅 $a(\tau)$ が求められるので, 射影された成分 $a(\tau)\xi_i$ が増幅率分だけ成長するということから, 傾圧不安定のパラメタリゼーション BC_i は, 各東西波数について以下となる.

$$(BC)_i = -iva(\tau)\xi_i \quad (88)$$

ただし平均流による移流の効果は力学項で表現されているので, このパラメタリゼーションは振幅を増大させるだけで振動数成分は 0 としている.

粘性摩擦

粘性摩擦としては変数のラプラシアン Δ に渦粘性係数を掛けたものが一般的である. 本研究では, よりスケール依存性を持たせるために超粘性オペレータ Δ^4 による粘性摩擦を, 球面ロスビー波のスケールパラメータ $c_i = \sigma_i/n$ との組み合わせで導入した. 回転球面上の渦度方程式を解いて得られる Haurwitz 波の位相速度は

球面調和関数に対応する固有値で表されるが、ここではこの関係式を回転球面上の浅水方程式を解いて得られる Hough 関数に拡張した。等価深度が無限となる極限では Hough 関数の球面ロスビー波は Haurwitz 波に収束することが知られている。ラプラシアンは波数空間では全波数 \hat{l} で表現されるので、球面ロスビー波の位相速度との間に以下の近似が成立する。

$$-c_i = \frac{-1}{\hat{l}(\hat{l}+1)} \simeq \frac{\sigma_i}{n}$$

この関係式より、ラプラシアンの固有値をハフ関数の位相速度に置き換えると、粘性摩擦 $(DF)_i$ は最終的に以下の形となる。

$$(DF)_i = -k_D \left(\frac{n}{\sigma_i}\right)^2 w_i \quad (89)$$

となる。ここで k_D は無次元化した渦粘性係数である。

なお、本研究では順圧 S-モデルを用いた数値実験では倍調和摩擦、固有モード解析では倍調和摩擦をさらに 2 乗した超粘性摩擦を用いた。粘性、倍調和、超粘性の順に小スケールの変動を消散す速さが速くなる。

帯状地表摩擦

総観規模擾乱による北向き渦運動量輸送に対抗してジェット気流の北へのシフトを抑制している摩擦が帯状地表摩擦である。低緯度の偏東風領域では偏東風を、中高緯度の偏西風領域では偏西風を減速し、この効果が北向き渦運動量輸送の収束とバランスすることで大気の角運動量収支が成り立っている。帯状流に簡単なレイリー摩擦を導入して帯状流摩擦のパラメタリゼーションを行うと

$$(DF)_i = -K_Z(w_i - \tilde{w}_i), \quad \text{for } n = 0 \quad (90)$$

ここで \tilde{w}_i は w_i の気候値、 K_Z は無次元化したレイリー摩擦係数である。

エクマン摩擦

渦による地表摩擦の効果は Charney and Eliassen (1949) によってエクマン摩擦として定式化されている。自由大気に正の相対渦度 ζ が発生すると、地表摩擦を感じるエクマン境界層では下層収束が起こり、相対渦度に比例する鉛直流 w_E が発生する。

$$w_E = h \frac{K_E}{f_0} \zeta \quad (91)$$

この鉛直流は渦度方程式における渦の伸縮を通して自由大気の渦を衰退させるというものである。この鉛直流が高低気圧場を緩和することから、地表のエクマン摩擦 $(DE)_i$ は、以下の式で表される。

$$(DE)_i = \left\langle (0, 0, \frac{w_E}{h_i})^T, Y_i^{-1} \Pi_i \right\rangle \quad (92)$$

ここで f_0 は中緯度のコリオリパラメータ, K_E はエクマン摩擦係数で、渦度の定義に含まれる水平微分は解析的に行い、 $(DE)_i$ は波数空間で w_i の関数に帰着させる。

4.4 AOI 方程式

1950 年から 2010 年までの順圧大気場に対して EOF 解析を行い、その結果得られた EOF-1 を本研究で用いる AO の構造ベクトル (w_{AO}) とする。この AO の構造ベクトルと時々刻々と変化する順圧大気場との内積を計算することで、AOI の時系列 ($AOI = (w_i \cdot w_{AO})$) を得ることができる。

続いて AOI 方程式を導出する。まず、順圧 S-モデルの各項を展開係数を気候値と気候値からの偏差に分けると以下のように表わせる。

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{w}_i + w'_i)}{d\tau} = & -i\sigma_i \bar{w}_i - i\sigma_i w'_i - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \bar{w}_j \bar{w}_k \\ & - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} (\bar{w}_j w'_k + \bar{w}_k w'_j) - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w'_j w'_k + \bar{s}_i + s'_i \end{aligned} \quad (93)$$

ここでバーは基本場、ダッシュは基本場からの偏差を表す。

さらに式 (93) を平均すると以下の式となる。

$$0 = -i\sigma_i \bar{w}_i - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \bar{w}_j \bar{w}_k - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \overline{w'_j w'_k} + \bar{s}_i \quad (94)$$

式 (93) と式 (94) から、

$$\begin{aligned} \frac{dw'_i}{d\tau} = & -i\sigma_i w'_i - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} (\bar{w}_j w'_k + \bar{w}_k w'_j) \\ & + i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \overline{w'_j w'_k} - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w'_j w'_k + s'_i \end{aligned} \quad (95)$$

となる。

式 (95) と、AO として得られる EOF1 ベクトルとの内積を施すことで AOI の時間変化を計算すると代数方程式にすることができ、以下のように表す。

$$\begin{aligned} \frac{d(w'_i \cdot w_{AO})}{d\tau} = & \left\langle -i\sigma_i w'_i - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} (\bar{w}_j w'_k + \bar{w}_k w'_j) \right\rangle \cdot w_{AO} \\ & + \left\langle i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \overline{w'_j w'_k} - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w'_j w'_k \right\rangle \cdot w_{AO} + s'_i \cdot w_{AO} \end{aligned} \quad (96)$$

ここで、左辺は AOI の時間変化項となり、右辺第一項は線形項、第二項は非線形項、第三項は外力項となる。このようにしてモデル各項による AOI への寄与を定量的

に示す AOI 方程式を構築することができる。ただし、特異固有解理論により外力項の中の粘性項は線形項に含め解析した。線形項第一項は中立波であり、エネルギーが一定で増幅も減衰もしない自由振動の波である。線形項第二項は気候値と擾乱との相互作用を表わす。非線形項第一項は非定常擾乱との相互作用の平均で定数項であり、非線形項第二項は非定常擾乱との相互作用を表わす。

4.5 スペクトル解析

コヒーレンス・フェイズ

周波数ごとの相関や位相のずれを見るためにクロススペクトル解析を導入した。その手法は以下の通りである。

ふたつの時系列データ $x(t)$ と $y(t)$ があるとき、その相互相関関数は以下のよう
に示される。

$$C_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t+\tau)} \quad (97)$$

τ はラグを表す。またラグが 0 の相互相関関数で割ったものが相互相関係数になる。相互相関関数をフーリエ変換したものがクロススペクトルであり、以下のように表される。

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = K_{xy}(\omega) - iQ_{xy}(\omega) \quad (98)$$

クロススペクトルは相互相関関数の周波数ごとの寄与を意味する。ここで $K_{xy}(\omega)$ はコスペクトル、 $Q_{xy}(\omega)$ はクオドラチャスペクトルと呼ばれる。クロススペクトルは複素数であり、現象の把握・記述に不便であるのでさらにコヒーレンスとフェイズを以下のように導入する。

$$\text{coh}^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)} \quad (99)$$

$$\theta_{xy}(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{Q_{xy}(\omega)}{K_{xy}(\omega)} \right) \quad (100)$$

ここで $S_x(\omega), S_y(\omega)$ はそれぞれの $x(t)$ と $y(t)$ のスペクトルを表す。コヒーレンスは二つの時系列の同じ周波数成分どうしでどれだけ相関があるかを示す。またコヒーレンスの平方根は二信号のフーリエ周波数成分の相互相関係数 (但し正值) と考えることができる。フェイズは二つの時系列のフーリエ周波数成分の位相角の差を表す。

本研究では長期予報等の指標に用いられる相互相関係数 0.6 以上 (コヒーレンス 0.36 以上) の成分に有意性があるとして、相互相関係数 0.6 以上の周波数のフェーズを抽出して解析を行った。

5 結果

5.1 1950年から2010年までの北極振動の変動の概観

近年、10年スケールの気候変動が注目されているが、北極振動の10年スケールの変動に着目している研究例は少ない。そこで本章ではまず、10年スケールの北極振動について概観し、その後、AOI方程式を用いて得られた変動の特徴を述べる。

5.1.1 10年スケールの北極振動

本節では、本研究の解析期間である1950年から2010年までの解析によって得られた北極振動の変動パターン及び特徴について概観する。

図5はAOIの1950年から2010年までの60年間の時系列であり、1年移動平均(上)及び5年移動平均(下)を施している。縦軸が正規化したAOI、横軸が年である。ここでAOIはThompson and Wallaceで定義された海面更生氣圧の第1主成分(EOF-1)ではなく、1950年から2010年までの順圧大気場に対してEOF解析を行い、その結果得られたEOF-1(AOの構造ベクトル, 図4)と日々の順圧大気場の偏差を内積することにより定義している。今回用いるこのAOの構造ベクトルを見てみると、アイスランド北部付近に高度場の負偏差が卓越し、中緯度の太平洋、大西洋付近に高圧部の偏差が存在しており、北極振動の構造をしていることが分かる。

図16(上)は1950年から2010年までのAOIのパワースペクトルである。縦軸はパワーで横軸は周波数である。この図を見てみると、スペクトルピークはおおよそ10年付近にあることが分かる。なお、図3は1950年から2000年までの観測大気のAOIのパワースペクトル(北極振動研究ノート2004より引用)であるが、先の図16(上)よりは10年付近に強いスペクトルピークが見られる。

まず、AOIの変動の概観を述べる。AOIの5年移動平均を施した時系列(図5(下))をみてみると明瞭なAOIの変動の存在が確認できる。1955年から1960年頃までAOIは低下していき、その後1965年頃まで上昇していく。1965年頃からまたAOIは負へ遷移していき、負のピークを迎えると、1973年にかけてAOIは正へ振れていく。その後、1978年までAOIが低下していき、1991年までの約10年間AOIが上昇傾向にあったことが分かる。その後AOIは低下していき、弱い変動を続けている。

1年移動平均の図5(上)でも先述のような変動は確認することができる。1年移動平均の図で特徴的なのは1976年、1988年に見られるAOIの大きな変動である。1976年においては、AOIは正から負に、1988年においてはAOIは負から正に大きく遷移している。また、この大きな変動の後、例えば1976年の変動以降はAOIが負の傾向が続いており、1988年以降はAOIが正の傾向が続いている。実際、この傾向が5年移動平均の図にも見ることができる。1976年、1988年に関しては南方振動指数、太平洋十年規模振動、アリューシャン低気圧の強弱についてもこの年を境に大きく変動していることが知られており、AOIにおいても同様に気候シフトが現れていることが分かる。

図6は春季(3月~5月)、夏季(6月~8月)、秋季(9月~11月)、冬季(12月~2月)に分けた5年移動平均のAOIの時系列である。横軸は年、縦軸は正規化したAOIである。太線は1950年~2010年までの全期間のAOIの時系列で、細線は各季節ごとのAOIの時系列である。まず、北極振動が卓越する冬季のAOIの時系列を見てみるとほぼ全期間、通年のAOIの時系列と一致している。次に、春と秋のAOIの時系列を概観すると、おおよそトレンドとしては通年のAOIの時系列と一致している。春と秋を比較すれば春の方が通年のAOIの時系列に近い動きをしている。夏のAOIの時系列を見てみると期間の前半は通年の時系列と一致しているが、後半は同一の動きをしているとは言い難い。ただし、今回の季節ごとの時系列データは元データから季節ごとのデータを取り出し、季節ごとのデータに対して正規化しているため、本来夏の正規化する前のデータの値は小さいが、正規化したため大きく変動しているように見えていることには注意が必要である。

図7は1950年から2010年までのAOに回帰した冬の東西風のアノマリー、図8は1950年から2010年までのAOに回帰した冬の500hPaジオポテンシャル高度のアノマリーであるが、本研究の解析期間である1950年から2010年の東西風、ジオポテンシャル高度においてもAOの特徴的なパターンが見られた。

5.1.2 1950年から2010年までのAOI方程式各項の変動の概観

本節では、本研究の解析期間である1950年から2010年までの解析によって得られたAOI方程式各項の変動パターン及び特徴について概観する。

図9~図11はAOI方程式各項の時系列であり図9が線形項、図10が非線形項、図11が外力項である。横軸は年、左縦軸は正規化されたAOIの時系列、右縦軸はAOI方程式各項のスコアであり、1年移動平均(上)及び5年移動平均(下)を施し

ている。

まず AOI 方程式の線形項 (図 9) について見てみる。黒線が AOI、赤線が線形項である。最初に、1 年移動平均を見てみると線形項と AOI がほぼ一致しているように見える。AOI の変動で特徴的な 1976 年時の正から負への大きな変化、1988 年時の負から正への変化時を見てみると線形項は AOI の変動と同様の変化をしていることが分かる。5 年移動平均を見てみると、1965 年から 2010 年までの線形項の時系列は AOI とほぼ共鳴状態にあることが読み取れる。一方、1955 年から 1965 年の間は他の期間とは異なり共鳴関係となっていない。次に、非線形項、外力項を見てみると AOI と逆行して変動している区間が多いことが分かる。

表 1 は 10 日移動平均の AOI と AOI 方程式の各項との相関係数で、表 2 は 5 年移動平均の AOI と AOI 方程式の各項との相関係数である。また、図 12 ~ 図 14 は AOI と AOI 方程式各項との散布図である。これらを見てみると 10 日移動平均では線形項は正相関、非線形項は無相関、外力項は正相関であることが分かる。また、5 年移動平均では、線形項は正相関、非線形項及び外力項は負相関であることが分かる。

図 16(下) ~ 図 20 は AOI 方程式各項のパワースペクトルであり、図 16(下) は AOI 方程式の時間変化項、図 17(上) は AOI 方程式の線形項、図 17(下) は AOI 方程式の非線形項、図 18(上) は AOI 方程式の外力項である。時間変化項のパワースペクトルに 1 年周期スペクトルピークが見られるのは、データを 1 年ごとに内装したためであると考えられる。また、線形項に関しては非線形項、外力項と比較して周期 10 年以上の期間でやや強いスペクトルピークがある。図 18(下) は粘性項、19(上) は傾圧不安定項、図 19(下) は地形海陸分布の熱的效果、図 20 はエクマン摩擦項のパワースペクトルである。パワーに着目すると地形海陸分布の熱的效果を表わす項が最も値が大きく、エクマン摩擦、粘性項、傾圧不安定項の順に小さくなることが分かる。

5.2 AOI 方程式各項の空間分布の考察

本節では AOI 方程式の各項の空間分布の特徴について述べる。

図 21 は 1950 年から 2010 年までの AOI が標準偏差 1.5 以上 (上) と標準偏差が -1.5 以下 (下) の時の線形項の順圧高度場である。AOI が正の時は順圧高度場は極域で負、中緯度で正となり AOI が負のときは極域は正、中緯度は負となる。AOI が標準偏差 1.5 以上の図 21(上) を見てみると、極域で負、太平洋、大西洋を中心とした正の領域が広がっていることが分かる。極域の環状構造は明瞭ではないものの、AO 正の構造に近いと言える。このことは先述の AO と線形項が共鳴していることに一致している。また、AOI が標準偏差 -1.5 以下 (下) の時の線形項の順圧高度場を見てみると、極域で正の傾向、中緯度の負の傾向が見られるものの標準偏差 1.5 以上の時と比較すると明瞭な環状構造とは言えない。これは 1955 年から 1965 年時に見られた AO と線形項が共鳴関係に無かったことを反映していると考えられる。

次に外力項の空間分布について見てみる。図 22 は 1950 年から 2010 年までの AOI が標準偏差 1.5 以上 (上) と標準偏差が -1.5 以下 (下) の時の外力項の順圧高度場である。AOI が標準偏差 1.5 以上の図 22(上) を見てみると順圧高度場は高緯度が正、中緯度が負となり、AO が負のような構造をしている。また、AOI が標準偏差 -1.5 以下の時の図を見てみると、高緯度で負、大西洋域では正となり、AO が正の構造に近い。このことから外力項の空間分布は AO とは対称構造にあると考えられる。また線形項と外力項は空間分布がほぼ対称的であり、AOI 方程式の線形項と外力項は AO が卓越した時、力学的に対称構造を持つような関係にあることが推測される。

次に非線形項の空間分布について見てみる。図 23 は 1950 年から 2010 年までの AOI が標準偏差 1.5 以上 (上) と標準偏差が -1.5 以下 (下) の時の外力項の順圧高度場である。どちらも北緯 75 °以上の極域では AO と共鳴関係にあると言えるものの、AO は北緯 60 °を挟む環状構造であるから非線形項は AO の構造とは言えない。ところで、AO は AO 正の時は極渦が強まり、AO が負の時には極渦が弱まり偏西風が蛇行し波数が大きくなる。これを踏まえて図を見てみると、AO が -1.5 以下の時は、波数が大きくなり、AO が 1.5 以上の時は小さい。このことから、非常擾乱との相互作用である非線形項は何らかの形でこのような構造を反映していると考えられる。

各項が強調された空間分布を見るために、AOI の標準偏差 +1.5 以上から標準偏差 -1.5 以上の空間分布を見てみた。このとき AO と共鳴状態になる構造は高緯度

に負偏差、中緯度に正偏差となる構造である。図 24 が線形項 (上) と外力項 (下)、図 25 が非線形項である。先述の各項と同様に、明瞭な環状構造ではないものの線形項は AO と共鳴状態であり AO を強め、非線形項は AO とは対称構造で AO を弱めていることが推測される。非線形項は波数が 3~4 のような構造を持っている。

また、長期的な AOI 方程式各項の変動パターンを見るために 5 年移動平均を施した AOI 方程式各項のホフメラー図を作成した。図 26 が線形項、図 27 が非線形項、図 28 が外力項である。横軸が緯度、縦軸が年である。

線形項が共鳴していなかった 1955 年から 1965 年までの期間を除いて考えれば、線形項は AO が正の期間北緯 60 °から 80 °にかけて高度場が負となり、中緯度で正となる。また AO が負の区間は北緯 60 度以北で高度場が負となるという統一的な傾向が見られる。また、外力項は AO が正の期間で北緯 60 度以北では高度場が正となり、負の期間では高度場が負となる傾向が見られる。AO 正が強く表れた 1991 年付近には中緯度に負偏差の高度場が現れる。ところで、先述の標準偏差 ± 1.5 に分けて考えた空間分布では線形項と外力項は対称的であったが、これらの図では必ずしも対称的とは言えない。非線形項は北緯 60 度以北で AO が正の時は負偏差、AO が負の時は正偏差という傾向が見られた。

5.3 北極振動の原因

本章ではAOI方程式を用いてAOIがAOI方程式のどの項によって変化しているのか、クロススペクトル解析を用いてフェーズとコヒーレンスを調べることにより明らかにする。

5.3.1 AOIとAOIの時間微分(AOI方程式の時間変化項)の関係

AOI方程式を用いて解析を行う前にAOIとAOI方程式の時間変化項に相当するAOIの時間微分との関係について調べる。図29(上)はAOIとAOI方程式の時間変化項とのコヒーレンスを調べたもので、縦軸がコヒーレンス、横軸が周波数(1/年)である。図29(下)はAOIとAOI方程式の時間変化項とのフェーズを調べたもので、縦軸がフェーズ(度)で横軸が周波数(1/年)である。

コヒーレンスを見てみると周期が3日から1年の半分である180日程度まではほぼ1であることが分かる。またその期間のフェーズはほぼ $-90^\circ(-\pi/2)$ となっていることが読み取れる。これはAOIの時間変化項がAOIに対して $-90^\circ(-\pi/2)$ の位相差があることを示している。言いかえると、AOIの時間変化項が変動して $90^\circ(\pi/2)$ 後にAOIが変動することを示しており、AOIの時間変化項がAOIを先導していると言える。周期関数とその周期関数の時間微分の関係は直交することが知られている。つまり、AOIとAOIの時間微分は直交関係にあるはずということになる。さて、このコヒーレンスが1の範囲のフェーズを見てみるとAOIの位相角が -90° となっているが、これは正弦波の特徴であり、AOIが波の性質としてはもっとも単純な正弦波のような性質を持っており、どの周期帯でも -90° であることから様々な周期の正弦波が含まれていることが分かる。(正弦波の例として $\sin x$ を考える。 $\sin x$ の微分は $\cos x$ であるが $\sin x$ と比較して $\cos x$ は -90° 位相がずれており、これはAOIの結果と同じであることが分かる。)

次に周期が3日以内の短周期成分を見てみるとコヒーレンスは周期が短くなるにつれて(周波数が大きくなるにつれて)、徐々に小さくなっていくのが分かる。またフェーズもわずかであるが 90° からずれていることが分かる。これはデータ間隔が1日間隔であるため、1~3日程度の周期を考えるには不十分なデータ間隔であったためと考えられる。

最後に、周期が1年の半分である180日以上のコヒーレンスとフェーズを見てみる。コヒーレンスを見てみると長周期になるにつれて徐々に小さくなっている

ことが分かる。AOI が周期性を持ちデータ数が十分であるならば、コヒーレンスは1になるはずである。つまりコヒーレンスがこの期間において1にならない理由は、AOI に周期性がないかデータ数が不十分であるかのどちらかである。ところで、AO は冬に卓越することはよく知られているが、このことから少なくとも1年周期は存在している可能性は極めて高い。また AOI のパワースペクトルは先に述べた通り10年規模にピークが存在していた。このことから180日以降にAOIの周期性が無いとは考えにくい。つまり周期が180日以降にコヒーレンスが低くなっているのはデータ数の不足であると推測する。そこで本研究では、コヒーレンスが0.6以上の期間のフェーズを抽出しクロススペクトル解析を行うことにした。図29(下)はコヒーレンスが0.6以上のみを抽出したフェーズであるが、周期が半年以上の長周期成分のフェーズは徐々に -90° から離れていき -120° に近付いていることが分かる。先に述べた通りデータ数が多ければフェーズは -90° になるはずなため 30° ほどずれが見られることになる。そこで、これ以後の解析結果においても、長周期成分に関してフェーズは 30° ほどのずれがあることを考慮して考えていかなければならない。

5.3.2 AOI 方程式各項と時間変化項との関係

本節ではAOI方程式を用いて、前節で説明したフェーズとコヒーレンスの関係を用いてAOIがどのような原因によって生じているのか調べる。調べるのはAOI方程式のAOIの変動成分であるAOIの時間変化項とAOI方程式の各項である。

まずAOI方程式の線形項とAOI方程式の時間変化項について見てみる。図30(上)はAOI方程式の線形項とAOI方程式の時間変化項とのコヒーレンスを調べたもので、縦軸がコヒーレンス、横軸が周波数(1/年)である。図30(下)はAOI方程式の線形項とAOI方程式の時間変化項とのフェーズを調べたもので、縦軸がフェーズ(度)で横軸が周波数(1/年)である。

まず短周期成分である周期が1カ月以内について見てみる。この期間においてコヒーレンスは大部分が0.2から0.4の間に集中しており、やや低い値となっている。また、この時のフェーズは 0° 付近にある。AOI方程式の時間変化項と線形項のフェーズが 0° ということは時間変化項の変動と線形項の変動が等しく、線形項が時間変化項の変動の原因となっていることになる。

次に周期1カ月以上の長周期成分について見てみる。まずコヒーレンスについては周期が1カ月から1年成分にかけて徐々に上昇傾向にあることが分かる。ま

た、フェーズについては、0°から-90°へ遷移していくことが分かる。つまり、コヒーレンスが高めの傾向を示している周期1年規模のAOI方程式の線形項は時間変化項よりも90°後行していることになり、先に考えたAOIとAOIの時間変化項との関係を考えればAOIと同じ変動をしている(共鳴関係にある)ことが分かる。

また、同様に周期1年以上の長周期成分について見てみると、フェーズに関してはほぼ-90°に存在していることが分かる。また、コヒーレンスを見てみると5年から10年周期までは相関の低い状態が続くが10年よりも長い周期では高い相関が見られる。先の1年周期と同じように考えれば、線形項は時間変化項よりも90°後行していることになり、AOIと同じ変動をしている(共鳴関係にある)ことが分かる。

次にAOI方程式の非線形項とAOI方程式の時間変化項について考える。図31(上)はAOI方程式の非線形項とAOI方程式の時間変化項とのコヒーレンスを調べたもので、縦軸がコヒーレンス、横軸が周波数(1/年)である。図31(下)はAOI方程式の非線形項とAOI方程式の時間変化項とのフェーズを調べたもので、縦軸がフェーズ(度)で横軸が周波数(1/年)である。

まず、短周期成分である周期1カ月以内について見てみる。この期間においてコヒーレンスは大部分が0.6から0.8の間に集中しており、非常に高い値となっている。また、この時のフェーズは0°付近にある。AOI方程式の時間変化項と非線形項のフェーズが0°ということは時間変化項の変動と非線形項の変動が等しく、非線形項が時間変化項の変動の原因となっていることになる。ただし、細かくみてみると全体的にわずかながら位相差が正の方向へ振れていることが特徴として見られる。

次に周期1カ月以上の長周期成分について見てみる。まず、コヒーレンスについては周期が1カ月から1年成分にかけて徐々に下降傾向にあることが分かる。また、フェーズについては、ほぼ0°付近でへ遷移している。つまり、この期間はややコヒーレンスが低い期間があるものの、フェーズが0°となっているため弱いながらもAOIの変動の原因になっていると言える。

また、同様に周期1年以上の長周期成分について見てみると1年周期から10年周期へかけて時間変化項と非線形項とのフェーズが徐々に広がり、10年スケール程度の周期ではおおよそ50°程度位相差が存在していることが分かる。また、コヒーレンスを見てみると1年周期よりも長い周期では高い成分と低い成分が混ざっているが、決して全体が低いわけではなく高い成分も多く含まれている。フェーズは先に述べた通り非線形項がAOIの時間変化項より50°ほど先行している状態

であるが、これは AOI と AOI の時間変化項の関係を考えれば非線形項が AOI の変動の減衰 (ダンピング) の効果として働いていると考えられる。

同様に AOI 方程式の外力項と AOI 方程式の時間変化項について考える。図 32(上) は AOI 方程式の外力項と AOI 方程式の時間変化項とのコヒーレンスを調べたもので、縦軸がコヒーレンス、横軸が周波数 (1/年) である。図 32(下) は AOI 方程式の外力項と AOI 方程式の時間変化項とのフェーズを調べたもので、縦軸がフェーズ (度) で横軸が周波数 (1/年) である。

まず短周期成分である周期 1 カ月以内について見てみる。この期間においてコヒーレンスは大部分が 0.1 から 0.4 の間に集中しており、先述の線形項や非線形項よりも低い値となっている。また、この時のフェーズは 0 °付近にある。AOI 方程式の時間変化項と外力項のフェーズが 0 °ということは時間変化項の変動と外力項の変動が等しく、外力項が時間変化項の変動の原因となっていることになる。ただし、細かくみてもと周期が 10 日程度までは全体的にわずかながら位相差が負の方向へ振れているおり、10 日より長い周期では位相差は正の方向へ振れている。

次に周期 1 カ月以上の長周期成分について見てみる。まずコヒーレンスについてであるが周期が 1 カ月から 1 年成分にかけて全体的に値としては小さいもののわずかではあるが徐々に上昇傾向にあることが分かる。また、フェーズについては、0 °から 90 °へ遷移していくことが分かる。つまり、コヒーレンスが高めの傾向を示している周期 1 年規模の AOI 方程式の外力項は時間変化項よりも 90 °先行していることになり、先に考えた AOI と AOI の時間変化項との関係を考えれば外力項は AOI とは逆の変動をしていてダンピングの効果として働いていることが分かる。

また、同様に周期 1 年以上の長周期成分について見てみると 1 年周期から 10 年周期へかけて時間変化項と外力項とのフェーズが徐々に狭まり、10 年スケール程度の周期ではおおよそ 50 °程度位相差が存在していることが分かる。また、10 年周期よりも長い周期になるにつれてさらに位相差が狭まっていくことが読み取れる。また、コヒーレンスを見てみると 1 年周期よりも長い周期では高い成分と低い成分が混ざっているが、決して全体が低いわけではなくやや高い成分も多く含まれている。フェーズは先に述べた通り外力項が AOI の時間変化項より先行している状態であるが、これは周期が 10 年程度の時、外力項が AOI に対して減衰 (ダンピング) の効果として働いており、20 ~ 30 年周期では AOI の変動の原因となっていると考えられる。

5.3.3 外力項の細分化

前節で AOI 方程式の時間変化項と線形項、非線形項、外力項との関係について述べたが、本節では外力項についてさらに細分化し、エクマン摩擦、傾圧不安定、地形・海陸分布の熱的效果と AOI 方程式の時間変化項との関係を前節と同様にクロススペクトル解析を用いてフェーズとコヒーレンスを調べることにより明らかにする。

まずエクマン摩擦と AOI 方程式の時間変化項の関係について見てみる。図 33(上) はエクマン摩擦と AOI 方程式の時間変化項とのコヒーレンスを調べたもので、縦軸がコヒーレンス、横軸が周波数 (1/年) である。図 33(下) はエクマン摩擦と AOI 方程式の時間変化項とのフェーズを調べたもので、縦軸がフェーズ (度) で横軸が周波数 (1/年) である。

コヒーレンスを見てみると周期が 3 日から 1 年の半分である 180 日程度まではほぼ 1 のであることが分かる。またその期間のフェーズはほぼ 90° となっていることが読み取れる。これは AOI の時間変化項がエクマン摩擦に対してに対して 90° の位相差があることを示しており、前節と同様に考えれば、エクマン摩擦が AOI と逆の動きをしており AOI に対してダンピングの効果として働いていることが分かる。

ところで、エクマン摩擦は大気の動きに逆らう力であるから、AOI に対してダンピングの効果として働いているのは当然の結果と言える。

これを踏まえて、周期が 1 年の半分である 180 日以上のコヒーレンス・フェーズを見てみる。コヒーレンスを見てみると長周期になるにつれて徐々に小さくなっていることが分かる。またフェーズも 90° から 0° 方向へ徐々に移動していることが読み取れる。先に述べた通りたとえ長周期であっても大気に流れが存在すれば、エクマン摩擦は存在し、完全にダンピングの効果として働くはずである。そのため、先述の AOI と AOI の時間変化項のコヒーレンス・フェーズと同様に考えて、コヒーレンスが 1 にならなくフェーズが完全なダンピングの効果として働かないのはデータ数の不足が原因であると考えられる。最後に周期が 3 日以内の短周期について見てみると、コヒーレンスが低くなり、フェーズが 90° からわずかにずれていることが分かる。

次に傾圧不安定 (順圧と傾圧との相互作用) と AOI 方程式の時間変化項の関係について見てみる。図 34(上) は傾圧不安定と AOI 方程式の時間変化項とのコヒーレンスを調べたもので、縦軸がコヒーレンス、横軸が周波数 (1/年) である。図 34(下)

は傾圧不安定と AOI 方程式の時間変化項とのフェーズを調べたもので、縦軸がフェーズ(度)で横軸が周波数(1/年)である。

まず、コヒーレンスを見てみるとどの周波数帯でも低いことが分かる。特に1年よりも長い周期では低くなっている。また、フェーズを見てみるとおおよそ-90°付近にあることが分かる。これは傾圧不安定(順圧と傾圧との相互作用)が AOI と共鳴しており、AOI に正のフィードバックをもたらしていることを示している。傾圧不安定は大気に動きがある時、平均流と波との相互作用により発生するので大気の動きと共鳴していることは当然の結果と言える。なお、周期3年以降のフェーズが存在していないのは相互相関係数が0.6以上を満たすコヒーレンスが存在しなかったためである。

同様に地形・海陸分布の熱的效果と AOI 方程式の時間変化項について考える。図35(上)は地形・海陸分布の熱的效果と AOI 方程式の時間変化項とのコヒーレンスを調べたもので、縦軸がコヒーレンス、横軸が周波数(1/年)である。図35(下)は地形・海陸分布の熱的效果と AOI 方程式の時間変化項とのフェーズを調べたもので、縦軸がフェーズ(度)で横軸が周波数(1/年)である。

まず短周期成分である周期1カ月以内について見てみる。周期10日よりも短い周期ではコヒーレンスが0.1程度で極めて低くなっている。また、周期が10日から30日程度までの周期帯では、0.2から0.4に集中しており、低めの値となっている。また、この時のフェーズは周期が5日程度までは-30°付近にありそれ以降は30°付近にあることが読み取れる。コヒーレンスは低いものの、AOI と関係していると考えれば、先述と同様に考えてフェーズが-30°の期間は AOI とやや共鳴関係にあり、フェーズが30°の期間は AOI に対してダンピングの効果として働いていることになる。

次に周期1カ月以上の長周期成分について見てみる。まずコヒーレンスについてであるが周期が1カ月から1年成分にかけて全体的に徐々に上昇傾向にあることが分かる。また、フェーズについては、30°から90°へ遷移し60°に収束していくことが分かる。つまり、コヒーレンスが高めの傾向を示している周期1年規模の AOI 方程式の地形・海陸分布の熱的效果は時間変化項よりも60°先行していることになり、先に考えた AOI と AOI の時間変化項との関係を考えれば外力項は AOI とダンピングの効果もしくは AOI の変動の原因として働いていることが分かる。

また、同様に周期1年以上の長周期成分について見てみると1年周期から10年周期へかけて時間変化項と地形・海陸分布の熱的效果とのフェーズが徐々に狭まり、10年スケール程度の周期ではおおよそ50°程度位相差が存在していることが

分かる。また、10年周期よりも長い周期になるにつれてさらに位相差が狭まっていくことが読み取れる。また、コヒーレンスを見てみると1年周期よりも長い周期では高い成分と低い成分が混ざっているが、決して全体が低いわけではなくやや高い成分も多く含まれている。フェーズは先に述べた通り地形・海陸分布の熱的效果がAOIの時間変化項より先行している状態であるが、これはAOIとAOIの時間変化項の関係を考えれば地形・海陸分布の熱的效果がAOIの変動の原因もしくは減衰(ダンピング)の効果として働いていると考えられる。

5.3.4 線形項の細分化

本節では線形項についてさらに細分化し、粘性項、中立波、気候値と擾乱との相互作用とAOI方程式の時間変化項との関係を前節と同様にクロススペクトル解析を用いてフェーズとコヒーレンスを調べることにより明らかにする。

まず粘性項とAOI方程式の時間変化項の関係について見てみる。図36(上)は粘性項とAOI方程式の時間変化項とのコヒーレンスを調べたもので、縦軸がコヒーレンス、横軸が周波数(1/年)である。図36(下)は粘性項とAOI方程式の時間変化項とのフェーズを調べたもので、縦軸がフェーズ(度)で横軸が周波数(1/年)である。

コヒーレンスは短周期から1年周期程度まで高めの値を示しており、周期が長くなるにつれて周期1年程度までコヒーレンスが上昇し、その後は周期が長くなるにつれてコヒーレンスは徐々に低下する。フェーズを見てみると、ほぼ全期間90°となっていることが読み取れる。これはAOIの時間変化項が粘性項に対してに対して90°の位相差があることを示しており、粘性項がAOIと逆の動きをしておりAOIに対してダンピングの効果として働いていることが分かる。

ところで、粘性摩擦は大気の力学に逆らう力であるから、AOIに対してダンピングの効果として働いているのは当然の結果と言える。

次に中立波とAOI方程式の時間変化項の関係について見てみる。図37(上)は中立波とAOI方程式の時間変化項とのコヒーレンスを調べたもので、縦軸がコヒーレンス、横軸が周波数(1/年)である。図37(下)は中立波とAOI方程式の時間変化項とのフェーズを調べたもので、縦軸がフェーズ(度)で横軸が周波数(1/年)である。

まず短周期成分である周期5日以内について見てみる。周期5日より短い周期ではコヒーレンスが0.2から0.4程度でやや低くなっている。また、周期が5日か

ら 30 日程度までの周期帯では、0.1 から 0.2 に集中しており、極めて低い値となっている。また、この時のフェーズは周期が 5 日程度までは 0 °付近にありそれ以降は -90 °付近にあることが読み取れる。コヒーレンスは低いものの、AOI と関係していると考えれば、先述と同様に考えてフェーズが -90 °の期間は AOI と共鳴関係にあり、フェーズが 0 °の期間は AOI の原因になっている可能性がある。

次に周期 1 カ月以上の長周期成分について見てみる。まずコヒーレンスについてであるが周期が 1 カ月から 10 年成分にかけて全体的に低い徐徐に上昇傾向にあることが分かる。また、フェーズについては、0 °付近で収束していることが分かる。つまり、この周期帯では中立波は時間変化項と同じ変化をしており、AOI 変動の原因となっていることになる。

また、同様に周期 10 年以上の長周期成分について見てみるとコヒーレンスが徐々に上昇していき、フェーズは負の方向へ向かっていくことが分かる。

同様に気候値と擾乱との相互作用と AOI 方程式の時間変化項の関係について見てみる。図 38(上) は気候値と擾乱との相互作用と AOI 方程式の時間変化項とのコヒーレンスを調べたもので、縦軸がコヒーレンス、横軸が周波数 (1/年) である。図 38(下) は気候値と擾乱との相互作用と AOI 方程式の時間変化項とのフェーズを調べたもので、縦軸がフェーズ (度) で横軸が周波数 (1/年) である。

まず短周期成分である周期 1 カ月以内について見てみる。この期間においてコヒーレンスは大部分が 0.1 から 0.6 の間に集中していて、周波数がちいさくなるにつれてコヒーレンスは小さくなっていることが分かる。また、周期 10 日以内のフェーズは 0 °付近にある。AOI 方程式の時間変化項と気候値と擾乱との相互作用のフェーズが 0 °ということは時間変化項の変動と気候値と擾乱との相互作用の変動が等しく、気候値と擾乱との相互作用が時間変化項の変動の原因となっていることになる。それ以降フェーズは 0 °から負の方向へ変化していく。

次に周期 30 日以上の中長周期成分について見てみる。まずコヒーレンスについてであるが周期が 30 日から 1 年成分にかけてわずかであるが徐々に上昇傾向にあることが分かる。また、フェーズについては、-60 °から -90 °へ遷移していくことが分かる。つまり、コヒーレンスが高めの傾向を示している周期 1 年規模の気候値と擾乱との相互作用は時間変化項よりも 90 °後行していることになり、AOI と同じ変動をしている (共鳴関係にある) ことが分かる。

また、同様に周期 1 年以上の長周期成分について見てみると、フェーズに関してはほぼ -120 °に存在していることが分かる。また、コヒーレンスを見てみると 5 年から 10 年周期までは相関の低い状態が続くが 10 年よりも長い周期ではやや高

い相関が見られる。先の1年周期と同じように考えれば、気候値と擾乱との相互作用は時間変化項よりも120°後行していることになり、おおよそAOIと同じ変動をしている(共鳴関係にある)ことが分かる。

5.3.5 非線形項の細分化

最後に非線形項についてであるがこの項は擾乱と擾乱の相互作用の項と擾乱と擾乱の相互作用の平均項から構成される。そのため、AOI方程式の非線形項の変動は平均項を除く擾乱と擾乱の相互作用の項の変動で説明できると考えられる。実際、この項のAOI方程式の時間変化項とのコヒーレンスとフェーズ(図39)を見ると、AOI方程式の非線形項と一致している。

6 まとめと考察

本研究では、AOIの変動を力学的に表現したAOI方程式を用いてAOの変動の原因が何によってもたらされたのか解析を行った。

6.1 AOIの10年スケールの変動

まず1950年から2010年までのAOIを算出し、5年移動平均を施し10年スケールのAOIの変動を調べた。その結果、1955年から1959年はAOI減少のトレンド、1960年から1965年にかけては上昇トレンド、1966年から1968年にかけては下降トレンド、1968年から1973年にかけては上昇トレンド、1973年から1979年にかけては下降トレンド、1979年から1990年にかけては上昇トレンド、1991年から1995年から下降トレンドとなり1995年以降弱い上昇トレンドにある。このように5年移動平均を施した時系列にこのような変動パターンが見られたこと、AOIのパワースペクトルに弱いながらもスペクトルピークが見られることからAOに10年スケールの変動が存在している可能性は高いと考えられる。

次にAOI方程式の各項の時系列を算出しAOIとの比較を行った。線形項は全体としてAOIの時系列と共鳴関係にあることが分かった。外力項と非線形項に関しては全体としてはAOIのトレンドと逆行して変動する傾向にあり、AOIの変動を抑制している傾向にあることが分かった。10日移動平均のAOIとAOI方程式各項との相関係数は線形項では正相関、非線形項は無相関、外力項は負相関であった。また5年移動平均のAOIとAOI方程式各項との相関係数は線形項では正相関、非線形項、外力項は負相関であった。正相関の時はAOIに正のフィードバックをもたらし、負相関の時はAOIに負のフィードバックをもたらしている。

次に1950年から2010年までのAOI方程式各項の空間分布を解析したところ、線形項と外力項は対称構造にあることが分かった。このことはAOIが卓越する+1.5以上、-1.5以下の期間で見られ、AOI方程式の線形項と外力項はAOが卓越した時は力学的に対称構造を持つような関係にあることが推測される。一方、5年移動平均のホフメラー図では線形項と外力項は完全な対称構造とはならなかったためAOI方程式の線形項と外力項は長期的には完全な対称構造となる性質をもたないことが推測される。非線形項は北緯75°以上の極域ではAOと共鳴関係にあると言えるものの、AOは北緯60°を挟む環状構造であるから非線形項はAOの構造とは言えない。ところで、AOはAO正の時は極渦が強まり、AO負時には

極渦が弱まり偏西風が蛇行し波数が大きくなる。これを踏まえて図を見てみると、AO が-1.5 以下の時は、波数が大きくなり、AO が 1.5 以上の時は小さい。このことから、非定常擾乱との相互作用である非線形項は何らかの形でこのような構造を反映していると考えられる。

上記のように、AOI 方程式を用いて解析を行ったものの上記の手法では定量的に AOI 方程式各項が AO にどのような影響を与えているか考えることは難しかった。そのため、次の章で述べるように、クロススペクトル解析を導入することで AOI の変動の原因を探ることにした。

6.2 AOI 方程式を用いたクロススペクトル解析

AOI 方程式を用いてクロススペクトル解析を行いコヒーレンスとフェーズを調べた結果以下のようなことが分かった。

まず、1 カ月程度までの短周期変動については、AOI 方程式の線形項、非線形項、外力項の全ての項が AOI 方程式の時間変化項とほぼ位相差がなく動いていることが分かった。つまり、これら 3 つの項が全て AOI の変動の原因となっていることになる。しかしながら、この期間中の各項のコヒーレンスを見てみると、線形項が 0.2~0.4、外力項が 0.1~0.4、非線形項が 0.6~0.8 と非線形項が線形項、外力項と比較して高いことが分かる。このことから、1 カ月程度までの北極振動は大部分が非線形項によって変動していることが分かる。

次に 1 年程度の周期についてまとめると、フェーズは AOI 方程式の時間変化項に対して線形項は -90° 、非線形項は 0° 、外力項は 90° であった。また、この周期帯でのコヒーレンスはどの項もほとんど変わらない。このことは AOI に対して線形項は AOI 変動に共鳴、非線形項は原因、外力項はダンピング(減衰)の効果として働いていることになる。このことは線形項は AOI に対して正のフィードバックをもたらし、外力項は負のフィードバックをもたらししていることを意味する。

同様に 10 年規模の周期についてまとめると、フェーズは AOI 方程式の時間変化項に対して線形項は -90° 、非線形項は 50° 、外力項は 50° となった。この周期帯でのコヒーレンスは線形項、非線形項、外力項の順に低くなる。このことは、線形項は AOI の変動に共鳴しており、非線形項、外力項は AOI の変動に対してダンピングの効果として働いていると考えられる。また、周期 20~30 年程度において外力項は位相差が小さくこの周期帯では AOI の変動の原因となっていると考えら

れる。なお、先述の通りこの周期帯のフェーズには 30 °程度のずれがある可能性が十分にある。

また、本研究では、AOI 方程式の外力項、線形項、非線形項それぞれをさらに細分化して考えた。

まず外力項についてであるが、AOI に対して傾圧不安定は共鳴、エクマン摩擦はダンピング、地形・海陸分布の熱的效果は大部分でフェーズが 60 °程度となりダンピングもしくは原因になっているという結果が得られた。

今回用いた傾圧不安定 (順圧-傾圧の相互作用) のパラメタゼーションは基本場が 0 で無い時、すなわち静止大気で無い時平均流と波との相互作用により不安定波が出現することを利用している。つまり、大気の動きが傾圧不安定をもたらす原因となるため、AOI の変動と傾圧不安定の変動が共鳴するのは理論的にも正しく、結果としても正しい結果となっていることが分かる。

次に Charney and Eliassen(1949) を用いてパラメタリゼーションを行っているエクマン摩擦についてであるが、エクマン摩擦は渦の視点から考えれば、エクマン境界層内での下層収束により発生した鉛直流が渦の伸縮を通して自由大気の渦を減衰させるものであるから、大気の変動 (AOI の変動) に対しては理論的にはダンピングの効果として働く。そして、今回得られた結果は AOI の変動に対してダンピングの効果として働いていることから、理論と結果が一致したことが分かる。最後に、地形・海陸分布の熱的效果であるが、AOI 方程式の外力項と地形・海陸分布の熱的效果とが非常に似ており、また、パワースペクトルで見られたパワーも外力項の中で一番大きかったことから、AOI 方程式中の外力項はほぼ地形・海陸分布の熱的效果によるものであると考えられる。

次に線形項についてであるが、今回線形項を、粘性項、中立波、気候値と擾乱との相互作用に分けた。

まず粘性項についてであるが、これは大気の動きに逆らう力であるからダンピングの効果として働くはずであり、解析結果でもダンピングの効果として得られた。また、中立波は AOI の変動の原因として働き、気候値と擾乱との相互作用は AOI と共鳴する結果となった。中立波のコヒーレンスの低さ、気候値と擾乱との相互作用と AOI 方程式の線形項との類似性から、気候値と擾乱との相互作用が AOI 方程式の線形項の大部分を占めていると考えられる。

次に、非線形項であるが、非定常擾乱を表わす $i \sum \sum w'_j w'_k$ の項が AOI の変動の原因となっていることが分かった。

最後に AOI 方程式の各項が大気のどのような現象を表わしているのか考えたい。

まず、Tanaka(2003)で構築された、順圧Sモデルについて考える。このSモデル中の線形項は中立波であり、コリオリ力、気圧傾度力及び発散項から構成される。Sモデル中の非線形項は、全ての波と波の相互作用、波と帯状流の相互作用であり、移流効果と曲率効果から形成される。外力は、傾圧不安定、粘性摩擦、エクマン摩擦、地形・海陸分布の熱的效果から構成される。

このSモデルにAOの構造ベクトルをかけ、時間平均からの変動に直したものがAOI方程式である。線形項は増幅も減衰もしない中立波と気候値との擾乱との相互作用を意味している。コリオリ力の効果は全て線形項に入っているため、効果を復元力とするロスビー波は全てこの項に入っていると考えられる。非線形項は波と波との相互作用(擾乱)である。線形項にも相互作用の効果が入っているため全ての相互作用が入っているわけではないものの、大気中の擾乱である傾圧不安定の形成の原因(傾圧不安定そのものではない)を含んでいると考えられる。外力項は時間変化項(Transient)であるが持つ性質はSモデルと同じであると考えられる。

また、特異固有解理論(Tanaka and Matsueda 2005)の観点から考えれば、線形項は固有値0の固有解であるAOが自律的に励起する過程を表わし、非線形項はAOを自律的に励起させるための非定常擾乱作用としての過程を意味しており、外力項は地表摩擦により固有解であるAOを減衰させている。

7 結論

本研究では、北半球の気候に大きな影響を与える北極振動の成因を探るため、北極振動の変動を力学的に表現した AOI 方程式を用いて、AOI 方程式の線形項、非線形項、外力項のどの項が AOI 方程式の時間変化項に寄与しているのか解析を行った。

周期が 1 か月程度までの北極振動の変動の原因は非定常擾乱との相互作用を表わす AOI 方程式の非線形項によって変動していることが分かった。なお、この期間では線形項は周期が長いほど AOI と共鳴関係になる。

周期が 1 年程度の北極振動は周期が 1 か月程度までの北極振動の変動の原因と同じように AOI 方程式の非線形項であることが分かった。また、この周期帯において AOI 方程式の線形項は AOI と共鳴関係にあり、AOI と線形項が同じ変動をしていることが分かった。また AOI 方程式の外力項は AOI の変動と逆行しダンピングの効果として北極振動に働いていることが示唆された。

10 年スケールの北極振動に関しては、AOI と線形項が共鳴関係にあること分かった。また、非線形項及び外力項は北極振動の変動に対してダンピングの効果として働いており AOI の変動を抑制している。このことは、線形項は AOI に正のフィードバックをもたらしており、非線形項及び外力項は負のフィードバックをもたらしていることを意味している。また、20~30 年周期では外力項は AOI の変動の原因となっている。AOI 方程式の外力項の大部分は地形・海陸分布の熱的效果によるものだと考えられるため、外力項が AOI の変動の原因となっているならば海洋や海水の変動の影響があると考えられる。

今回、特異固有解理論 (Tanaka and Matsueda 2005) に基づき線形項に粘性摩擦を含めて解析を行ったが、AOI の時系列と線形項の時系列は周期が 1 年以上の長い周期では共鳴関係となり特異固有解理論との整合性が見られた。また非線形項が原因となって北極振動が励起されたことも特異固有解理論と矛盾しない。また、池田 (2008) や渋谷 (2010) などの先行研究では傾圧 S モデル中の非線形項 (zonal eddy) が AOI に正のフィードバックを持つと指摘しているが、本研究では短周期では AOI に正のフィードバックをもたらしているものは傾圧不安定項のみで AOI 方程式の各項が正のフィードバックをもたらしていることは確認できなかった。但し、長周期では線形項が AOI に正のフィードバックをもたらしていることが確認することができた。Ohashi and Tanaka(2010) では AOI の 10 年スケールの長期変動が外部強制応答によるものではなく、カオス的に変動する大気の内変動とし

て説明できるとしているが、今回の解析にそのカオス的変動の原因として、特異固有解理論による北極振動モードが線形項の共鳴によってもたらされていることが明らかになった。

本研究では、AOI 方程式を用いて北極振動の原因について解析を行ったが、今回用いたデータの範囲が 60 年であったため第 5 章の結果で説明した通り 10 年程度の長周期変動を考える上では期間が短かったかもしれない。そのため 10 年スケール程度の変動の解析結果に関しては、この期間で得られた結果と解析期間を広げた場合、もしくは解析期間を変更した場合では結果が異なる可能性がある。しかしながら、この期間において一定の傾向が見られたことから大幅に結果が変わることは考えにくい。より確かで統一的な見解を得るためには、期間を変更、もしくは期間を広げて同様の手法で解析を行う必要があるであろう。

8 謝辞

本研究を進めるにあたり、指導教員である筑波大学計算科学研究センターの田中博教授には、本研究の動機となる論文の紹介、解析手法の提案、私の些細な質問や結果に対する考察などへの丁寧な御指導、御助言を賜り、心より感謝しております。

本研究を進めるにあたり、同大学生命環境科学研究科の林陽生教授、上野健一准教授、植田宏昭准教授、日下博幸准教授、若月泰孝助教や大学院生の皆様には、方針発表、中間発表、最終発表、ポスター発表の場で貴重な御助言を多く頂き有難うございました。

最後に、同大学計算科学研究センター寺崎康児研究員をはじめとして大気大循環研究室の先輩方には大変お世話になりました。また、共に机を並べ卒論作業を進めてきた地球学類の4年生の皆様には、よき相談相手となって頂きました。

本論文は以上の皆様の御協力により完成させることができました。心より感謝いたします。

尚、本研究で用いた主な図は、The Generic Mapping Tools System (Wessel and Smith 1991) にて作成いたしました。

参考文献

- Baldwin, M. P., and T. J. Dunkerton, 2001: Stratospheric harbingers of anomalous weather regimes. *Science*, **294**, 581-584.
- Charney, J.G., and A. Eliassen, 1949: A numerical method for predicting the perturbations of the middle latitude westerlies. *Tellus*, **1**(2), 38-54
- Hirata, Y., Y. Shimo, H. L. Tanaka, and K. Aihara 2011 :Chaotic properties of the Arctic Oscillation index. *SOLA*, **7**, 33-36
- James R. Holton, 2004: An Introduction to Dynamic Meteorology. Elsevier Academic Press. 535pp
- Meiji, H., H. Nakamura: Interannual Seesaw between the Aleutian and Icelandic Lows. Part II: Its Significance in the Interannual Variability over the Wintertime Northern Hemisphere. *J. Climate*, **14**, 4512-4529.
- Itoh, H., 2002: True versus apparent arctic oscillation. *Geophys. Res. Lett.*, **29**, 8,doi:10.1029/2001GL013978.
- Kimoto, M., F-F. Jin, M. Watanabe, and N.Yasutomi, 2001: Zonal-eddy coupling and a neutral mode theory for the Arctic Oscillation. *Geophys. Res. Lett.*, **28**, 737-740.
- Lorenz, D. J., and D. L. Hartmann,2003: Eddy-zonal flow feedback in the Northern Hemisphere winter. *J. Atmos.Sci.*, **16**, 1212-1227.
- Ohashi, H., and H. L. Tanaka, 2010: Data analysis of warming pattern in the Arctic. *SOLA*, **6A**, 1-4.
- Overland, J. E., and M. Wang, 2005: The Arctic climate paradox: The recent decrease of the Arctic Oscillation.*Geophys. Res. Lett.*, **32**(6), L06701.
- Tanaka, H. L., 1985: Global energetics analysis by expansion into three-dimensional normal mode function during the FGGE winter *J. Meteor. Soc. Jpn.*, **63**, 180-200.

- Tanaka, H. L., 1991: A numerical simulation of amplification of low-frequency planetary waves and blocking formations by the upscale energy cascade. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 2919-2935.
- Tanaka, H. L., 2003: Analysis and modeling of the Arctic Oscillation using a simple barotropic model with baroclinic eddy forcing. *J. Atmos. Sci.*, **28**, 737-740.
- Tanaka, H. L., and M. Matsueda, 2005a: Arctic Oscillation analyzed as a singular eigenmode of the global atmosphere. *J. Meteor. Soc. Japan*, **83**, 611-619.
- Tanaka, H. L., and M. Matsueda, 2005b: Dynamical understanding of the Arctic Oscillation as a singular eigenmode of the global atmosphere. *Proc. GCCA-6*, 12-13
- Thompson, D. W. and J. M. Wallace, 1998: Arctic Oscillation signature in the wintertime geopotential height and temperature field. *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 1297-1300.
- Watanabe, M. and F. F. Jin, 2004: Dynamical prototype of the Arctic Oscillation as revealed by a neutral singular vector. *J. Climate*, **17**, 2119-2138.
- 池田正樹, 2010: ブロッキング高気圧と北極振動の関係. 筑波大学生命環境科学研究科修士論文, 51pp.
- 大橋正宏, 田中博, 2009: 地球温暖化予測モデルに見られる北極振動指数の解析的研究. *天気* **56**, 743-753.
- 小倉義光, 1978: 気象力学通論. 東京大学出版会. 249pp
- 岡田亮, 2003: 順圧大気大循環モデルによる北極振動 (AO) の数値実験. 筑波大学生命環境科学研究科修士論文, 61pp.
- 渋谷亮治, 2010: 北極振動の力学的な成因に関する研究. 筑波大学生命環境科学研究科修士論文, 74pp.
- 下悠子, 2011: 北極振動方程式を用いた北極振動の解析的研究. 筑波大学生命環境科学研究科修士論文, 51pp

下悠子・田中博, 2010: 記録的な 2009/2010 年の寒波と北極振動の関係について、気象庁異常気象分析検討会資料 .

田中博, 2005: 地球大気の特異固有解として得られる北極振動. 京都大学防災研究所 平成 17 年度異常気象と長周期変動研究会報告会, 44-48.

田中博 2008: 地球温暖化予測のための気象シミュレーション：気象モデルへの逆問題の応用. 統計数理研究所、21 世紀の診断工学とその周辺 (6), 99-112.

田中博, 2007: 偏西風の気象学. 成山堂, 174pp.

日野幹雄, 1997: スペクトル解析. 朝倉書店, 300pp

山崎孝治, 2004: 北極振動の概要. 気象研究ノート, 206, 1-9.

Appendix

EOF 解析

大気科学の中でよく使われる解析手法である EOF 解析について解説する.

EOF 解析とは

AO は北半球における SLP を EOF 解析 (主成分解析) したものの第一主成分により定義される.

EOF 解析は, いくつかの地点における時系列データの主要な変動パターンを抽出して変動の特徴を把握するための統計的手法であり, 北半球における大気の変動パターンを見るためにこれを行う.

一般に何らかの相関関係がある p 個の地点でのデータ $x_1, x_2, \dots, x_p (p \geq 2)$ で, 時系列方向に N 個のデータ $x_{1\lambda}, x_{2\lambda}, \dots, x_{p\lambda} (\lambda = 1, 2, \dots, N)$ が得られたとする. これらの N 個の時系列データは, それぞれ p 個の地点での気象要素が相互に関連のある変動を示しているとみなせるので, この変動を説明する関数として, p 個の変量の一次結合で表すことができ, これを

$$z = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_p x_p \quad (101)$$

と仮定し, l_1, l_2, \dots, l_p を変化させ,

$$\sum_{i=1}^p l_i^2 = 1 \quad (102)$$

の条件の下で, z の分散が最大になるときの z を第一主成分という. このときの係数を $l_{1i} (i = 1, 2, \dots, p)$ で表すと,

$$z_1 = l_{11} x_1 + l_{12} x_2 + \dots + l_{1p} x_p \quad (103)$$

となる.

次に z_1 とは無相関な z のうちで, 式 (103) を満たす最大の分散を持つ z_2 が決定できる. この z_2 を第二主成分という. この時の係数を $l_{2i} (i = 1, 2, \dots, p)$ とすると z_2 は,

$$z_2 = l_{21} x_1 + l_{22} x_2 + \dots + l_{2p} x_p \quad (104)$$

と表すことができる. 以下同様にして第 m 成分 z_m までで全変動の大部分が説明できればこれ以上を求める必要はない. ここで, z_m を,

$$z_m = l_{m1}x_1 + l_{m2}x_2 + \cdots + l_{mp}x_p \quad (105)$$

と書く. 従って各係数は,

$$l_{\alpha 1}^2 + l_{\alpha 2}^2 + \cdots + l_{\alpha p}^2 = \sum_{k=1}^p l_{\alpha k}^2 = 1 \quad (106)$$

を満たし 各主成分は 以下の条件を満たすように定まる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{第一主成分 } z_1 \text{ の分散が最大である.} \\ \text{第 } i \text{ 主成分と第 } j \text{ 主成分 } (i \neq j) \text{ は直交する (無相関である).} \end{array} \right.$$

各主成分の計算は, $p \times p$ の分散共分散行列の固有値問題に帰着する. これについては次小節に記すこととする.

全球再解析データに対して EOF 解析をする際には注意が必要である. なぜなら, 全球再解析データはどの緯度帯でも, 経度方向には同じ数のグリッドが存在するからである. 地球は球形であるので, 全球再解析データのままでは, 高緯度になるほど各グリッドあたりの面積が小さくなる. そのため, 面積荷重を考慮せずに EOF 解析を行ってしまうと, 低緯度と比較して高緯度の変動が相対的に大きく見積もられてしまい, 実際に変動を特徴付けるパターンとは異なるパターンが現れる恐れがある. このグリッドの偏りを修正するために, 緯度方向に面積荷重 $\sqrt{\cos \theta}$ をデータにかけて偏りを解消する.

EOF 解析における固有ベクトルの計算方法

一般に, p 変数データ, すなわち N 個の各標本について, p 種類の変数 x_1, x_2, \dots, x_p が測定されたとし, そのデータに基づき, 主成分 $z_1, z_2, \dots, z_m (m \leq p)$ を求める方法について以下で述べる.

まず, 得られたデータより各変数の分散共分散 σ_{ij} を求め, それを

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{pmatrix} \quad (107)$$

と表す. ここでの σ_{ij} は各変数の分散共分散の不偏推定値であり,

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{N-1} \left\{ \sum_{\lambda=1}^n (x_{i\lambda} - \bar{x}_i)(x_{j\lambda} - \bar{x}_j) \right\} \quad (108)$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{\lambda=1}^N x_{i\lambda} \quad (109)$$

とし, さらに相関行列を求め, それを

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & r_{pp} \end{pmatrix} \quad (110)$$

$$(r_{ii} = 1; i = 1, 2, \dots, p)$$

と表す.

ここで, p 個の変数 x_1, x_2, \dots, x_p からなるベクトル変数を

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad (111)$$

とする. ここで, \mathbf{X} のとりうる量は,

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{p1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{p2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{1N} \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{pN} \end{pmatrix}$$

また, 各主成分を式 (101) の形で求めるために各主成分の変量 x_i の係数をそれぞれベクトル

$$\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} l_{11} \\ l_{21} \\ \vdots \\ l_{p1} \end{pmatrix}, \mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} l_{12} \\ l_{22} \\ \vdots \\ l_{p2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{l}_m = \begin{pmatrix} l_{1m} \\ l_{2m} \\ \vdots \\ l_{pm} \end{pmatrix}$$

で表し, l_α の転置行列を l_α^T で表すと主成分は

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1^T \\ \mathbf{l}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{l}_m^T \end{pmatrix} \mathbf{X} \quad (112)$$

と書くことができる. ただし, 各 \mathbf{l}_α^T は単位ベクトル ($\mathbf{l}_\alpha^T \cdot \mathbf{l}_\alpha = 1$) とする.

これより, 各成分 z_α が条件 (106) を満たすように係数を求めればよい. したがって,

$$V\{z_1\} = v\{\mathbf{l}_1^T \mathbf{X}\} = \mathbf{l}_1^T V\{\mathbf{X}\} \mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_1^T \mathbf{S} \mathbf{l}_1 \quad (113)$$

z_1 の分散 $V\{z_1\}$ が最大になるような \mathbf{l}_1 を求めるために, ラグランジュの未定乗数法を用いる (次小節参照). ここで, ラグランジュ未定乗数を λ として,

$$v = \mathbf{l}_1^T \mathbf{S} \mathbf{l}_1 - \lambda(\mathbf{l}_1^T \mathbf{l}_1 - 1) \quad (114)$$

の両辺を \mathbf{l}_1^T で微分すると, 微分方程式

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{l}_1^T} = (\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{l}_1 \quad (115)$$

\mathbf{I} : p 次の単位行列

が得られ, ラグランジュの未定乗数法よりこの微分方程式が 0 になるときに z_1 の分散 $V\{z_1\}$ は最大になる. すなわち, 以下の連立方程式

$$(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{l}_1 = 0 \quad (116)$$

を解けばよい. ここで, 式 (112) のベクトル \mathbf{l}_1 の要素がすべて 0 以外の解を持つためには λ が固有方程式

$$|\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \quad (117)$$

の解 (固有値) でなければならない. また, z_1 の分散 $V\{z_1\}$ を最大にするものが存在するとすれば, 式 (115) より

$$V\{z_1\} = \lambda \quad (118)$$

であり, 式 (117) の固有値に等しくなるので, z_1 における係数ベクトル \mathbf{l}_1 としては, 式 (117) の最大の固有値 λ_1 に対応する単位固有ベクトルとして第一主成分 z_1 を決定することができる. 一方, 式 (117) の固有値を展開すると λ についての p 次方程式になるので, p 個の固有値 (重複するものを含めて数えると) が存在し, しかも \mathbf{S} は非負の対称行列であるから固有値はすべて非負の実数である. その中の最大のものを λ_1 として \mathbf{l}_1 を求める. さらに大きさの順に $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ を抽出し, $\lambda_k (1 \leq k \leq m)$ に対応する単位固有ベクトルを第 k 主成分 z_k における係数ベクトル \mathbf{l}_k として, 全部で m 個の主成分を求めるとこれらは条件を満たす.

ラグランジュの未定乗数法

関数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ について, 条件 $h(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$ のもとで, その極大, もしくは極小を求めるために, 以下の関数を導入する.

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_p) + \lambda h(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (119)$$

この仮定した関数において, z を最大にすることは, y を $h = 0$ のもとで極大, もしくは極小にすることと同値である. したがって,

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial z}{\partial x_p} = h(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0 \quad (120)$$

を解いて, x_1, x_2, \dots, x_p を求めると, この x_1, x_2, \dots, x_p に対する y の値が極大, もしくは極小となる. さらに条件が次のように二個以上あるときにおいても,

$$h_1(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0, h_2(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0, \dots, h_p(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0 \quad (121)$$

上記の場合と同じように, 次の関数について,

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_p) + \lambda_1 h_1(x_1, x_2, \dots, x_p) + \lambda_2 h_2(x_1, x_2, \dots, x_p) + \dots + \lambda_p h_p(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (122)$$

上記の場合と同じように式 (120) を解くことにより y を極大, もしくは極小にすることができる.

周期関数と周期関数の微分の関係性

周期が $\frac{2\pi n}{T}$ の関数 $f(t)$ を考える。 $f(t)$ をフーリエ展開すると

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \quad (123)$$

また $f(t)$ の微分 $f'(t)$ は以下のように表わせる。

$$f'(t) = \frac{2\pi n}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \sin \frac{2\pi n t}{T} + b_n \cos \frac{2\pi n t}{T} \right) \quad (124)$$

これら周期関数 $f(t)$ と $f'(t)$ の内積を考えると

$$\int_0^{\frac{2\pi n}{T}} f(t) f'(t) dt = [f(t) f(t)]_0^{\frac{2\pi n}{T}} - \int_0^{\frac{2\pi n}{T}} f(t) f'(t) dt \quad (125)$$

ここで関数の周期性より

$$f\left(\frac{2\pi n}{T}\right) = f(0) \quad (126)$$

これを用いれば

$$[f(t) f(t)]_0^{\frac{2\pi n}{T}} = 0 \quad (127)$$

であるから

$$\int_0^{\frac{2\pi n}{T}} f(t) f'(t) dt = 0 \quad (128)$$

よって $f(t)$ と $f'(t)$ の直行性が示された。

波形として最も基本的な正弦波の場合、正弦波の微分として現れる関数は正弦波の位相が $-\pi/2$ ずれた正弦波と直行する関数となる。

表 1: 10 日移動平均した AOI と各項との相関係数

	線形項	非線形項	外力項
相関係数	0.30	-0.05	-0.28

表 2: 5 年移動平均した AOI と各項との相関係数

	線形項	非線形項	外力項
相関係数	0.73	-0.63	-0.43



図 1: 北極振動 (プラス) の概念図 (北極振動研究ノート表紙 2004 より引用).



図 2: 北極振動 (マイナス) の概念図 (北極振動研究ノート表紙 2004 より引用).

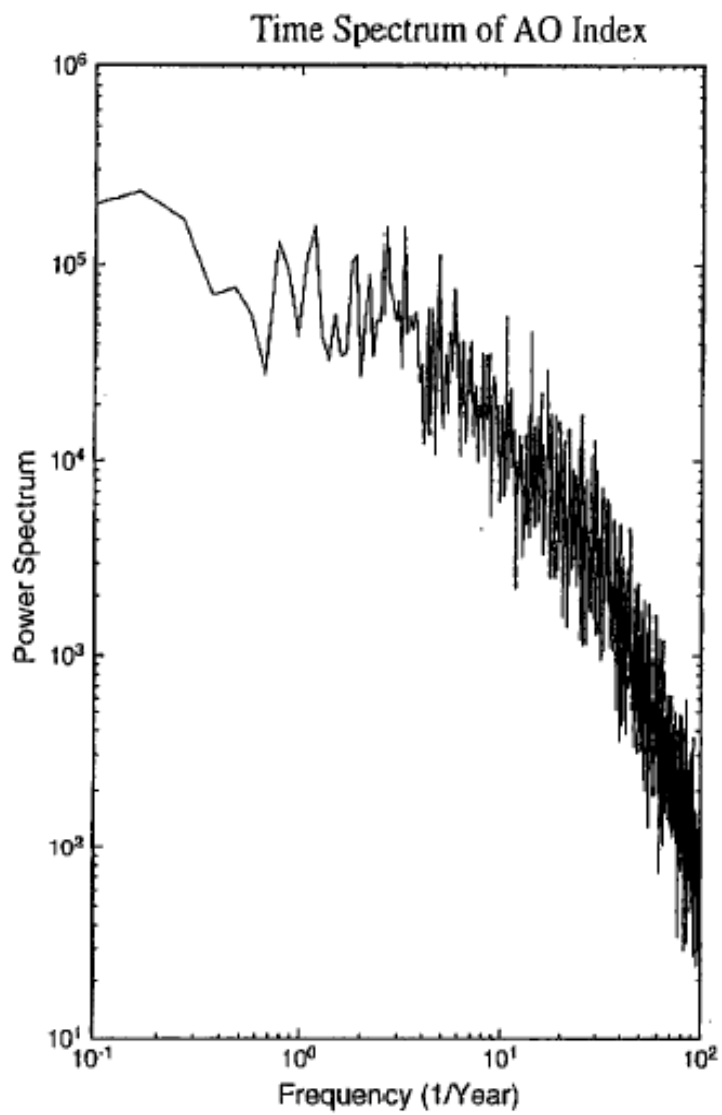


図 3: AOIのパワースペクトル。横軸が周波数 (1/Year)、縦軸がパワー。(北極振動研究ノート 2004 より引用)

Barotropic Height

EOF-1 (NCEP/NCAR)

1950 - 2010

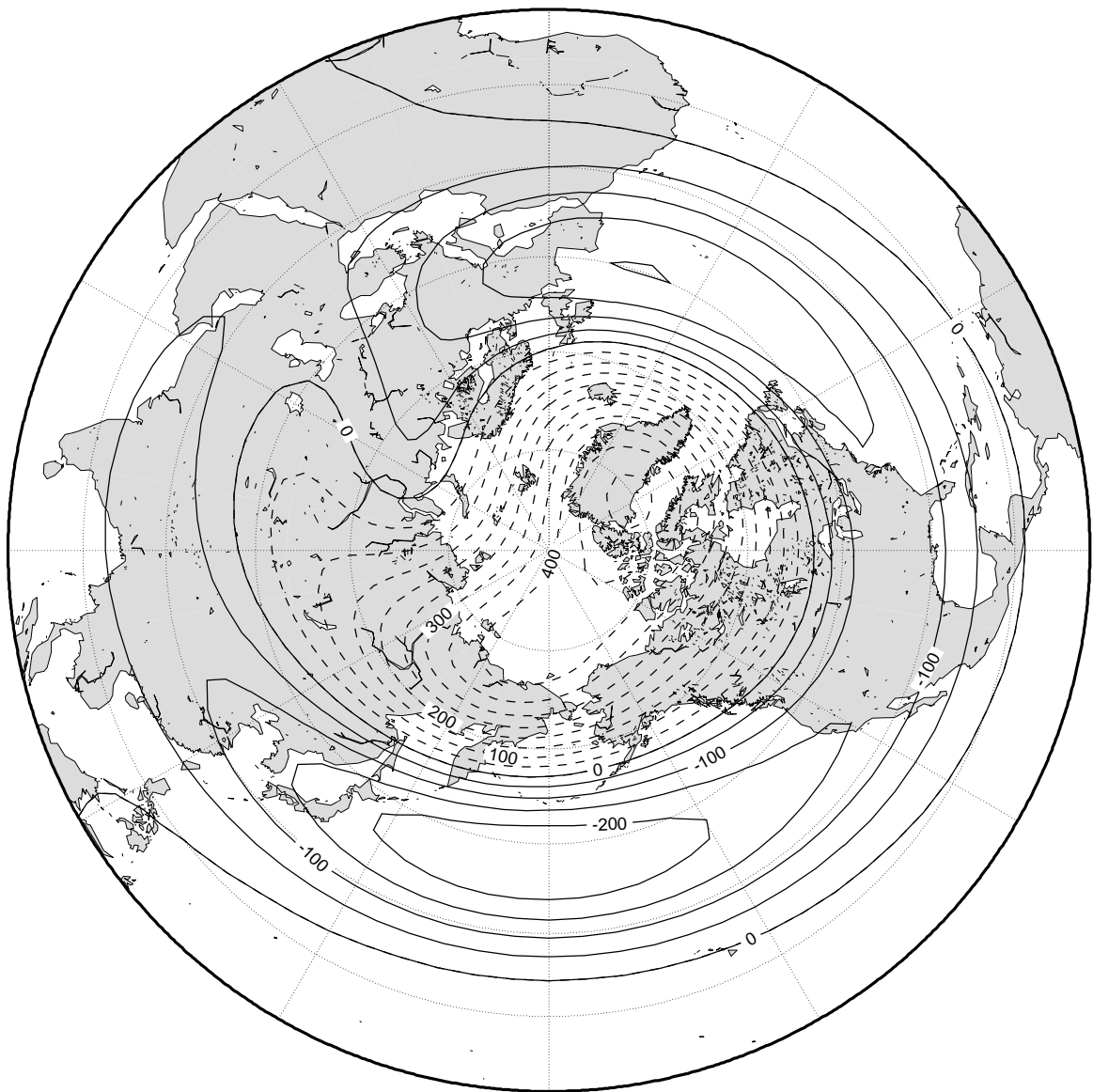


図 4: AOI 方程式に用いる AO の構造ベクトル。

Arctic Oscillation Index

Barotropic Component of the Atmosphere

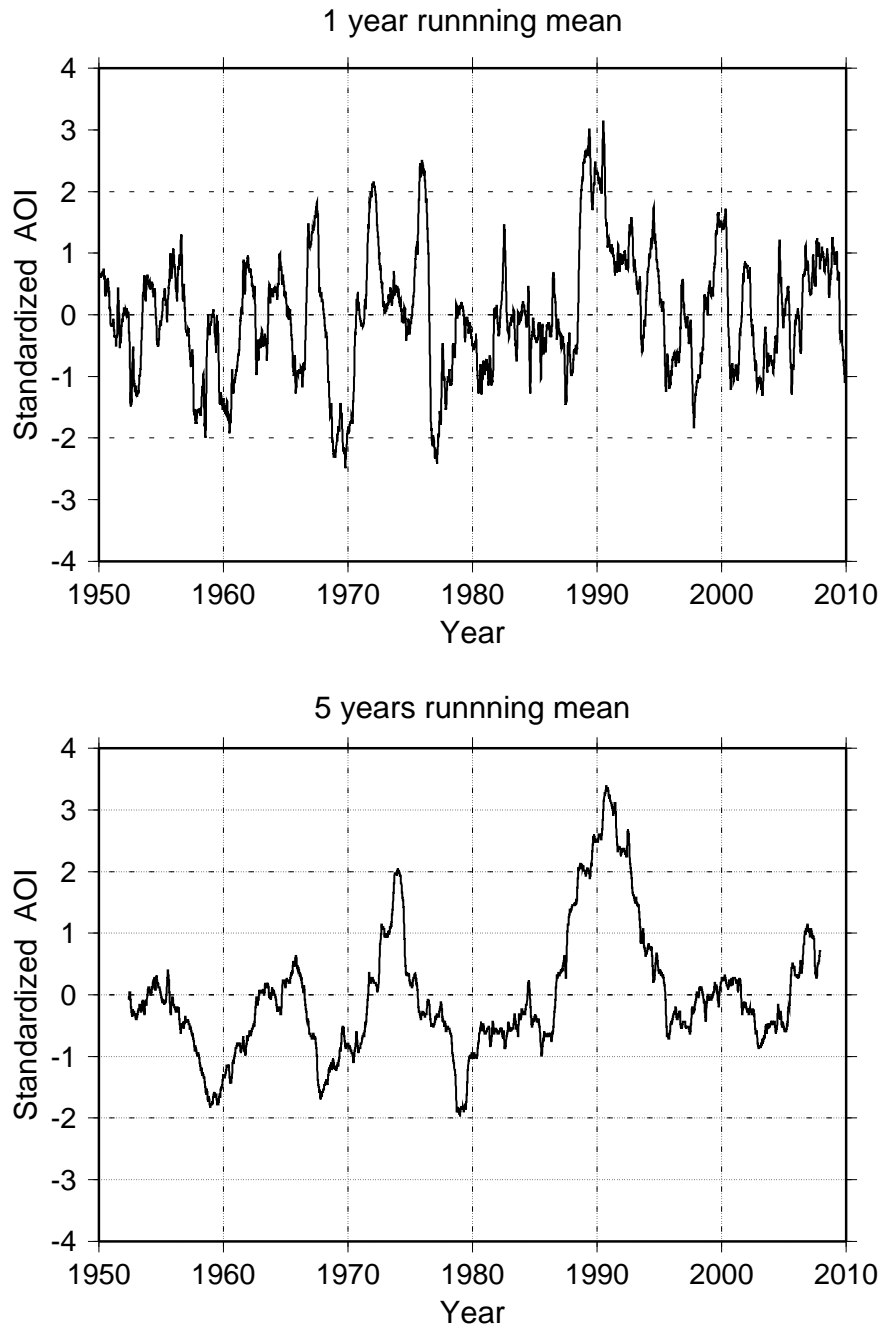


図 5: AOI の 1950 年から 2010 年までの 60 年間の時系列で、1 年移動平均 (上) 及び 5 年移動平均 (下) を施している。縦軸が正規化した AOI、横軸が年である。

AOI

Barotropic Component of the Atmosphere
5 year running mean

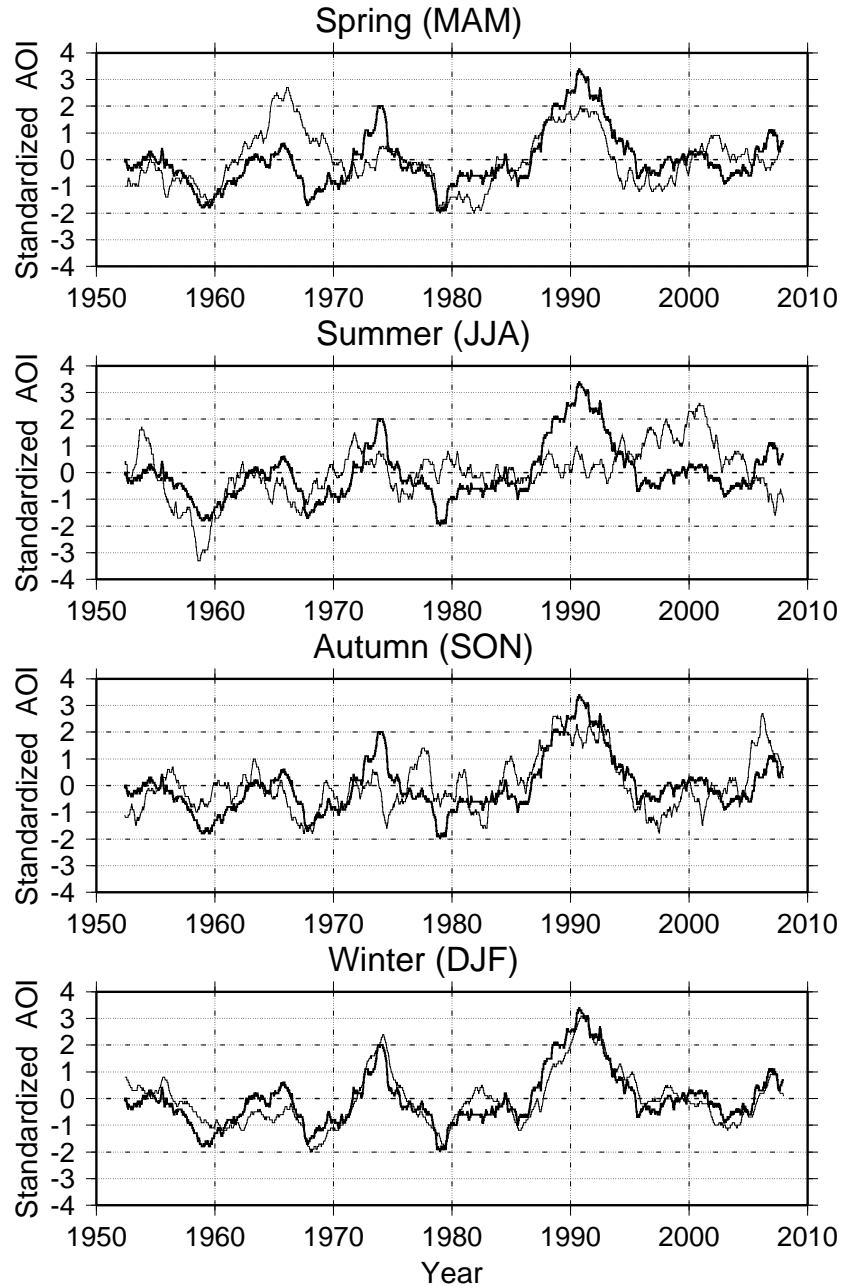


図 6: 1950 年から 2010 年までの季節別の AOI の時系列。太線は全期間の AOI。細線は各季節ごとの AOI。上から春、夏、秋、冬。

Uwind Anomaly

Regressed on AOI 1950-2010

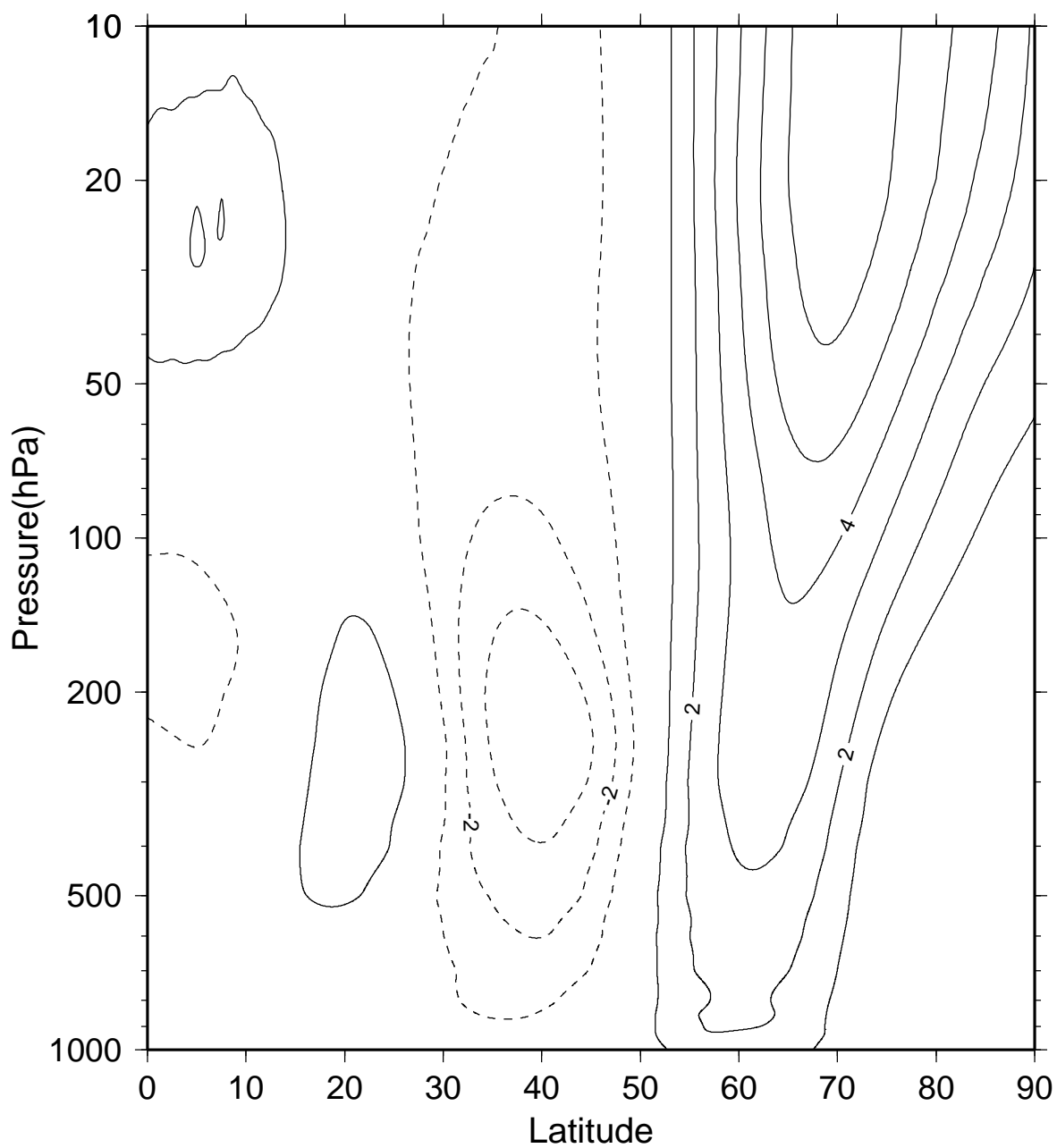


図 7: 1950 年から 2010 年までの AOI に回帰した冬の東西風のアノマリー

Geopotential Anomaly

Regressed on AOI at 500hPa 1950-2010

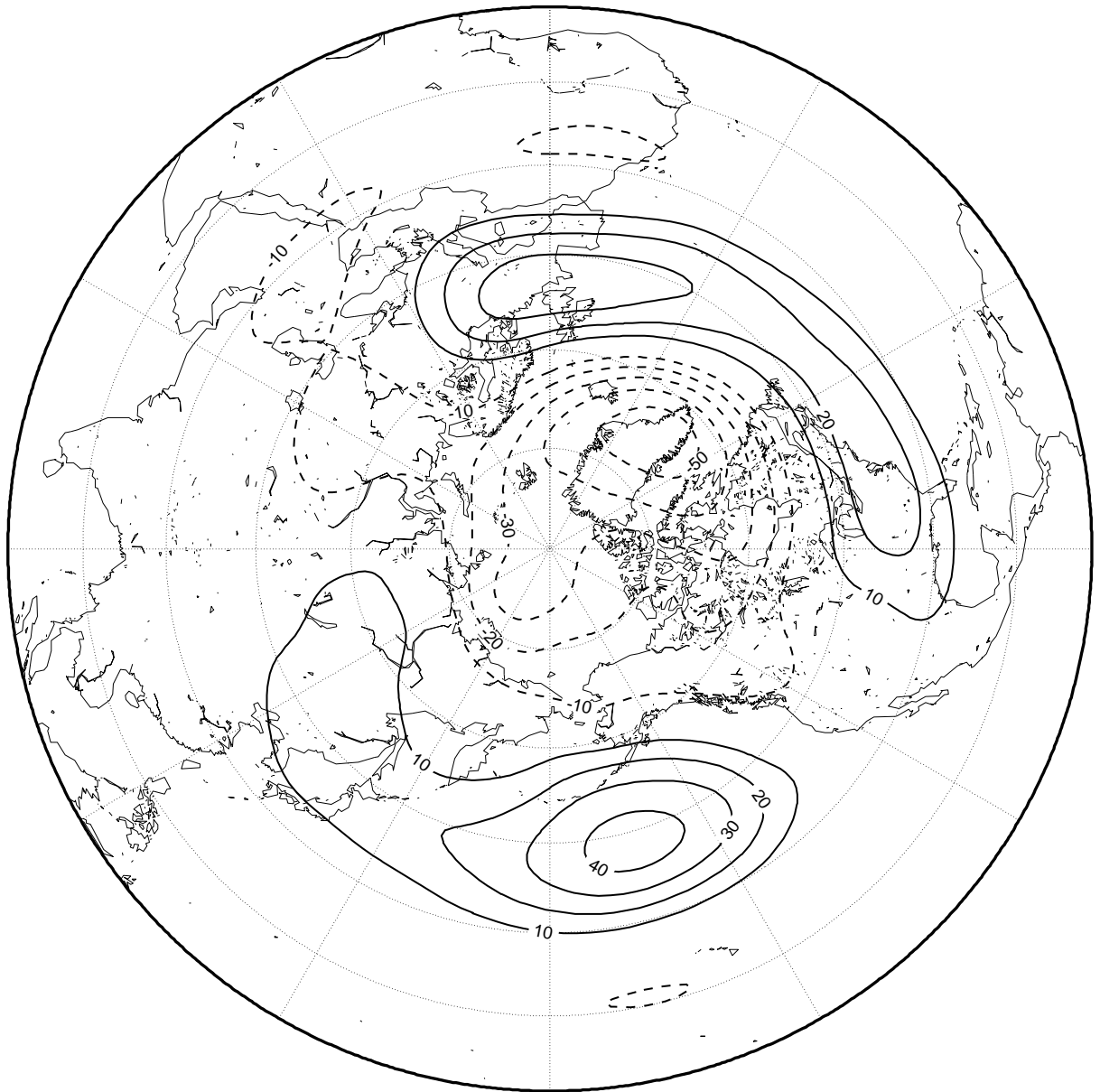
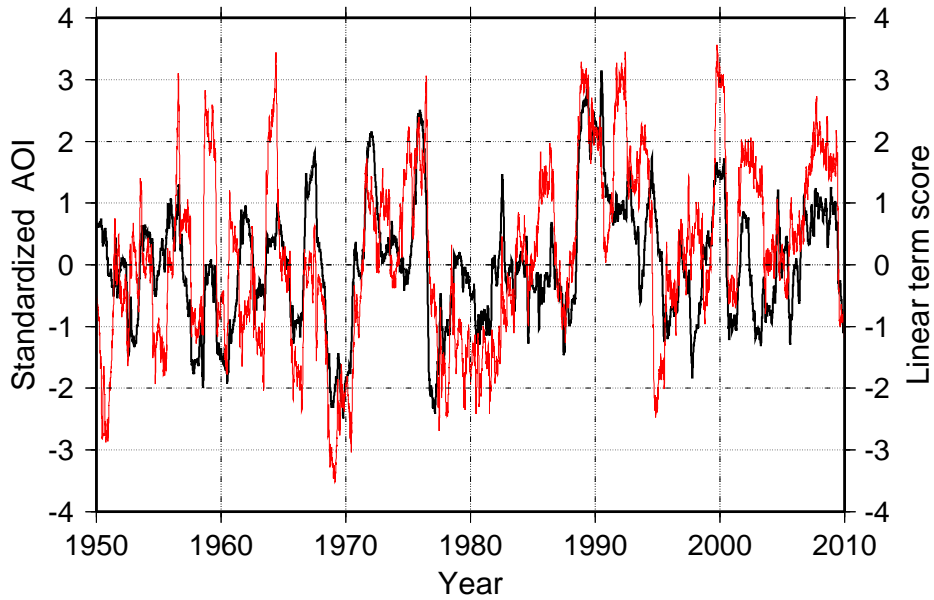


図 8: 1950 年から 2010 年までの AO に回帰した冬の 500hPa ジオポテンシャル高度のアノマリー

AOI Equation Linear term

Barotropic Component of the Atmosphere

1 year running mean



5 years running mean

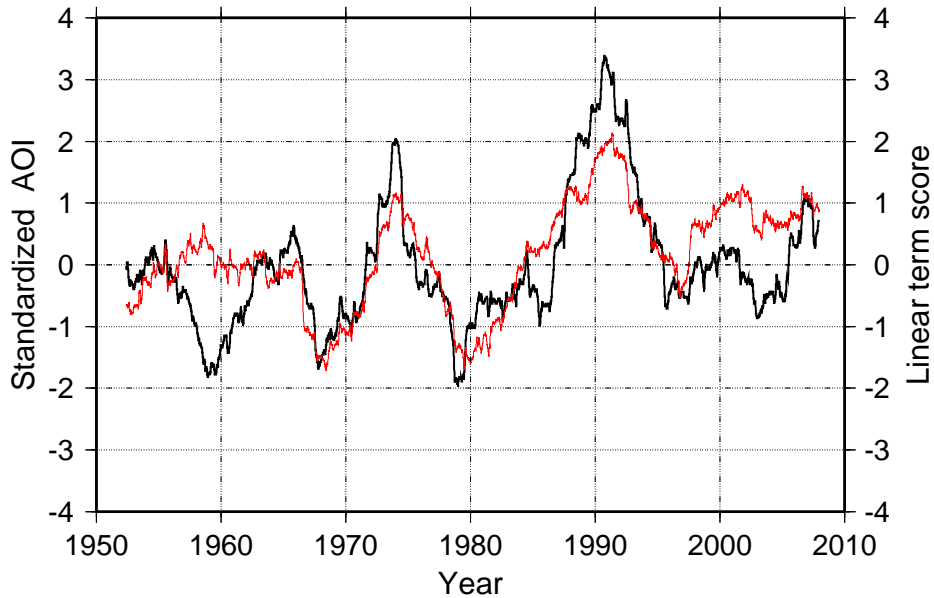
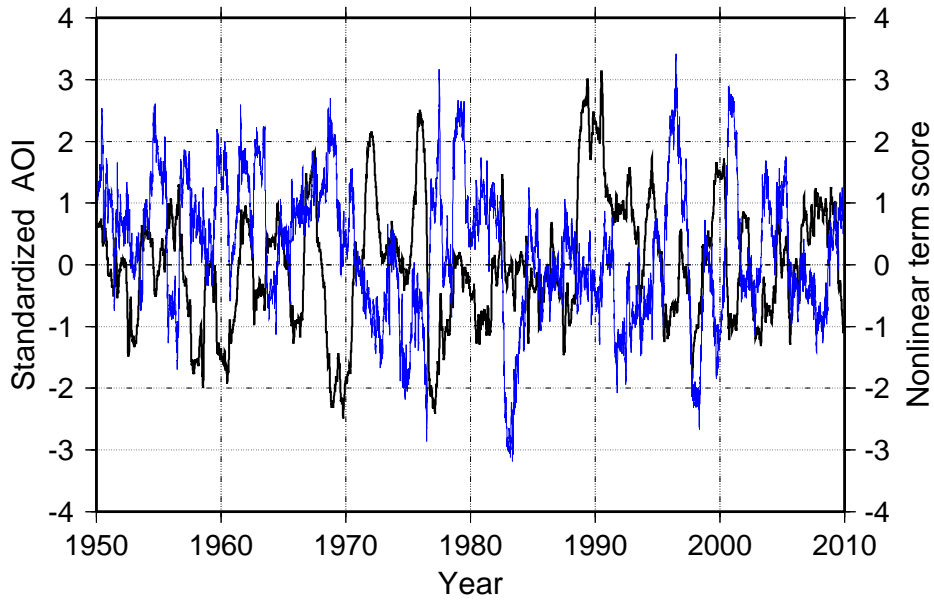


図 9: AOI と AOI 方程式線形項の 1950 年から 2010 年までの 60 年間の時系列で、1 年移動平均 (上) 及び 5 年移動平均 (下) を施している。縦軸が正規化した AOI、横軸が年である。黒線が AOI、赤線が線形項。

AOI Equation Nonlinear term

Barotropic Component of the Atmosphere

1 year running mean



5 years running mean

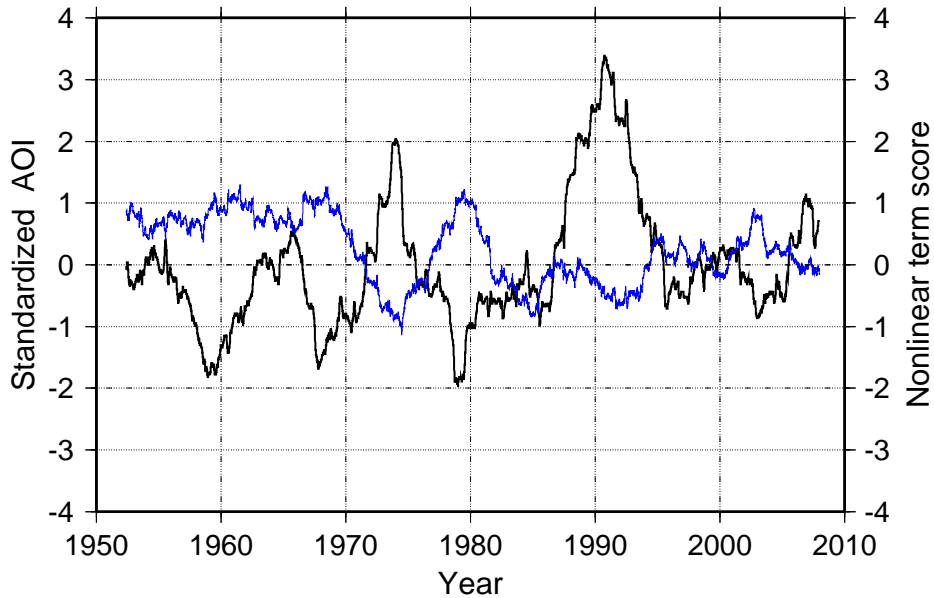


図 10: AOI と AOI 方程式線形項の 1950 年から 2010 年までの 60 年間の時系列で、1 年移動平均 (上) 及び 5 年移動平均 (下) を施している。縦軸が正規化した AOI、横軸が年である。黒線が AOI、青線が非線形項。

AOI Equation Force term

Barotropic Component of the Atmosphere

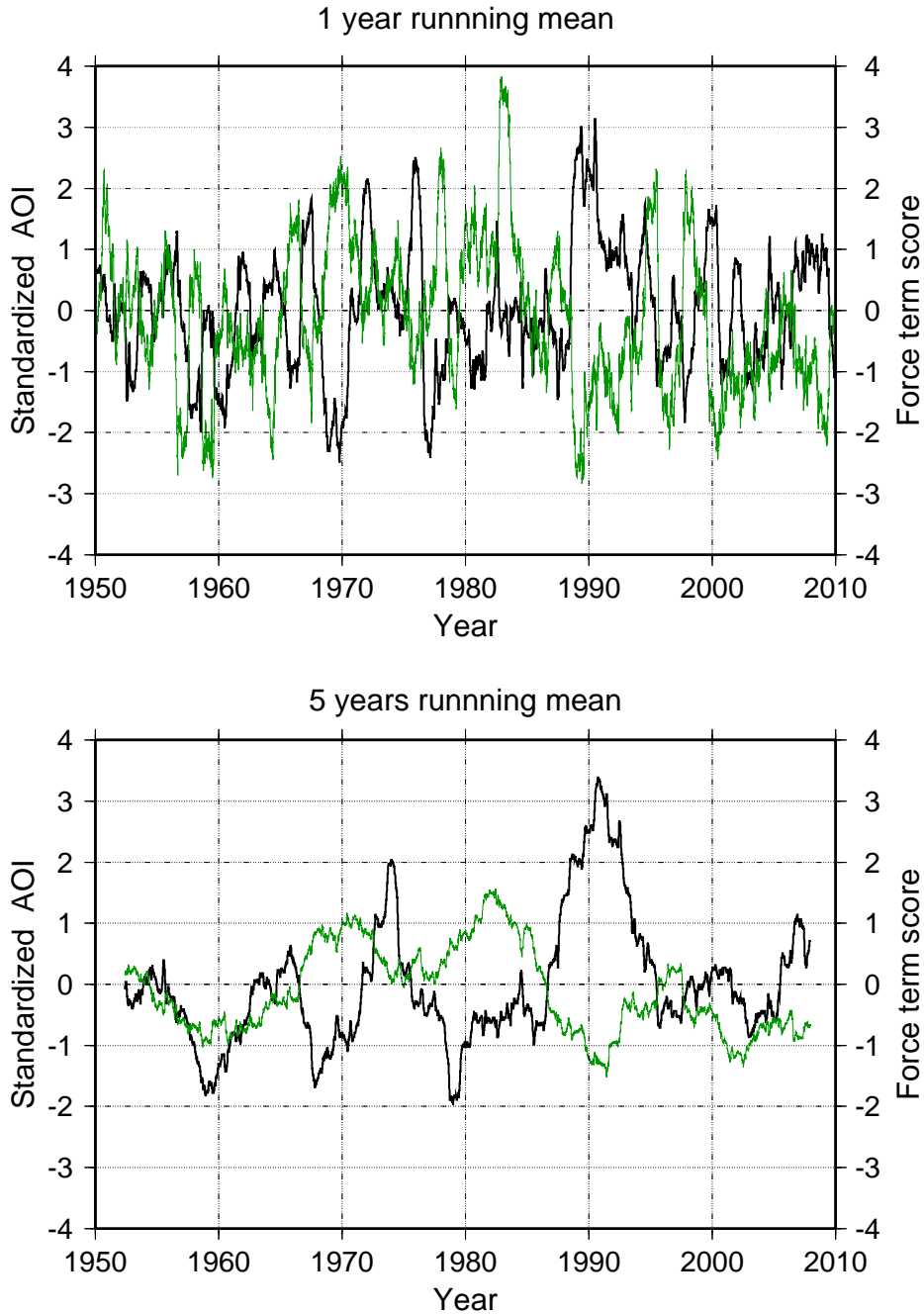


図 11: AOI と AOI 方程式外力項の 1950 年から 2010 年までの 60 年間の時系列で、1 年移動平均 (上) 及び 5 年移動平均 (下) を施している。縦軸が正規化した AOI、横軸が年である。黒線が AOI、緑線が外力項。

Correlation Coefficient

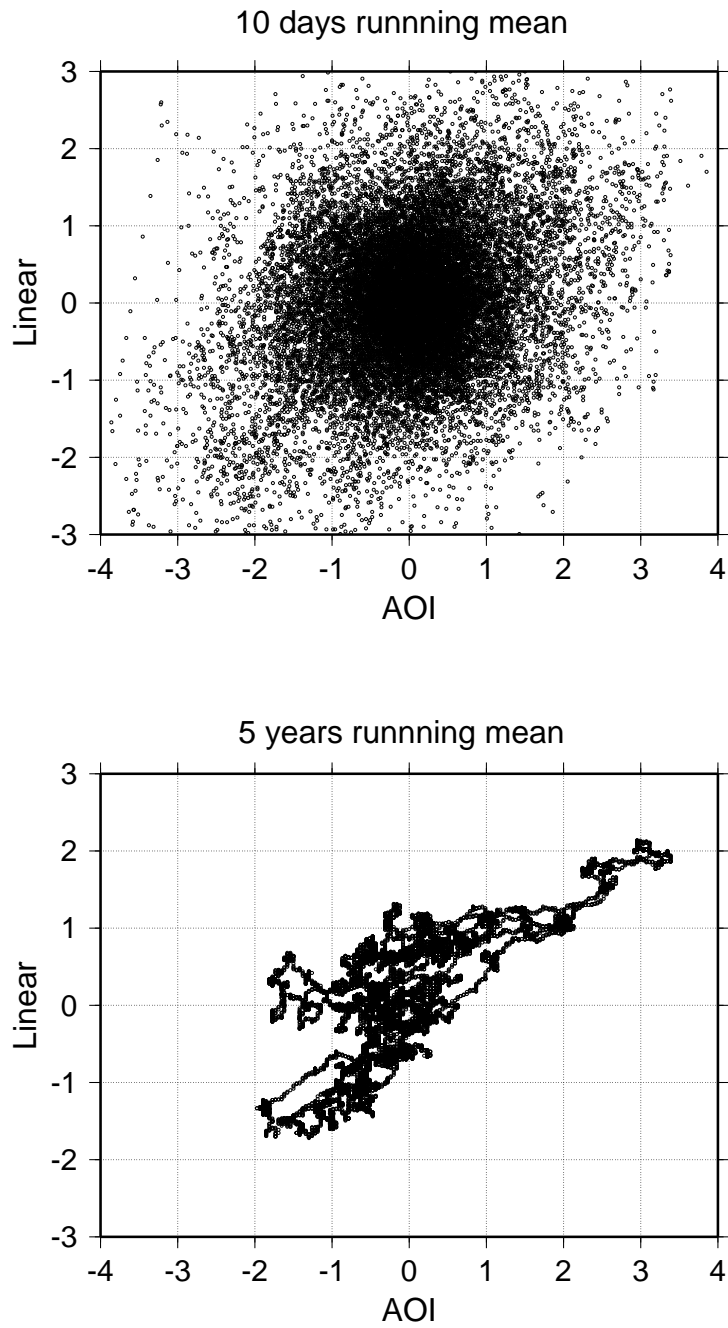


図 12: AOI と線形項スコアの散布図 (10 日移動平均 (上) と 5 年移動平均 (下))

Correlation Coefficient

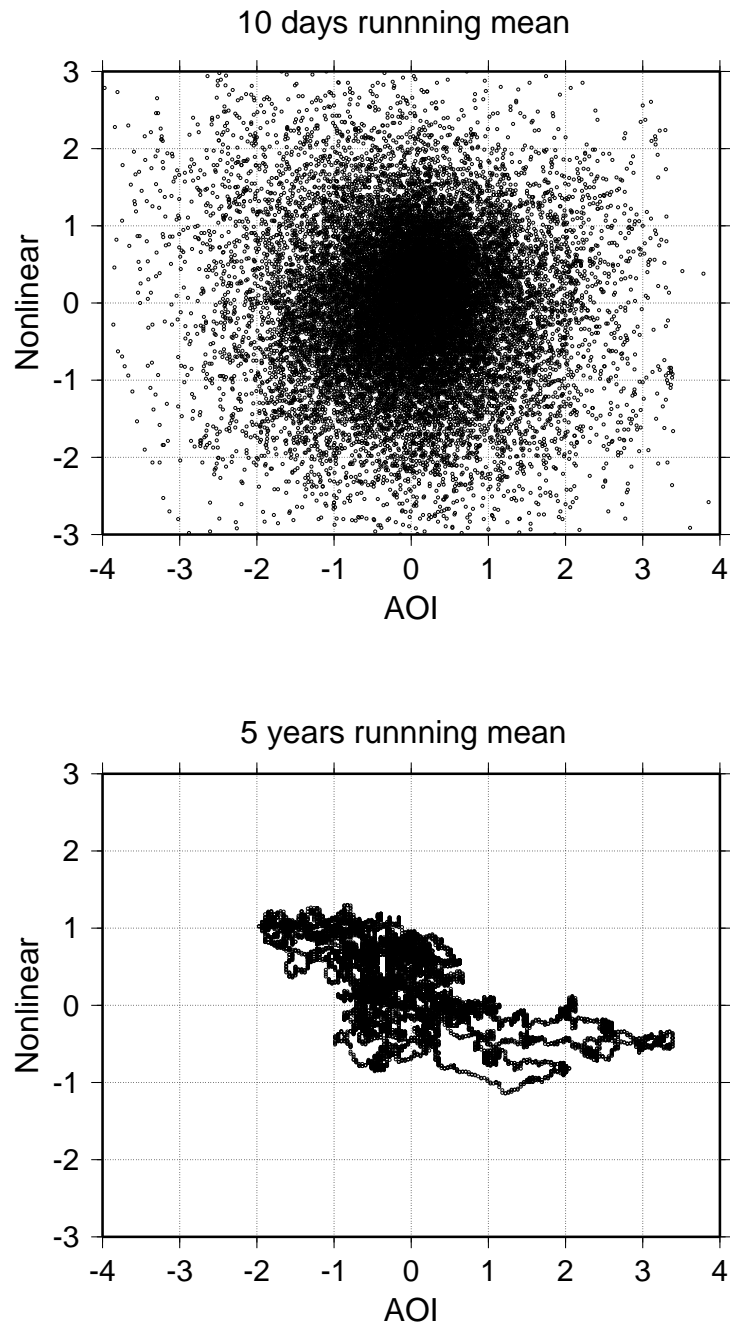


図 13: AOI と非線形項スコアの散布図 (10 日移動平均 (上) と 5 年移動平均 (下))

Correlation Coefficient

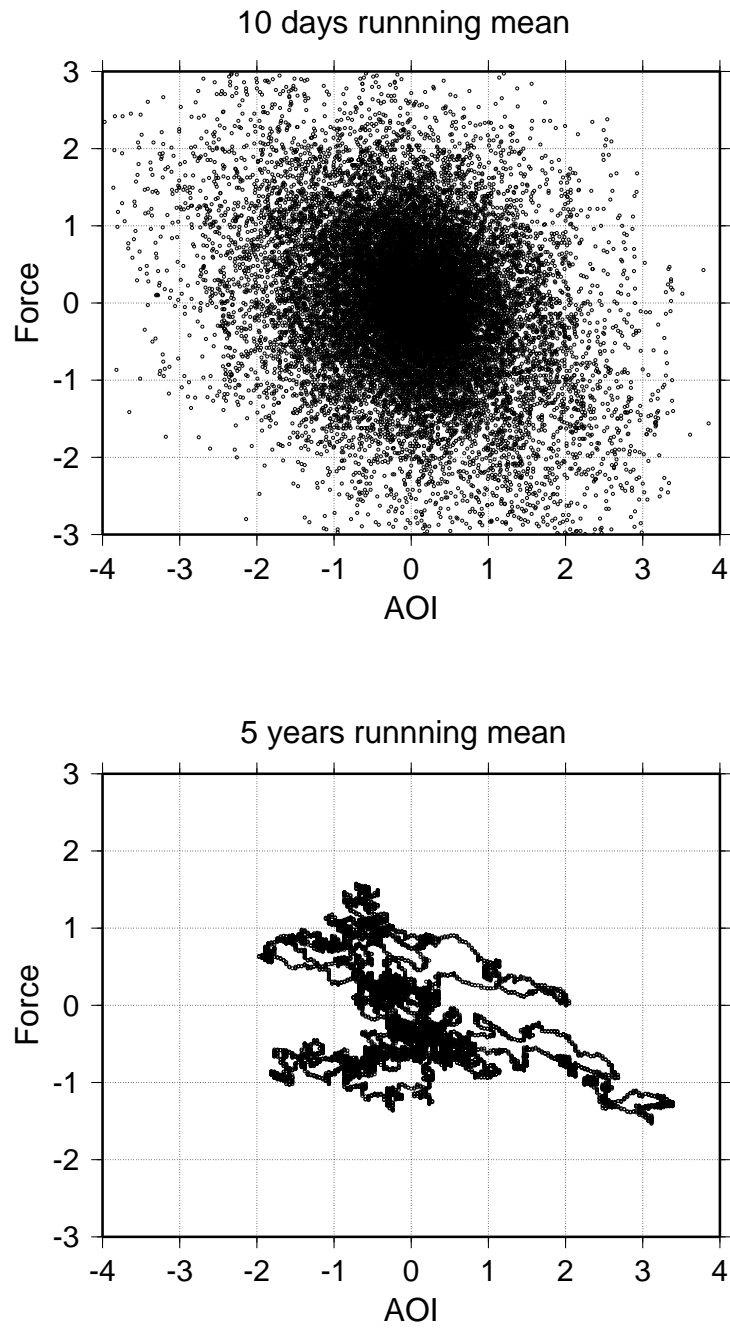


図 14: AOI と外力項スコアの散布図 (10 日移動平均 (上) と 5 年移動平均 (下))

AOI Equation score

Barotropic Component of the Atmosphere
5 year running mean

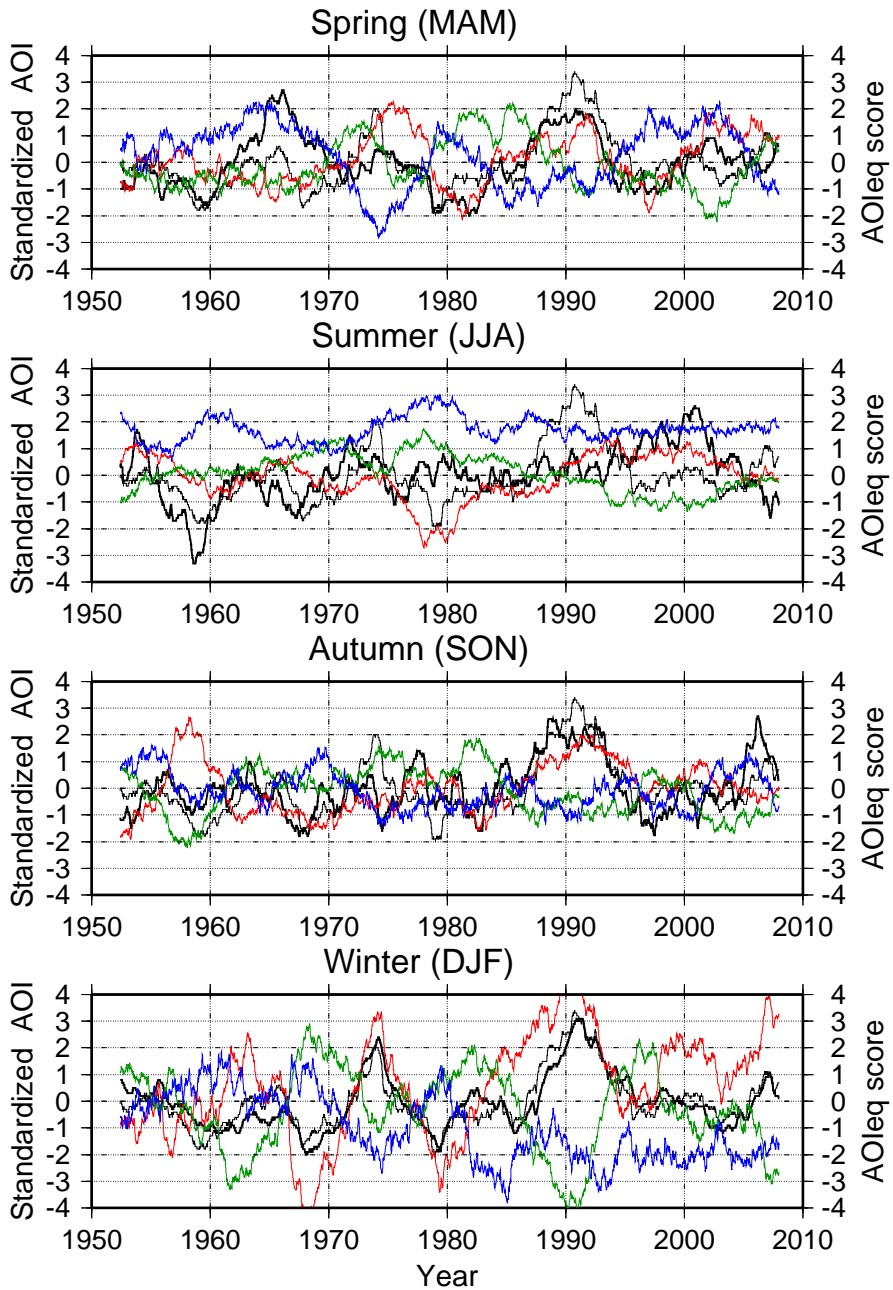


図 15: 1950 年から 2010 年までの季節別の AOI 方程式各項のの時系列。細線は全期間の AOI。太線は各季節ごとの AOI。赤線は線形項。青線は非線形項。緑線は外力項。上から春、夏、秋、冬。

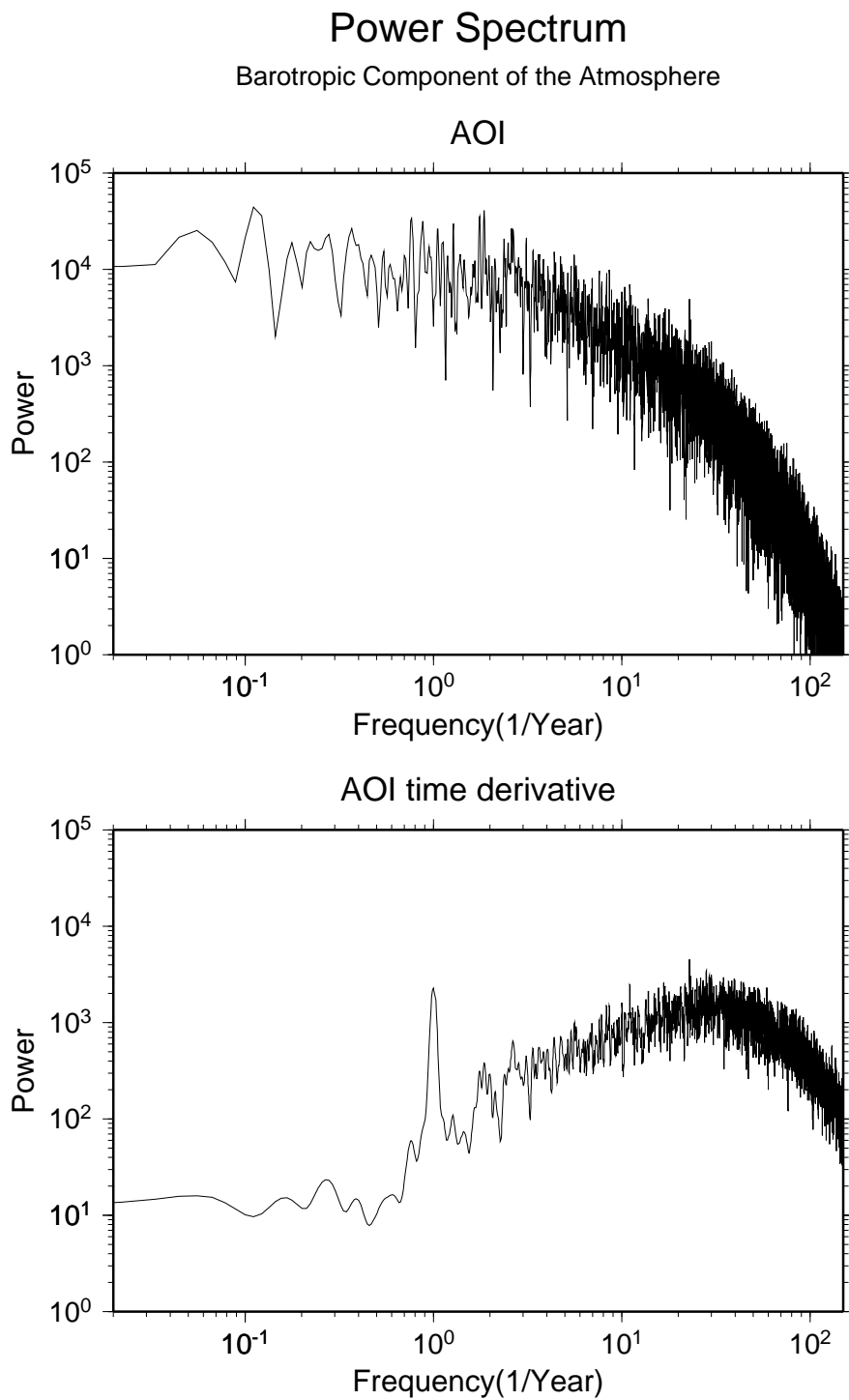


図 16: AOI(上) と AOI 方程式の時間変化項 (下) のパワースペクトル

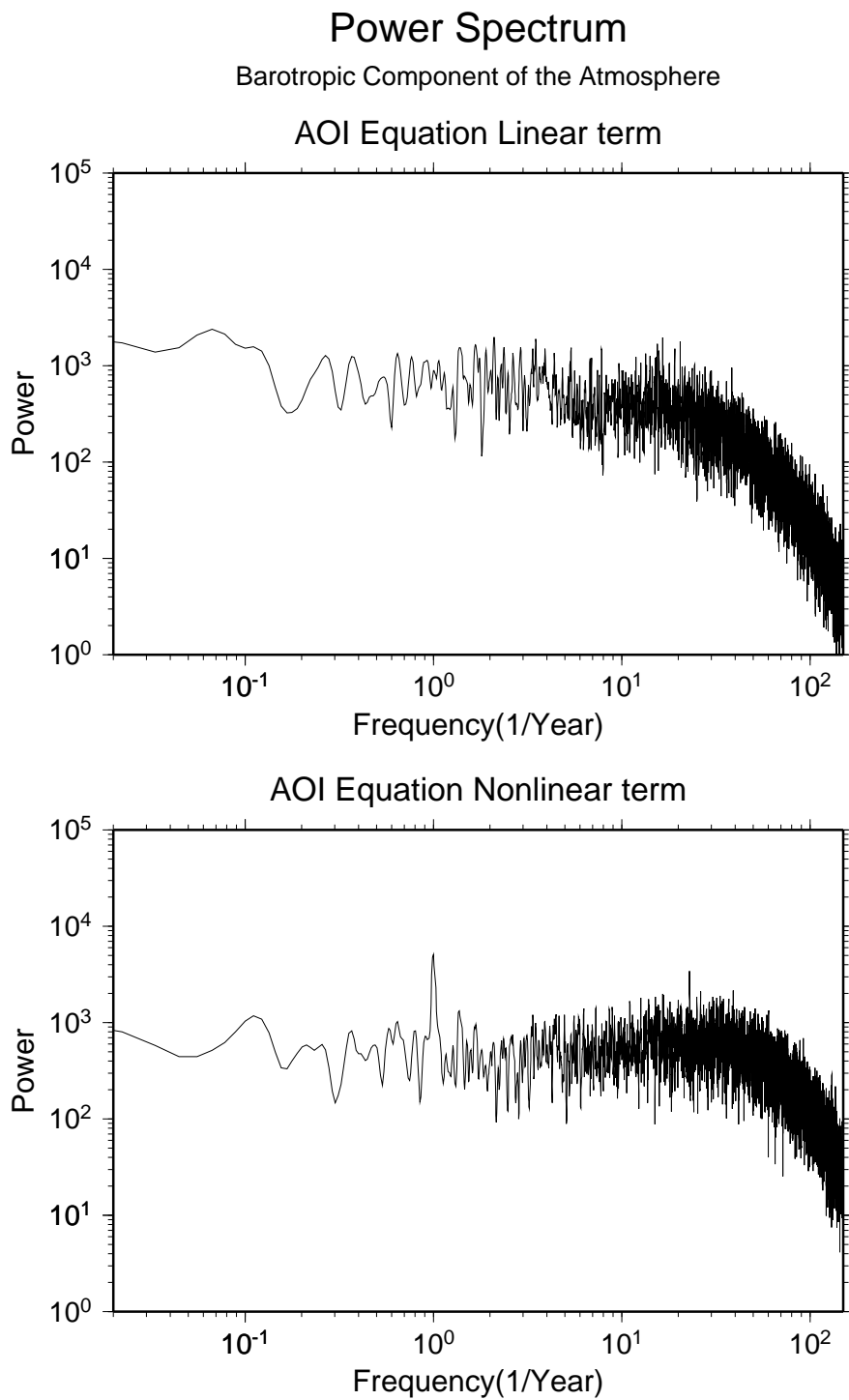


図 17: AOI 方程式の線形項 (上) と AOI 方程式の非線形項 (下) のパワースペクトル

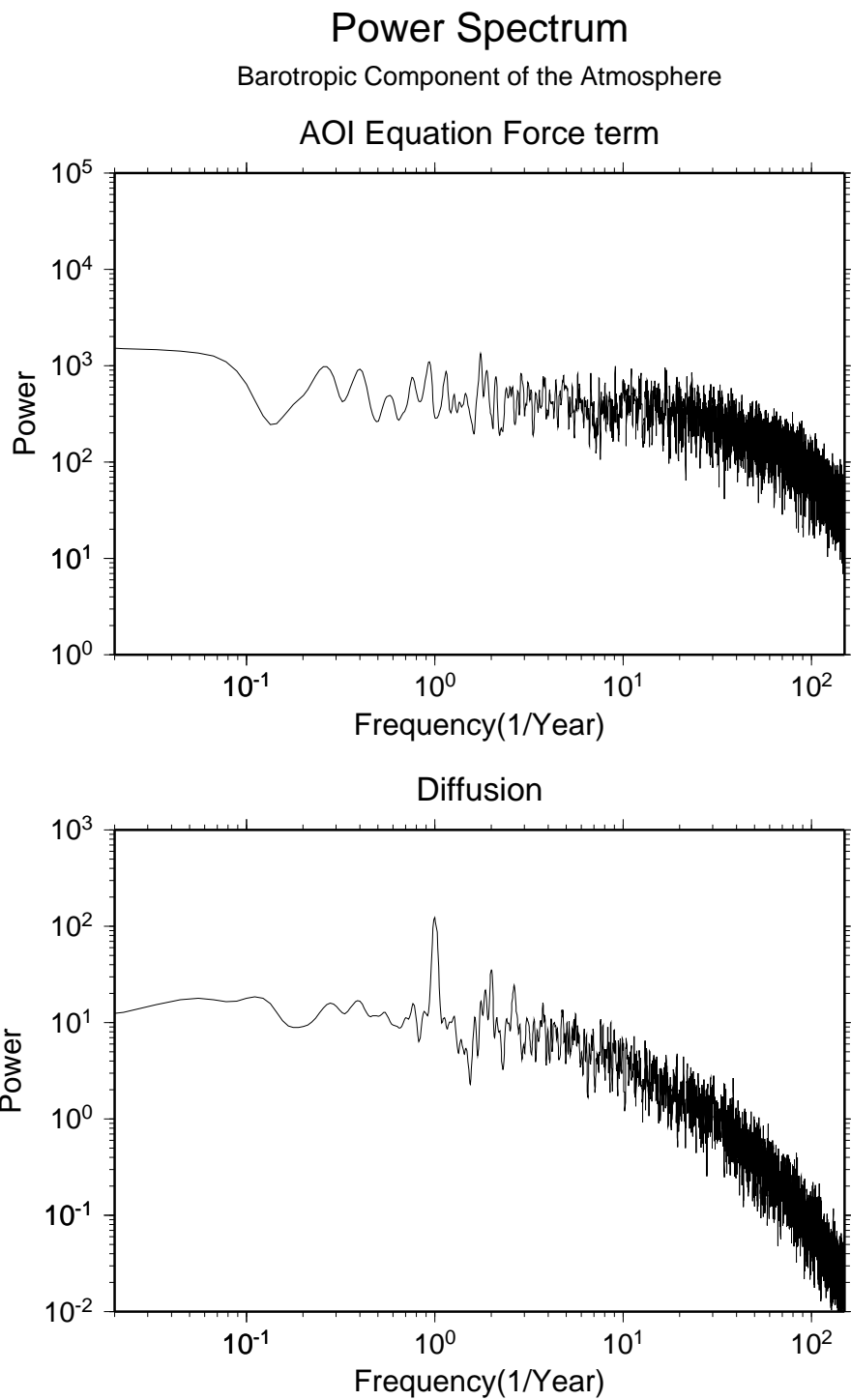
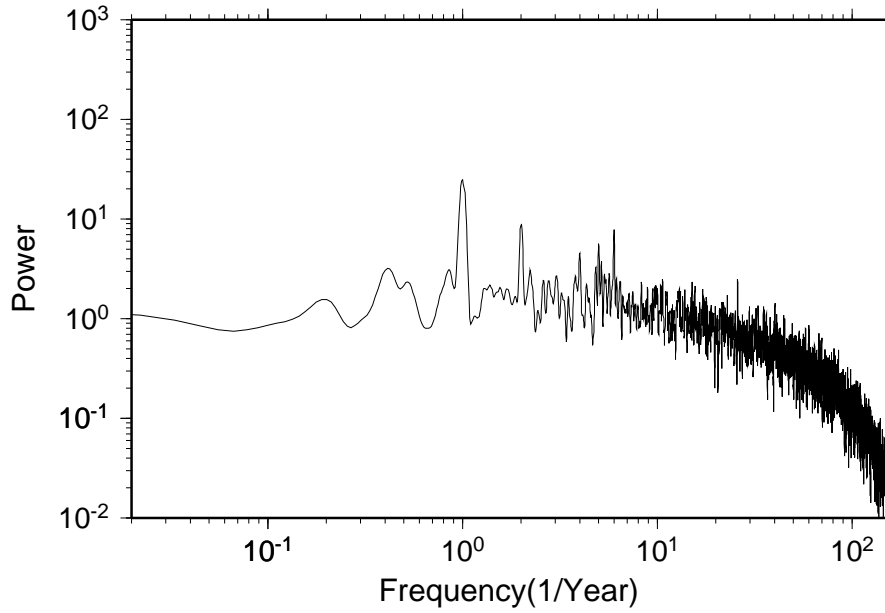


図 18: AOI 方程式の外力項 (上) と粘性項 (下) のパワースペクトル

Power Spectrum

Barotropic Component of the Atmosphere

Baroclinic



System A B

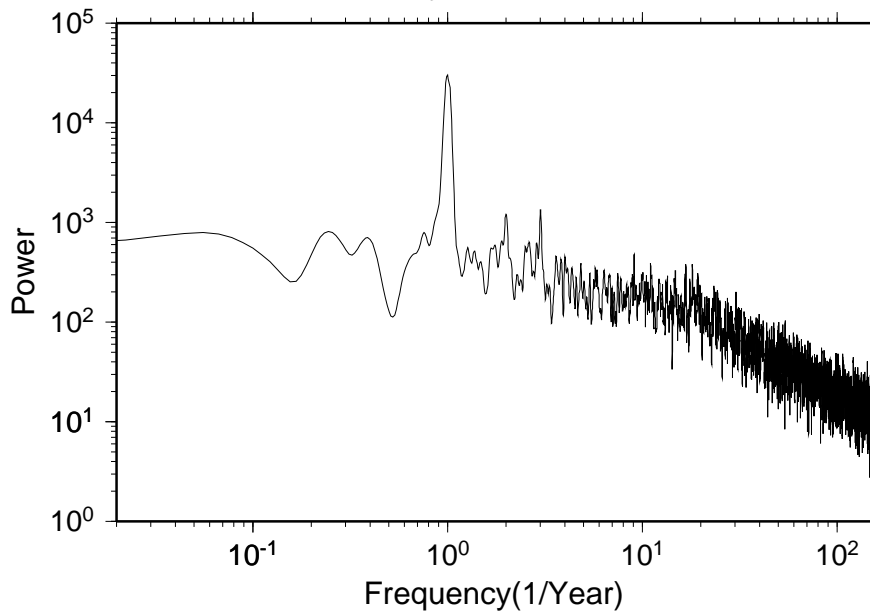


図 19: 傾圧不安定と地形海陸分布の熱的効果のパワースペクトル

Power Spectrum

Barotropic Component of the Atmosphere

Ekman

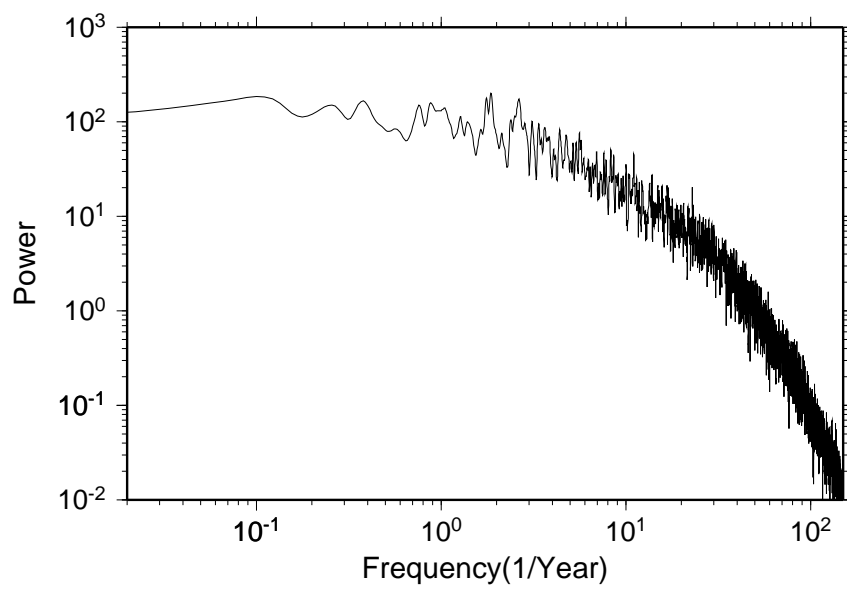
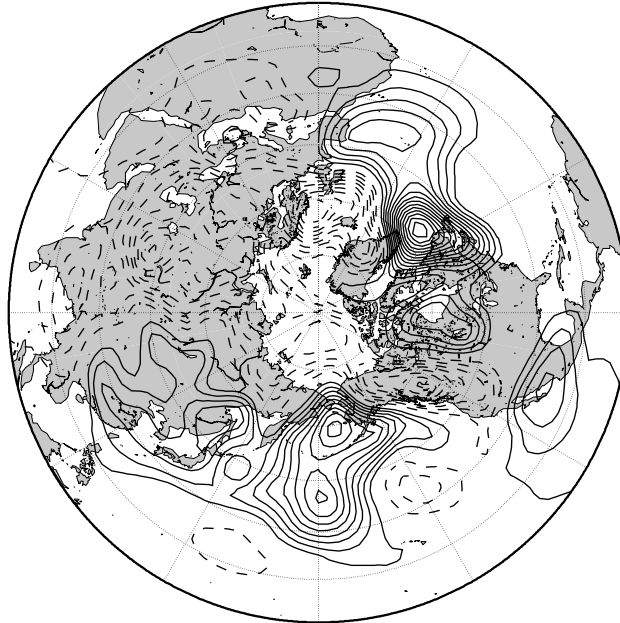


図 20: エクマン摩擦のパワースペクトル

Spatial Distribution of AOI Equation (1950-2010)

Linear Term (AOI > +1.5)



Linear Term (AOI < -1.5)

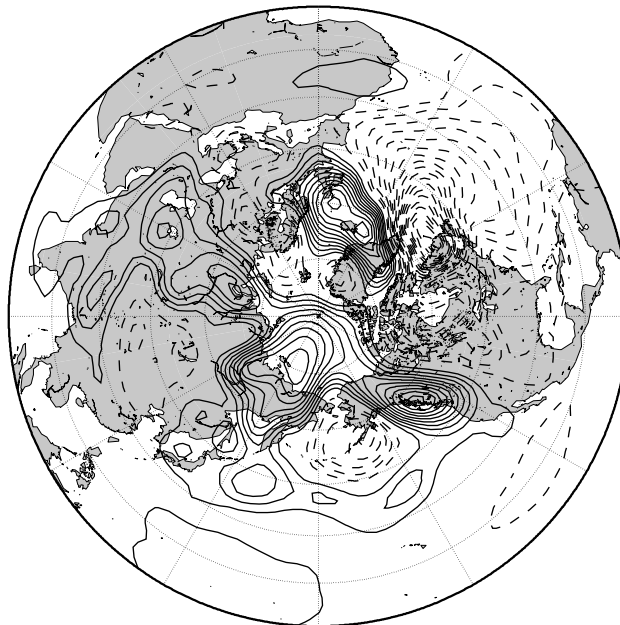
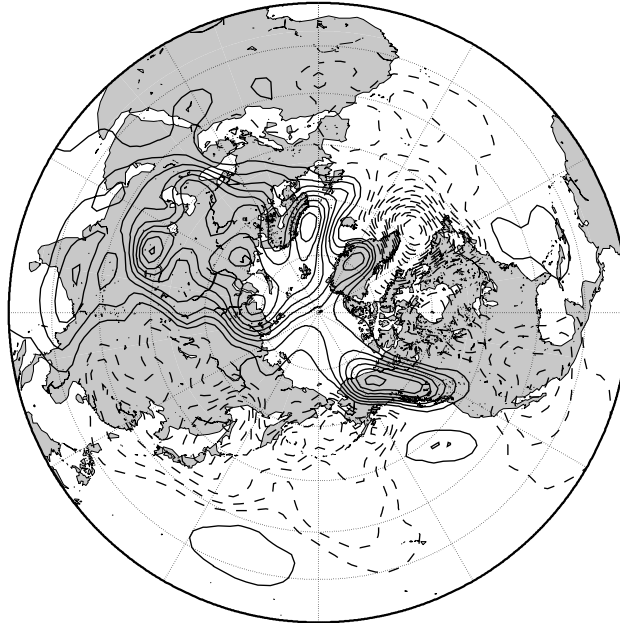


図 21: 1950 年から 2010 年までの AOI が ± 1.5 以上の時の線形項の順圧高度場

Spatial Distribution of AOI Equation (1950-2010)

Force Term (AOI > +1.5)



Force Term (AOI < -1.5)

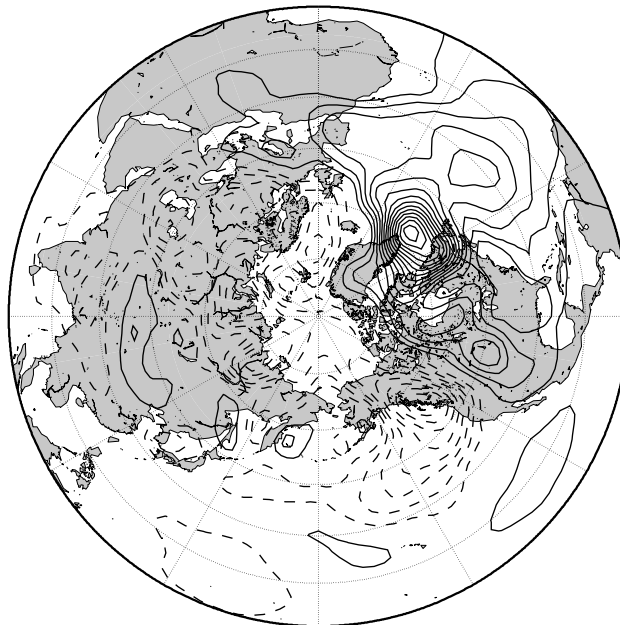
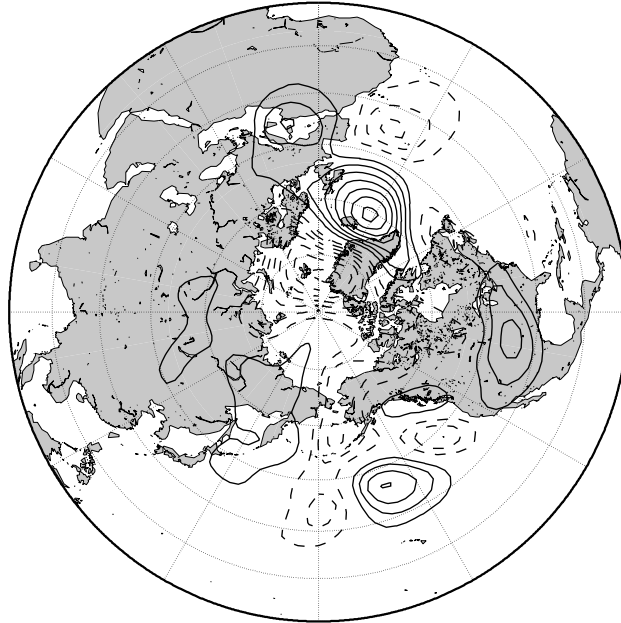


図 22: 1950 年から 2010 年までの AOI が ± 1.5 以上の時の外力項の順圧高度場

Spatial Distribution of AOI Equation (1950-2010)

Nonlinear Term (AOI > +1.5)



Nonlinear Term (AOI < -1.5)

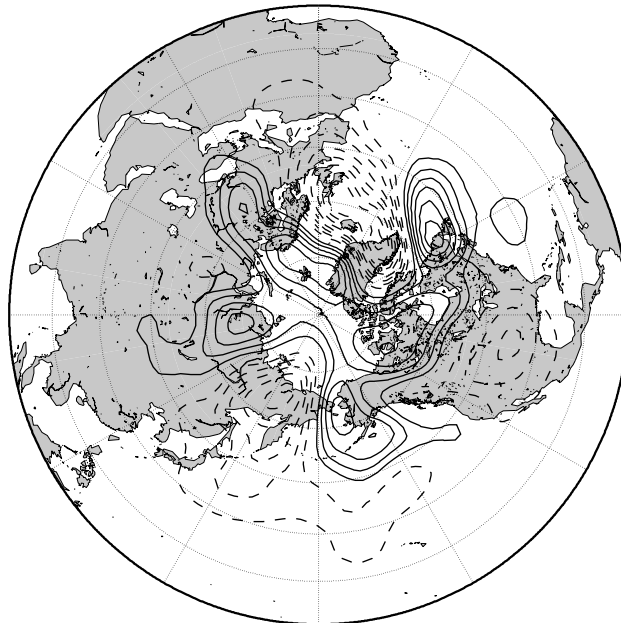
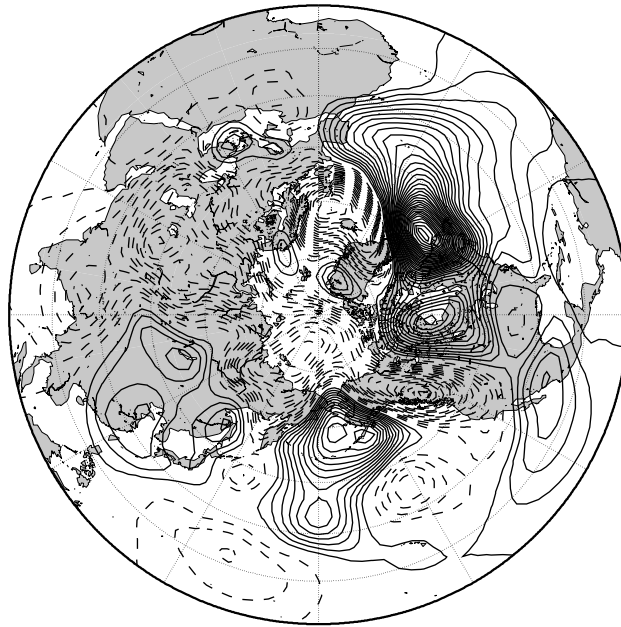


図 23: 1950 年から 2010 年までの AOI が ± 1.5 以上の時の非線形項の順圧高度場

Spatial Distribution of AOI Equation (1950-2010)

Linear Term (AOI(1.5) - AOI(-1.5))



Force Term (AOI(1.5) - AOI(-1.5))

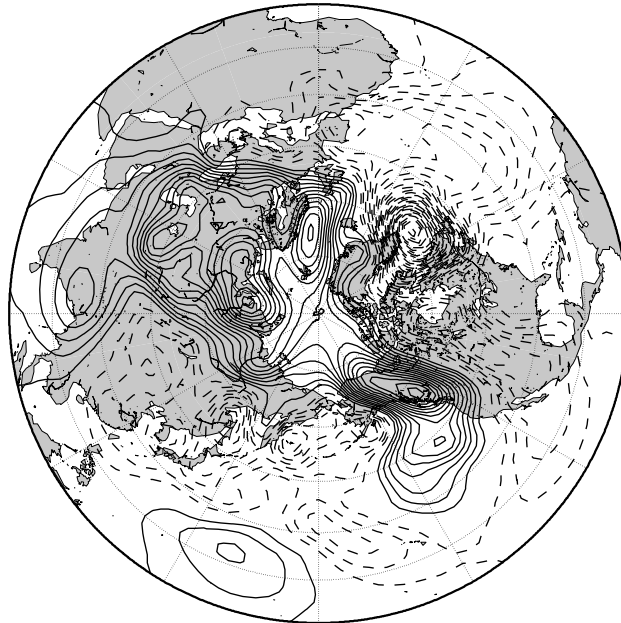


図 24: 1950 年から 2010 年までの AOI が AOI + 1.5 から -1.5 を引いた線形項と外力項の順圧高度場

Spatial Distribution of AOI Equation (1950-2010)
Nonlinear Term (AOI(1.5) - AOI(-1.5))

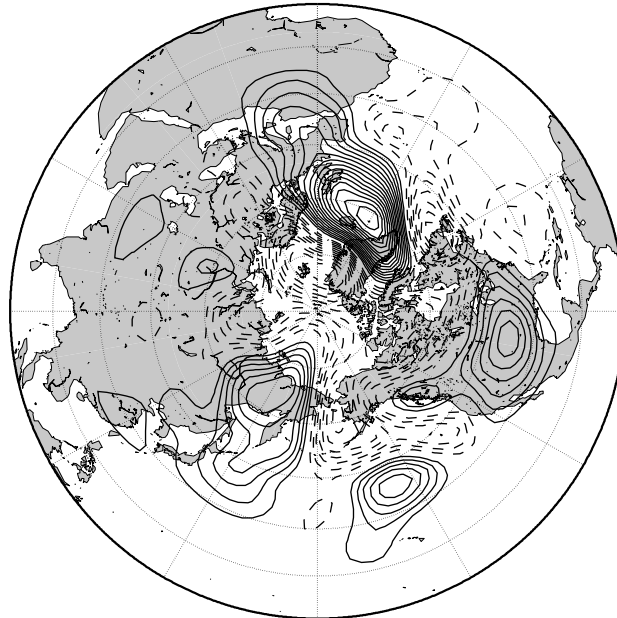


図 25: 1950 年から 2010 年までの AOI が AOI + 1.5 から -1.5 を引いた非線形項の順圧高度場

AOI Equation Linear term

Barotropic Component of the Atmosphere

5 year running mean

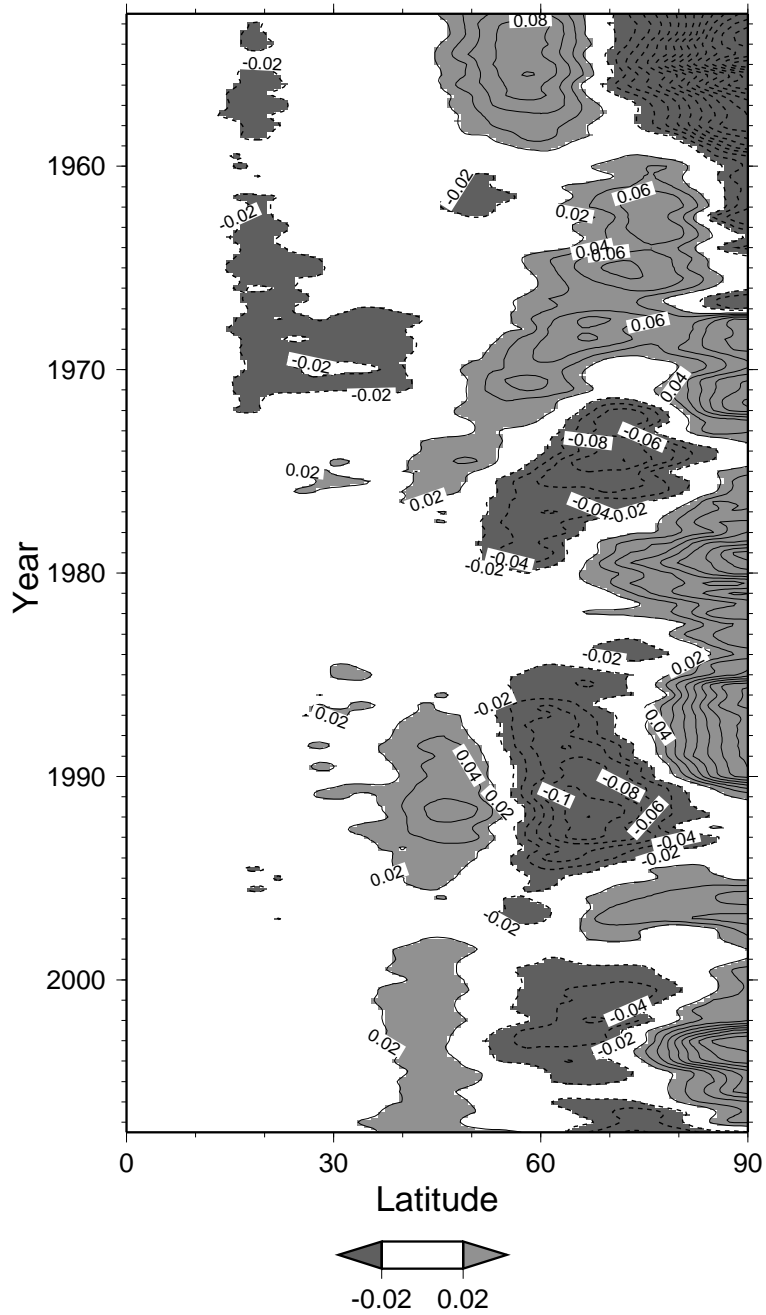


図 26: 1950 年から 2010 年までの線形項の順圧高度場のホフメラー図 (5 年移動平均)

AOI Equation Nonlinear term

Barotropic Component of the Atmosphere

5 year running mean

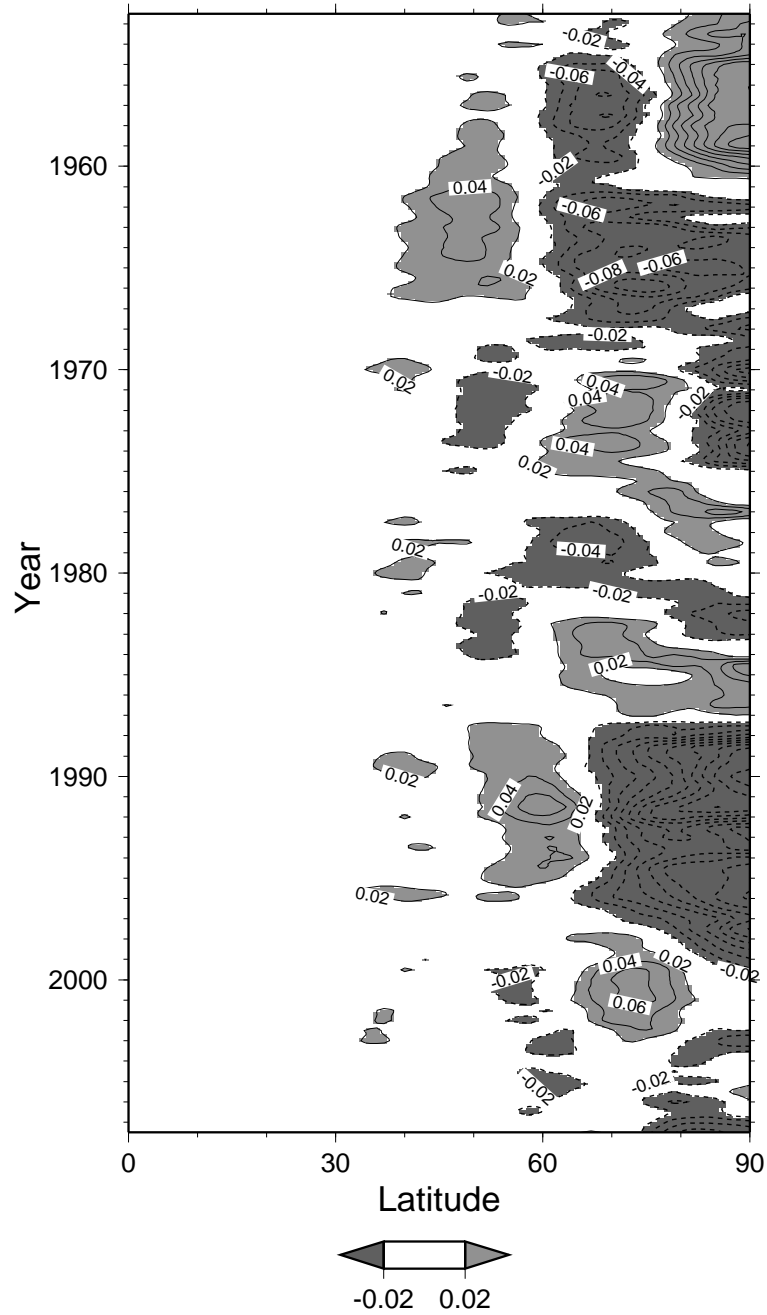


図 27: 1950 年から 2010 年までの非線形項の順圧高度場のホフメラー図 (5 年移動平均)

AOI Equation Force term

Barotropic Component of the Atmosphere

5 year running mean

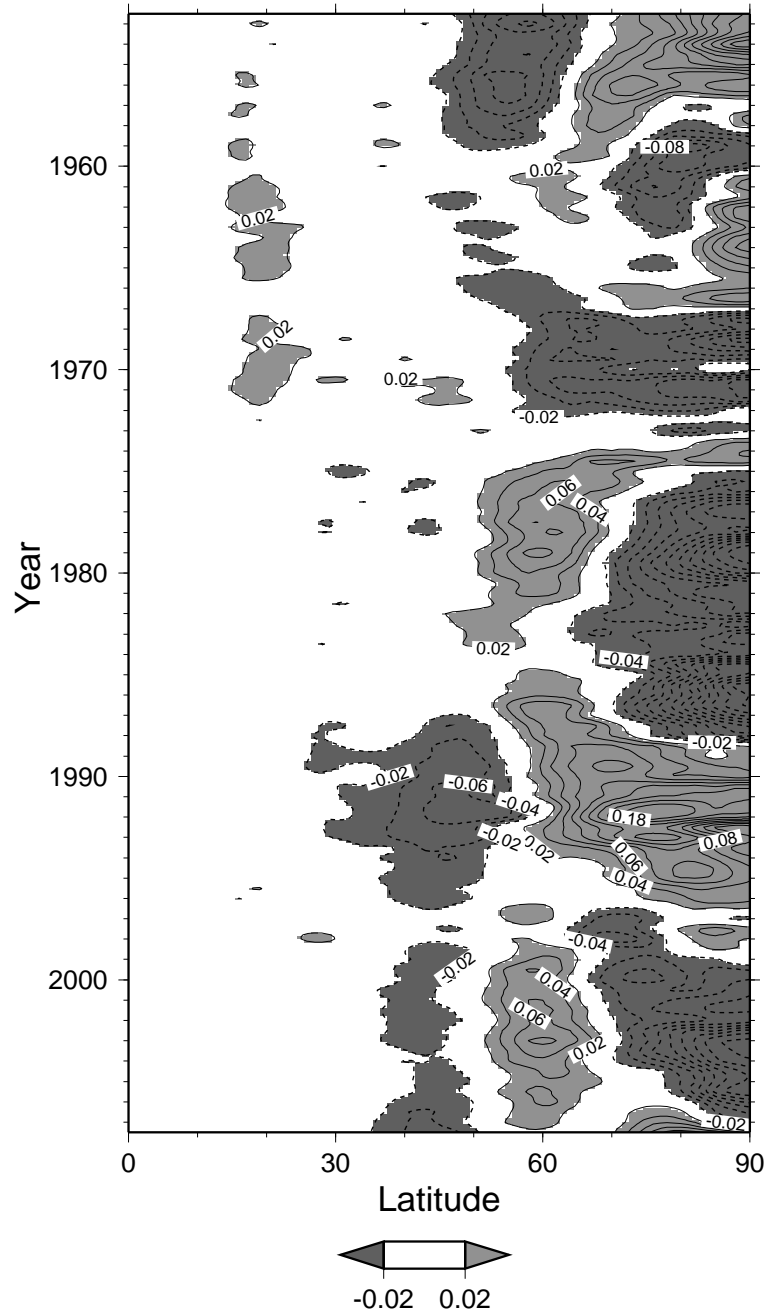


図 28: 1950 年から 2010 年までの外力項の順圧高度場のホフメラー図 (5 年移動平均)

Coherence and Phase

AOI time derivative lags AOI for Positive Phase

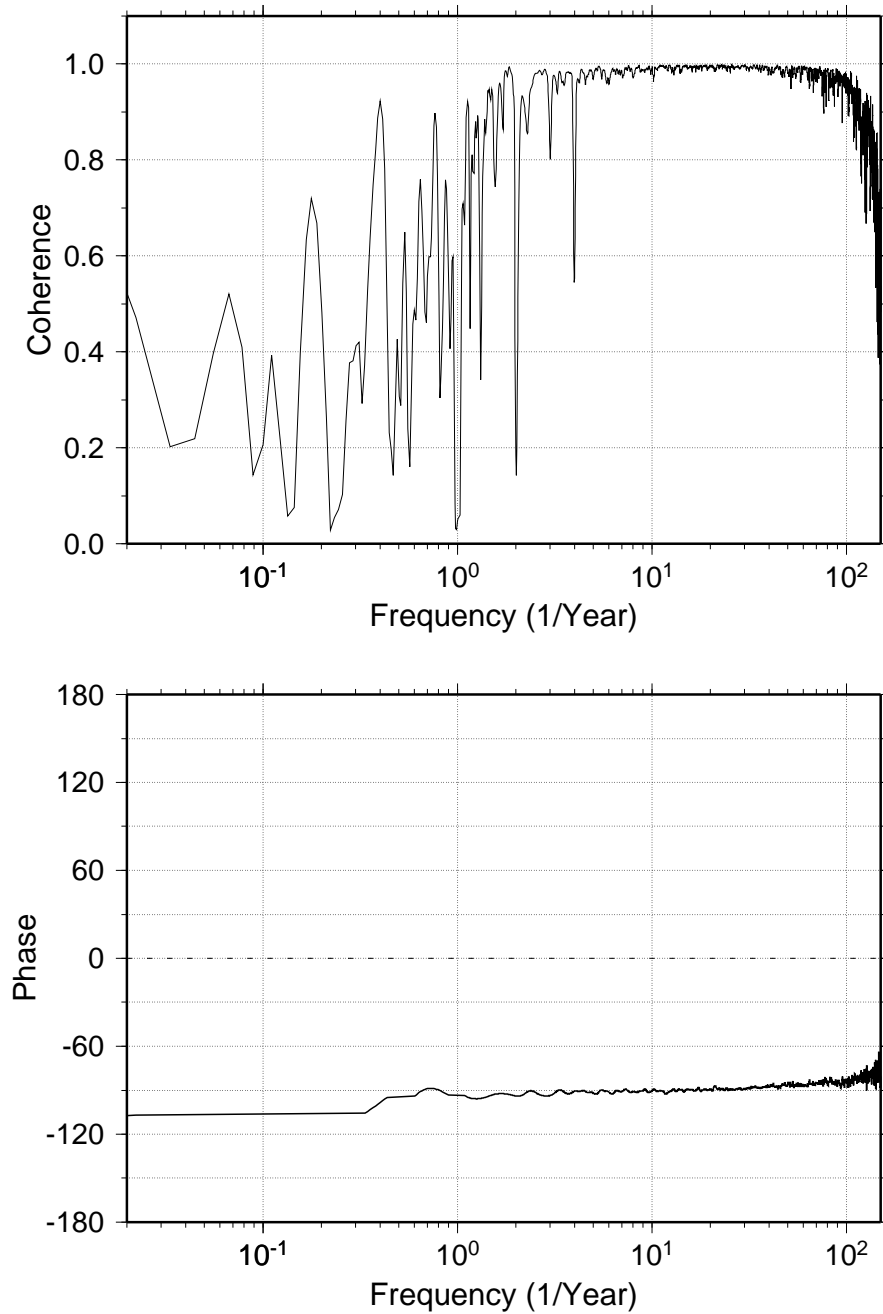


図 29: AOI と AOI 方程式の時間変化項コヒーレンス (上) とフェーズ (下). 横軸は周波数 (1/年)

Coherence and Phase

AOI time derivative lags AOI Equation Linear term for Positive Phase

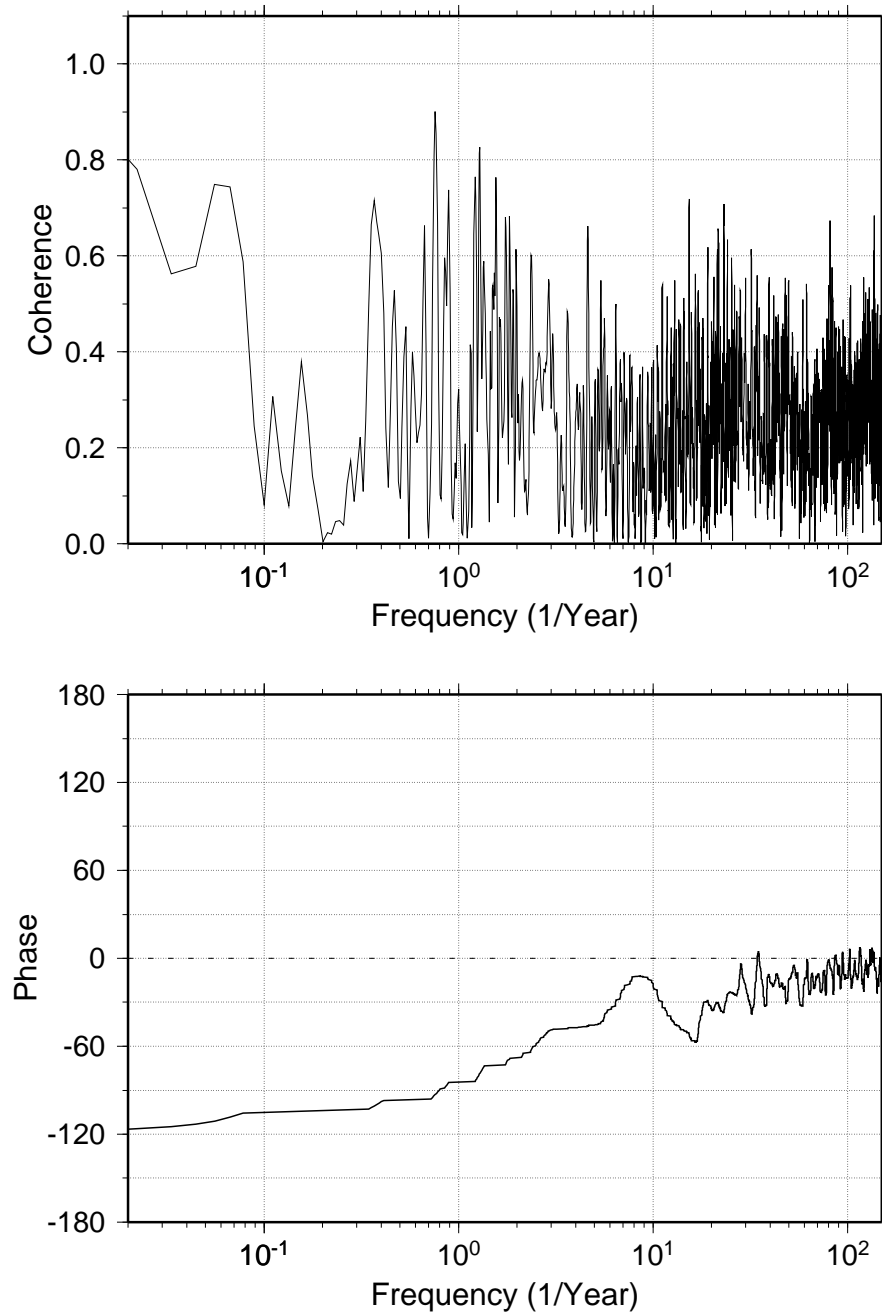


図 30: AOI 方程式の線形項と AOI 方程式の時間変化項コヒーレンス (上) とフェーズ (下). 横軸は周波数 (1/年)

Coherence and Phase

AOI time derivative lags AOI Equation Nonlinear term for Positive Phase

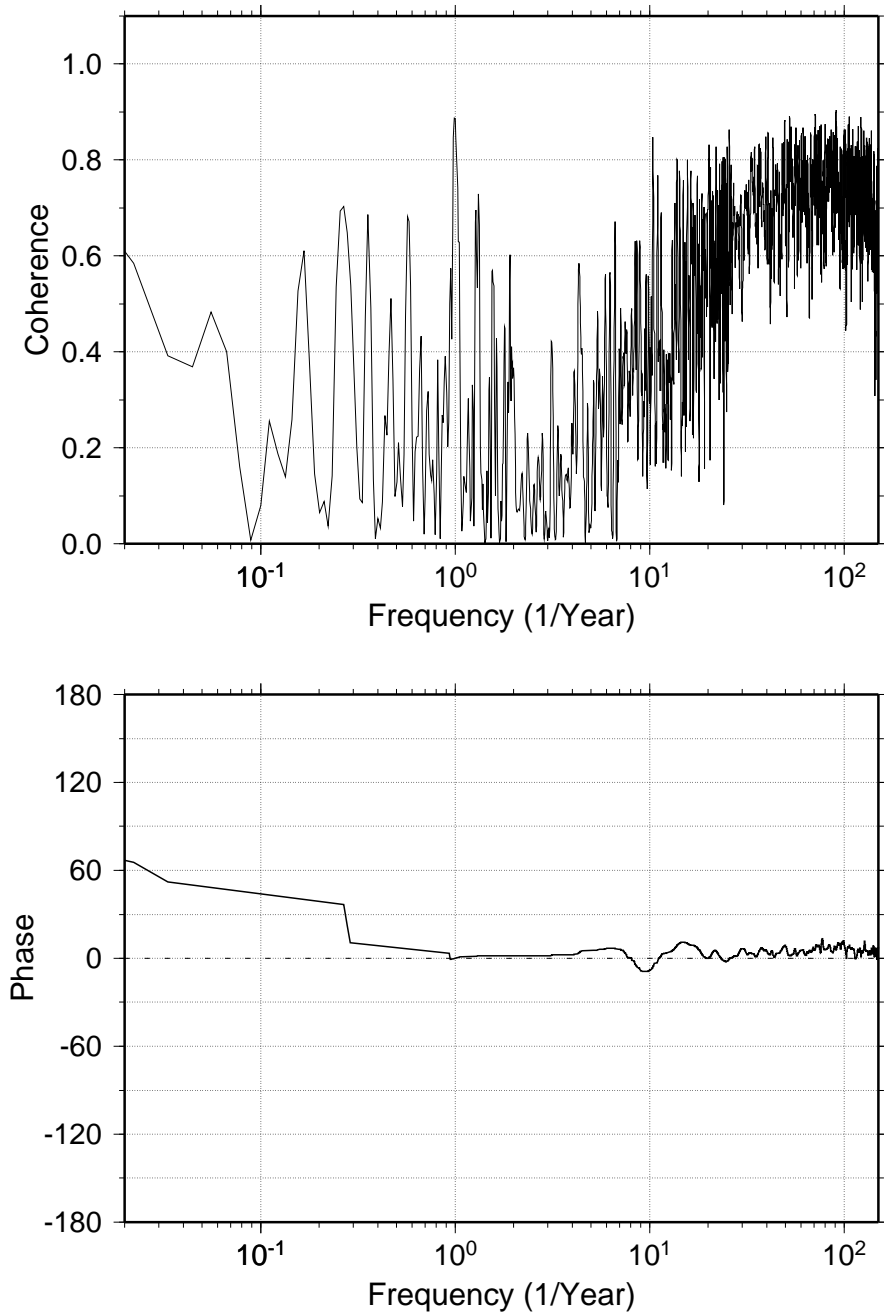


図 31: AOI 方程式の非線形項と AOI 方程式の時間変化項コヒーレンス (上) とフェーズ (下). 横軸は周波数 (1/年)

Coherence and Phase

AOI time derivative lags AOI Equation Force term for Positive Phase

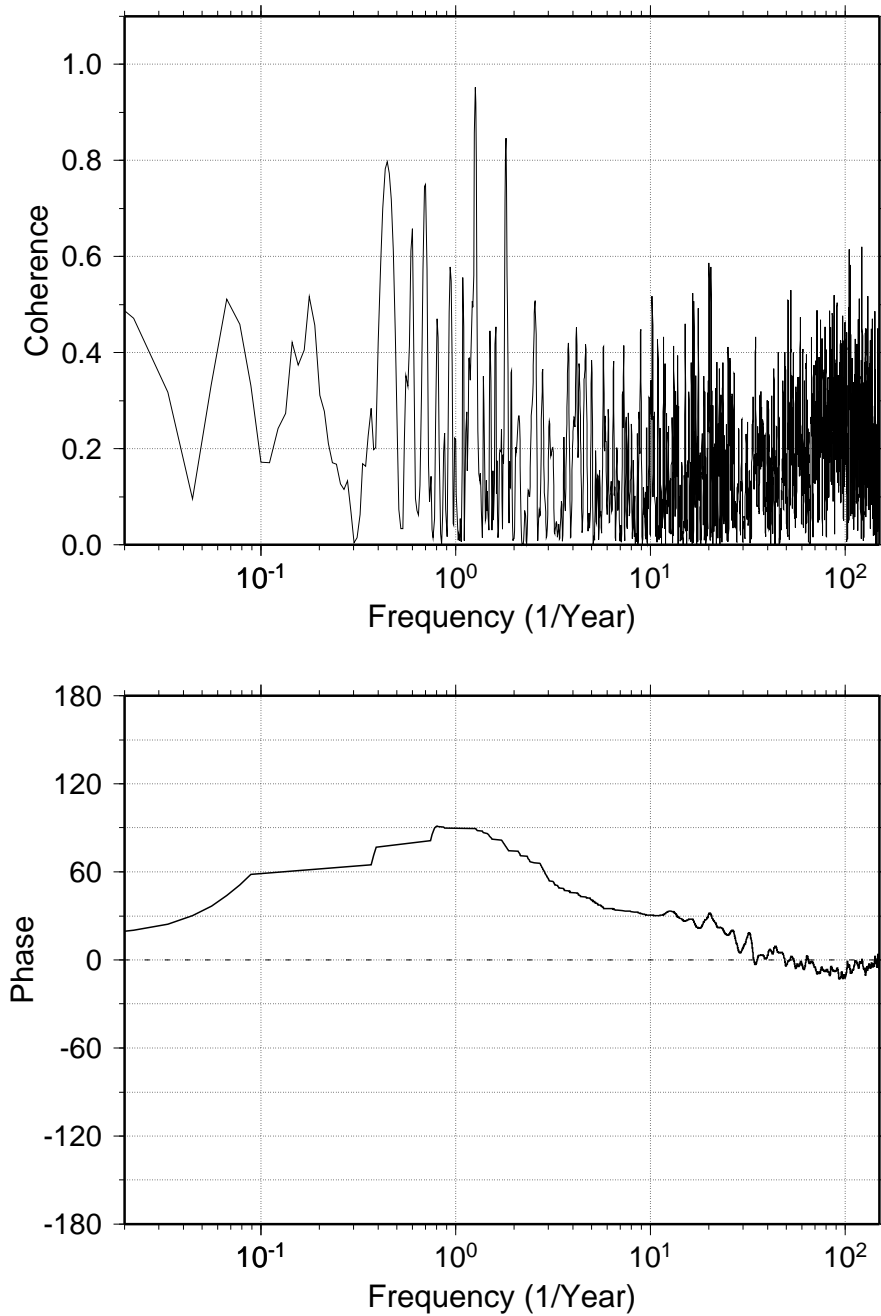


図 32: AOI 方程式の外力項と AOI 方程式の時間変化項コヒーレンス (上) とフェーズ (下). 横軸は周波数 (1/年)

Coherence and Phase

AOI time derivative lags Ekman for Positive Phase

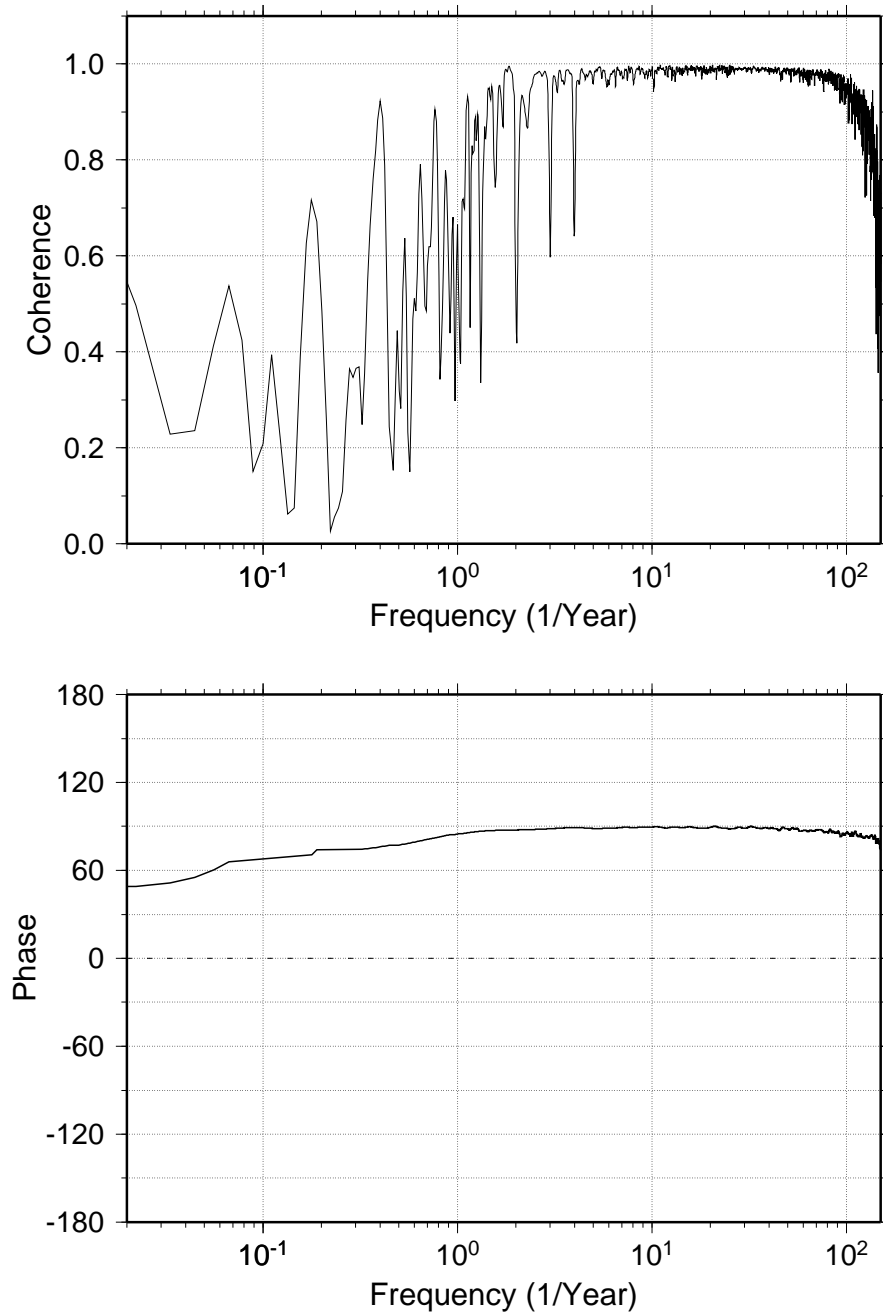


図 33: AOI 方程式の外力項と AOI 方程式の時間変化項コヒーレンス (上) とフェーズ (下). 横軸は周波数 (1/年)

Coherence and Phase

AOI time derivative lags Baroclic for Positive Phase

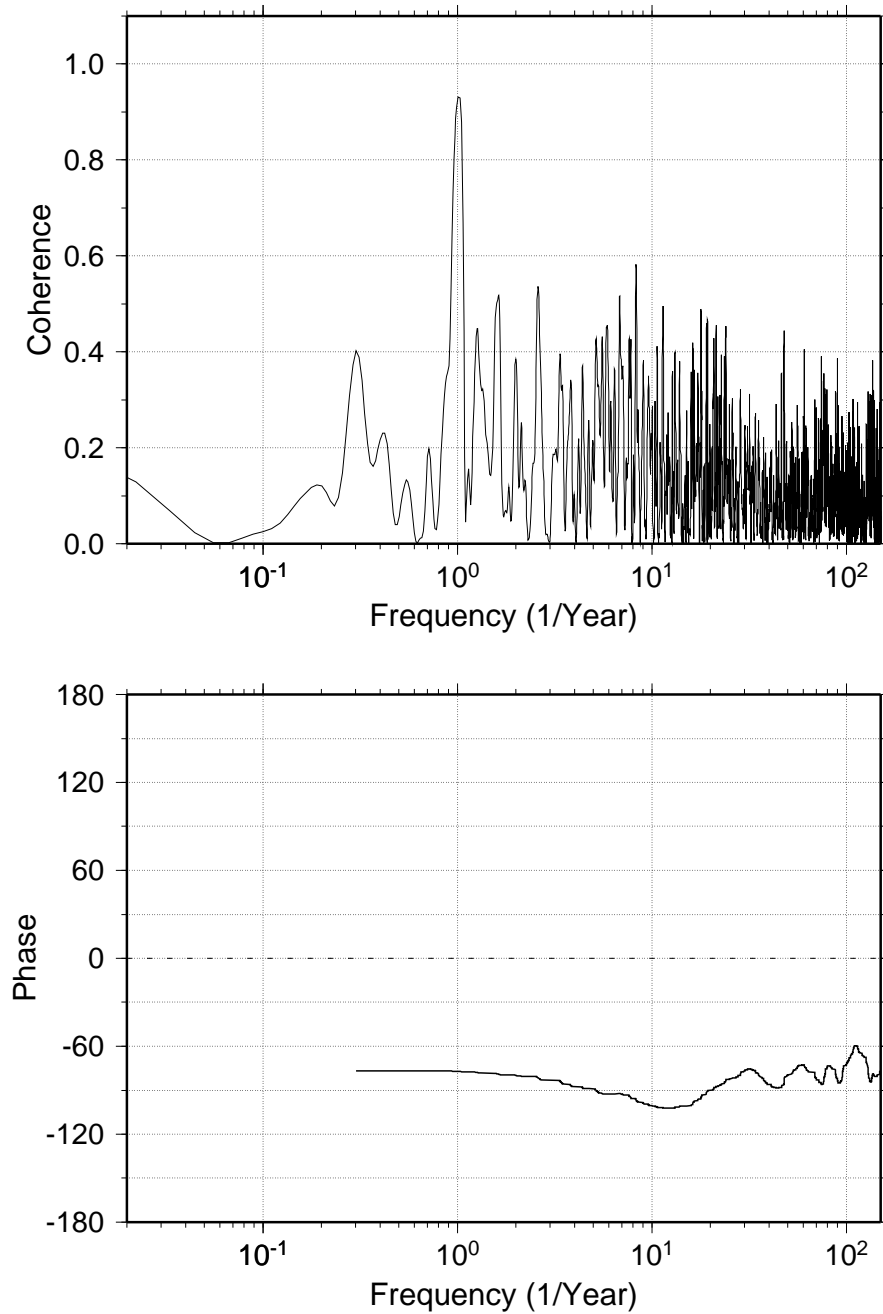


図 34: 傾圧不安定と AOI 方程式の時間変化項コヒーレンス (上) とフェーズ (下).
横軸は周波数 (1/年)

Coherence and Phase

AOI time derivative lags System A B for Positive Phase

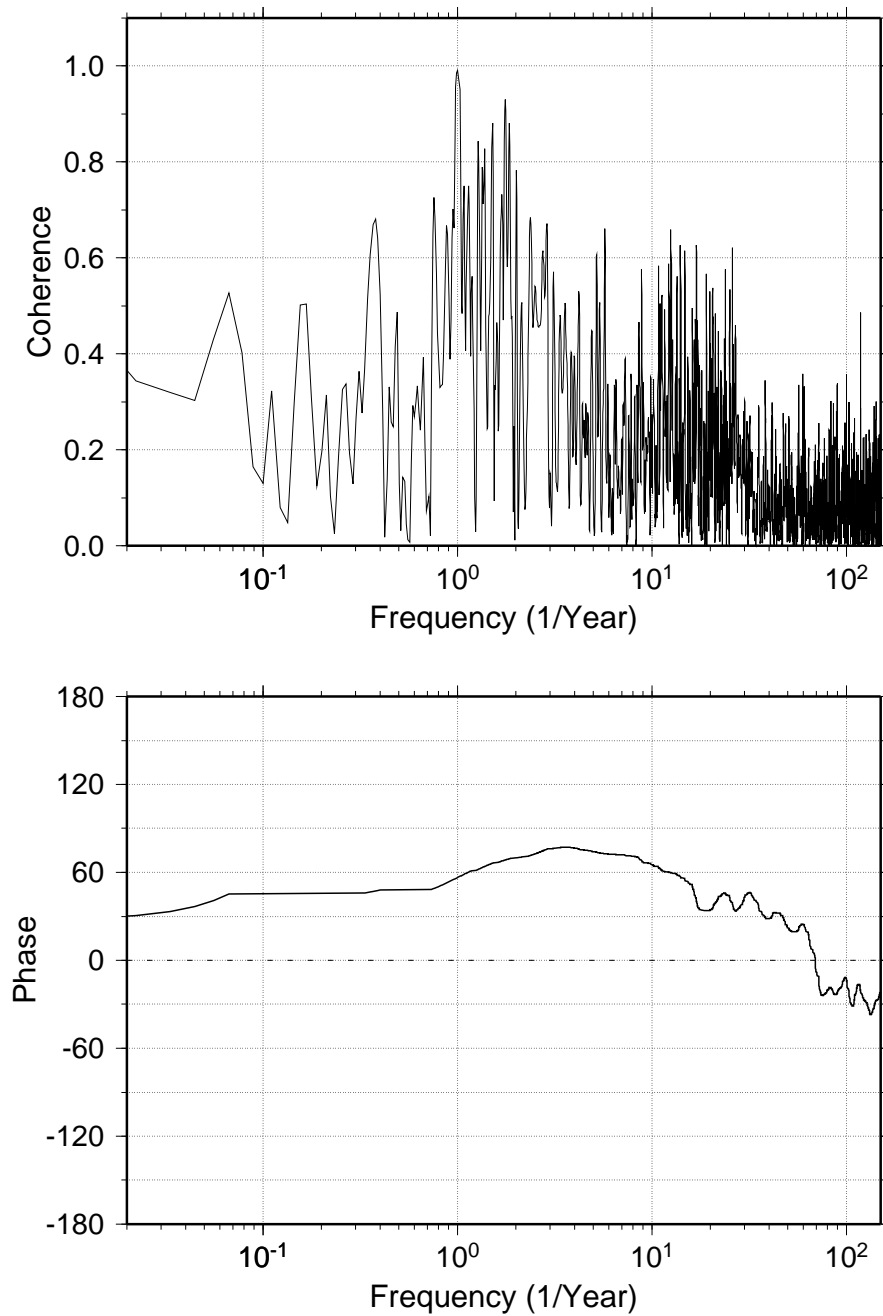


図 35: 地形・海陸分布の熱的效果と AOI 方程式の時間変化項コヒーレンス (上) とフェーズ (下). 横軸は周波数 (1/年)

Coherence and Phase

AOI time derivative lags Diffusion for Positive Phase

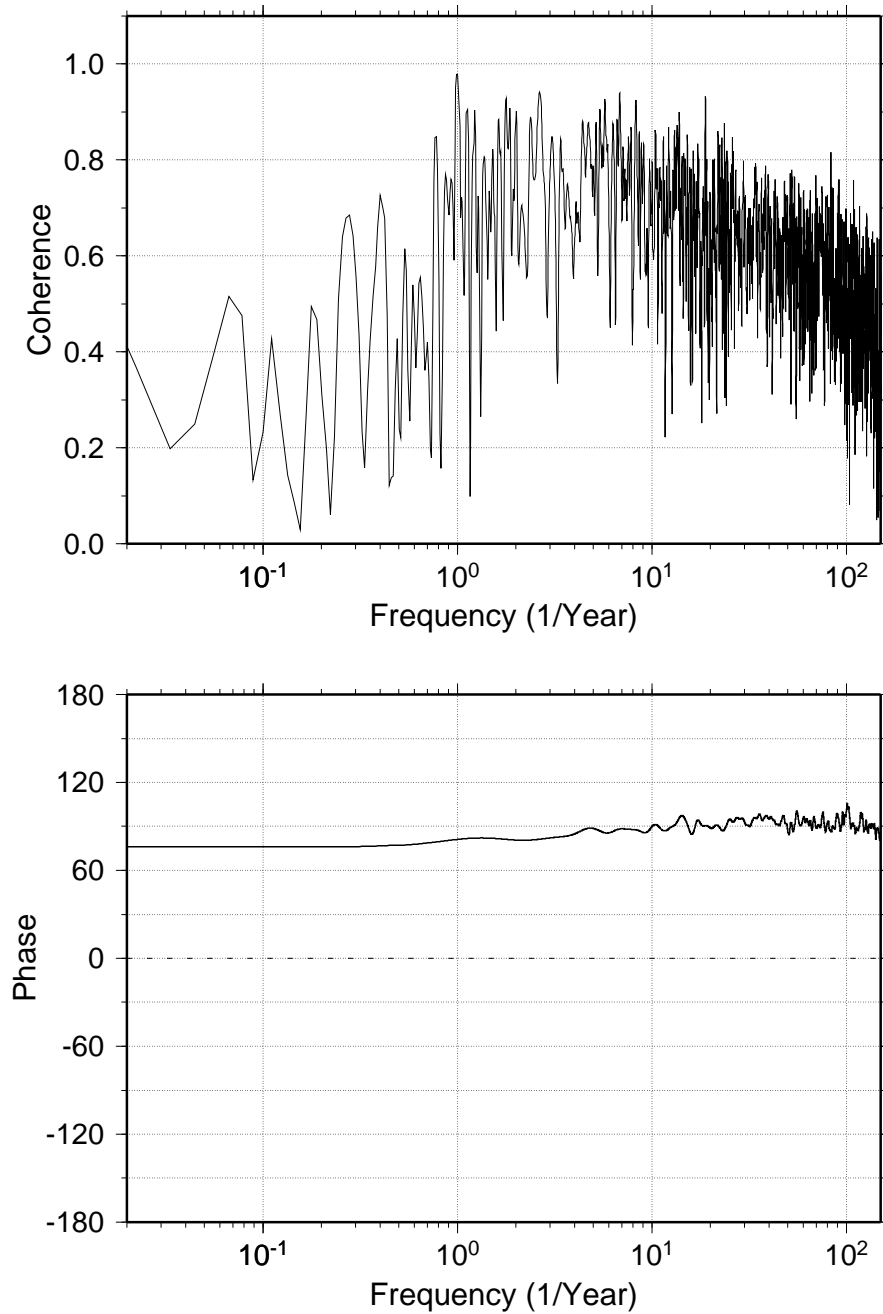


図 36: 粘性摩擦と AOI 方程式の時間変化項コヒーレンス (上) とフェーズ (下). 横軸は周波数 (1/年)

Coherence and Phase

AOI time derivative lags Transient Neutral Wave for Positive Phase

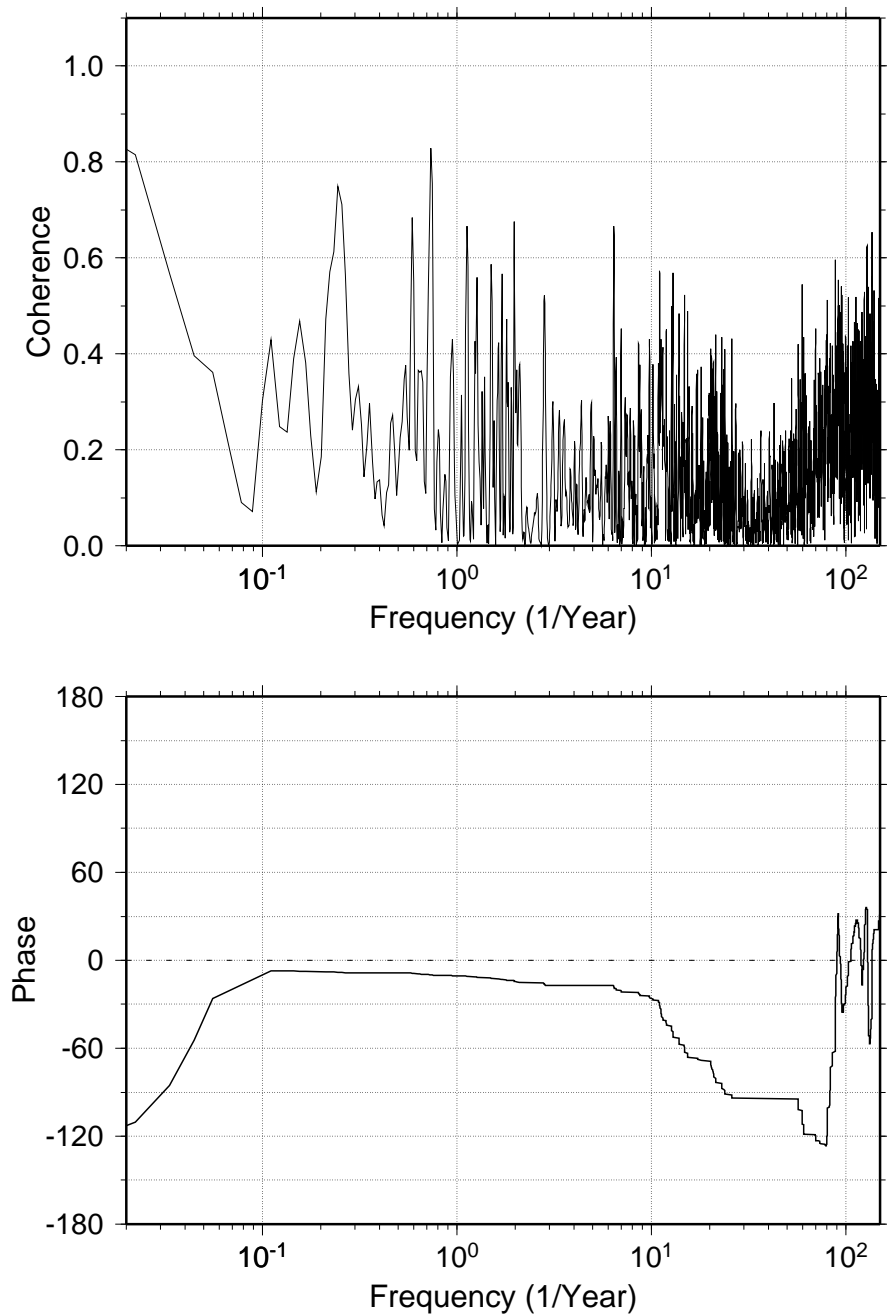


図 37: 中立波 (Transient) と AOI 方程式の時間変化項コヒーレンス (上) とフェーズ (下). 横軸は周波数 (1/年)

Coherence and Phase

AOI time derivative lags Climatology - Eddy Interaction for Positive Phase

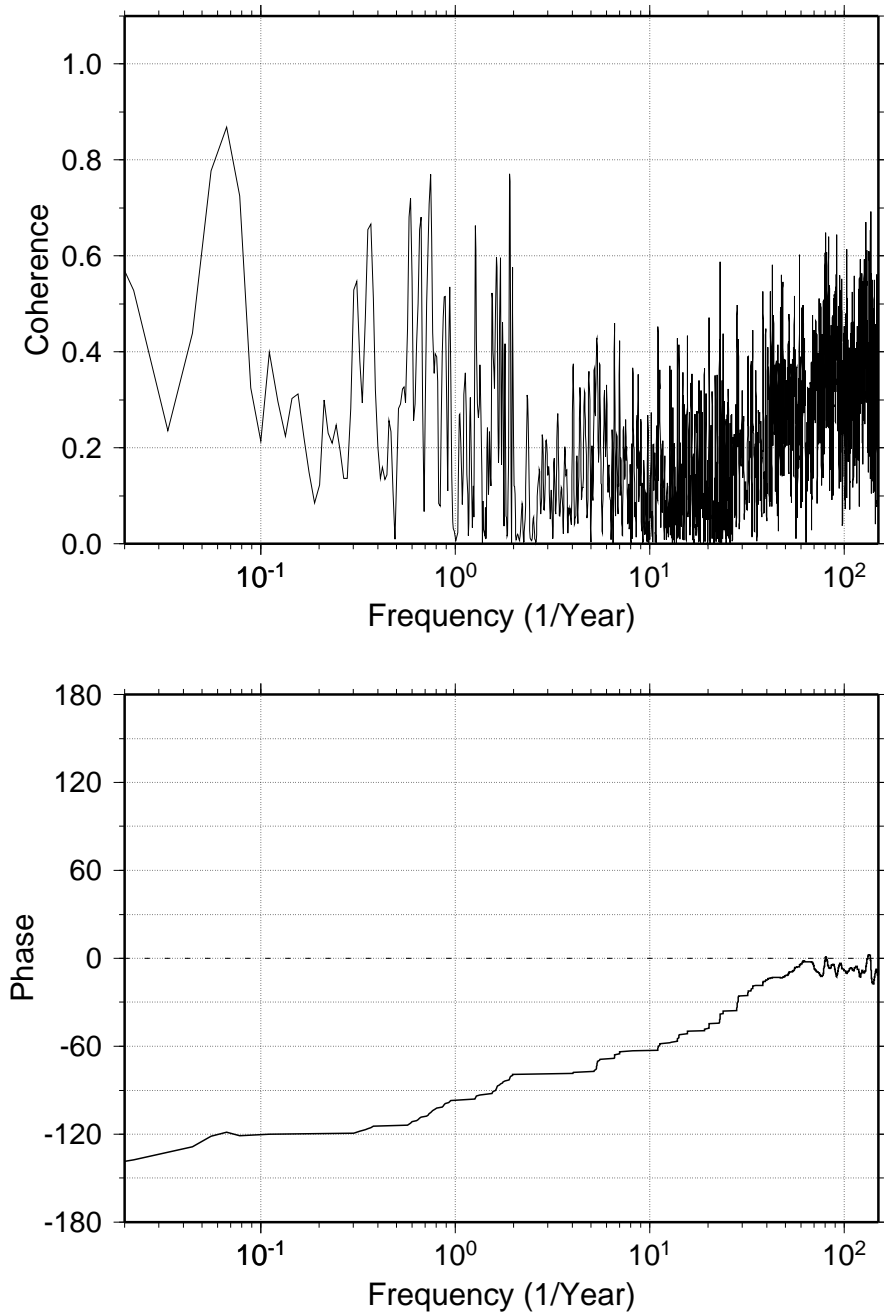


図 38: 気候値と擾乱との相互作用と AOI 方程式の時間変化項コヒーレンス(上)とフェーズ(下). 横軸は周波数 (1/年)

Coherence and Phase

AOI time derivative lags $w'w'$ eddy term for Positive Phase

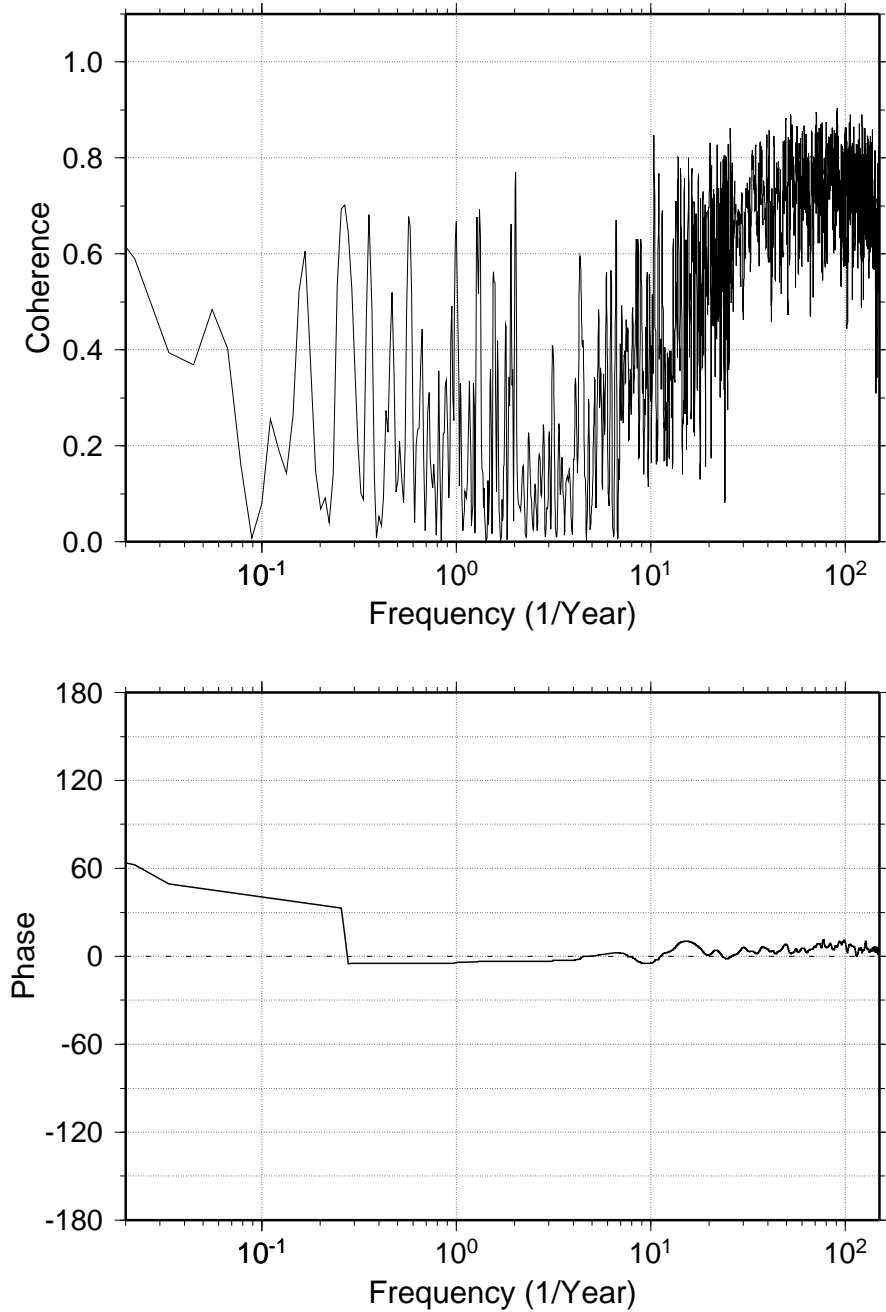


図 39: $i \sum \sum w'_j w'_k$ と AOI 方程式の時間変化項コヒーレンス (上) とフェーズ (下).
横軸は周波数 (1/年)