

平成22年度 卒業論文

ロスビー波の増幅と砕波による大気大循環の
エネルギースペクトルの検証

筑波大学生命環境学群地球学類

地球環境学主専攻

200913058

山上晃央

2011年2月

目次

要旨	iii
Abstract	iv
図目次	vi
1 はじめに	1
2 目的	5
3 解析手法	6
3.1 基礎方程式	6
3.2 プリミティブスペクトル方程式の導出	10
3.2.1 基礎方程式の線形化	10
3.2.2 鉛直構造関数	12
3.2.3 水平構造関数	16
3.2.4 3次元ノーマルモード関数展開	19
3.3 エネルギー関係式	23
4 結果	25
4.1 観測による順圧モードのエネルギースペクトル	25
4.2 ロスビー波の砕波条件による順圧モードのエネルギースペクトル	27
4.2.1 $ u > c $ を満たしたときのエネルギースペクトル	27
4.2.2 $\partial q / \partial y < 0$ を満たしたときのエネルギースペクトル	28
4.2.3 $-\nabla^2 u + \beta < 0$ を満たしたときのエネルギースペクトル	29
4.3 基本場を含めたロスビー波の砕波条件による順圧モードのエネルギースペクトル	31
4.4 傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル	33
4.4.1 $ u > c $ を満たしたときのエネルギースペクトル	33
4.4.2 $\partial q / \partial y < 0$ を満たしたときのエネルギースペクトル	33
5 まとめと考察	35
5.1 順圧モードのエネルギースペクトル	35
5.2 傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル	38

6 結論	39
謝辭	41
參考文獻	43

ロスビー波の増幅と砕波による大気大循環のエネルギー スペクトルの検証

山上 晃央

要旨

大気大循環のエネルギースペクトルは特徴的な傾きを持っており、総観スケールの運動については水平波数 (k) の -3 乗に従う。3次元ノーマルモード関数展開を用いると、運動の水平スケールは東西波数 k の代わりにロスビーモードの位相速度 c を用いて表すことが出来る。単位体積あたりの質量 m を用いて、大気大循環の順圧モードのエネルギースペクトル E は $E = mc^2$ と表すことが出来る。この理論は、領域内で渦位 q の南北微分が負となる $\partial q / \partial y < 0$ という Garcia (1991) のロスビー波の砕波条件から導かれる。したがって、大気大循環のエネルギースペクトルはロスビー波の砕波によって決定されていると考えられる。

ロスビー波の砕波条件に到達するまで増幅させたときのエネルギースペクトルの結果を以下に示す。順圧モードにおいては、エネルギースペクトルは緯度に依存し、北緯 $30 \sim 45$ 度を選んだときに最も理論と一致した。しかし、その値は全体的に理論よりも大きな値となった。砕波条件を適用する緯度帯を狭めることによってエネルギースペクトルの値が大きくなり、南北微分とラプラシアンが可換であるという仮定によってエネルギースペクトルのばらつきが生じる。また、プラネタリー波の砕波は高緯度側で、総観スケール以下の波は中緯度において初めに砕波条件を満たす。基本場の東西流によって総観規模以下の波の砕波が初めに起こる領域が中緯度から低緯度へと変化する。しかし、基本場はロスビー波の砕波にとって重要ではない。順圧モードのエネルギースペクトルは理論と一致したものの、傾圧モードのエネルギースペクトルはこの条件では説明できなかった。

キーワード: ロスビー波の砕波, エネルギースペクトル, 3次元ノーマルモード関数展開, 順圧モード, 傾圧モード

The Verification of Energy Spectrum in the General Circulation of the Atmosphere by Breaking Rossby Waves

Akio YAMAGAMI

Abstract

The energy spectrum of large-scale atmospheric motion has a characteristic slope represent by the -3 power law with respect to the horizontal wavenumber k over the synoptic to sub-synoptic scales. In the framework of the 3D normal mode decomposition, the horizontal scale of atmospheric motion can be represented by the phase speed of the Rossby mode c instead of the horizontal wavenumber k . With a constant m describing total mass of the atmosphere for a unit area, the barotropic energy spectrum of the general circulation E can be represented as $E = mc^2$. This theory is derived from the criterion of Rossby wave breaking by Garcia(1991), such that the local gradient of potential vorticity q is negative $\partial q/\partial y < 0$ somewhere in the domain. Due to this reason, the energy spectrum of the general circulation seems to be governed by Rossby wave breaking.

The result from the energy spectrum amplified to reach the criterion of the Rossby wave breaking is summarized as follows: For the barotropic mode, the energy spectrum depends on the latitude, and shows the most correspondence with the theory by choosing the latitude from 30°N to 45°N. However, the total value of the energy spectrum from the criterion of Rossby wave breaking is higher than that from $E = mc^2$. The value of the energy spectrum increases from narrowing the latitude, but the variability increases by assuming that the meridional differential and Laplace operator are commutative. For planetary wave, Rossby wave breaking initially caused at high latitudes and at mid-latitude for synoptic and smaller scale waves. The zonal mean flow shifts the latitude of synoptic and smaller scale wave breaking which initially occur from the mid-latitude to the low latitude. However, the zonal mean flow does not play an important role in the Rossby wave breaking.

Although the energy spectrum of the barotropic mode agree with the theory, the energy spectrum of the baroclinic mode cannot be explained by this criterion.

Key Words: Rossby wave breaking, Energy spectrum, 3D normal mode decomposition, barotropic mode, baroclinic mode

目次

1	ロスビー波の碎波の概略図	45
2	東西波数 6 を増幅させたときの順圧高度場 (20 ~ 35 日後)	46
3	東西波数 6 を増幅させたときの順圧高度場 (40 ~ 55 日後)	47
4	東西波数 6 を増幅させたときの順圧高度場 (60 ~ 75 日後)	48
5	東西波数 6 を増幅させたときの渦位の分布 (20 ~ 35 日後)	49
6	東西波数 6 を増幅させたときの渦位の分布 (40 ~ 55 日後)	50
7	東西波数 6 を増幅させたときの渦位の分布 (60 ~ 75 日後)	51
8	東西波数 6 を増幅させたときのエネルギーの時間変化	52
9	JRA-25/JCDAS による全期間の順圧モードのエネルギースペクトル	53
10	JRA-25/JCDAS による冬季 (DJF) の順圧モードのエネルギースペ クトル	54
11	JRA-25/JCDAS による夏季 (JJA) の順圧モードのエネルギースペ クトル	55
12	10 °N ~ 80 °N で $ u > c $ を満たしたときの順圧モードのエネルギー スペクトル	56
13	30 °N ~ 60 °N で $ u > c $ を満たしたときの順圧モードのエネルギー スペクトル	57
14	10 °N ~ 80 °N で $ u > c $ を満たしたときの順圧モードのエネルギー スペクトル	58
15	30 °N ~ 60 °N で $ u > c $ を満たしたときの順圧モードのエネルギー スペクトル	59
16	30 °N ~ 60 °N で $ u > c $ を満たしたときの $n = 6, l = 3$ 渦位の分布	60
17	10 °N ~ 80 °N で $\partial q' / \partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネル ギースペクトル	61
18	30 °N ~ 60 °N で $\partial q' / \partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネル ギースペクトル	62
19	30 °N ~ 60 °N で $\partial q' / \partial y < 0$ を満たしたときの $n = 6, l = 3$ の渦位 の分布	63
20	10 °N ~ 60 °N で $\partial q' / \partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネル ギースペクトル	64

21	30 °N ~ 80 °N で $\partial q' / \partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル	65
22	30 °N ~ 60 °N で $\partial q' / \partial y < 0$ を満たしたときの $n = 3, l = 3$ の渦位の分布	66
23	30 °N ~ 45 °N で $\partial q' / \partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル	67
24	30 °N ~ 45 °N で $\partial q' / \partial y < 0$ を満たしたときの $n = 6, l = 3$ の渦位の分布	68
25	10 °N ~ 80 °N で $-\nabla^2 + \beta < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル	69
26	30 °N ~ 60 °N で $-\nabla^2 + \beta < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル	70
27	30 °N ~ 45 °N で $-\nabla^2 + \beta < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル	71
28	30 °N ~ 60 °N で $-\nabla^2 + \beta < 0$ を満たしたときの $n = 6, l = 3$ の渦位の分布	72
29	30 °N ~ 45 °N で $-\nabla^2 + \beta < 0$ を満たしたときの $n = 6, l = 3$ の渦位の分布	73
30	1958 ~ 1997 年までの東西平均東西風	74
31	1958 ~ 1997 年までの東西平均東西風の鉛直平均と相対渦度	75
32	10 °N ~ 80 °N で $\partial(\bar{q} + q') / \partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル	76
33	30 °N ~ 60 °N で $\partial(\bar{q} + q') / \partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル	77
34	30 °N ~ 45 °N で $\partial(\bar{q} + q') / \partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル	78
35	10 °N ~ 60 °N で $\partial(\bar{q} + q') / \partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル	79
36	30 °N ~ 80 °N で $\partial(\bar{q} + q') / \partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル	80
37	10 °N ~ 80 °N で $ u > c $ の条件を満たしたときの傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル	81

38	30 °N ~ 60 °N で $ u > c $ の条件を満たしたときの傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル	82
39	30 °N ~ 45 °N で $ u > c $ の条件を満たしたときの傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル	83
40	10 °N ~ 80 °N で $dq'/dy < 0$ を満たしたときの傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル	84
41	30 °N ~ 60 °N で $dq'/dy < 0$ を満たしたときの傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル	85
42	30 °N ~ 45 °N で $dq'/dy < 0$ を満たしたときの傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル	86

1 はじめに

大気中には時間的空間的に様々な流れが存在する．これらの流れは，波動の成分と乱流の成分に分けることが出来る．Nastrom and Gage (1983) では，GASP (Global Atmospheric Sampling Program) 期間に航空機による観測を東西方向に波数展開することによって，総観規模擾乱では波数 (k) の -3 乗，メソスケール擾乱では $-5/3$ 乗のエネルギースペクトルが見られることを示した．また，最近の研究では Terasaki *et al.* (2009) によって非静力雲解像大気大循環モデル NICAM (Nonhydrostatic Icosahedral Atmospheric Model) を用いたシミュレーションで運動エネルギーを解析し，総観規模擾乱のエネルギースペクトルである -3 乗が，メソスケール擾乱である $-5/3$ 乗へシフトすることを示した．このような連続スペクトルは乱流の特徴であり，エネルギースペクトル解析は大気中の乱流について理解を進める上で重要である．また，Tanaka and Terasaki (2006) では傾圧成分へのエネルギーの蓄積がブロッキング形成に対して重要であることが示されており，エネルギースペクトル解析は異常気象の理解や長期予報の精度向上にもつながる．

3次元局所等方一様性乱流のエネルギースペクトルは Kolmogorov によって，次元解析から $-5/3$ 乗に従うという慣性小領域 (Inertial subrange) 理論が一般的に知られている．Kraichnan (1967) は Kolmogorov 理論を 2次元等方一様性乱流に適用することによって波数の -3 乗の理論を導き，これによって総観規模擾乱のエネルギースペクトルの解釈を試みた．これによると，2次元乱流ではエンストロフィーカスケードが，3次元乱流ではエネルギーカスケードが重要な役割を果たしている．また，Charney (1971) では準地衡風乱流に対してポテンシャルエンストロフィーが保存するという仮定によって波数の -3 乗のエネルギースペクトルを導き，より現実の大気に近い解釈を試みた．

このような慣性小領域理論では，一つのエネルギーソースとシンクがあり，その間の領域でのエネルギーやエンストロフィーのカスケードによって形成されるということが前提である．しかし，現実の大気中ではエネルギーソースの領域は一定ではなく，傾圧不安定というエネルギーソースが広い波数帯にエネルギーを与えている．また，Tung and Orlando (2003) では傾圧不安定によって総観規模に注入されたエネルギーが逆カスケードすることによってプラネタリースケールの波や帯状流に流れることを示した．これはエネルギーのシンクがメソスケール擾乱のみではなく，プラネタリースケール側にもあることを示唆している．これらの事実より，慣性小領域理論での大気大循環のエネルギースペクトルの形成を説

明することはできず，大気大循環のエネルギースペクトルの形成メカニズムについては未だに解明されていない．

これらの慣性小領域理論とは異なるアプローチによる大気大循環のエネルギースペクトル解析を行った研究がある．Tanaka (1985) では3次元ノーマルモード展開により各東西波数，南北モード，鉛直モードについてのエネルギー解析が行われた．これをノーマルモードエネルギー論と呼ぶ．ノーマルモードエネルギー論では，波の波数 (k) の代わりにラプラス潮汐方程式の固有振動数 (σ) を用いることによって運動のスケールを表している．この研究では補足ロスビーモードでは振動数の -3 乗，鉛直方向に伝播するロスビーモード，慣性重力モードでは $-5/3$ 乗に従うスペクトルが見られた．また，Tanaka and Kimura (1996) でも同様の手法でスペクトル解析が行われ，鉛直モードの違いによるエネルギースペクトルの傾斜の違いが示された．しかし，これらの研究ではこれらのエネルギースペクトルの特徴的な傾斜の形成過程については説明していなかった．

一方，エネルギースペクトルを決める要因としては，波動から乱流へ移行するプロセスとして波の砕波が重要である．特に，ブロッキング現象に対してロスビー波の砕波は重要な役割をになっている (Tanaka and Watarai 1999)．よって，大気大循環のエネルギースペクトルの形成にもロスビー波の砕波は重要であると考えられ，ロスビー波の砕波理論はこれまで様々な議論がなされてきた．ここでは Tanaka *et al.* (2004) で用いられた，重力波の砕波からの類推によって得られた Garcia (1991) のロスビー波の砕波条件を示す．

まず，重力波に対する波の活動度の方程式は波の活動度密度 A と群速度 c_{gy}, c_{gz} ，そして波の減衰率 δ を用いて，

$$\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial c_{gy} A}{\partial \theta} + \frac{\partial c_{gz} A}{\partial z} = -2\delta A \quad (1)$$

$$A = \frac{E}{\bar{u} - c} \quad (2)$$

$$E = \frac{\rho}{2} \left(\bar{u}'^2 + \frac{\partial \bar{\phi}'^2}{N^2} \right)$$

と表される (Andrews *et al.*, 1987)．鉛直方向は $\log-p$ 系であり， $z = -H \ln(p/p_0)$ である．ここで， ρ は密度， \bar{u} は平均東西風， c は位相速度， ρ は密度， u' は東西風の偏差， ϕ' はジオポテンシャルの偏差， N はブラントバイサラ振動数， H はスケールハイトである．このような方程式によって表される重力波は，対流不安定の起こる条件である $\frac{\partial \theta}{\partial z} (\theta: \text{温位})$ が砕波のための最も主要な条件である (Fritts, 1984)．

波が砕波に達すると、波の減衰率は波の活動度フラックスの発散に対して線形であると仮定し、重力波が砕波することによって減衰率と増幅率がつりあい振幅がそれ以上大きくなならないという仮定を用いて、これまで用いられていたものよりもさらに一般的な拡散係数が導かれることが示された (Lindzen, 1981)。振幅がそれ以上大きくなならないということは、波のエネルギースペクトルも砕波に達するとそれ以上大きくなならないことを意味する。

ロスビー波について式 (1) と同様に波の活動度の方程式を立てると、

$$\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial c_{gy} A}{\partial \theta} + \frac{\partial c_{gz} A}{\partial z} = -2\delta A \quad (3)$$

となり、波の活動度密度である式 (2) に対して

$$A = \frac{1}{2} \frac{\rho |q'^2|}{\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}} \quad (4)$$

が得られる。ここで、 q' は渦位の偏差、 \bar{q} は基本場の渦位である。これらの式を比較して、砕波条件を類推することによってロスビー波の砕波条件

$$\frac{\partial q}{\partial y} < 0 \quad (5)$$

が導かれた。これは物理的には順圧不安定や傾圧不安定の条件でもあるため適切な砕波条件であると考えられ、モデルによるシミュレーションによってもその妥当性が示された。この砕波条件を満たしたときの概略図を図 1 に示す。

また、傾圧不安定によって東西波数 6 を励起させてロスビー波の砕波のシミュレーションを行ったときの順圧高度場の変化を図 2 ~ 図 4 に、渦位の分布の変化を図 5 ~ 図 7 に示す。順圧高度場と渦位の分布は積分開始 20 日後から 75 日後までを 5 日間隔で示している。順圧高度場を見ると、20 日後は順圧高度場が東西一様で波数 0 の構造をしているが、次第に振幅が大きくなり波数 6 が卓越し、35 日後には波数 6 が明瞭に見られる。その後さらに振幅が増幅し、50 日後には波数 6 が崩れて乱流状態となる。その後、エネルギーの逆カスケードが起こり、75 日後には東西波数 1 の状態になっている。渦位の分布を見ても、順圧高度場と同様に初めの波数 0 の状態から波数 6 が励起され、Garcia (1991) のロスビー波の砕波条件によると、積分開始から 30 日後から 35 日後付近でロスビー波は飽和に達している。その後さらに増幅し続けることで波数 6 の構造が崩れ乱流状態となる。このときのエネルギーの時系列を図 8 に示す。実線が波数 0 のエネルギー、破線が波数 1 以上の渦動エネルギーである。初めは小さなエネルギーしかもっていなかった渦動エネルギー

ギーが、傾圧不安定によって指数関数的に増幅してくることが見られる。渦位の分布で砕波条件を満たした 35 日後付近では渦動エネルギーは東西流のエネルギーの $1/10$ となっている。これは Tanaka and Watarai (1999) で示された結果と一致する。この後さらに渦動エネルギーが増加し、42 日後では東西流のエネルギーと等しくなる。この後 47 日後付近で渦動エネルギーがピークに達しており、帯状-波相互作用によって東西流のエネルギーが増加してくる。これは帯状-波相互作用のためである。また、順圧高度場で見たと同じようにこのときには乱流状態となって波-波相互作用も起こっている。その後東西流のエネルギーと渦動エネルギーは互いに逆に変化し、最終的にそれぞれ一定の値で落ち着く。ロスビー波が砕波し、エネルギーのカスケードや逆カスケードが起こり、最終的に落ち着くまでには以上のようなプロセスが見られる。

Tanaka *et al.* (2004) では、このロスビー波の砕波によりノーマルモードエネルギー論でのエネルギースペクトルの傾斜について、ロスビー波の位相速度 (c) を用いて理論的に説明している。ロスビーモードについては波の位相速度で運動のスケールを表すことによってより統一的な議論が可能となるため、振動数の代わりに位相速度を用いている (田中 2004)。この研究では、順圧ロスビーモードのエネルギースペクトル (E) が $E = mc^2$ (m : 単位面積当たりの質量) で表されることが示された。(APPENDIX 参照)

2 目的

Tanaka *et al.* (2004) で示された順圧ロスビーモードのエネルギースペクトルの形成理論は準地衡風理論, β 面近似が用いられているが, ノーマルモードエネルギー論では球座標系プリミティブ方程式を基とした方程式系を用いている. 本研究では, Tanaka (1985) に基づく球面座標系プリミティブスペクトル方程式を用いて, Garcia (1991) によるロスビー波の砕波条件を満たしたときの3次元ノーマルモード展開係数を各モードごとに調べ, Tanaka *et al.* (2004) による順圧ロスビーモードのエネルギースペクトルの形成理論を検証する.

また, Tanaka and Kimura (1996) で示された傾圧ロスビーモードのエネルギースペクトルが順圧モードと同様の Garcia (1991) のロスビー波の砕波条件を用いて説明できるかどうかを検証する.

3 解析手法

本研究では、Tanaka (1985) に基づき球座標系プリミティブ方程式を3次元ノーマルモード展開した、球座標系プリミティブスペクトルモデルを用いる。本章では、まずプリミティブ方程式系に3次元ノーマルモード関数 (three-dimensional normal mode functions) を用い、プリミティブスペクトル方程式を導出する。そして、スペクトル表示された方程式でのエネルギー関係式を導く。

3.1 基礎方程式

本研究で用いる大気大循環モデルの基礎方程式系は、極座標 (緯度 θ , 経度 λ , 気圧 p) であらわしたプリミティブ方程式系であり、水平方向の運動方程式、熱力学の第一法則の3本の予報方程式と、連続の式、状態方程式、静力学平衡の式の3本の診断方程式で表される (小倉, 1978)。

- 水平方向の運動方程式 (予報方程式)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta \cdot v + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv + F_u \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta \cdot u + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv + F_v \quad (7)$$

- 熱力学の第一法則 (予報方程式)

$$\frac{\partial c_p T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla c_p T + \omega \frac{\partial c_p T}{\partial p} = \omega \alpha + Q \quad (8)$$

- 連続の式 (診断方程式)

$$\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (9)$$

- 状態方程式 (診断方程式)

$$p\alpha = RT \quad (10)$$

- 静力学平衡の式 (診断方程式)

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha \quad (11)$$

ただし,

$$\mathbf{V} = (u, v)$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla() = \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial()}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial()}{\partial \theta}$$

である．上記の方程式系で用いられている記号は以下のとおりである．

θ : 緯度	ω : 鉛直 p 速度 ($\equiv \frac{dp}{dt}$)
λ : 経度	F_u : 東西方向の粘性摩擦
p : 気圧	F_v : 南北方向の粘性摩擦
t : 時間	Q : 非断熱加熱
u : 東西風速	Ω : 地球自転角速度 ($= 7.29 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$)
v : 南北風速	a : 地球半径 ($= 6371.2 \text{km}$)
ϕ : ジオポテンシャル	c_p : 定圧比熱 ($= 1004 \text{JK}^{-1} \text{kg}^{-1}$)
T : 気温	R : 乾燥空気の気体定数 ($= 287.04 \text{JK}^{-1} \text{kg}^{-1}$)
α : 比容	

Tanaka (1991) によると, 熱力学の第一法則の式 (8) に, 連続の式, 状態方程式, 静力学平衡近似の式を代入することで, 基礎方程式系を 3 つの従属変数 (u, v, ϕ) のそれぞれの予報方程式で表すことが出来る．

はじめに, 気温 T と比容 α とジオポテンシャル ϕ について以下のような摂動を考える．

$$T(\theta, \lambda, p, t) = T_0(p) + T'(\theta, \lambda, p, t) \quad (12)$$

$$\alpha(\theta, \lambda, p, t) = \alpha_0(p) + \alpha'(\theta, \lambda, p, t) \quad (13)$$

$$\phi(\theta, \lambda, p, t) = \phi_0(p) + \phi'(\theta, \lambda, p, t) \quad (14)$$

ここで, $()_0$ は全球平均量で (p) のみの関数である．また, $()'$ は摂動を表し, 全球平均量からの偏差である．

これより, 診断方程式 (10), (11) も基本場 (全球平均量) に関する式と, 摂動に関する式とに分けることが出来る．

$$p\alpha_0 = RT_0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial p} = -\alpha_0 \quad (16)$$

$$p\alpha' = RT' \quad (17)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial p} = -\alpha' \quad (18)$$

これらの式 (12) ~ (18) を、熱力学の第一法則の式 (3) に代入すると、

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T' + \omega \left(\frac{\partial T_0}{\partial p} - \frac{RT_0}{pc_p} \right) + \omega \left(\frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{RT'}{pc_p} \right) = \frac{Q}{c_p} \quad (19)$$

となる。全球平均気温 T_0 とその偏差 T' との関係は $T_0 \gg T'$ なので、式 (19) において左辺第 3 項の摂動気温の断熱変化項は無視することが出来る。したがって、

$$\left| \omega \frac{RT_0}{pc_p} \right| \gg \left| \omega \frac{RT'}{pc_p} \right| \quad (20)$$

となり、この近似は下部成層圏においてよく成り立っている (Holton, 1975) .

式 (19) の第 4 項を整理するために、大気の安定度のパラメータ $\gamma(p)$ を次のように定義する (Tanaka, 1985) .

$$\gamma(p) \equiv \frac{RT_0(p)}{c_p} - p \frac{dT_0(p)}{dp} \quad (21)$$

式 (20) , (21) を用いて式 (19) を整理すると、

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T' + \omega \frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{\omega \gamma}{p} = \frac{Q}{c_p} \quad (22)$$

となる。気温で表されたプリミティブ方程式系では、運動エネルギーと位置エネルギーの和として全エネルギーが保存されるが、気温の偏差で表されたプリミティブ方程式系では運動エネルギーと有効位置エネルギーの和が全エネルギーとして保存される .

また、式 (17) , (18) より、

$$T' = \frac{p\alpha'}{R} = -\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \quad (23)$$

なので、これを式 (22) に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \mathbf{V} \cdot \nabla \left(-\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \omega \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \frac{\omega \gamma}{p} = \frac{Q}{c_p} \quad (24)$$

となる . 式 (24) の両辺に p/γ を掛けると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \frac{p^2}{R\gamma} - \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} - \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \omega = \frac{Qp}{c_p \gamma} \quad (25)$$

となる。式 (25) によって、熱力学の第一法則の式 (8) を従属変数 ϕ' のみで表すことができた . 方程式系 (6) , (7) , (25) は閉じているが、連続の式 (9) を組み込むために、式 (25) の両辺を p で微分する .

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] - \frac{\partial \omega}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{Qp}{c_p \gamma} \right) \quad (26)$$

式 (26) の左辺第 4 項に連続の式 (9) を代入すると ,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} \\ & = \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{Qp}{c_p \gamma} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

となる . また , 有効位置エネルギー $A = \frac{1}{2} \frac{p^2}{R\gamma} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right)^2$ が ,

$$\begin{aligned} \int_V \left(\mathbf{V} \cdot \nabla + \omega \frac{\partial}{\partial p} \right) A \frac{dV}{g} &= \int_V \frac{1}{2} \left[\frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] \frac{dV}{g} \\ &= \int_V \left[\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \mathbf{V} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{2} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \omega \right) \right] \frac{dV}{g} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

となり保存されることを考慮して , 式 (27) 中の大気の安定度のパラメータ $\gamma(p)$ の p 依存性を無視する .

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} \\ & = \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \omega p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{Qp}{c_p \gamma} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

以上より , 熱力学の第一法則の式 (8) から温度 T と比容 α を消去し , ジオポテンシャルの摂動 ϕ' についての予報方程式を導くことができた . 3 つの従属変数 (u, v, ϕ') に対して , 3 つの予報方程式 (6),(7),(29) が存在するので , 解を一意的に求めることが出来る .

これらの予報方程式 (1),(2),(29) からなるプリミティブ方程式系は以下のような簡単なベクトル表示でまとめることが出来る (Tanaka, 1991) .

$$M \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{N} + \mathbf{F} \quad (30)$$

ここで τ は無次元化された時間であり , $\tau = 2\Omega t$ である . 式 (30) 中の各ベクトルは以下の通りである .

- \mathbf{U} : 従属変数ベクトル

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u & v & \phi' \end{pmatrix}^T \quad (31)$$

- M :鉛直線形演算子

$$M = 2\Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (32)$$

- L :水平線形演算子

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \sin \theta & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ 2\Omega \sin \theta & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial(\cdot) \cos \theta}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

- N :非線形演算子

$$N = \begin{pmatrix} -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv \\ -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv \\ \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right) \end{pmatrix} \quad (34)$$

- F :外部強制項からなるベクトル

$$\mathbf{F} = \left(F_u \quad F_v \quad \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{pQ}{c_p \gamma} \right) \right)^T \quad (35)$$

ただし，

$$(\cdot)^T : \text{転置行列} \quad (36)$$

である．モデルの基礎方程式系は (30) のようなベクトル方程式で構成され，時間変化項に含まれる従属変数ベクトル U を，他の3つの項 (線形項: LU ，非線形項: N ，外部強制項: F) のバランスから予測するようなモデルであるといえる．

3.2 プリミティブスペクトル方程式の導出

3.2.1 基礎方程式の線形化

ベクトル表記でのプリミティブ方程式 (30) は非線形連立偏微分方程式である．そこで，方程式の基本状態を静止大気 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi}) = \mathbf{0}$ で断熱かつ摩擦なしとし，そ

ここに微小擾乱 (u', v', ϕ') が重なったものとする．このとき式 (34) は，

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) u' - \omega \frac{\partial u'}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} u' v' \\ -\left(\frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) v' - \omega \frac{\partial v'}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} u' v' \\ \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p^2}{R \gamma} \left(\frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right) \end{pmatrix}$$

となり，2次以上の摂動項を無視すると，結局 $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ であり，式 (30) を線形化した基本状態は以下ようになる．

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial \tau} + \mathbf{L} \mathbf{U}' = 0 \quad (37)$$

$$\mathbf{U}' = (u', v', \phi')^T$$

これ以降は簡単のため $\mathbf{U}' = (u', v', \phi')$ を $\mathbf{U} = (u, v, \phi)$ と記す．また，鉛直方向のみに依存した関数である鉛直構造関数 $G_m(p)$ を導入し，式 (37) を鉛直方向と水平方向に変数分離する．

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\lambda, \theta, p, \tau) &= (u, v, \phi)^T \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (u_m, v_m, \phi_m)^T G_m(p) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (u_m, v_m, \phi_m)^T G_m(p) \end{aligned} \quad (38)$$

ここで，添え字の m は鉛直モード番号 (vertical mode number) を意味する．これを式 (37) に代入し，分離された各従属変数に関する方程式を解く．ここでは \mathbf{U} の第3成分であるジオポテンシャルの変数分離を例として示す．

第 m 鉛直モードのみの方程式について表すと，

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R \gamma} \frac{\partial}{\partial p} (\phi_m G_m) \right] + \frac{G_m}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{G_m}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (39)$$

となる．ここで， ϕ_m は (λ, θ, t) のみに依存し， p に依存しないことを考慮し，両辺を G_m で割ると，

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[-\phi_m \frac{1}{G_m} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R \gamma} \frac{\partial G_m}{\partial p} \right] + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (40)$$

である．また， p, G_m は時間依存性がないことより，

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial t} \frac{1}{G_m} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R \gamma} \frac{\partial G_m}{\partial p} = \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} \quad (41)$$

となる．式 (41) を p に依存するものとそれ以外に変数分離すると，

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial t} \left(\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} \right)^{-1} = G_m \left(\frac{1}{G_m} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R \gamma} \frac{\partial G_m}{\partial p} \right)^{-1} \quad (42)$$

となる．式 (42) の左辺は λ, θ, t のみの関数であり、右辺は p のみの関数である．この等号が恒等的に成り立つためには、両辺が定数である必要がある．この分離定数を $-gh_m$ とすると、以下の二つの方程式を得る．

$$\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R \gamma} \frac{dG_m}{dp} + \frac{1}{gh_m} G_m = 0 \quad (43)$$

$$\frac{1}{gh_m} \frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} \quad (44)$$

この常微分方程式 (43) を鉛直構造方程式 (vertical structure equation) と呼ぶ．

また、残りの水平風成分についても同様に鉛直構造関数を導入すると、

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v_m + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi_m}{\partial \lambda} = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u_m + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi_m}{\partial \theta} = 0 \quad (46)$$

と導かれる．式 (44), (45), (46) をまとめて水平構造方程式 (horizontal structure equation) と呼ぶ．ここで、分離定数 h_m は距離の次元を持ち、鉛直構造方程式 (43) の固有関数である鉛直構造関数 $G_m(p)$ に対応する固有値として求まる．また、水平構造方程式 (44) は、流体層の厚さ h_m の線形浅水方程式での連続の式と同じ形であるので、 h_m は等価深度 (equivalent height) の意味を持つ．

3.2.2 鉛直構造関数

ここでは、前節で導いた鉛直構造方程式 (43) の解であり、3次元ノーマルモード関数を構成する鉛直構造関数 $G_m(p)$ の導出を行う．また、鉛直構造関数を用いた鉛直方向の波数展開について述べる．

まず、鉛直構造方程式 (43) を次のように整理する．

$$\mathbf{L} \left[G_m(p) \right] + \frac{1}{gh_m} G_m(p) = 0 \quad (47)$$

ここで、

$$\mathbf{L} = \frac{d}{dp} \frac{\beta}{R} \frac{d}{dp} = \frac{\beta}{R} \frac{d^2}{dp^2} + \frac{1}{R} \frac{d\beta}{dp} \frac{d}{dp}$$

$$\beta \equiv \frac{p^2}{\gamma(p)}$$

とする．今，次のような境界条件が存在する．

$$\omega \rightarrow 0, \quad \text{as } p \rightarrow 0 \quad (48)$$

$$(u, v, w) = 0. \quad \text{at } p = p_s \quad (49)$$

式 (48) は上部境界において質量が保存されるという条件を，式 (49) は下部境界において速度がゼロであるという条件を表している．

以上の境界条件 (48),(49) は，以下の手順で鉛直構造関数に関する境界条件に置き換えられる．まず，熱力学の第一法則の式 (25) を線形化して，

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \omega = 0 \quad (50)$$

となる．式 (50) に対して上部境界条件 (48) を考慮し，式 (38) を代入することによって鉛直構造関数を導入すると，

$$\frac{dG_m(p)}{dp} \rightarrow 0, \quad \text{as } p \rightarrow 0 \quad (51)$$

という上部境界条件を得る．

下部境界条件 (49) は，

$$gw = \left. \frac{d\phi'}{dt} \right|_{p=p_s} = \left[\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi' + \omega \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right]_{p=p_s} = 0 \quad (52)$$

となり，これに状態方程式 (10)，静力学平衡近似の式 (11)，地表面での水平風が 0 であることを考慮すると，

$$\left. \frac{\partial \phi'}{\partial t} \right|_{p=p_s} - \omega \frac{RT_s}{p_s} = 0 \quad (53)$$

となる (T_s は地表気圧 p_s に対する気温)．ここで式 (50) と (53) で ω を消去し，鉛直構造関数を導入すると次の式を得る．

$$\frac{dG_m(p)}{dp} + \frac{\gamma}{p_s T_s} G_m(p) = 0, \quad \text{at } p = p_s \quad (54)$$

鉛直構造方程式は同次型境界条件 (51)，(54) の下で，Sturm-Liouville 型の境界値問題として解くことが出来る．これが $G_m(p) = 0$ 以外の解 (自明でない解) をもつとき，その解は与えられた方程式 (47) および境界条件 (51)，(54) の固有関数であ

り，この固有関数 $G_m(p)$ が存在するような h_m の値は，その固有関数に対する固有値となる．

この固有値問題については，有限要素法あるいは Galerkin 法により解を数値的に計算することが出来る (Tanaka, 1985)．本研究では Kasahara (1984) による Galerkin 法を用いて鉛直構造を求める．

まず，鉛直構造関数を Legendre 多項式 $P_i(p)$ により級数展開する．

$$G_m(p) = \sum_{i=0}^{J-1} a_i P_i(p) \quad (55)$$

ここで J は自然数である．Legendre 多項式は直交性を持つので，

$$\frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} P_i(p) P_j(p) dp = \delta_{ij} \quad (56)$$

a_i は以下のように求める．

$$\int_0^{p_s} \left(\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m(p)}{dp} + \frac{1}{gh_m} G_m(p) \right) P_j(p) dp = 0 \quad (57)$$

この式に (55) を代入して，

$$\int_0^{p_s} \left(\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{d}{dp} \sum_{i=0}^{J-1} a_i P_i(p) \right) P_j(p) dp + \frac{1}{gh_m} \sum_{i=0}^{J-1} a_i \int_0^{p_s} P_i(p) P_j(p) dp = 0 \quad (58)$$

となり，Legendre 関数の直交性 (56) より，

$$\sum_{i=0}^{J-1} a_i \int_0^{p_s} \left(\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{d}{dp} P_i(p) \right) P_j(p) dp + \frac{1}{gh_m} p_s a_j = 0 \quad (59)$$

となる．境界条件 (51)，(54) に式 (55) を適用すると，

$$\left. \frac{dP_i(p)}{dp} \right|_{p \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad \text{as } p \rightarrow 0 \quad (60)$$

$$\left. \frac{dP_i(p_s)}{dp} \right|_{p=p_s} + \frac{\gamma(p_s)}{p_s T_s(p_s)} P_i(p_s) = 0, \quad \text{at } p = p_s \quad (61)$$

となる．これを考慮して式 (59) を整理すると，

$$\sum_{i=0}^{J-1} \mathbf{K}_{ij} a_i = \frac{1}{gh_m} a_j \quad (62)$$

ただし，

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{1}{RT_s(p_s)} P_i(p_s) P_j(p_s) + \frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dP_i(p)}{dp} \frac{dP_j(p)}{dp} dp \quad (63)$$

とする．式 (62) の固有値問題を解くことにより，固有値 h_m と固有関数 a_i が求まり，式 (55) に代入することによって鉛直構造関数 $G_m(p)$ が求まる．この解を求めるためには， γ を決定するために全球平均気温 $T_0(p)$ が必要だが，この値は Tanaka and Kung (1989) による 1978 年 12 月から 1979 年 11 月までの第 1 回 GARP (Global Atmosphere Research Program) 全球実験 (First GARP Global Experiment) 期間中の観測値を鉛直方向に 24 のガウスレベル (Gauss Level) に内挿した値を用いた．

このようにして得られた鉛直構造関数 $G_m(p)$ は正規直交関数なので，これを基底として物理量を鉛直方向に波数展開できる．Sturm-Liouville 型の境界値問題の解は直交性を持つという特徴があるが，確認のために鉛直構造関数が直交性を持つことを示しておく．

$$\int_0^{p_s} G_{m'} \mathbf{L}[G_m] dp = \frac{\beta}{R} G_{m'} \frac{dG_m}{dp} \Big|_{p=0}^{p_s} - \int_0^{p_s} \frac{\beta}{R} \frac{dG_m}{dp} \frac{dG_{m'}}{dp} dp \quad (64)$$

$$\int_0^{p_s} G_m \mathbf{L}[G_{m'}] dp = \frac{\beta}{R} G_m \frac{dG_{m'}}{dp} \Big|_{p=0}^{p_s} - \int_0^{p_s} \frac{\beta}{R} \frac{dG_{m'}}{dp} \frac{dG_m}{dp} dp \quad (65)$$

式 (64) と式 (65) の辺々を引いて，

$$\int_0^{p_s} \left(G_{m'} \mathbf{L}[G_m] - G_m \mathbf{L}[G_{m'}] \right) dp = \left[G_{m'} \frac{\beta}{R} \frac{dG_m}{dp} - G_m \frac{\beta}{R} \frac{dG_{m'}}{dp} \right]_{p=0}^{p_s} \quad (66)$$

となる．鉛直構造方程式 (47) より，

$$\mathbf{L}[G_m(p)] = -\frac{1}{gh_m} G_m(p) \quad (67)$$

$$\mathbf{L}[G_{m'}(p)] = -\frac{1}{gh'_m} G_{m'}(p) \quad (68)$$

であり，それぞれを式 (66) に代入して，境界条件 (60)，(61) を考慮すると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{h_m - h_{m'}}{h_m h_{m'}} \int_0^{p_s} G_m(p) G_{m'}(p) dp &= \left[G_{m'} \frac{\beta}{R} \frac{dG_m}{dp} - G_m \frac{\beta}{R} \frac{dG_{m'}}{dp} \right]_{p=0}^{p_s} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (69)$$

式 (69) より， $h_m \neq h_{m'}$ のときに鉛直構造方程式が直交性を持つことが示された． G_m は適当な定数をかけて正規化することによって次の正規直交関係を得る．

$$\frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} G_m(p) G_{m'}(p) dp = \delta_{mm'} \quad (70)$$

以上の鉛直構造関数 $G_m(p)$ の正規直交性によって，気圧 p の任意の関数 $f(p)$ について，次の鉛直変換を導くことが出来る．

$$f(p) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m G_m(p) \quad (71)$$

$$f_m = \frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} f(p) G_m(p) dp \quad (72)$$

ここで f_m は第 m モードの鉛直変換係数である．

鉛直モード $m = 0$ は順圧 (barotropic) モード，または外部 (external) モードといい，鉛直方向に節を持たず，ほとんど全層で一定のまま変化しないモードである．これに対して鉛直モード $m \geq 1$ は傾圧 (baroclinic) モード，または内部 (internal) モードといい， m 番目のモードは鉛直の m 個の節を持っている．

3.2.3 水平構造関数

ここでは，鉛直構造関数 $G_m(p)$ とともに 3 次元ノーマルモード関数を構成する水平構造関数 H_{nlm} を導出し，水平方向の波数展開について述べる．

前節で第 m モードの鉛直構造関数の固有地として求められた等価深度 h_m を用い，水平構造関数を解く．鉛直方向に変数分離した後の第 m モードの時間水平方向に関する方程式 (44)，(45)，(46) は，行列表示で，

$$M_m \frac{\partial U_m}{\partial t} + L U_m = 0 \quad (73)$$

と書ける．ここで，

$$M_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{gh_m} \end{pmatrix} \quad U_m = (u_m \quad v_m \quad \phi'_m)^T$$

である．ここで，次のようなスケール行列を導入する．

$$X_m = \begin{pmatrix} \sqrt{gh_m} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{gh_m} & 0 \\ 0 & 0 & gh_m \end{pmatrix} \quad Y_m = 2\Omega \begin{pmatrix} \sqrt{gh_m} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{gh_m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (74)$$

これらを式 (73) に次のように作用させる．

$$(Y_m^{-1} M_m X_m) \frac{\partial}{\partial t} (X_m^{-1} U_m) + (Y_m^{-1} L X_m) (X_m^{-1} U_m) = 0 \quad (75)$$

ここで，

$$Y_m^{-1} M_m X_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，無次元時間を用いると式 (73) は，

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{X}_m^{-1}\mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{L}\mathbf{X}_m)(\mathbf{X}_m^{-1}\mathbf{U}_m) = 0 \quad (76)$$

となる．式 (76) の線形演算子は次のようになる．

$$\mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{L}\mathbf{X}_m = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta & \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ \sin \theta & 0 & \alpha_m \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (77)$$

式 (77) 中の α_m は笠原パラメータと呼ばれるもので，以下のように定義される．

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{gh_m}}{2\Omega a} \quad (78)$$

これは，浅水方程式中の 4 つの惑星パラメータ (g : 重力, h_m : 等価深度, Ω : 地球の自転角速度, a : 惑星半径) が，唯一の惑星固有パラメータ α_m のみで表されることを示している (Tanaka, 1985) .

式 (76) は水平構造方程式，またはラプラス潮汐方程式と呼ばれる．この方程式は時間 τ の線形システムであるから次のよう解を仮定して，水平方向の成分と時間成分とに分離することが出来る．

$$\mathbf{X}_m^{-1}\mathbf{U}_m(\lambda, \theta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) e^{-i\sigma_{nlm}\tau} \quad (79)$$

$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ は水平構造関数 (horizontal structure function) ，または Hough 関数と呼ばれる．Hough 関数は第 m 鉛直モードに相当する水平ノーマルモード，すなわち水平自由振動を意味し，経度 λ と緯度 θ の関数である．添え字の n は東西波数， l は南北モード番号を示している．

式 (79) を水平構造方程式 (76) に代入すると，

$$i\sigma_{nlm}\mathbf{H}_{nlm} + (\mathbf{Y}_m^{-1}\mathbf{L}_m\mathbf{X}_m)\mathbf{H}_{nlm} = 0 \quad (80)$$

となる．この固有値問題を解くことによって固有関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ と，対応する固有値 σ_{nlm} を求めることが出来る．式 (76) は緯度 λ について線形であるから，Hough ベクトル関数 $\Theta_{nlm}(\theta)$ を用いて $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ を次の様に経度依存と緯度依存に分離し，それらのテンソル積として表すことが出来る．

$$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) = \Theta_{nlm}(\theta) e^{in\lambda} \quad (81)$$

ただし,

$$\Theta_{nlm}(\theta) = \begin{pmatrix} U_{nlm}(\theta) \\ -iV_{nlm}(\theta) \\ Z_{nlm}(\theta) \end{pmatrix} \quad (82)$$

とする．南北風の成分に関しては位相を $\pi/2$ だけずらすために $i = \sqrt{-1}$ が掛けられている．南北モードは3種類の異なるモードから構成される．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{低周波の西進するロスビーモード (Rossby mode)} \quad l_r \\ \text{高周波の西進する重力波モード (gravity mode)} \quad l_w \\ \text{高周波の東進する重力波モード} \quad l_e \end{array} \right.$$

Swarztrauber and Kasahara (1985) によると, 水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ は球面調和関数の和として得られる．この方法で求められる水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ が正規直交性を持つならば, これを基底として水平方向に波数展開することが出来る．水平構造関数の正規直交性は以下のようにして示される．

複素共役を*で示すと, 緯度と経度に関する内積をとって,

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (U_{nlm}U_{n'l'm}^* + V_{nlm}V_{n'l'm}^* + Z_{nlm}Z_{n'l'm}^*) e^{-i(n-n')\lambda} \cos \theta d\lambda d\theta \quad (83)$$

である． nlm と $n'l'm$ は異なる南北波数と東西モードを示している．式 (80) の線形演算子 $L_m = Y_m^{-1} L_m X_m$ は非対称のエルミート行列であるため, 次の関係が成立する．

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, L_m \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle + \langle L_m \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0 \quad (84)$$

これを式 (80) に代入して,

$$(\sigma_{nlm} - \sigma_{n'l'm}^*) \langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0 \quad (85)$$

を得る．式 (85) より次の二つの条件が課せられる．

- $n = n'$ かつ $l = l'$ のとき

$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{nlm} \rangle$ は線形浅水方程式の全エネルギーに比例する量であり, 決してゼロとならない．したがって, 式 (85) を満たすためには $\sigma_{nlm} = \sigma_{nlm}^*$ でなければならない．つまり, σ_{nlm} は実数でなければならない．

- それ以外のとき

$\sigma_{nlm} \neq \sigma_{n'l'm}^*$ であれば、式 (85) を満たすためには $\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{nlm} \rangle = 0$ が成り立たなければならない。すなわち固有振動数 σ_{nlm} に相当する固有関数 \mathbf{H}_{nlm} が固有振動数 $\sigma_{n'l'm}$ に相当する固有関数 $\mathbf{H}_{n'l'm}$ と直交関係にあることを示している。

以上の二つの条件から、任意のモード nlm について以下の正規直交関係が成立する。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_{nlm} \cdot \mathbf{H}_{n'l'm}^* \cos \theta d\lambda d\theta \\ &= \delta_{nn'} \delta_{ll'} \end{aligned} \quad (86)$$

以上の水平構造関数 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$ の直交性から、次のフーリエハフ変換が導かれる。

第 m 鉛直モードに相当する物理空間における任意のベクトル関数を $\mathbf{W}_m(\lambda, \theta, \tau)$ とすると、

$$\mathbf{W}_m(\lambda, \theta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} w_{nlm}(\tau) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \quad (87)$$

$$w_{nlm}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{W}_m(\lambda, \theta, \tau) \cdot \mathbf{H}_{nlm}^*(\lambda, \theta) \cos \theta d\lambda d\theta \quad (88)$$

となる。式 (76) にこのフーリエハフ変換を施すと、

$$\frac{d}{d\tau} w_{nlm}(\tau) + i\sigma_{nlm} w_{nlm}(\tau) = 0 \quad (89)$$

となる。この式によると、固有振動数 σ_{nlm} は実数なので、左辺第 2 項の線形項は、波動の位相のみを表現し、波の振幅は変化させないことを示している。

3.2.4 3次元ノーマルモード関数展開

ここでは、3.2.2 と 3.2.3 で扱った鉛直構造関数 $G_m(p)$ と水平構造関数 \mathbf{H}_{nlm} を結合させ、3次元ノーマルモード関数 $\Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p)$ を構成し、式 (30) を展開する。3次元ノーマルモード関数は鉛直構造関数と水平構造関数のテンソル積であり、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) &= G_m(p) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \\ &= G_m(p) \Theta_{nlm}(\theta) e^{in\lambda} \end{aligned} \quad (90)$$

この3次元ノーマルモード関数も以下の正規直交性を持つ．

$$\begin{aligned}\langle \Pi_{nlm}, \Pi_{n'l'm'} \rangle &= \frac{1}{2\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \Pi_{nlm} \cdot \Pi_{n'l'm'}^* \cos \theta d\lambda d\theta dp \\ &= \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}\end{aligned}\quad (91)$$

この関係により，3次元ノーマルモード関数展開が導かれる．式(37)中の U と N と F は以下のように展開される．

$$U(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M w_{nlm}(\tau) \mathbf{X}_m \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (92)$$

$$N(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M n_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (93)$$

$$F(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M f_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (94)$$

ここで， $w_{nlm}(\tau)$, $n_{nlm}(\tau)$, $f_{nlm}(\tau)$ はそれぞれ，従属変数ベクトル U ，非線形演算子 N ，外部強制項からなるベクトル F についての展開係数であり，それらは時間 τ のみの関数である．

式(30)と3次元ノーマルモード関数との内積を以下のようにとり，スペクトル表記を導く．

$$\langle M \frac{\partial U}{\partial \tau} + LU - N - F, \mathbf{Y}_{nlm}^{-1} \Pi_{nlm} \rangle = 0 \quad (95)$$

計算過程が複雑な非線形演算子の内積を計算しておく．ここからは3重の添字 $nlm, n'l'm', n''l''m''$ をそれぞれ i, j, k と表し， i で示される波数はそれぞれ n_i, k_i, m_i のように示して区別する． j, k についても同様である．

$$\begin{aligned}\langle N, \mathbf{Y}_{m_i}^{-1} \Pi_i \rangle &= \frac{1}{2\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} G_{m_i} e^{in\lambda} \\ &\quad \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2\Omega\sqrt{gh_m}} U_i \\ \frac{1}{2\Omega\sqrt{gh_m}} (iV_i) \\ \frac{1}{2\Omega} Z_i \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{c} -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv \\ -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv \\ \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right) \end{array} \right) \cos \theta d\lambda d\theta dp\end{aligned}\quad (96)$$

式 (92) を成分で書くと以下ようになる .

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=0}^K w_i \sqrt{gh_{m_i}} U_i G_{m_i} e^{in_i \lambda} \\
v &= \sum_{i=0}^K w_i \sqrt{gh_{m_i}} (-iV_i) G_{m_i} e^{in_i \lambda} \\
\phi &= \sum_{i=0}^K w_i gh_{m_i} Z_i G_{m_i} e^{in_i \lambda}
\end{aligned} \tag{97}$$

この級数展開 (97) を式 (96) の各変数に代入する .

また , 鉛直 p 速度 ω は発散と関係することから , 以下のように $\sigma_i Z_i$ を用いた級数展開を導くことが出来る (田中 他, 1997) . まず連続の式 (9) を鉛直積分して式 (97) を代入する .

$$\begin{aligned}
\omega &= - \int_0^p \nabla \cdot \mathbf{V} dp \\
&= - \int_0^p \left(\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} \right) dp \\
&= - \sum_{i=0}^K w_i \int_0^p G_{m_i} dp \frac{\sqrt{gh_{m_i}}}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} U_i e^{in_i \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (-iV_i \cos \theta) e^{in_i \lambda} \right]
\end{aligned} \tag{98}$$

ここで , 水平構造方程式の第 3 成分 (44) より ,

$$i\sigma_i \frac{2\Omega}{\sqrt{gh_m}} Z_i e^{in_i \lambda} = \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} U_i e^{in_i \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (-iV_i \cos \theta) e^{in_i \lambda} \right] \tag{99}$$

なので , これを式 (98) 代入して ,

$$\omega = \sum_{i=0}^K w_i 2\Omega \int_0^p G_{m_i} dp (-i\sigma_i Z_i) e^{in_i \lambda} \tag{100}$$

を得る . 式 (100) 中の G_{m_i} の不定積分は鉛直構造方程式 (43) を積分することによって G_{m_i} の 1 階微分で表すことが出来る .

$$\int_0^p G_{m_i} dp = - \frac{gh_{m_i}}{R\gamma} p^2 \frac{dG_{m_i}}{dp} \tag{101}$$

また , 式 (96) を展開する過程で現れる G_{m_i} の高次の微分は , 次のように鉛直構造

方程式 (43) を用いて G_{m_i} の 1 階微分で表現することが出来る .

$$\langle N, \mathbf{Y}_{m_i}^{-1} \mathbf{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} G_{m_i} e^{in\lambda} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\Omega\sqrt{gh_m}} U_i \\ \frac{1}{2\Omega\sqrt{gh_m}} (iV_i) \\ \frac{1}{2\Omega} Z_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_1 \left(\frac{n_k U_k}{\cos\theta} + \tan\theta V_k \right) & -P_1 \frac{dU_k}{d\theta} & P_2 U_k \\ P_1 \left(\frac{n_k V_k}{\cos\theta} + \tan\theta U_k \right) & -P_1 \frac{dV_k}{d\theta} & P_2 V_k \\ P_3 \frac{n_k Z_k}{\cos\theta} & -P_3 \frac{dZ_k}{d\theta} - P_4 Z_k & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_j \\ V_j \\ \sigma_j Z_j \end{pmatrix} e^{i(-n_i+n_j+n_k)\lambda} \cos\theta d\lambda d\theta dp \quad (102)$$

ただし ,

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\sqrt{gh_{m_j}} \sqrt{gh_{m_k}}}{2\Omega a \sqrt{gh_{m_i}}} G_{m_i} G_{m_j} G_{m_k} \\ P_2 &= \frac{\sqrt{gh_{m_k}} gh_{m_j}}{\sqrt{gh_{m_i}} R\gamma} p^2 G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} \frac{dG_{m_k}}{dp} \\ P_3 &= \frac{\sqrt{gh_{m_j}}}{2\Omega} G_{m_i} G_{m_j} G_{m_k} - \frac{\sqrt{gh_{m_k}} gh_{m_j}}{2\Omega a R\gamma} p^2 G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} \frac{dG_{m_k}}{dp} \\ P_4 &= G_{m_i} G_{m_j} G_{m_k} + \frac{gh_{m_k}}{R\gamma} p G_{m_i} G_{m_j} \frac{dG_{m_k}}{dp} + \frac{gh_{m_j}}{R\gamma} p G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} G_{m_k} \\ &\quad + \left(\frac{gh_{m_k}}{R\gamma} - 1 \right) \frac{gh_{m_j}}{R\gamma} p^2 G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} \frac{dG_{m_k}}{dp} \end{aligned} \quad (103)$$

とする .

以上より , 非線形演算子の内積を 3 次元ノーマルモードの 3 重積の定積分にまとめることができた . 式 (102) における 3 重積分を非線形相互作用係数 r_{ijk} とおくと , 式 (95) は次のようにまとめることができ , 展開係数のみでプリミティブ方程式系を記述することが出来る .

$$\frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i = -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w_j w_k + f_i \quad (104)$$

$$i = 1, 2, \dots, K$$

非線形項中の r_{ijk} は非線形の波-波相互作用 (wave-wave interaction) および , 帯状-波相互作用 (zonal-wave interaction) に関する相互作用係数 (interaction coefficients) で実数である . K は全波数で , $K = (2N + 1)(L + 1)(M + 1)$ である . N は東西全波数 , L は南北全モード , M は鉛直全モードを示す .

以上より，順圧成分と傾圧成分からなる鉛直構造関数，ロスビーモードと重力モードからなる水平構造関数を用いて，スペクトル表示したプリミティブ方程式 (104) を導出することができた．

3.3 エネルギー関係式

ここではスペクトル表記でのエネルギーに関する方程式を導く．まず式 (30) と $\frac{p_s}{g}\mathbf{U}$ で内積をとり，次のエネルギーバランス方程式を得る．

$$\frac{d}{d\tau}E_{nlm} = N_{nlm} + F_{nlm} \quad (105)$$

各項の内積を以下に示す．

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{p_s}{g}\mathbf{U}, \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} \right\rangle &= \frac{d}{d\tau} \frac{1}{Sg} \int_S \left[\int_0^{p_s} (K + A) dp + \frac{1}{2} \frac{p_s}{RT_s} \phi_s^2 \right] dS \\ &\equiv \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \frac{d}{d\tau} E_{nlm} \end{aligned} \quad (106)$$

地表面におけるジオポテンシャルの鉛直フラックスの発散は全球エネルギー解析では無視できるので，

$$\left\langle \frac{p_s}{g}\mathbf{U}, \mathbf{L}\mathbf{U} \right\rangle = \frac{1}{Sg} \int_S \int_0^{p_s} \nabla \cdot \phi \mathbf{V} dp dS = 0 \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{p_s}{g}\mathbf{U}, \mathbf{N} \right\rangle &= \frac{1}{Sg} \int_S \int_0^{p_s} \left[-\nabla \cdot (K + A) \mathbf{V} - \frac{\partial}{\partial p} (K + A) \omega \right] dp dS \\ &\quad + \frac{1}{Sg} \int_S \frac{p_s \phi_s}{\gamma} \left(-\mathbf{V} \cdot \nabla \frac{p}{R} \frac{\partial \phi}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{p}{R} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \Big|_{p=p_s} dp dS \\ &\equiv \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M N_{nlm} \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{p_s}{g}\mathbf{U}, \mathbf{F} \right\rangle &= \frac{1}{Sg} \int_S \int_0^{p_s} \left(uF_u + vF_v + \frac{RT}{c_p \gamma} Q dp \right) dS \\ &\quad + \frac{1}{Sg} \int_S \frac{p_s \phi_s}{\gamma} Q_s dS \\ &\equiv \sum_{n=0}^F \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M F_{nlm} \end{aligned} \quad (109)$$

となる．ここで K は運動エネルギー， A は有効位置エネルギー， E を全エネルギーとし， S は等圧面での面積である．

$$\begin{aligned} E &= K + A \\ K &= \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \\ A &= \frac{1}{2} \frac{p^2}{R\gamma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right)^2 \end{aligned}$$

式 (106) ~ (109) 中の $\frac{p_s}{g}$ はエネルギーの次元に直すための係数である．添字の s は地表面での値を意味する．式 (106) ~ (109) の最右辺は，式 (92) ~ (94) に式 (91) の 3次元ノーマルモード関数の直交性と式 (74) のスケール行列を代入することによって得られる．またここでも安定度のパラメータである γ の鉛直方向の変化を無視している．

前述したように，式 (106) と (107) から基礎方程式系の線形項は波の位相のみを変化させる項であり，エネルギーの時間変化には寄与しないことがわかる．ここで式 (105) に対して断熱かつ摩擦なしの条件を加えると，

$$\sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \frac{d}{d\tau} E_{nlm} = 0 \quad (110)$$

という 3次元ノーマルモード関数によるエネルギー保存則が導かれる (Tanaka, 1985)．ここで，

$$E_{0lm} = \frac{1}{4} p_s h_m |w_{0lm}|^2 \quad (111)$$

$$E_{nlm} = \frac{1}{2} p_s h_m |w_{nlm}|^2 \quad (112)$$

という形で，モードごとの全エネルギーが定義される．この式 (111)，(112) を時間微分して，前節で導いたプリミティブスペクトル方程式 (104) を代入することによって，エネルギー変換量が以下のように定義される．

$$\begin{aligned} N_{nlm} &= p_s \Omega h_m [w_{nlm}^* n_{nlm} + w_{nlm} n_{nlm}^*] \\ &= -p_s \Omega h_m \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K i r_{ijk} (w_i^* w_j w_k - w_i w_j^* w_k^*) \end{aligned} \quad (113)$$

$$F_{nlm} = p_s \Omega h_m [w_{nlm}^* f_{nlm} + w_{nlm} f_{nlm}^*] \quad (114)$$

式 (111) ~ (114) の関係を用いることによって，各モードごとに式 (105) の各項のエネルギースペクトルを得ることができる．

4 結果

4.1 観測による順圧モードのエネルギースペクトル

図9はJRA-25 (Japanese 25-year Reanalysis) およびJCDAS (JMA Climate Data Assimilation System, JMA: Japan Meteorological Agency) による1979年から2009年までの順圧モードのエネルギースペクトルである。横軸が無次元位相速度、縦軸がエネルギースペクトル (J/m^2) である。この図を見ると、位相速度の小さい領域ではエネルギースペクトルも小さく、位相速度が大きくなるに従ってエネルギースペクトルが大きくなっている。そして、位相速度0.02(有次元の位相速度では 6.2m/s) 付近にエネルギースペクトルの最大があり、その先では再びエネルギースペクトルは小さくなっているという特徴が見られる。このエネルギースペクトルが最大となっている部分をラインズスケール (Rhines 1975) c_R と呼び、ここが式(104)の線形項と非線形項の大きさが等しくなるスケールである。つまり、このスケールよりも位相速度の小さい領域では非線形相互作用が卓越しており、大気が乱流状態で逆カスケードが起こっているということであり、このスケールよりも位相速度の大きな領域では波が卓越しているということである。また、点線でつながっているのは同じ東西波数 (n) を持つものであり、全ての東西波数で南北モード (l) が大きくなっていくに従いエネルギースペクトルが小さくなることが見られるが、 $l = 0, 1, 2$ のようなスケールの大きな南北モードのエネルギースペクトルは値が小さくなっているのが見られる。スペクトルの傾斜を見ると、Tanaka *et al.* (2004) で示された mc^2 の直線とよく一致していることがわかる。

図10は図9と同じ期間の冬季 (DJF) のみを計算したものである。また、図11は夏季 (JJA) のみを計算したものである。これらの図を図9と比較すると、最も顕著に見られる違いはエネルギースペクトルのピークの値である。全期間を計算したものではスペクトルのピークは $2.0 \times 10^4 \text{J}/\text{m}^2$ 、DJFではスペクトルのピークが $6.0 \times 10^4 \text{J}/\text{m}^2$ 付近である。一方、JJAのみを計算したものでは $8.0 \times 10^3 \text{J}/\text{m}^2$ 付近と小さくなっている。また、このようなエネルギースペクトルのピークの値の減少に伴って、 c_R の位置も位相速度の小さい側へとシフトしている。これは、DJFの期間の方がJJAの期間よりも傾圧性が強くなり、総観規模擾乱の規模が大きくなるため、大気全体としてのエネルギーは大きくなるからである。また、同様の理由によって、総観規模擾乱によるエネルギーの逆カスケードがより大きなスケールまで達するため、DJFのほうがJJAよりも c_R が位相速度の大きな側へ

シフトしている。

このように、エネルギースペクトルはその期間によって値やピークが変化する。それは南北の傾圧性の強さの違い、つまり総観規模擾乱のスケールの違いによる。しかし、図9～図11全てにおいてラインズスケールよりも位相速度の小さい領域、つまり乱流が卓越している領域では、エネルギースペクトルの傾斜は全て Tanaka *et al.* (2004) で示された mc^2 の傾きとよく一致している。

4.2 ロスビー波の碎波条件による順圧モードのエネルギースペクトル

ここでは、基本状態で東西波数 0 の状態から、ある一つの東西波数、南北モードを増幅させて、Garcia (1991) のロスビー波の碎波条件 ($\partial q/\partial y < 0$) を満たしたときの順圧モードでのエネルギースペクトルを計算してプロットした。はじめに、Garcia(1991) のロスビー波の碎波条件と同値の条件である $|u| > |c|$ を満たしたときのエネルギースペクトルを示し、次に $\partial q/\partial y < 0$ を満たしたときのエネルギースペクトルを示した。また、その中間の条件である $-\nabla^2 u + \beta < 0$ についても計算し、その結果を示した。

4.2.1 $|u| > |c|$ を満たしたときのエネルギースペクトル

図 12 と図 13 は Garcia(1991) のロスビー波の碎波条件と同値の条件である $|u| > |c|$ を満たしたときのエネルギースペクトルである。図 12 は北緯 10 ~ 80 度、図 13 は北緯 30 ~ 60 度で碎波条件を満たしたときの図である。同じ東西波数のものが点線でつながっており、直線は mc^2 を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ を表す。横軸は位相速度 c で表されている。これらを見ると、まず目に付くのは南北モードの小さなもののエネルギースペクトルである。南北モード $l = 1, 2$ のようなモードはどちらの図においてもエネルギースペクトルの密集している直線からかなりはずれている。このような小さな南北モードについては観測結果である図 9 や図 10 などにおいてもエネルギースペクトルの密集している直線からずれていることがわかる。しかし、そのずれの方向は観測ではエネルギースペクトルの小さな側に、計算では大きな側にずれていることがわかる。それ以外のエネルギースペクトルについてはどちらの緯度帯においてもある程度一定の直線に乗っている。

図 14 と図 15 は、それぞれ図 12 と図 13 について大きな南北モードを取り除いた図である。取り除く南北モードについては、図 9 を用いて目視によってエネルギースペクトルが密集している直線から外れている南北モードを決定した。取り除いた南北モードは $0 < n \leq 2, 11 \leq n \leq 15$ のとき $l \geq 4$, $3 \leq n \leq 10$ のとき $l \geq 3$, $15 \leq n \leq 20$ のとき $l \geq 5$ である。そのほかの記号については図 12 と同様である。図 14 を見ると、全体としてはほとんど mc^2 の直線と一致しており、その値も $\frac{1}{4}mc^2$ と一致していることがわかる。しかし、各東西波数を見ると、 mc^2 の傾きよりも大きくなっていることがわかる。この傾向は東西波数の小さなものほどより顕著に見られてい

る．図 15 も全体として mc^2 の傾きと極めてよく一致しており，その値も $\frac{1}{4}mc^2$ とよく一致している．また，各波数ごとに見ても図 14 よりも mc^2 の直線と一致していることがわかる．このときの $n = 6, l = 3$ の渦位の分布を図 16 に示す．等値線の値は $10^{-10}\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$ である．緯度 60 度と 40 度付近に等値線のふくらみが見られ，緯度 60 度付近では渦位の南北勾配が負となりロスビー波の砕波条件を満たしていることがわかる．

4.2.2 $\partial q/\partial y < 0$ を満たしたときのエネルギースペクトル

図 17 ~ 図 21 は Garcia(1991) のロスビー波の砕波条件である $\partial q/\partial y < 0$ を満たしたときのエネルギースペクトルをプロットしたものである．これらの図の中の記号は全て図 14 と同様であり，各東西波数に対して取り除いた南北モードも同様である．図 17 は北緯 10 ~ 80 度において $\partial q/\partial y < 0$ を満たしたときのエネルギースペクトルである．この結果を見ると，エネルギースペクトルの値は小さな東西波数のものは値が小さく，大きな東西波数のものは値が大きくなっており，それぞれの同じ東西波数を結んだ直線を見ても，どの東西波数についても傾きが mc^2 よりも大きくなっている．全体としてエネルギースペクトルはばらついていることもわかる．各東西波数の傾きは先ほどの条件 $|u| > |c|$ を同じ緯度帯に適用した図 14 と同様であるが，エネルギースペクトルのばらつきについては図 14 よりも大きくなっていることがわかる．また，図 18 は $\partial q/\partial y < 0$ を北緯 30 ~ 60 度で満たしたものである．図 18 では，北緯 10 ~ 80 度に砕波条件を適用した図 17 よりもエネルギースペクトルのばらつきが小さくなっている．また，図 15 と比較するとエネルギースペクトルは多少のばらつきが見られるものの， mc^2 の直線とある程度一致している．しかし，エネルギースペクトルの値は全体的に大きくなっており，全ての東西波数，南北モードにおいて実際の値とされる破線よりも高く，東西波数の大きなものにおいて最大値である実線よりも大きくなっているものも見られる．また，図 19 に北緯 30 ~ 60 度で $\partial q/\partial y < 0$ を満たしたときの $n = 6, l = 3$ の渦位の分布を示す．図 16 と異なり，この条件の場合は北緯 45 度付近で砕波条件を満たしている．また，適用した緯度が同じでも，Garcia (1991) の砕波条件のほうが $|u| > |c|$ の条件よりも渦位の振幅が大きくなっている．

砕波条件を適用する緯度によってエネルギースペクトルの形が異なることより，それが低緯度に依存しているか高緯度に依存しているかを見るために低緯度側と高緯度側に分けて解析を行った．図 20 は北緯 10 ~ 60 度で砕波条件を満たしたとき

のエネルギースペクトルであり，図 21 は北緯 30 ~ 80 度で砕波条件を満たしたときのエネルギースペクトルである．これらを図 17，図 18 と比較すると，図 17 と図 21，図 18 と図 20 のエネルギースペクトルが極めてよく一致しているということがわかる．また，図 20 と図 21 を比較すると，東西波数 3 までが大きく異なり，東西波数 4 も少し異なっている．しかしこれよりも東西波数の大きなものはほとんど一致している．同様のことが図 17，図 18 についても言える．また，図 22 は砕波条件を適用した緯度が図 19 と同じときの $n = 3, l = 3$ の渦位の分布である．砕波条件を適用した緯度帯内では北緯 50 度付近で砕波条件を満たしている領域が見られるが，さらに高緯度の 70 度付近ですでに砕波条件を満たしている領域があることがわかる．

また，図 23 は北緯 30 ~ 45 度という中緯度のごく狭い緯度帯で砕波条件を満たしたときのエネルギースペクトルである．この図を見ると，今まで $\partial q / \partial y < 0$ の砕波条件を適用したエネルギースペクトルの中で最も mc^2 の直線と一致していることが読み取れる．しかし，これまで同様東西波数の大きなスケールの小さい波のエネルギースペクトルについては mc^2 の直線を超えている．全体としては理論的なエネルギーの最大値である mc^2 の直線と一致している．また，このときの $n = 6, l = 3$ の渦位の分布を図 24 に示す．

ここでは図 14 同様大きな南北モードは取り除いていたが，それらの図 12 や図 13 と同様に南北モードはそれぞれの図で示されているエネルギースペクトルが密集している直線から飛び出て，かなり大きな値を示した．

4.2.3 $-\nabla^2 u + \beta < 0$ を満たしたときのエネルギースペクトル

図 25 ~ 図 27 は $E = mc^2$ と同値の $|u| > |c|$ の条件と Garcia (1991) の砕波条件 $\partial q / \partial y < 0$ の間の条件である $-\nabla^2 u + \beta < 0$ の条件 (APPENDIX 参照) を満たしたときのエネルギースペクトルである．これらの図の中の記号は全て図 14 と同様であり，各東西波数に対して取り除いた南北モードも同様である．

図 25 は $-\nabla^2 u + \beta < 0$ の条件を北緯 10 ~ 80 度で満たしたときのエネルギースペクトルである．この図を見ると，東西波数の小さなもののエネルギースペクトルがかなり小さな値となっていることがわかる．図 14 と比較すると，図 14 では各東西波数を見ると mc^2 の直線とある程度の一致が見られたものの，図 25 では東西波数の大きなものからエネルギースペクトルの値が小さくなり， mc^2 の直線から大きく外れている．しかし，東西波数が 9 以上のものについては $|u| > |c|$ の条件

のときのエネルギースペクトルとほとんど一致していることがわかる．また，図 17 と比較すると，どちらの図もスペクトルのばらつきについては似ているものの，その値は大きく異なり， $-\nabla^2 u + \beta < 0$ の条件のほうが値が小さくなっている．図 26 は $-\nabla^2 u + \beta < 0$ の条件を北緯 30 ~ 60 度で満たしたときのエネルギースペクトルである．また，この条件を満たしたときの $n = 6, l = 3$ の渦位の分布を図 28 に示す．図 26 を見ると，図 25 のときに値が小さくなっていた東西波数の小さなエネルギースペクトルの値が大きくなり，全体的に mc^2 の直線と傾きが一致するようなエネルギースペクトルとなっている．値については点線とほとんど一致している．しかし，図 15 と比較するとエネルギースペクトルにばらつきが出てきており、点線を超えているモードもいくつか見られる．また，図 18 と比較すると，北緯 10 ~ 80 度に適用したときと同様に $\partial q / \partial y < 0$ の条件のときの方がエネルギースペクトルの値が大きくなっていることがわかる．ばらつきについても先ほどの二つの図と同様にほとんど変化がないように見られる．図 28，図 16 と図 19 を比較すると，この順に渦位の振幅が大きくなっていることがわかる．図 27 は Garcia (1991) の碎波条件において mc^2 の直線と最も一致した緯度帯である北緯 30 ~ 45 度で $-\nabla^2 u + \beta < 0$ の条件を適用したときのエネルギースペクトルである．また，図 29 はこのときの $n = 6, l = 3$ の渦位の分布である．図 27 と図 26 を比較すると，エネルギースペクトルのばらつきについてはほとんど変化しないものの，その値については条件を適用する緯度帯を狭めた図 27 の方が大きくなっていることがわかる．特にこの傾向は東西波数の小さなもので顕著である．また，図 27 と図 23 を比較すると，図 27 のほうが見られるものの，エネルギースペクトルの値は図 23 の方が大きい．このような全体としての値の違いについては，この図の中では最もスケールの大きな $n = 2, l = 4, 5$ ではほとんどエネルギースペクトルが変化しておらず、これら以外のモードのエネルギースペクトルの値が大きくなったためである．図 29 と図 24 を比較すると，図 24 の方が振幅が大きく，エネルギースペクトルの結果と一致していることがわかる．

4.3 基本場を含めたロスビー波の砕波条件による順圧モードのエネルギースペクトル

3.2 で述べたように 3 次元ノーマルモード展開では従属変数を基本場とそこから
の偏差に分けて考えているため，これまでの結果では偏差の成分 (q') しか入ってい
なかった．しかし，実際の大気中では基本場も含めた渦位の分布 ($\bar{q}+q'$) で砕波が起
こっていると考えられる．つまり，砕波条件は $\partial q'/\partial y < 0$ ではなく $\partial(\bar{q}+q')/\partial y < 0$
となると考えられる．

ここでは 1958 ~ 1997 年の東西平均東西風 (図 30) を鉛直平均したものを順圧モー
ドの平均風として用いた．このときの風速の緯度分布を図 31 の上に示す．また，
このような風速の分布のときの相対渦度 (Relative Vorticity) の緯度分布を図 31 の
下に示す．単位は風速が m/s，相対渦度が 10^{-6}s^{-1} である．また，緯度は正の値が
北半球を，負の値が南半球を示す．東西風のみしか考えていないためこれらはシ
ア-渦度であり，北半球では亜熱帯ジェットの内側で大きな負の値となり，北側で
は正の値でほとんど一定となっている．

図 32 ~ 36 平均東西風を含めた砕波条件を満たしたときのエネルギースペクトル
である．これらの図はそれぞれ砕波条件を満たす緯度帯が異なっている．図中の
記号や取り除いた南北モードについては図 14 と同じである．

図 32 は北緯 10 ~ 80 度において $\partial(\bar{q}+q')/\partial y < 0$ を満たしたときのエネルギー
スペクトルである．このエネルギースペクトルを見ると，全体として各東西波数ご
とにばらついており，図 17 と比較してもほとんど変わらない．これらの図を比較
すると，東西波数 10 以上のエネルギースペクトルにおいて最小の南北モードの値
が図 32 のほうが小さくなっている．また，東西波数の大きなものについてはエネ
ルギースペクトルは大きな南北モードで全体的に少しだけ大きくなっている．こ
れによって南北モードの大きなエネルギースペクトルについては図 17 よりもエネ
ルギースペクトルのばらつきは小さくなっており，図 17 よりも mc^2 の直線に近づ
いているが，それぞれの東西波数については mc^2 の直線よりも傾きが大きく，図
17 と比べて傾きはほとんど変わらない．

図 33 は図 32 の砕波条件を満たす緯度帯を北緯 30 ~ 60 度に変えたときのエネ
ルギースペクトルである．緯度帯を狭めると図 17 と図 18 と同様 mc^2 の直線に近づ
いている．このエネルギースペクトルを図 18 と比較すると，もっとも大きな違い
は東西波数 5 以上のエネルギースペクトルにおいて図 33 では南北モードの小さな
もののエネルギースペクトルの値が大きくなっているということである．しかし，

波数 4 以下の東西波数についてはエネルギースペクトルが破線よりも小さい値となっており、最小値については少し減少している。

また、砕波条件を満たす領域を北緯 30 ~ 45 度にした図 23 は最も mc^2 の直線と一致しており、この緯度帯で基本場を含めた砕波条件を満たしたときのエネルギースペクトルを表したのが図 34 である。この図を見ると、図 33、図 32 と比較してエネルギースペクトルのばらつきが少なく、図 23 と同様より広い緯度帯に適用した場合よりも mc^2 の直線に近づいている。しかし、この緯度帯は図 31 の下図より基本場を含めると砕波が起こりにくくなる緯度帯であり、エネルギースペクトルは全体的に図 23 よりも大きな値となっている。特に東西波数が小さく南北モードも小さい、スケールの大きなモードは実線からのずれが大きくなっている。

図 35 と図 36 はそれぞれ図 20 と図 21 で、砕波条件を $\partial(\bar{q} + q')/\partial y < 0$ に変えたものである。図 35 と図 33 を比べると、全体としてはほとんど同じエネルギースペクトルとなっている。しかし、東西波数の大きな領域を見ると図 33 のような mc^2 の直線からの大きなずれは見られなくなっている。この東西波数の大きな領域は図 33 ではなく図 32 と一致している。図 35 は図 32 ~ 図 36 の中で最も mc^2 の直線と一致している。図 36 ではこれとは逆に、東西波数の小さい領域で図 32 と一致しており、東西波数の大きな領域で図 33 と一致している。これらより、東西波数の小さなものが高緯度側から砕波条件を満たすということは基本場を含めない場合でも含めた場合でも同じであるが、東西波数の大きなものは基本場を含めない場合は中緯度で砕波条件を満たすが、基本場を含めた場合は低緯度側から砕波条件を満たすように変化したことがわかる。

4.4 傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル

Tanaka and Kimura (1996) によると，傾圧モードのエネルギースペクトルは順圧モードのエネルギースペクトルよりも傾斜が大きくなっている．このようなエネルギースペクトルの傾斜の変化がロスビー波の砕波条件によって説明出来るものかどうかを調べるため，順圧モードと同様の解析によって傾圧モード，特に順圧モードの次にエネルギーの大きな鉛直モード 4 (Tanaka, 1985) についてエネルギースペクトルを計算した．

4.4.1 $|u| > |c|$ を満たしたときのエネルギースペクトル

図 37 ~ 図 39 は順圧ロスビー波のにおいて $E = mc^2$ と同値の条件であった $|u| > |c|$ の条件を満たしたときのエネルギースペクトルである．それぞれ条件を適用する緯度帯が異なっており，順に北緯 10 ~ 80 度，北緯 30 ~ 60 度，北緯 30 ~ 45 度である．取り除いたモードは順圧モードのときと同じである．これらの図を見ると，適用条件が北緯 10 ~ 80 度である図 37 を見ると，東西波数 3 ~ 10 の南北モード 3 がエネルギースペクトルの密集している直線から飛び出しているが，全体としてはある程度一つの直線に密集していることがわかる．このエネルギースペクトルの直線の傾きと実線の傾きを比較すると，エネルギースペクトルの傾きの方が小さく，直線とは一致していないことがわかる．また，適用する条件を北緯 30 ~ 60 度にした図 38 では図 37 での東西波数以外についても大きな南北モードにおけるエネルギースペクトルの飛び出しが見られるようになり，適用する緯度帯を狭めた北緯 30 ~ 45 度とした図 39 にするとさらに顕著になる．エネルギースペクトルの密集している直線については，条件を適用するほとんど変化せず，実線との一致は見られなかった．

4.4.2 $\partial q / \partial y < 0$ を満たしたときのエネルギースペクトル

図 40 ~ 図 42 は Garcia (1991) の砕波条件 $\partial q / \partial y < 0$ を用いたときのエネルギースペクトルである．それぞれ適用した緯度帯は北緯 10 ~ 80 度，北緯 30 ~ 60 度，北緯 30 ~ 45 度であり，取り除いたモードは順圧モードのときと同じである．これらを $|u| > |c|$ の条件のときと比較すると，エネルギースペクトルの値が全体的に大きくなっていることがわかる．図 40 を見ると，エネルギースペクトルは全体的にある程度まとまっており，東西波数の小さなものについてはある程度実線の傾き

と近くなっているように見える．しかし、大きな東西波数についてはこの直線とは異なった傾きを持っており、エネルギースペクトルのばらつきを大きくしている．砕波条件の適用範囲を北緯 30～60 度にした図 41 では、大きな南北モードでエネルギースペクトルの飛び出しが見られる．しかし、この南北モードを除いてエネルギースペクトルは全体的に変化していない．条件を適用した緯度を北緯 30～45 度とした図 42 については南北モードの小さなもののエネルギースペクトルの値が大きくなり、エネルギースペクトルの表す直線が図 40 ときとは異なっている．図 42 でのエネルギースペクトルの直線の傾きは実線よりも小さくなっている．

5 まとめと考察

5.1 順圧モードのエネルギースペクトル

順圧大気エネルギースペクトル(E)は、図9~図11に見られるように Tanaka *et al.* (2004) に示されたようにロスビー波の位相速度 c を用いた $E = mc^2$ (m : 単位面積当たりの質量) に従うことがわかる。 $E = mc^2$ の理論は Garcia (1991) のロスビー波の砕波条件 $\partial q/\partial y < 0$ から導出されており、この条件を満たしたときのエネルギースペクトルを計算することによって $E = mc^2$ の直線と一致すると考えられる。

まず、 $E = mc^2$ を導く際に出てきた $\partial q/\partial y < 0$ と同値の条件である $|u| > |c|$ (APPENDIX 式(119)) によるエネルギースペクトルを計算した。この結果が図12~図15である。まず、図12と図13より、南北モードの小さなものについては実際の観測結果である図9~図11と同様、 $E = mc^2$ の直線から外れていた。これはこれらのモードが一様等方乱流の仮定に反しているためであると考えられる。しかし、そのずれの方向が観測結果と計算とは異なっていることより、これらのモードはロスビー波の砕波ではなく、別の力学が働いているものと考えられる。観測結果から理論と外れている南北モードを取り除いた図14と図15は mc^2 の直線と極めてよく一致した。これは砕波条件が位相速度で表現されており、計算結果も位相速度領域で表されているため当然である。しかし、図14と図15を比べるとわかるように、砕波条件を満たす緯度を中緯度帯に制限したほうがより $E = mc^2$ の直線と一致していることがわかる。これはこの理論が β 平面近似を使っているため、 β が一定に近くなるように緯度帯を選ぶことでより理論と近づくためであると考えられる。 $|u| > |c|$ の条件は $E = mc^2$ を導く上で用いた全ての仮定を含んでいるものであり、この条件において中緯度 β 平面に近づけるように適用緯度を選択しなければ理論と一致しないことより、この理論で用いた仮定のうち最も重要な仮定は β 平面近似の仮定であると考えられる。

図17~図23の $\partial q/\partial y < 0$ を満たしたエネルギースペクトルの図においては、図17ではエネルギースペクトルは全体的にばらついており、個々の東西波数を見ても傾きは mc^2 の直線とは一致していない。これに対して図18では mc^2 の直線に近づいている。これより、Garcia (1991) の砕波条件においても緯度帯を選ぶ必要があることがわかる。また、エネルギースペクトルが全体的に $|u| > |c|$ の条件の場合よりも大きな値となっており、これは渦位の分布図である図16と図19を比較し

てもその振幅の違いからわかる。これより，Garcia (1991) の碎波条件は $|u| > |c|$ の条件よりも厳しい条件であると考えられる。また，図 20 と図 21 を比較することによって，このようなエネルギースペクトルのばらつきが低緯度と高緯度のどちらに依存しているかを調べた。この結果を見ると，図 17 と図 21 が，図 18 と図 20 が一致していることより，東西波数の小さな波においては高緯度側で最も早く碎波条件を満たしていると考えられる。しかし，東西波数の大きな総観規模やそれよりも小さいスケールの波についてはこれら全ての図において一致しており，これらに共通する緯度帯，つまり北緯 30 ~ 60 度の中緯度で最も早く碎波条件が満たされると考えられる。エネルギースペクトルの図から読み取れるこれらのことを渦位の分布図で見たものが図 19 と図 22 であり，これらを比較しても図 22 では北緯 30 ~ 60 度で満たしたときには既に北緯 70 度付近で碎波条件を満たしている領域があり，碎波条件はプラネタリー波では高緯度側から満たされることが示されている。このような結果から，碎波条件を満たす緯度帯をさらに低くしたものが図 23 であり，このときのエネルギースペクトルは mc^2 と良い一致を示した。これより，Garcia (1991) の碎波条件においても中緯度 β 平面近似が最も重要であることが再び確認されたと共に，この条件の方が適用緯度においても碎波条件を満たすための振幅の大きさにおいても $|u| > |c|$ の条件よりも厳しい条件であると考えられる。

$|u| > |c|$ の条件と Garcia (1991) の碎波条件の中間の条件である $-\nabla u + \beta < 0$ で計算した図 25 ~ 図 27 においてもこれまでの条件と同様の傾向が見られた。図 15 と図 26 を比較すると図 26 の方がエネルギースペクトルのばらつきが見られることより， $\partial q / \partial y < 0$ の条件で見られたエネルギースペクトルのばらつきについてはラプラシアンと南北局所微分が可換であるという仮定によって生じたものと考えられる。また，図 26 と図 27 を比較すると，図 27 の方が全体としてエネルギースペクトルの値が大きくなっており，渦位の分布図である図 28 と図 29 を比較しても後者の方が振幅が大きくなっていることより，エネルギースペクトルの値が大きくなる理由としては緯度帯を狭めることが一つの要因となっていると考えられる。つまり， $\partial q / \partial y < 0$ の条件で見られたエネルギースペクトルのばらつきや値が大きくなる結果は，これらの仮定がいまって生じたものであると考えられる。

図 32 ~ 図 36 では基本場を含めて計算を行った。このとき，基本場の相対渦度は図 31 の下図のようになっており，このような相対渦度の分布より北緯 30 度より南では碎波が起りやすく，北緯 30 度以北では碎波が起りにくいという初期場となっている。このように基本場を考慮したときの碎波条件は $d(\bar{q} + q') / dy < 0$ で

ある．

図 32 と図 33 では，それぞれ図 17 と図 18 とエネルギースペクトルの形状はほとんど変わらず，それぞれを比較した結果についてもほとんど違いがなかつたことより，ロスビー波の砕波条件を満たすことに対しては基本場の影響は小さいと考えられる．また，基本場を含めなかった場合には最も理論と一致した図 34 についても，基本場を考慮した場合は考慮しなかった場合よりも mc^2 の直線から外れており，これからも基本場はあまり重要ではないことがわかる．しかし，基本場まで考慮すると，東西波数の小さなものと大きなものについては最初に砕波の起こる緯度帯が異なってくる．条件を低緯度側に適用した図 35 と条件を高緯度側に適用した図 36 を図 33 と図 32 の二つの図と比較した結果より，東西波数の小さいプラネタリースケールの波は基本場を考慮しない場合と同様に高緯度にまず砕波条件を満たす領域が現れていることがわかる．しかし，総観規模よりも小さいスケールにおいては中緯度よりも低緯度に先に砕波条件を満たす領域が現れることがわかる．これは，基本場の相対渦度の分布より，低緯度において相対渦度の大きな負の領域があり，その影響によって総観規模以下の波については中緯度よりも先に砕波条件を満たす領域が現れるようになったと考えられる．しかし，高緯度側から砕波するプラネタリー波ではこの影響は小さく，高緯度側では相対渦度はほとんど一定であるため，プラネタリー波の砕波には大きな影響を与えなかったと考えられる．

これらをまとめると，まず小さな南北モードについては一様等方性乱流の仮定が成り立たず，観測結果と同様に $E = mc^2$ の理論と一致しない．また，砕波の起こる領域はベータ平面近似の成り立つような中緯度の領域を取ったほうがより理論に近づく．そして中緯度のごく狭い領域である北緯 30 ~ 45 度で砕波条件を適用した場合が最も理論に一致する．しかし，傾きは一致するもののその値は理論よりも大きく，その理由としては砕波条件を適用する緯度帯を狭めることが一つの要因であると考えられる．また，エネルギースペクトルがばらついた原因としては，ラプラシアンと南北局所微分が可換であるという仮定に起因していると考えられる．砕波の起こる領域については，基本場を考えない場合は，プラネタリースケールの波については高緯度側で砕波条件を満たし，総観規模擾乱以下のスケールについては中緯度側で砕波が起こる．しかし，基本場を加えた場合には，プラネタリースケールの波については基本場を加えないときと同様に高緯度側で砕波が起こるが，総観規模擾乱以下のスケールの波については低緯度側で砕波が起こりやすくなる．しかし，基本場は砕波条件に対してあまり重要ではないと考えら

れる。

5.2 傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル

傾圧モードについては $|u| > |c|$ の条件で実験した図 37 ~ 図 39 のどの図も Tanaka and Kimura (1996) で示された鉛直モード 4 の傾きとは一致しておらず、順圧モードとは異なり緯度帯を β 平面近似の仮定を考慮した場合でもエネルギースペクトルはほとんど変化しなかった。しかし、この条件は順圧モードでの理論から得られた結果なので、この条件で観測と一致しないのは当然とも考えられる。また、Garcia (1991) の碎波条件である $\partial q' / \partial y < 0$ で計算した図 40 ~ 図 42 では $|u| > |c|$ の条件よりも観測値に近づいているように見えるが、それはあまり良い一致とは言えない。緯度帯を変化させることによって観測結果に近づかず、北緯 10 ~ 80 度の時には密集していた南北モードの小さなエネルギースペクトルが密集している部分から大きく外れてきていることより、適用範囲の問題ではなく Garcia (1991) の碎波条件では傾圧モードのエネルギースペクトルの形成には説明できないと考えられる。傾圧モードでは水平方向のみではなく鉛直方向にも節を持つため、水平方向の条件である $\partial q' / \partial y < 0$ のほかに、内部重力波の碎波条件と同様の対流不安定の起こる条件 $\partial \theta / \partial z < 0$ が必要なのではないかと考えられる。

6 結論

本研究では，Garcia (1991) のロスビー波の砕波条件を用いて順圧モードのエネルギースペクトルが Tanaka *et al.* (2004) で示された $E = mc^2$ の理論と一致するかを検証した．また，この砕波条件を用いて Tanaka and Kimura (1996) で示された傾圧モードのエネルギースペクトルが説明できるかを検証した．

順圧モードのエネルギースペクトルについては，ロスビー波の砕波条件 $\partial q / \partial y < 0$ と，砕波条件と同値の条件である次の二つの条件で計算を行った． $E = mc^2$ を導くための仮定を全て含んでいる $|u| > |c|$ の条件ではエネルギースペクトルは緯度帯を北緯 30 ~ 60 度と制限することによって理論と良い一致を示した．また， $\partial q / \partial y < 0$ と $|u| > |c|$ の中間の条件である $-\nabla u + \beta < 0$ では，エネルギースペクトルは理論とある程度良い一致を示した．また，エネルギースペクトルのばらつきはラブラシアンと南北局所微分が可換であるという仮定が，値が大きくなることについては適用緯度を限定することが要因の一つである．また， $\partial q / \partial y < 0$ の条件では北緯 30 ~ 45 度と中緯度のごく狭い緯度帯に限定する場合に最も良い一致が見られた．これらより， $E = mc^2$ の理論において最も大切な仮定は中緯度 β 平面近似の仮定である．このようにエネルギースペクトルの形状が緯度に依存していることより，砕波条件をはじめに満たす緯度が重要である．基本場を考慮しない場合はプラネタリースケールの波では高緯度側から，総観規模以下のスケールの波では中緯度で最初に砕波が起こる．基本場を考慮した場合はプラネタリースケールの波は考慮しない場合と同様に高緯度側から，総観規模擾乱については考慮しない場合と異なり低緯度側で砕波をはじめに起こる．基本場を考慮すると砕波をはじめに起こる領域が変化するが，エネルギースペクトルの形成に対しては基本場は大きな影響を与えなかった．また，南北モードの小さなスケールの大きな現象については，等方一様性乱流の仮定が成り立たないため，かなり大きな値となって他のエネルギースペクトルの値から大きくはずれた．現実の順圧モードのエネルギースペクトルは最も南北モードの小さなものは減少しているため，この領域ではロスビー波の砕波とは別の力学が働いていると考えられる．

しかし，今回計算した結果ではエネルギースペクトルは傾斜の一致は見られたものの，その値は全体的にかなり大きく，エネルギースペクトルの最大値である $E = mc^2$ の線を越えているものも多く見られた．これより，実際の砕波は偏差の成分の大きさが基本場と全く同じでなく，無視できないくらいの大きさとなったあるときに砕波が起こりエネルギースペクトルの頭打ちが起こるとという可能性

が考えられる．または，Garcia (1991) の砕波条件はある波数の波についての飽和状態を表しているが，乱流状態ではある波が完全に砕波して波と波の相互作用によってエネルギースペクトルを形成しているため，これらは別の状態であるという可能性も考えられる．もしくはロスビー波の砕波条件とは異なった条件があるという場合も考えられる．

このような可能性はあるものの，ロスビー波の砕波条件である $\partial q/\partial y < 0$ でいくつかの仮定の下にエネルギースペクトルの傾斜についてはある程度説明できしており，大気大循環のエネルギースペクトルについて研究を進める上で重要な手がかりであることは間違いない．

また，傾圧モードのエネルギースペクトルについては，砕波条件を満たす緯度帯はあまり重要ではなく，一様等方乱流，ベータ平面近似の仮定に最も近い条件でも Tanaka and Kimura (1996) で示されたようなエネルギースペクトルの傾斜は見られなかった．これより，傾圧モードについてはロスビー波の砕波条件だけでは説明できず，これとは別の条件が必要であると考えられる．この別の条件の候補としては，傾圧モードは鉛直方向にも節を持つため，内部重力波の砕波条件と同じ対流不安定 ($\partial\theta/\partial z < 0$) が考えられる．

本研究では，Garcia (1991) のロスビー波の砕波条件を用いて理論と最も一致する結果が北緯 30 ~ 45 度に適用するという制限付で得られたが，実際の観測では全球の観測結果で得られたエネルギースペクトルであるため，今回の結果からのみでは Garcia (1991) の砕波条件によって大気大循環のエネルギースペクトルが形成されていると結論付けることはできない．また，傾圧モードについてはこの条件では全く説明できなかった．今後はこの条件を手がかりとして，全球に適用できるようなスペクトルの形成の条件を調べる研究が望まれる．

謝辞

本研究を進めるにあたり、指導教員である筑波大学計算科学研究センター田中博教授には、研究テーマの設定から研究内容、研究の進め方まで、様々な質問に対し懇切丁寧に御指導していただきました。心から感謝の意を表します。

また、同大学計算科学研究センター寺崎康児研究員をはじめ、大循環研究室の大学院の先輩方ならびに昨年度卒業された先輩方には、研究に対する貴重な御意見や技術的な御指導を賜りました。

さらに、同大学生命環境科学研究科の林陽生教授、上野健一准教授、植田宏昭准教授、日下博幸准教授には様々な発表の場において貴重な御意見、御指摘をいただきました。

また、共に卒業論文を進めてきた大気科学分野の4年生の皆様には、時折良き相談相手となっただけいただきました。

最後に、本論文に関わった全ての皆様に心から感謝の意を表すと共に篤くお礼を申し上げます。

APPENDIX

ロスビー波の位相速度の2乗に比例するスペクトル

順圧モードは大気鉛直平均量を表しているため、その運動は浅水系によって支配されている。重力モードの大部分は浅水系の発散に含まれ、発散は固有振動数 σ に比例するため、ロスビーモードについては位相速度が小さいため非発散の仮定が成り立つ。

非発散より相対渦度は流線関数 ψ を用いて、

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= \nabla^2 \psi\end{aligned}\tag{115}$$

と表される。これより絶対渦度は相対渦度とコリオリ力 f を加えて、

$$q = \nabla^2 \psi + f\tag{116}$$

となる。Garcia(1991) のロスビー波砕波条件

$$\frac{\partial q}{\partial y} < 0\tag{117}$$

を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \psi + f) = -\nabla^2 u + \beta < 0\tag{118}$$

と表される。ここで $\beta \equiv df/dy$ である。東西風が東西波数 n と南北波数 l 、固有振動数 σ を用いて $u = u_0 \exp(ikx + ily - i\sigma t)$ と表されるとすると、 $\nabla^2 = -(n^2 + l^2)$ で表される。この関係を用いると式(118)は、

$$u < \frac{-\beta}{n^2 + l^2} = c\tag{119}$$

である。ここで、等方一様性乱流のエネルギースペクトルを考える。等方一様性より、

$$E = \frac{1}{g} \int_0^{p_s} \frac{1}{2} (u^2 + v^2) dp = \frac{1}{g} \int_0^{p_s} u^2 dp\tag{120}$$

と表すことが出来る。式(119)と式(120)を用いると、

$$E = \frac{1}{g} \int_0^{p_s} u^2 dp = \frac{p_s}{g} c^2 = mc^2 \quad (m : \text{単位体積あたりの質量})\tag{121}$$

という、ロスビー波の位相速度の2乗に比例するエネルギースペクトルが導かれる。

参考文献

- Andrews, G.D., J.R. Holton, and C. B. Leovy, 1987: *Middle Atmosphere Dynamics*. ACADEMIC PRESS, pp489.
- Charney, J.G., 1971: Geostrophic turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **28**, 1087-1095.
- Fritts, D. C. 1984: Gravity wave saturation in the middle atmosphere: a review of theory and observations. *Rev. Geophys. Space Phys.*, **22**, 275-308.
- Garcia, R. R., 1991: Parameterization of planetary wave breaking in the middle atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **48**, 1405-1419.
- Holton, J. R., 1975: *The dynamic meteorology of the stratosphere and mesosphere*. Meteor. Monograph, vol.15, No.37, Amer. Meteor. Soc., 218pp.
- Kasahara, A., 1984: The linear response of a stratified global atmosphere to tropical thermal forcing. *J. Atmos. Sci.*, **41**, 2217-2237.
- Kraichnen, R. H., 1967: Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **10**, 1417-1423.
- Lindzen, R. S. 1981: Turbulence and stress owing to gravity wave and tidal breakdown. *J. Geophys. Res.*, **25**, 1095-1107.
- Nastrom, G. D., and K. S. Gage, 1983: A first look at wavenumber spectra from GASP data. *Tellus*, **35A**, 383-388.
- Rhines, P. B., 1975: Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.*, **69**, 417-443.
- Swarztrauber, P. N. and A. Kasahara, 1985: The vector harmonic analysis of Laplace's tidal equation. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **6**, 464-491.
- Tanaka, H. L., 1985: Global energetics analysis by expansion into three dimensional normal mode functions during the FGEE winter. *J. Meteor. Soc. Japan*, **63**, 180-200.

- Tanaka, H. L. and K. Kimura, 1996 :Normal-mode energetics analysis and the intercomparison for the recent ECMWF, NMC, and JMA global analysis. *J. Meteor. Soc. Japan*, **74**, 525-538.
- Tanaka, H. L. and K. Terasaki, 2006 :Blocking formation by an accumulation of barotropic energy exceed the Rossby wave saturation level at the spherical Rhines scale. *J. Meteor. Soc. Japan*, **84**, 319-332.
- Tanaka, H. L. and Y. Watarai, 1999 :Breaking Rossby waves in the barotropic atmosphere with parameterized baroclinic instability. *Tellus*, **51A**, 552-573.
- Tanaka, H. L., Y. Watarai, and T. Kanda, 2004: Energy spectrum proportional to the squared phase speed of Rossby modes in the general circulation of the atmosphere. *Geophys. Res. Lett.*, **31(13)**, 13109, doi:10.1029/2004GL019826.
- Terasaki, K., H. L. Tanaka, and M. Satoh, 2009: Characteristics of the kinetic energy spectrum of NICAM model atmosphere. *SOLA*, **5**, 180-183.
- Tung, K. K. and W. W. Orlando, 2003: The k^{-3} and $k^{-5/3}$ energy spectrum of atmospheric turbulence: quasigeostrophic two-level model simulation. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 824-835.
- 小倉義光, 1978: 気象力学通論. 東京大学出版会. 249pp
- 田中博, 2004: 順圧大気大循環モデルによる北極振動の数値実験およびその力学的考察. 気象研究ノート.
- 田中博, 早崎正光, 安成哲三, 1997: 1993/94年夏の日本付近における異常気象の熱収支解析. 気象研究ノート, 189号, 97-125.

• Rossby Wave

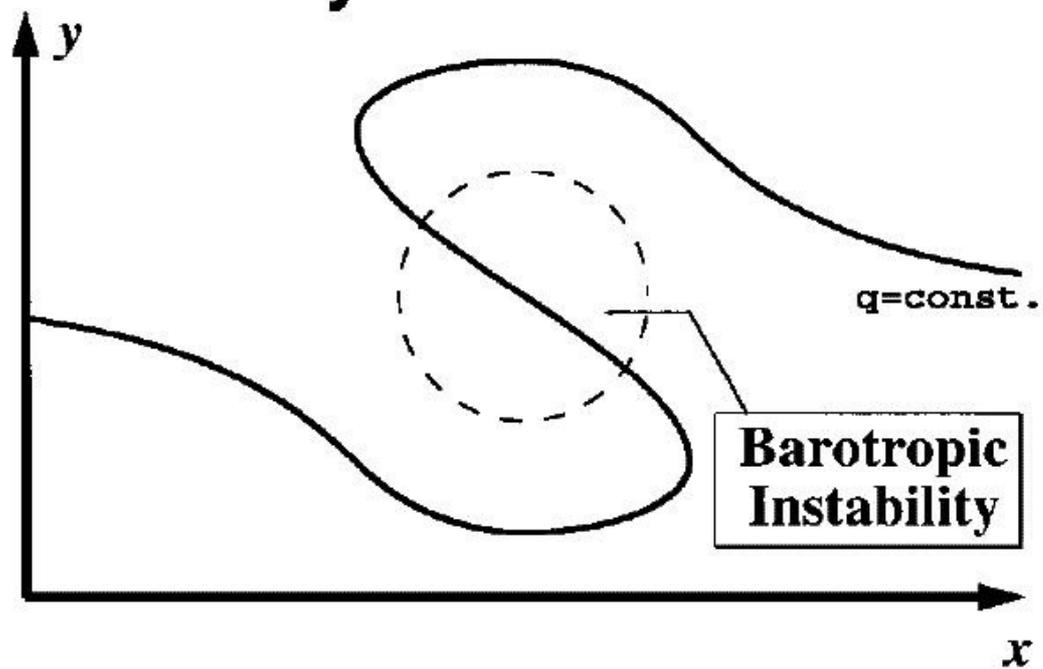
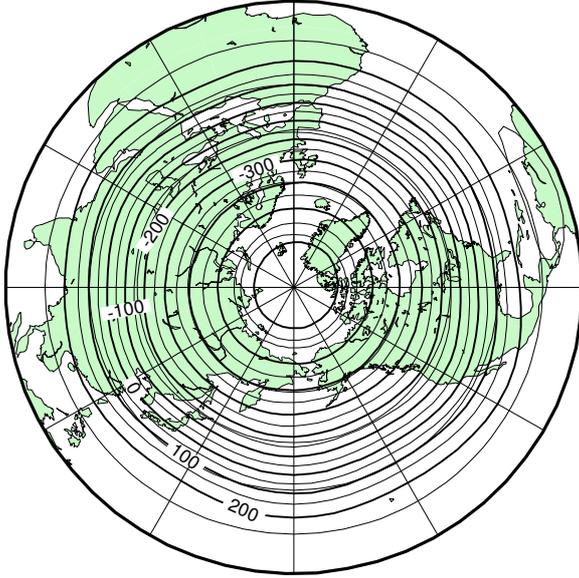


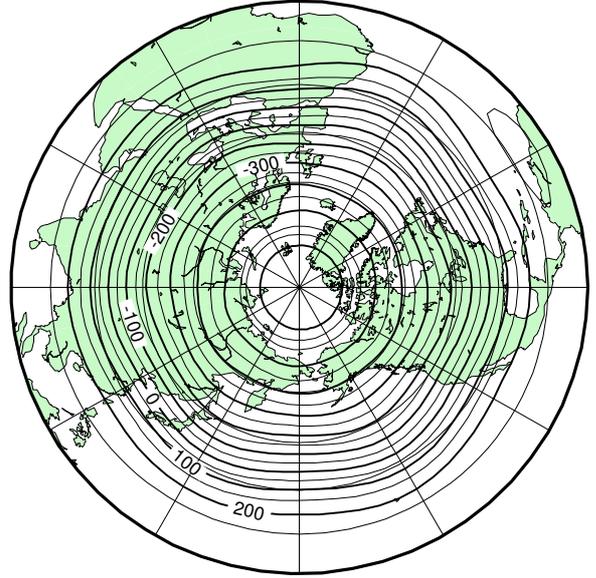
図 1: Garcia(1991) によるロスビー波の砕波の概略図 . Tanaka and Watarai(1999) より .

Barotropic Height

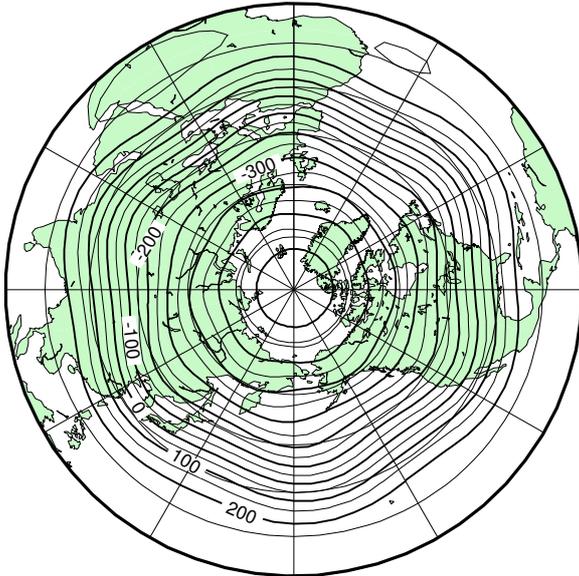
Initial data +20 day



Initial data +25 day



Initial data +30 day



Initial data +35 day

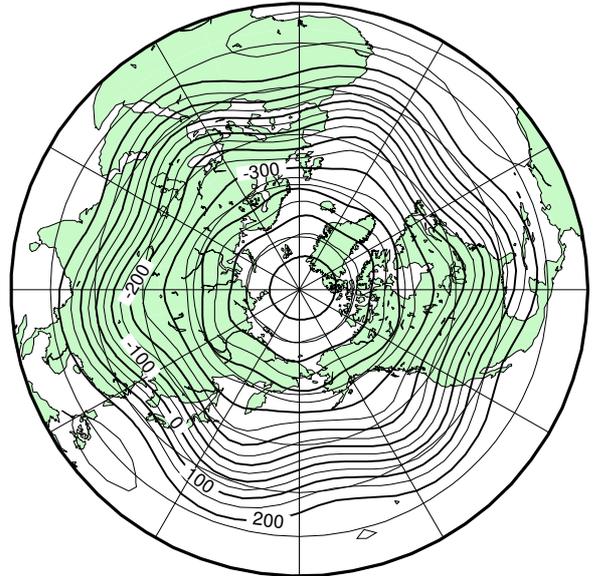
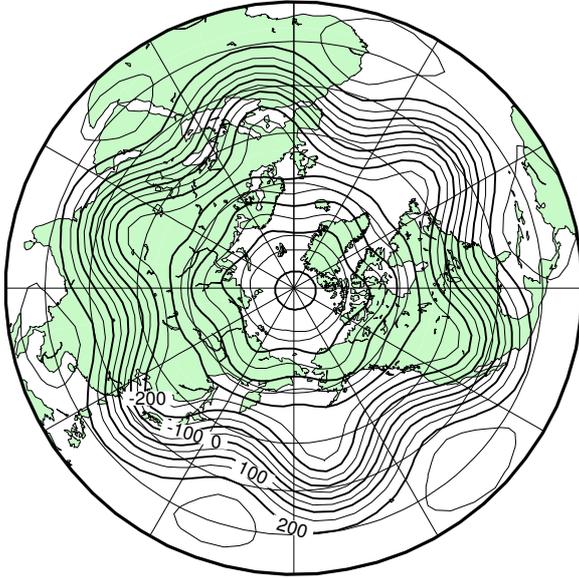


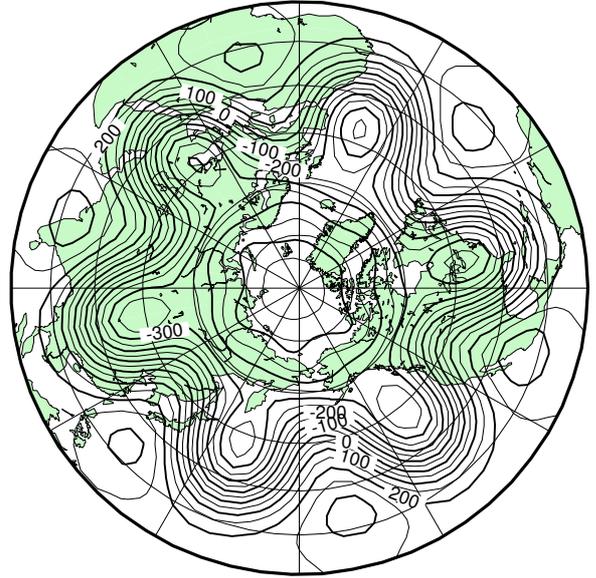
図 2: 東西波数 6 を増幅させたときの順圧高度場 . 初期時刻から 20 ~ 35 日後 .

Barotropic Height

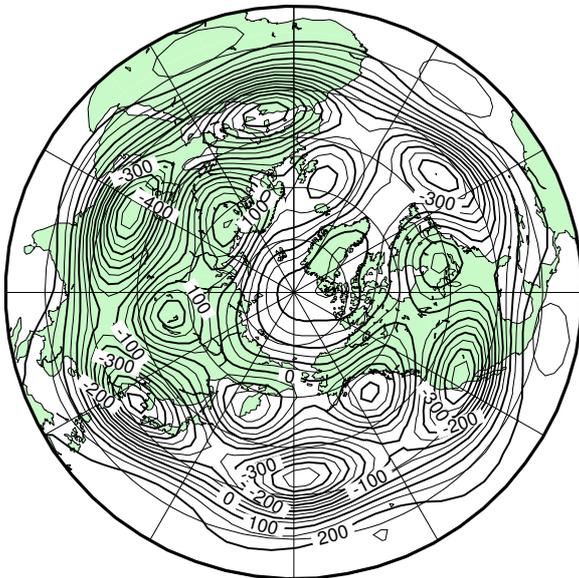
Initial data +40 day



Initial data +45 day



Initial data +50 day



Initial data +55 day

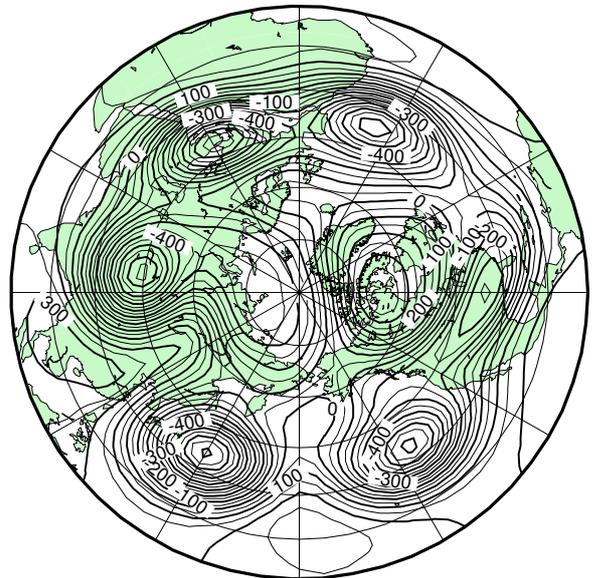
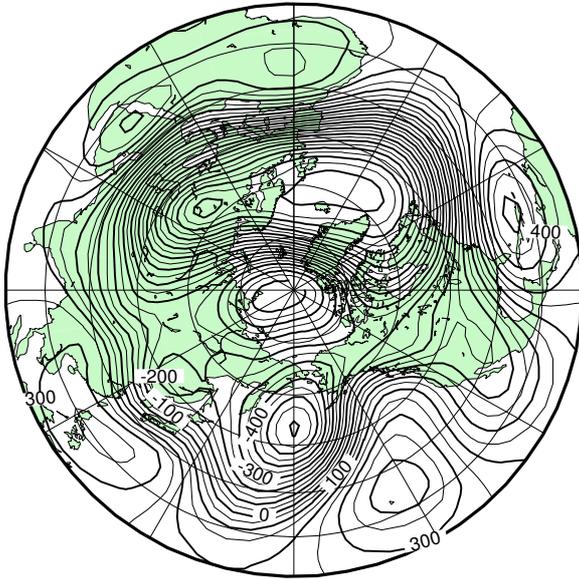


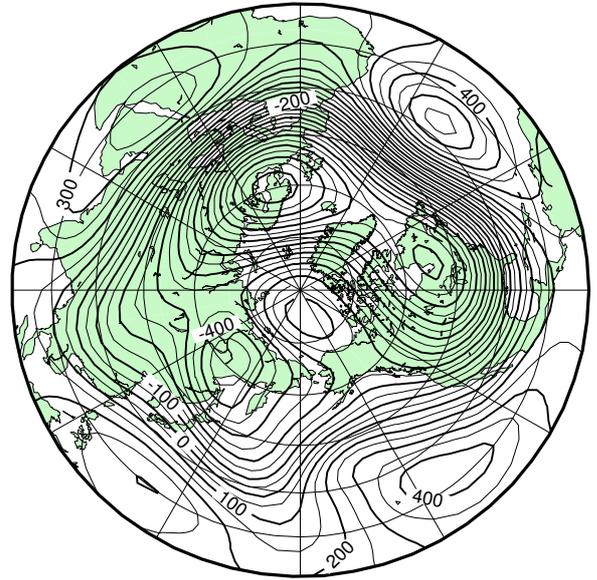
図 3: 東西波数 6 を増幅させたときの順圧高度場 . 5 日間隔で初期時刻から 40 ~ 55 日後 .

Barotropic Height

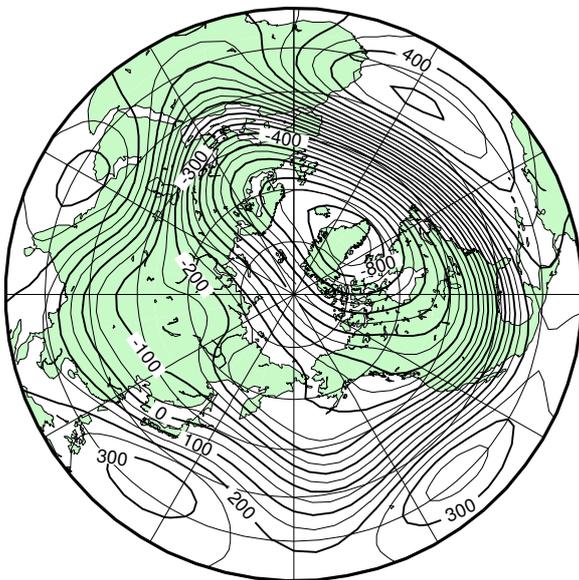
Initial data +60 day



Initial data +65 day



Initial data +70 day



Initial data +75 day

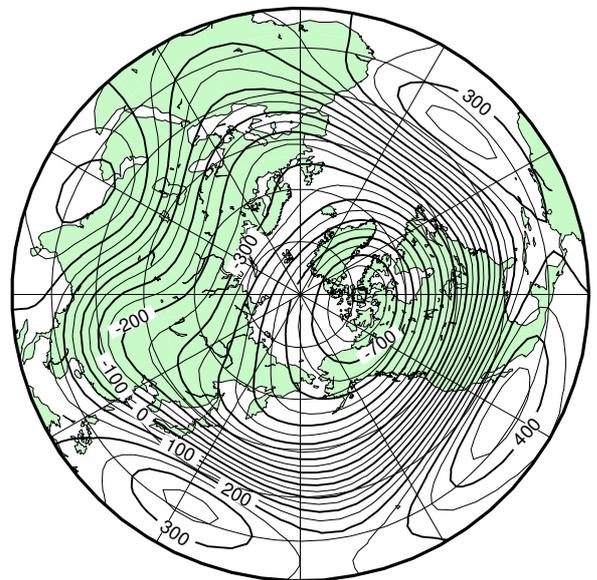
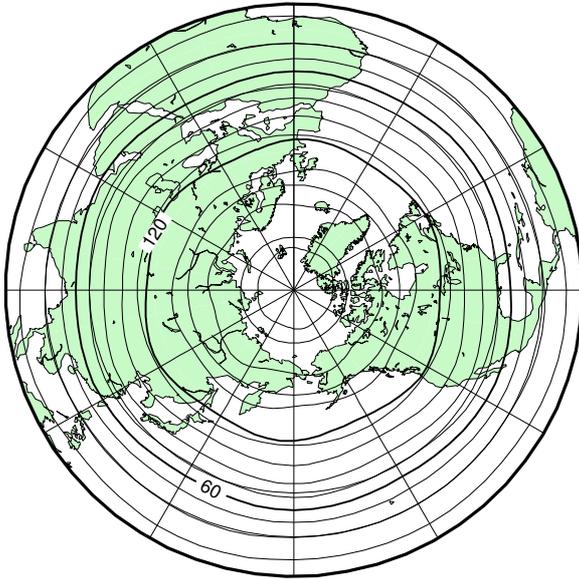


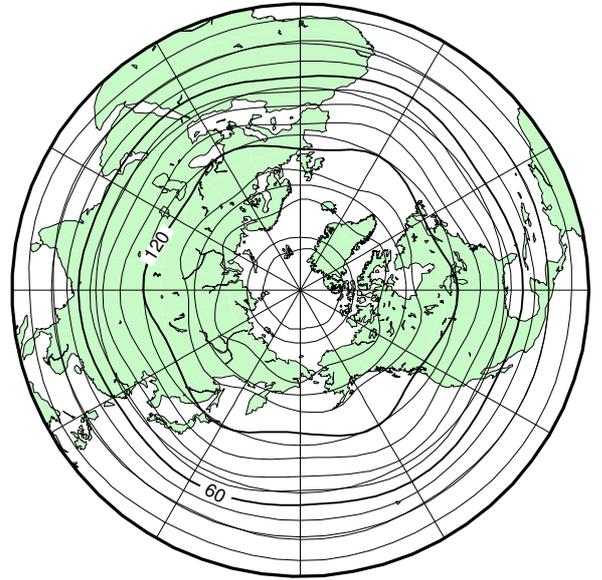
図 4: 東西波数 6 を増幅させたときの順圧高度場 . 5 日間隔で初期時刻から 60 ~ 75 日後 .

Potential Vorticity

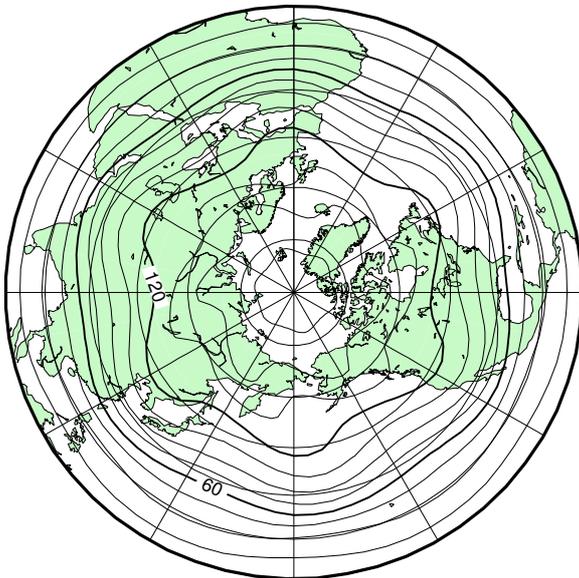
Initial data +20 day



Initial data +25 day



Initial data +30 day



Initial data +35 day

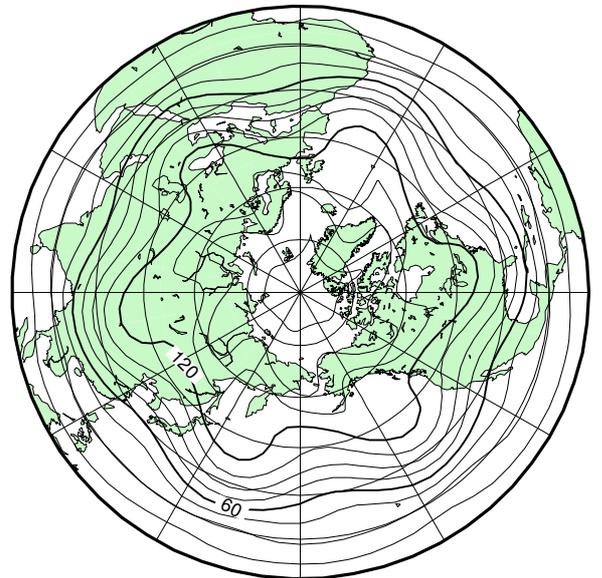
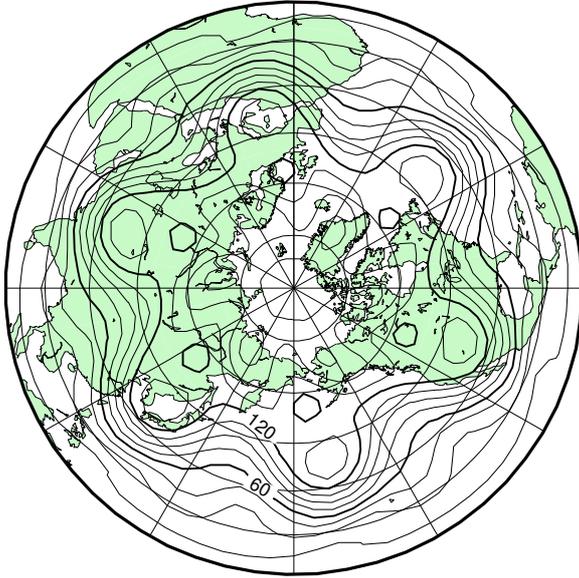


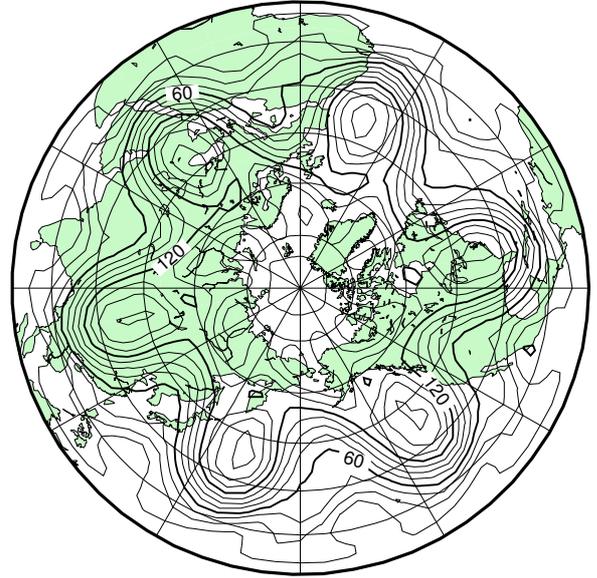
図 5: 東西波数 6 を増幅させたときの順圧高度場の変化 . 5 日間隔で初期時刻から 20 ~ 35 日後 .

Potential Vorticity

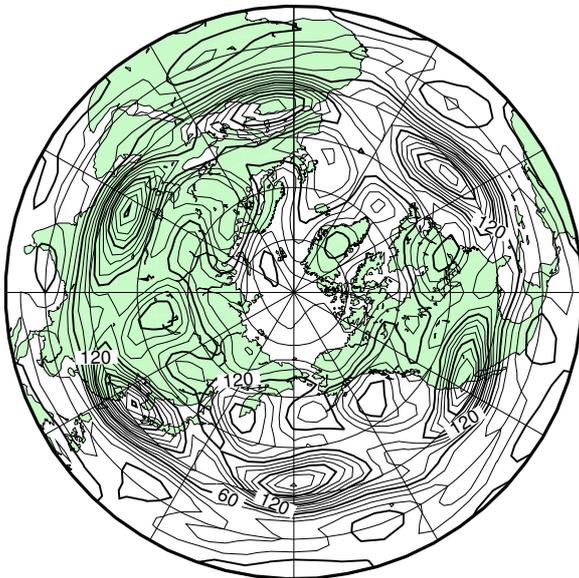
Initial data +40 day



Initial data +45 day



Initial data +50 day



Initial data +55 day

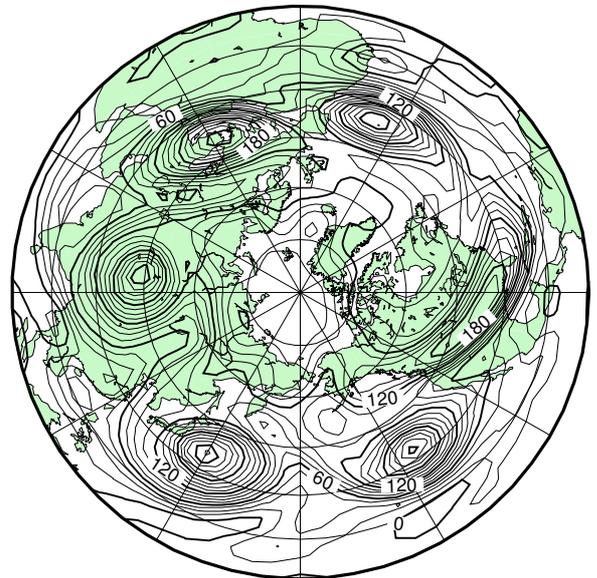
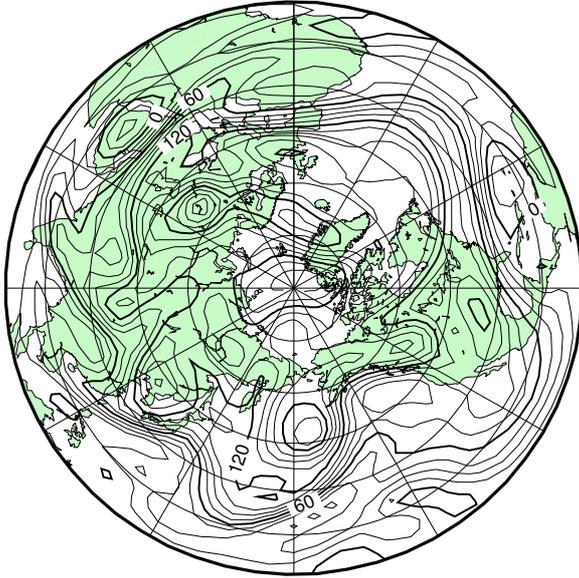


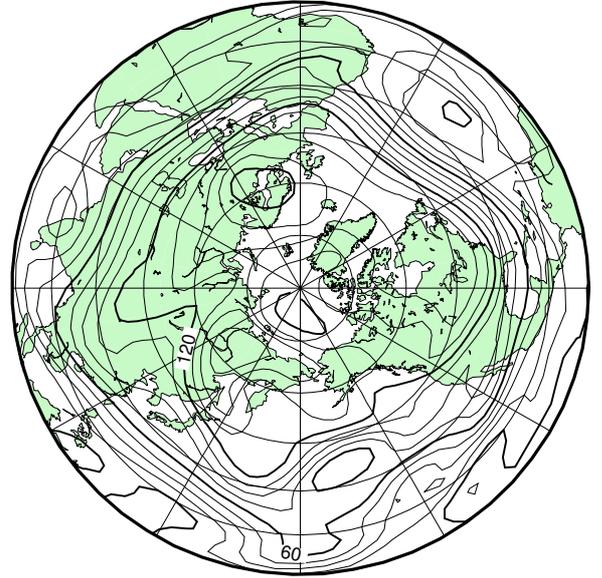
図 6: 東西波数 6 を増幅させたときの渦位の分布 . 5 日間隔で初期時刻から 40 ~ 55 日後 .

Potential Vorticity

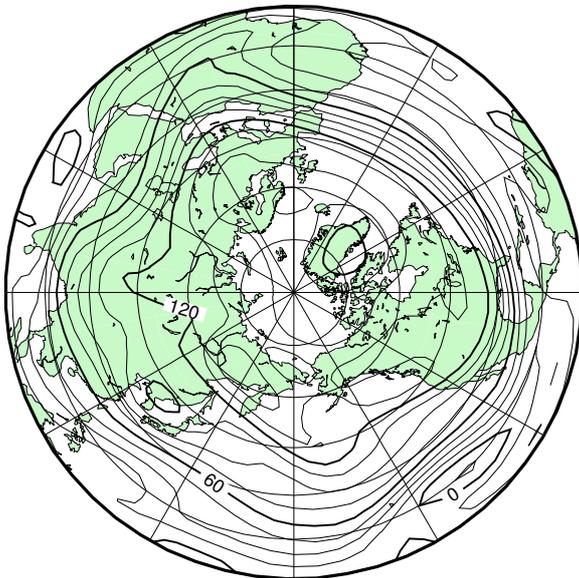
Initial data +60 day



Initial data +65 day



Initial data +70 day



Initial data +75 day

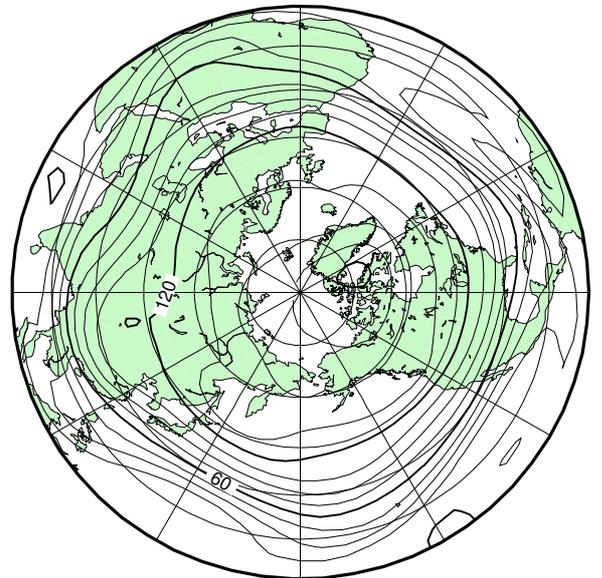


図 7: 東西波数 6 を増幅させたときの渦位の分布 . 5 日間隔で初期時刻から 60 ~ 75 日後 .

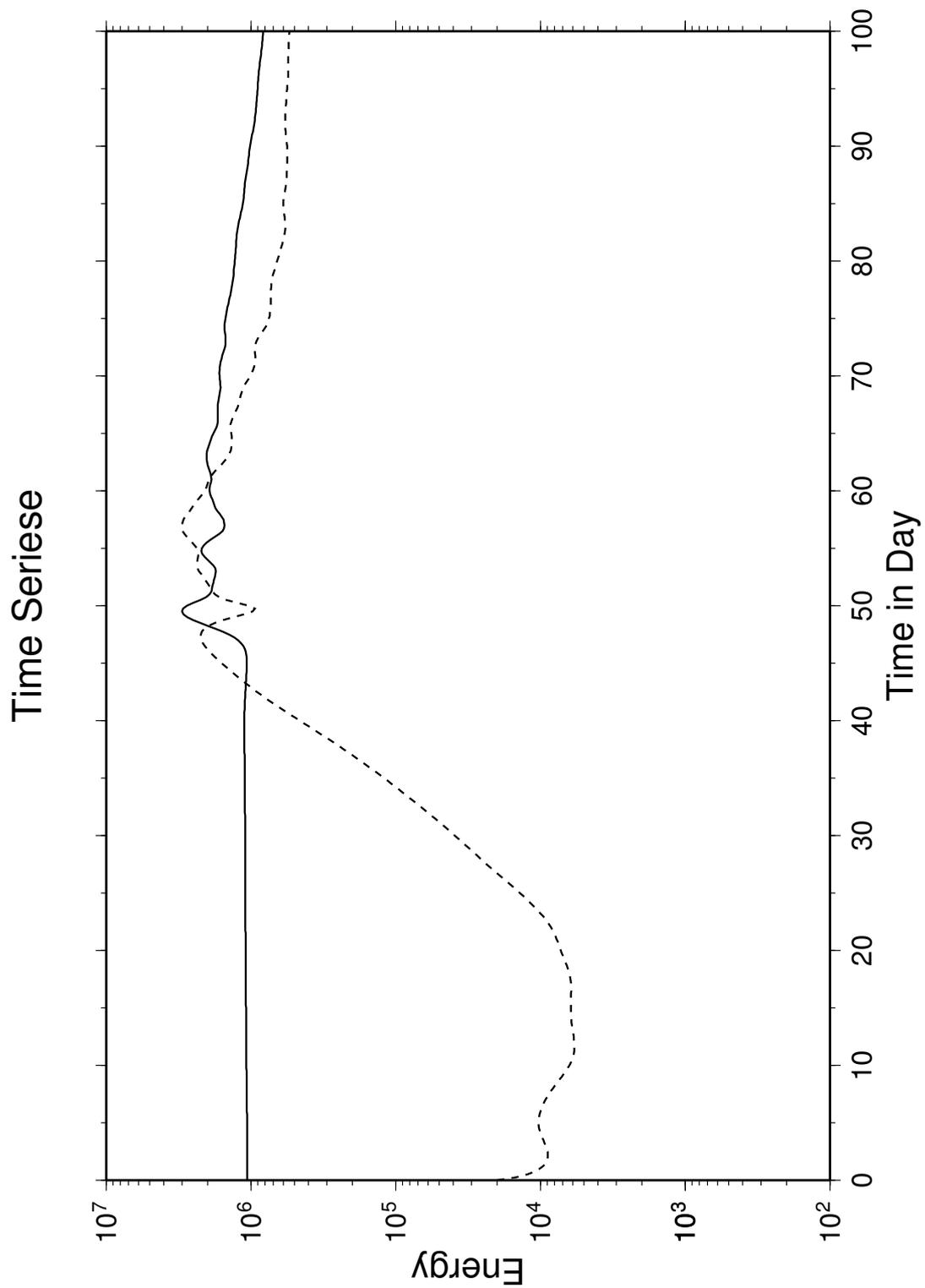


図 8: 東西波数 6 を増幅させたときのエネルギーの時間変化．実線は東西波数 0 のエネルギー，破線は東西波数 1 以上の全エネルギーを表す．横軸は初期値からの経過日数であり，縦軸はエネルギー (J/m^2) ．

Total Energy Spectrum

JRA25 (1979 - 2009)

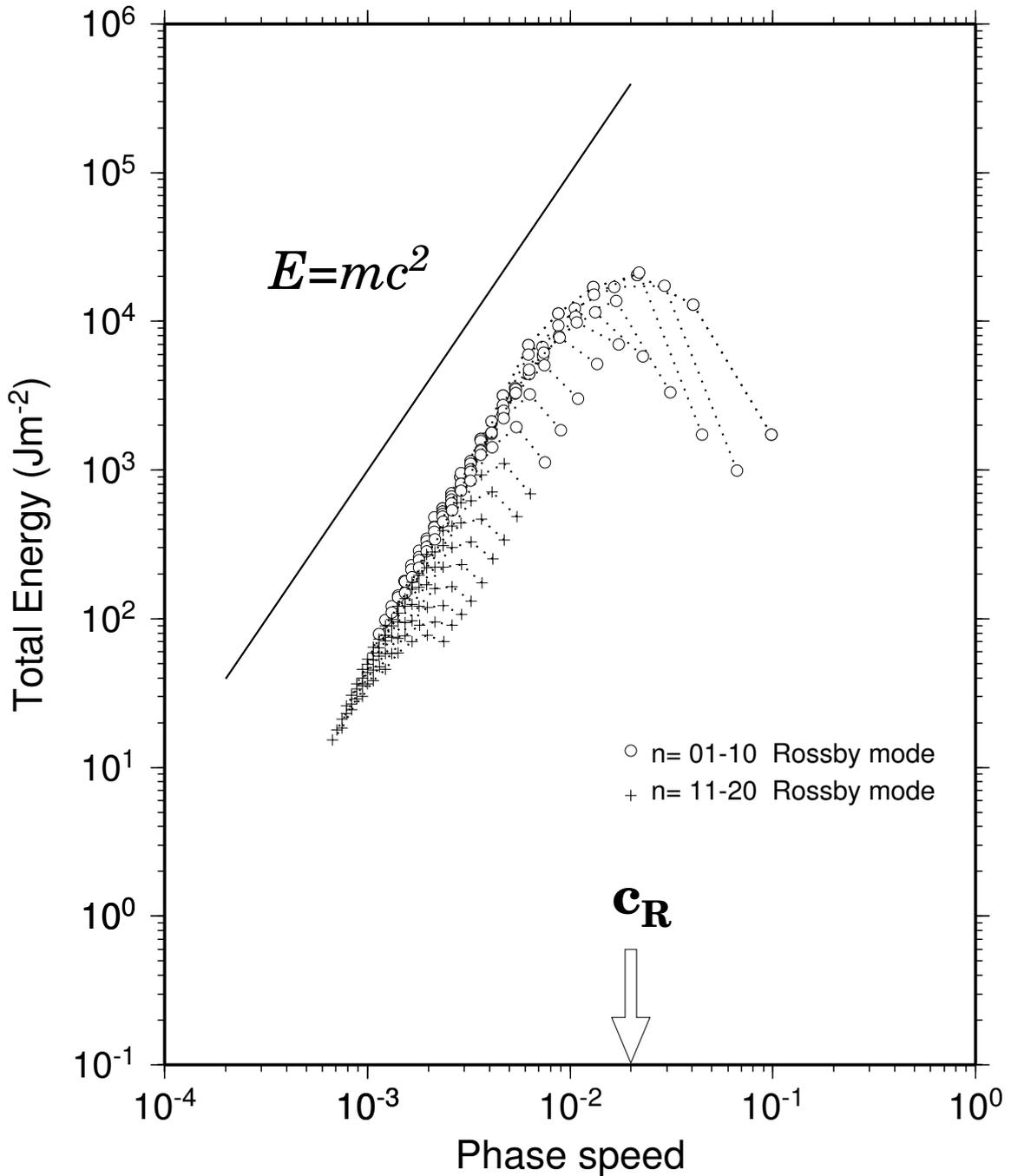


図 9: JRA-25/JCDAS による 1979 ~ 2009 年まで平均した順圧モードのエネルギースペクトル。

Total Energy Spectrum

JRA25 (DJF 1979 - 2009)

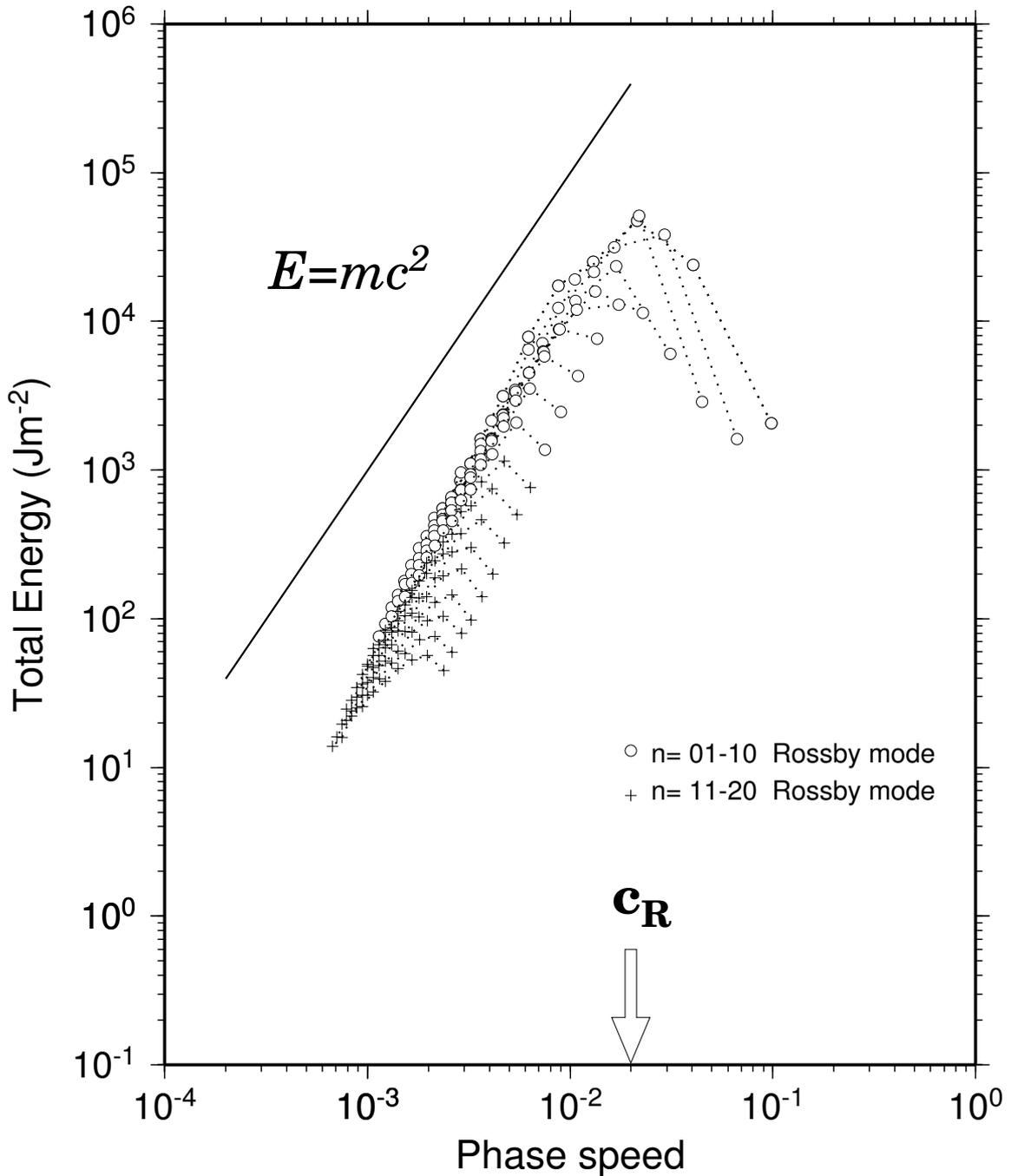


図 10: JRA-25/JCDAS による 1979~2009 年の冬季 (DJF) で平均した順圧モードのエネルギースペクトル。

Total Energy Spectrum

JRA25 (JJA 1979 - 2009)

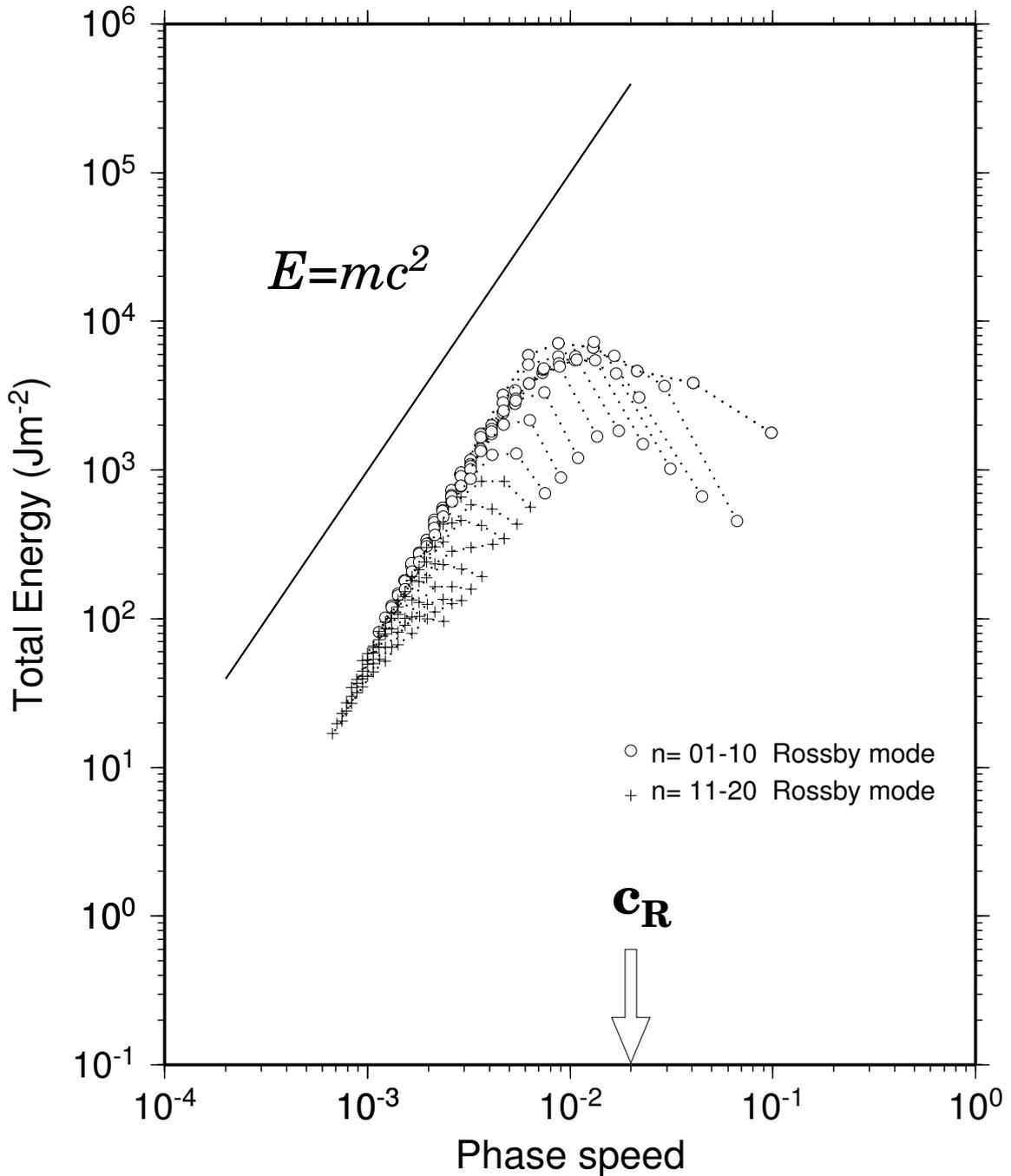


図 11: JRA-25/JCDAS による 1979~2009 年の夏季 (JJA) で平均した順圧モードのエネルギースペクトル。

Total Energy Spectrum

$|u| > |c|$ (barotropic, 10N-80N)

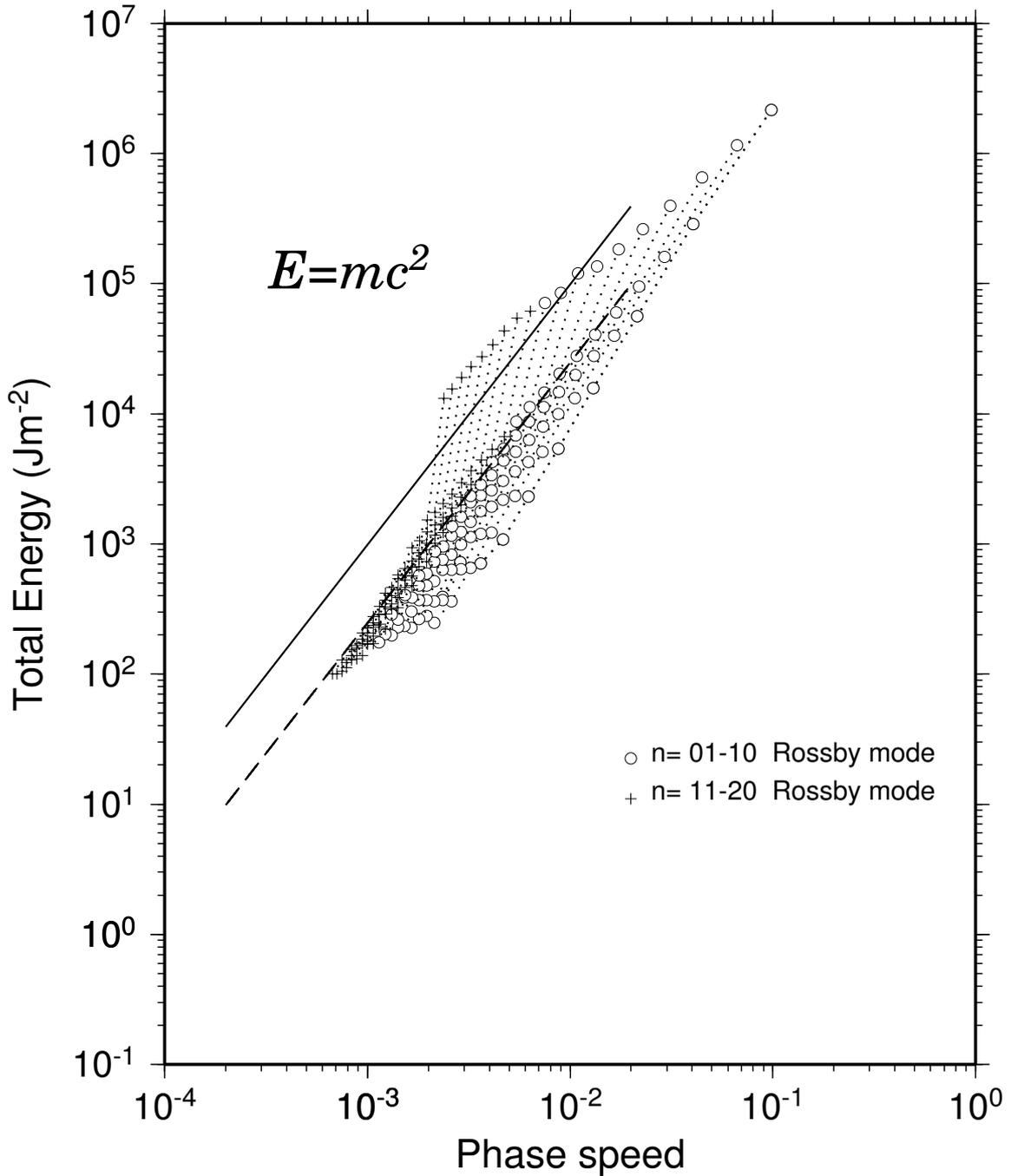


図 12: 10 ~ 80 °N において $|u| > |c|$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル．点線は同じ東西波数．実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す．横軸は位相速度 c ．

Total Energy Spectrum

$|u| > |c|$ (barotropic, 30N-60N)

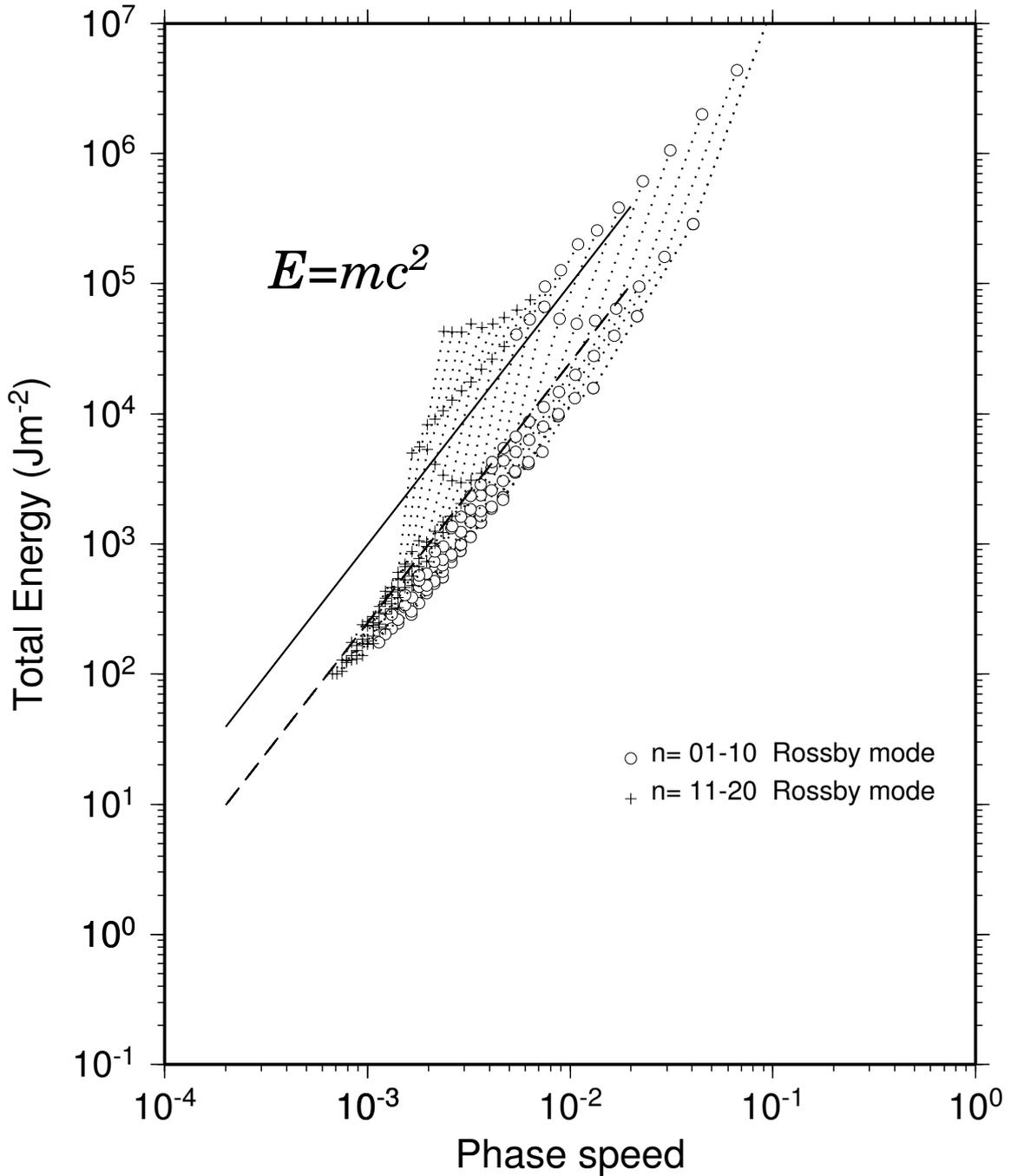


図 13: 30 ~ 60 °N において $|u| > |c|$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル．点線は同じ東西波数．実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す．横軸は位相速度 c ．

Total Energy Spectrum

$|u| > |c|$ (barotropic, 10N-80N)

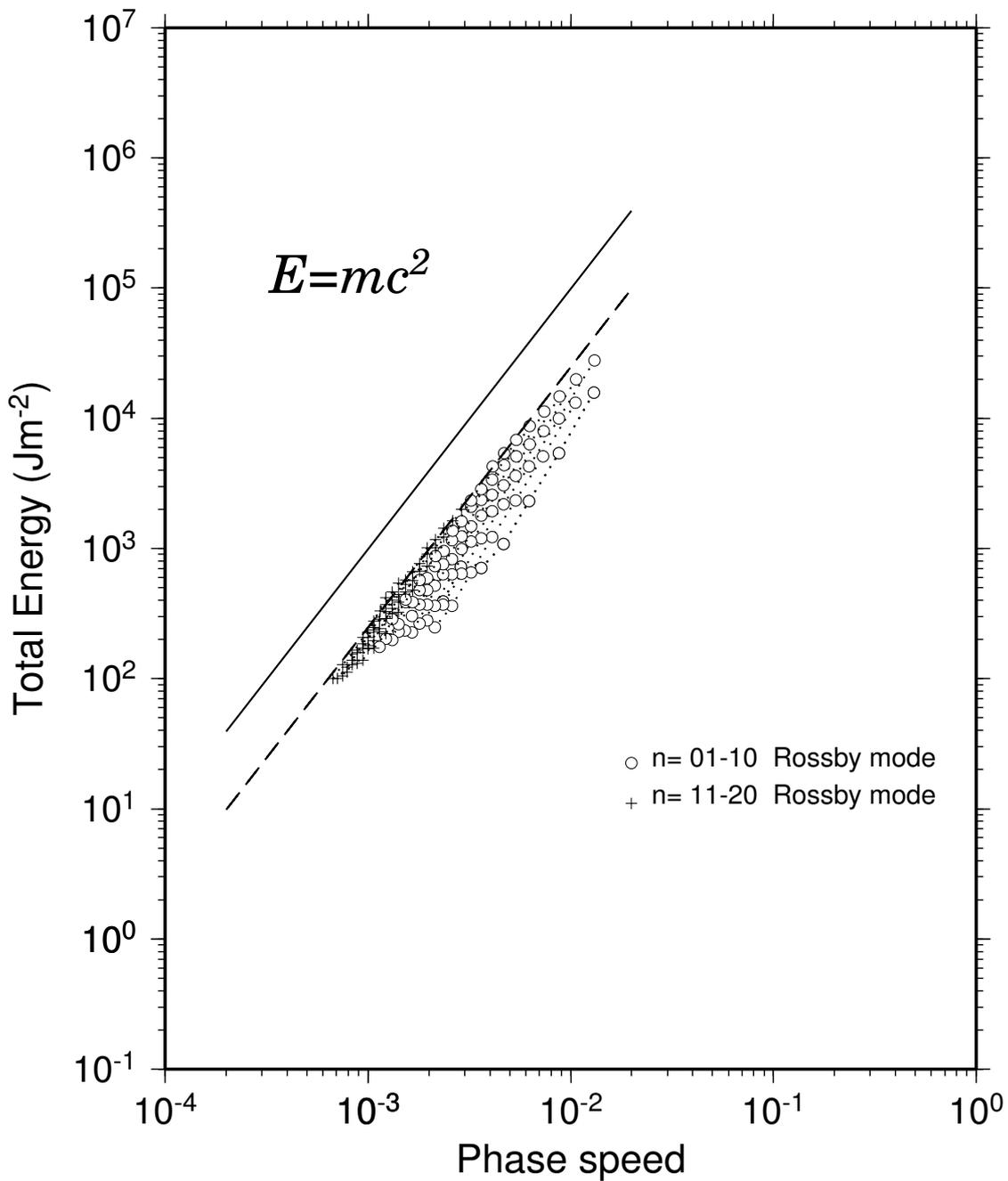


図 14: 10 ~ 80 °N において $|u| > |c|$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル . $0 < n \leq 2, 11 \leq n \leq 15$ のとき $l \geq 4$, $3 \leq n \leq 10$ のとき $l \geq 3$, $15 \leq n \leq 20$ のとき $l \geq 5$ とし、点線は同じ東西波数 . 実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す . 横軸は位相速度 c .

Total Energy Spectrum

$|u| > |c|$ (barotropic, 30N-60N)

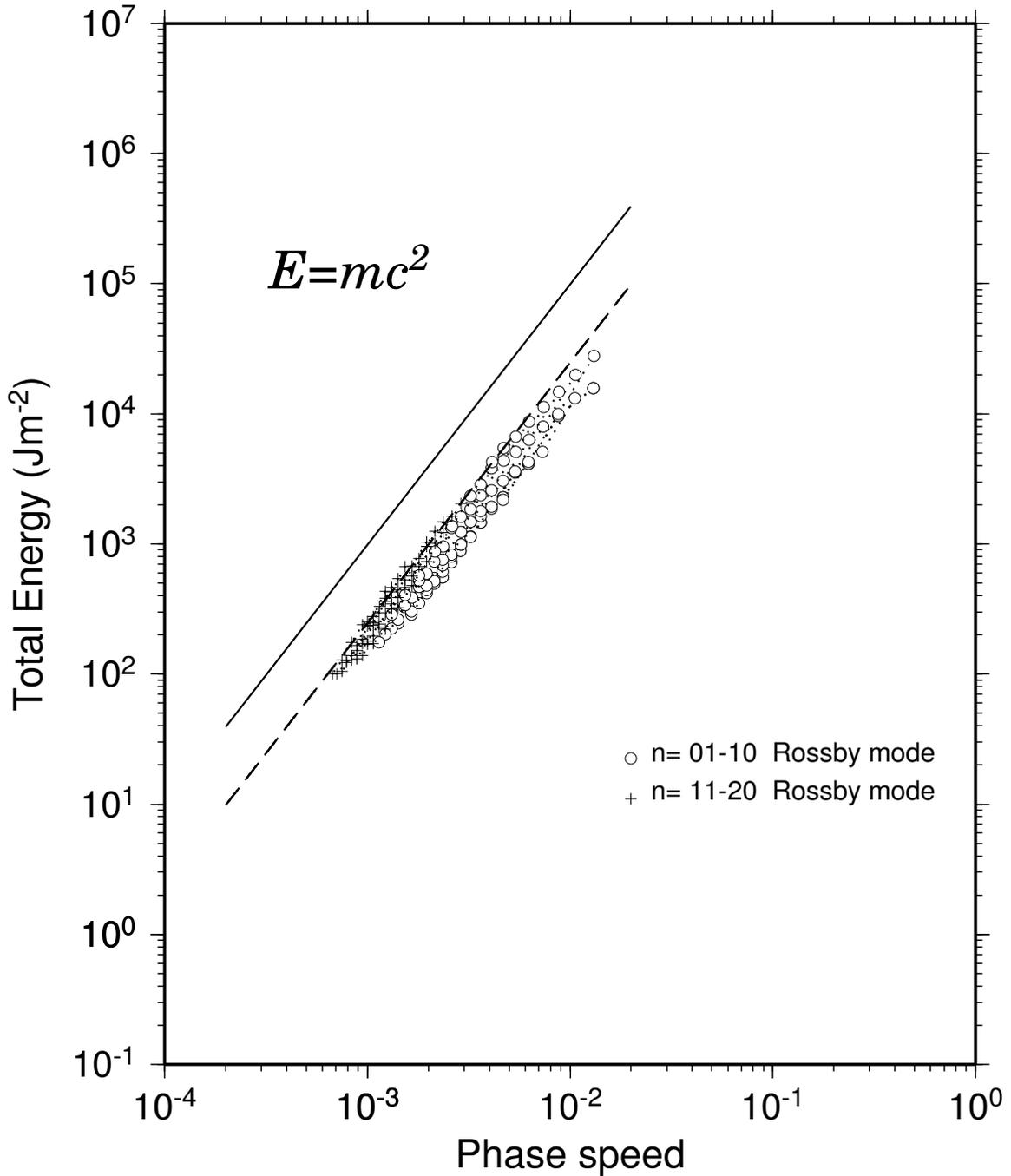


図 15: 30 ~ 60 °N において $|u| > |c|$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル．取り除いた南北モードは図 14 と同じ．点線は同じ東西波数．実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す．横軸は位相速度 c ．

Potential Vorticity

$|u| > |c|$ ($k=6, l=3, 30N-60N$)

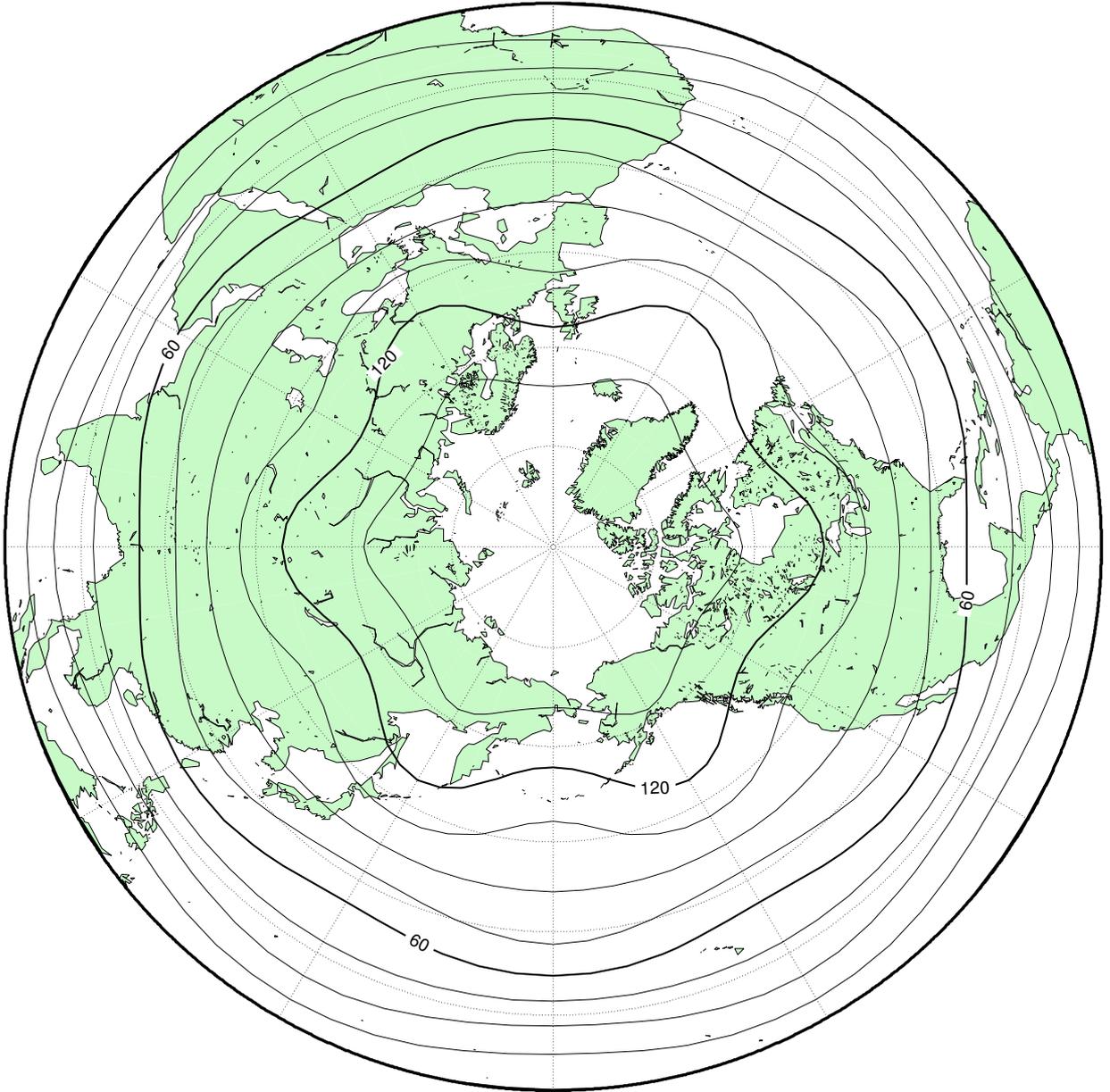


図 16: 30 ~ 60 °N において $|u| > |c|$ を満たしたときの $n = 6, l = 3$ の渦位の分布 .
値は $10^{-10} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$.

Total Energy Spectrum

$\partial q/\partial y < 0$ (barotropic, 10N-80N)

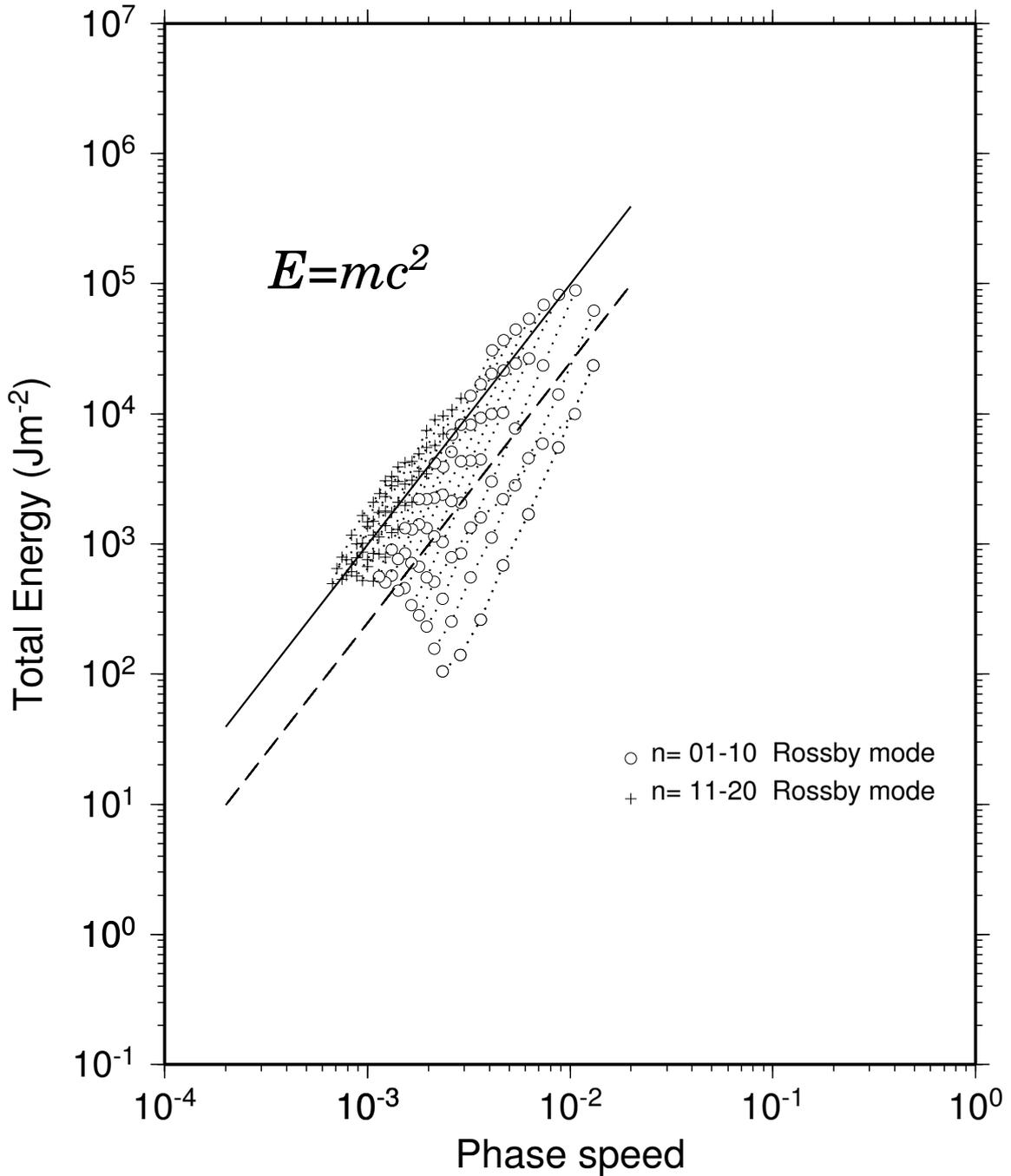


図 17: 緯度 10 ~ 80 度において $\partial q'/\partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル. 取り除いた南北モードは図 14 と同じ. 点線は同じ東西波数. 実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す. 横軸は位相速度 c .

Total Energy Spectrum

$\partial q/\partial y < 0$ (barotropic, 30N-60N)

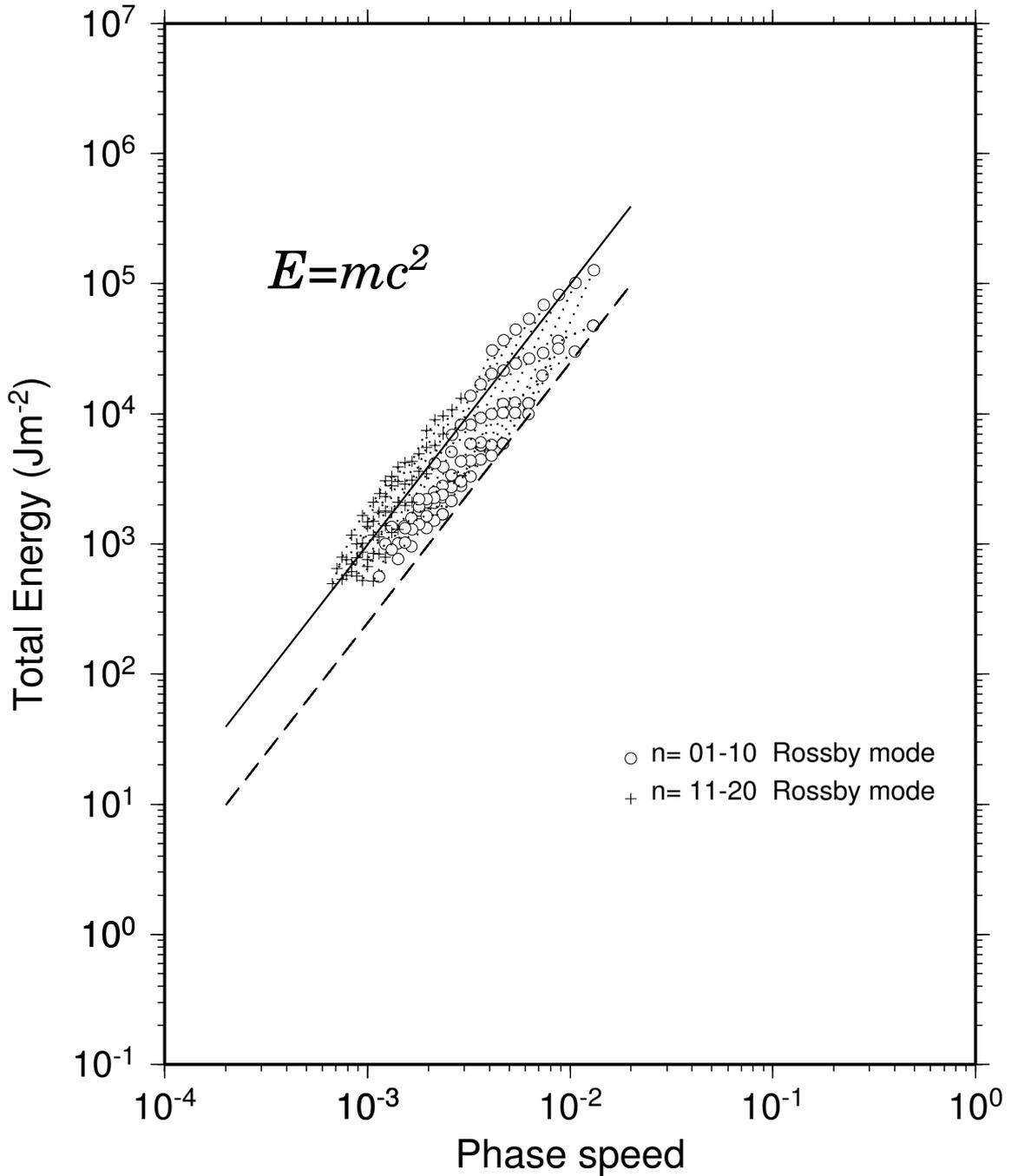


図 18: 緯度 30 ~ 60 度において $\partial q'/\partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル. 取り除いた南北モードは図 14 と同じ. 点線は同じ東西波数. 実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す. 横軸は位相速度 c .

Potential Vorticity

$$\partial q / \partial y < 0 \quad (k=6, l=3, 30N-60N)$$

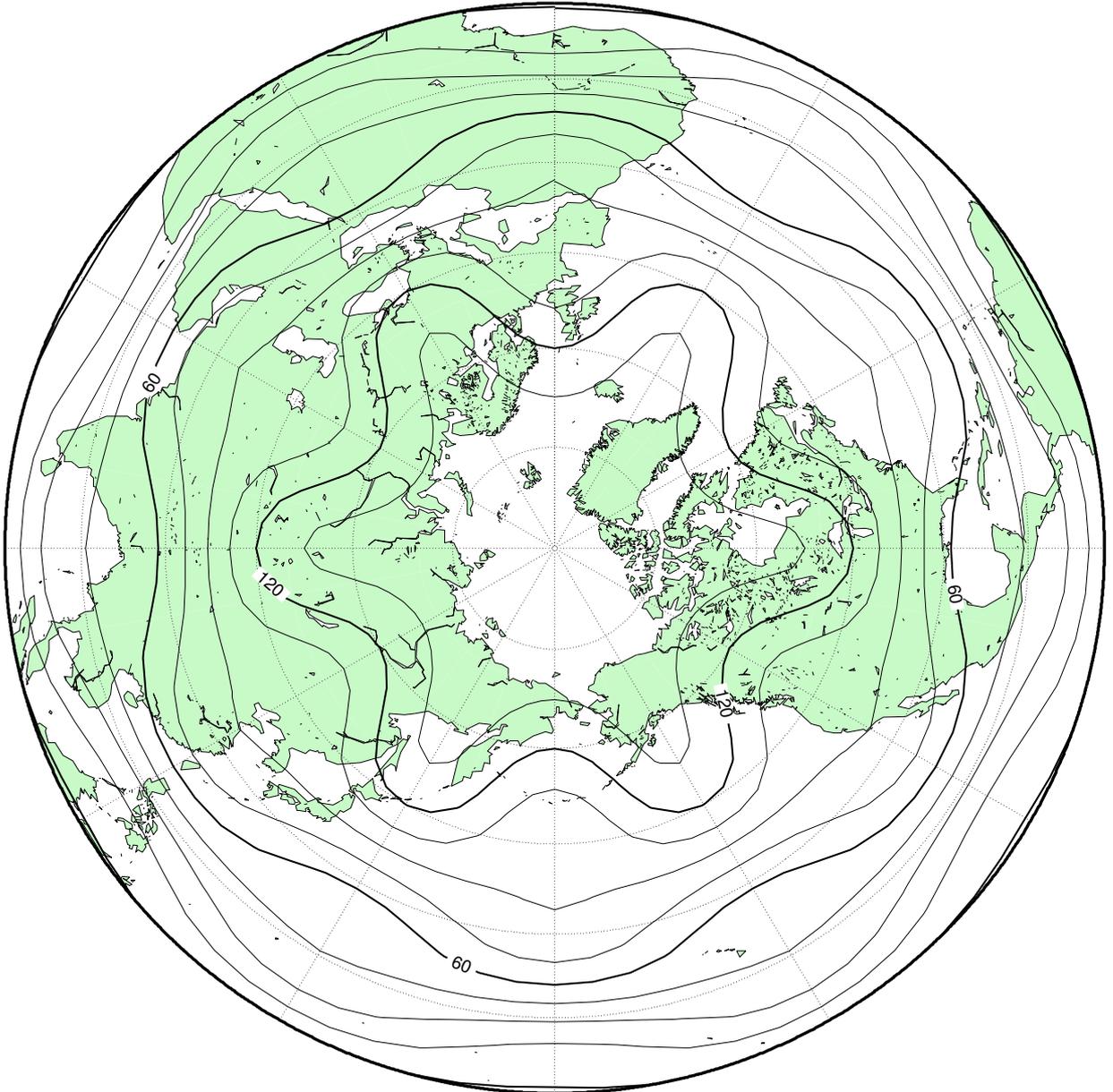


図 19: 緯度 30 ~ 60 度において $\partial q' / \partial y < 0$ を満たしたときの $n = 6, l = 3$ の渦位の分布 . 値は $10^{-10} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$.

Total Energy Spectrum

$\partial q/\partial y < 0$ (barotropic, 10N-60N)

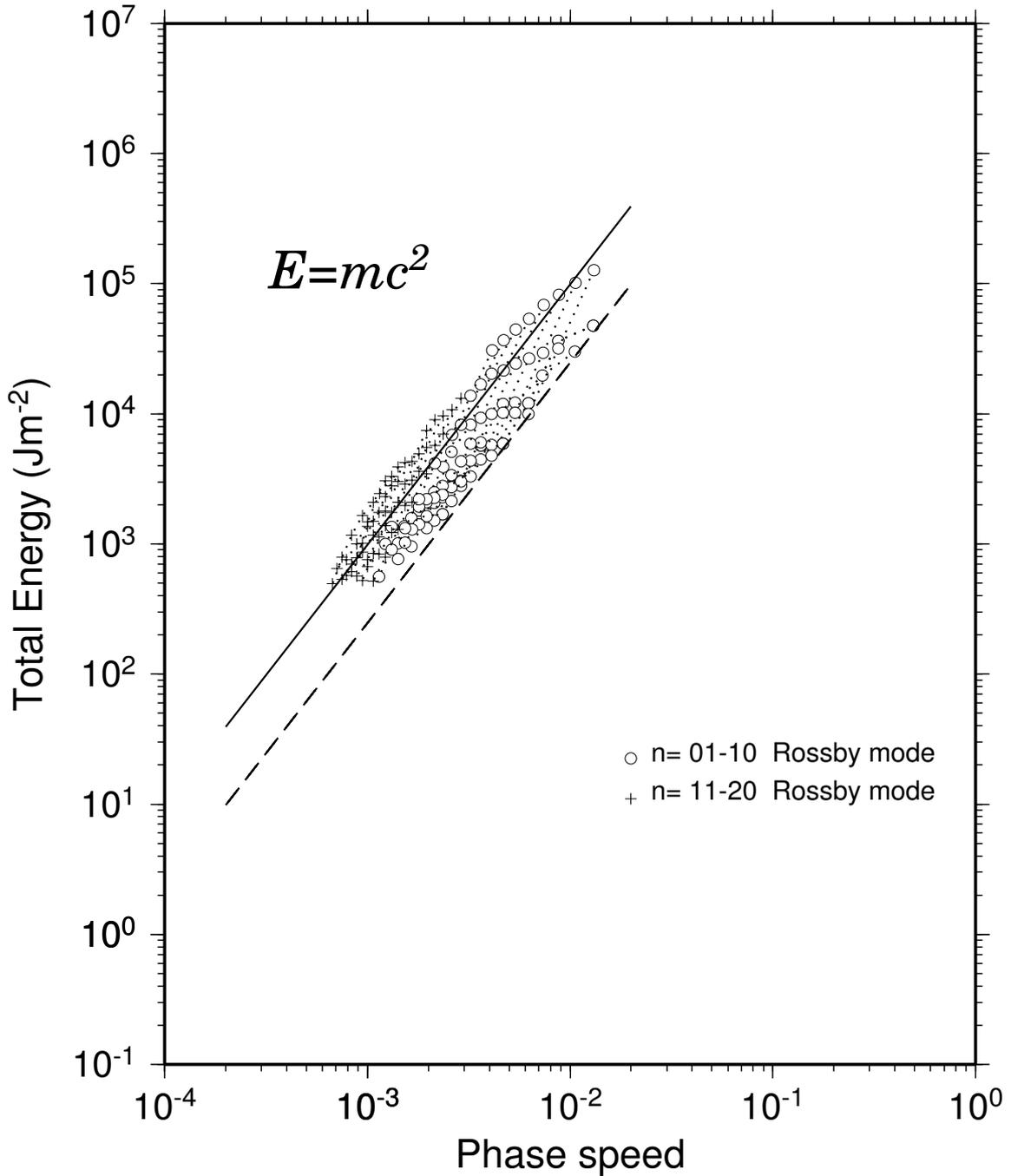


図 20: 緯度 10 ~ 60 度において $\partial q'/\partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル. 取り除いた南北モードは図 14 と同じ. 点線は同じ東西波数. 実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す. 横軸は位相速度 c .

Total Energy Spectrum

$\partial q/\partial y < 0$ (barotropic, 30N-80N)

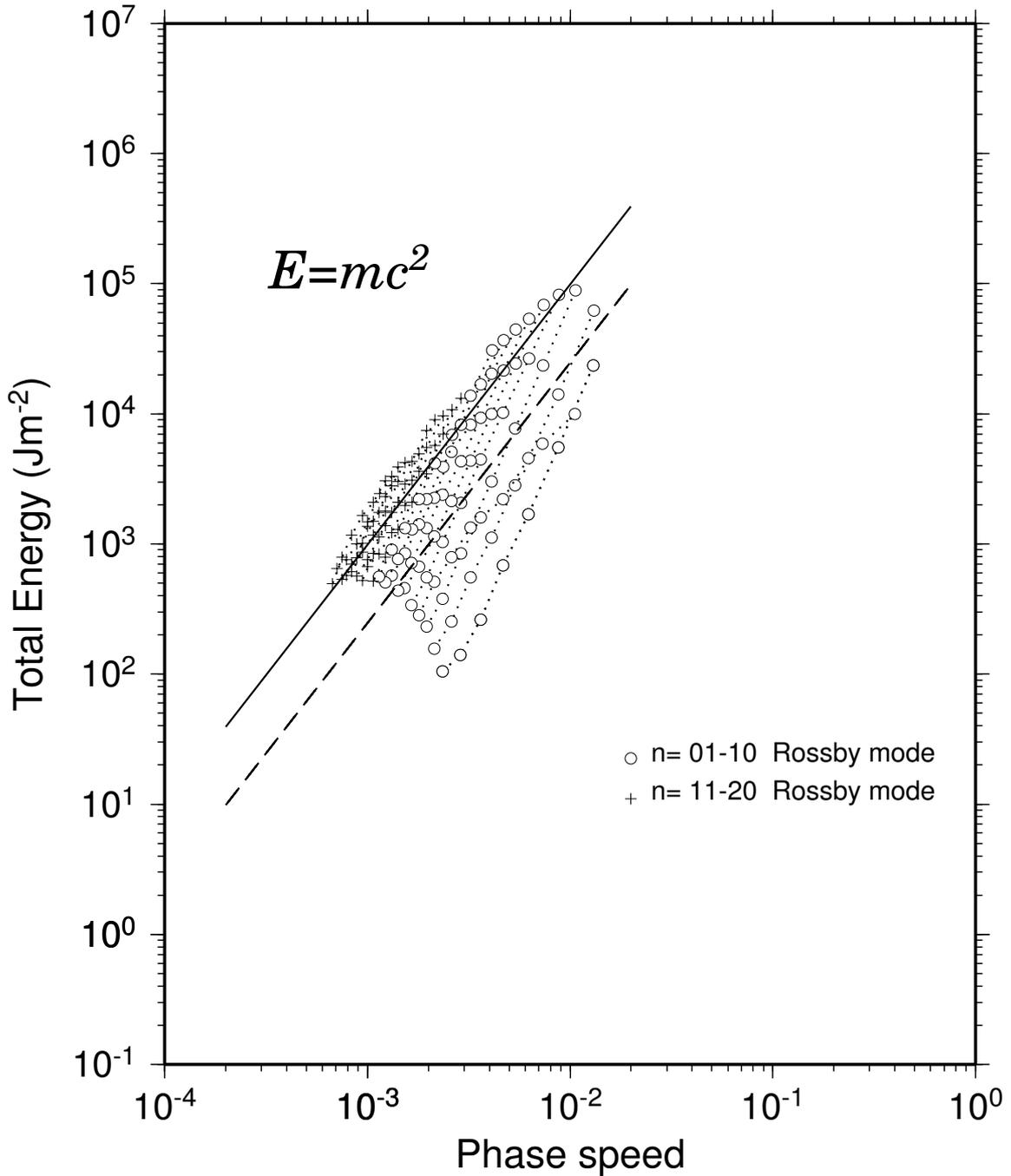


図 21: 緯度 30~80 度において $\partial q'/\partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル. 取り除いた南北モードは図 14 と同じ. 点線は同じ東西波数. 実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す. 横軸は位相速度 c .

Potential Vorticity

$$\partial q / \partial y < 0 \quad (k=3, l=3, 30\text{N}-60\text{N})$$

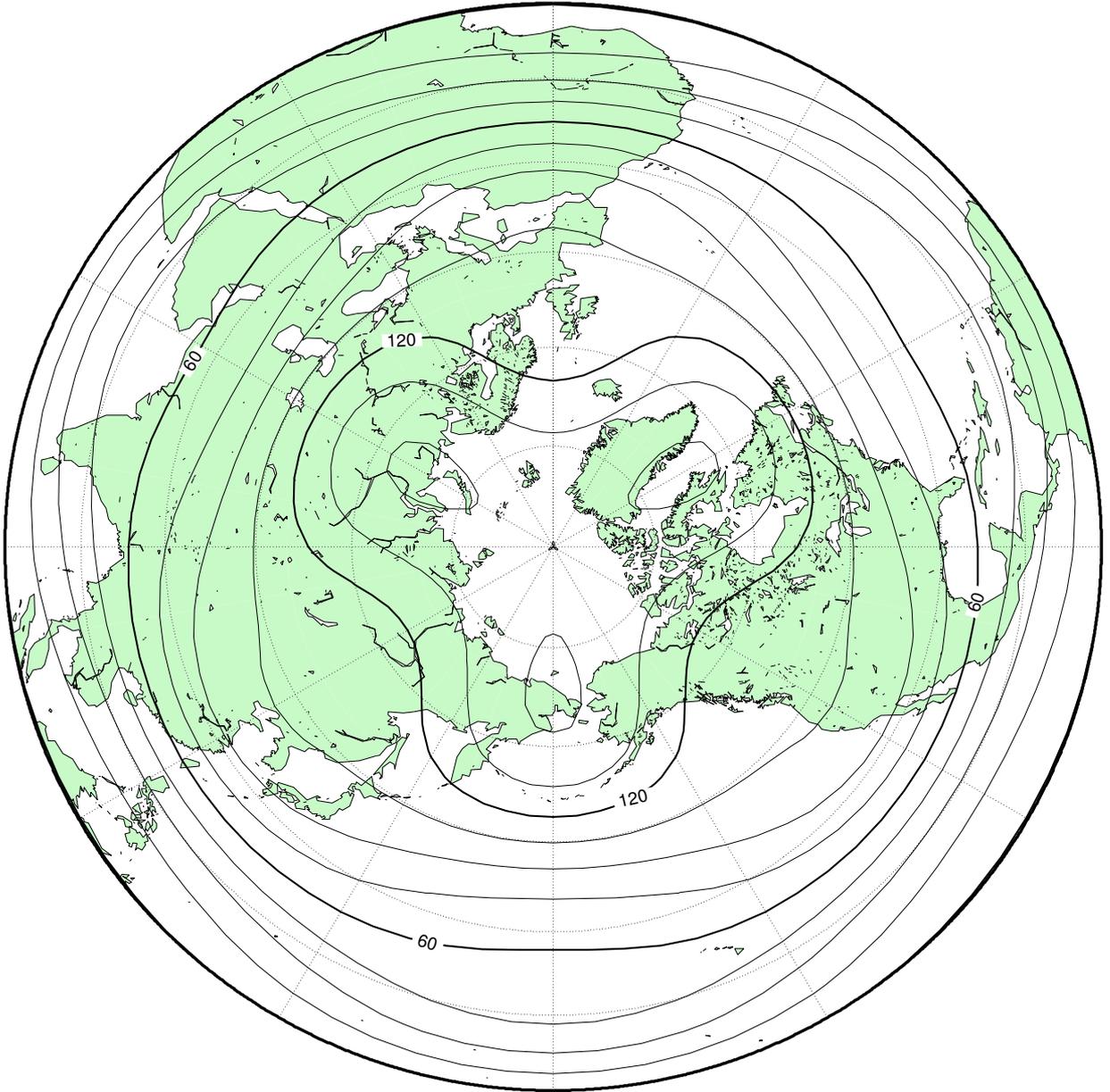


図 22: 緯度 30 ~ 60 度において $\partial q' / \partial y < 0$ を満たしたときの $n = 3, l = 3$ の渦位の分布 . 値は $10^{-10} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$.

Total Energy Spectrum

$\partial q/\partial y < 0$ (barotropic, 30N-45N)

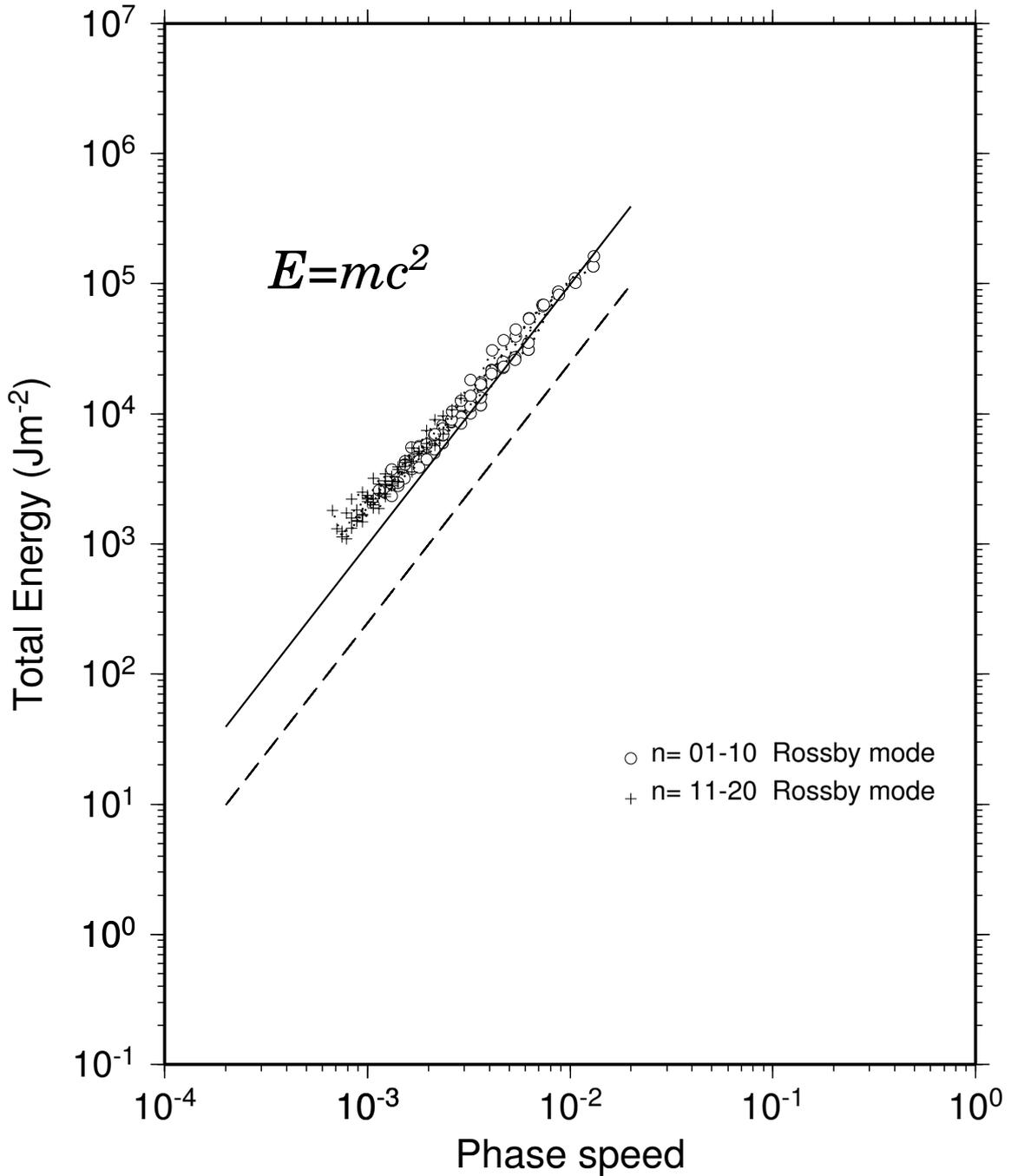


図 23: 緯度 10 ~ 60 度において $\partial q'/\partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル. 取り除いた南北モードは図 14 と同じ. 点線は同じ東西波数. 実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す. 横軸は位相速度 c .

Potential Vorticity

$$\partial q / \partial y < 0 \quad (k=6, l=3, 30N-45N)$$

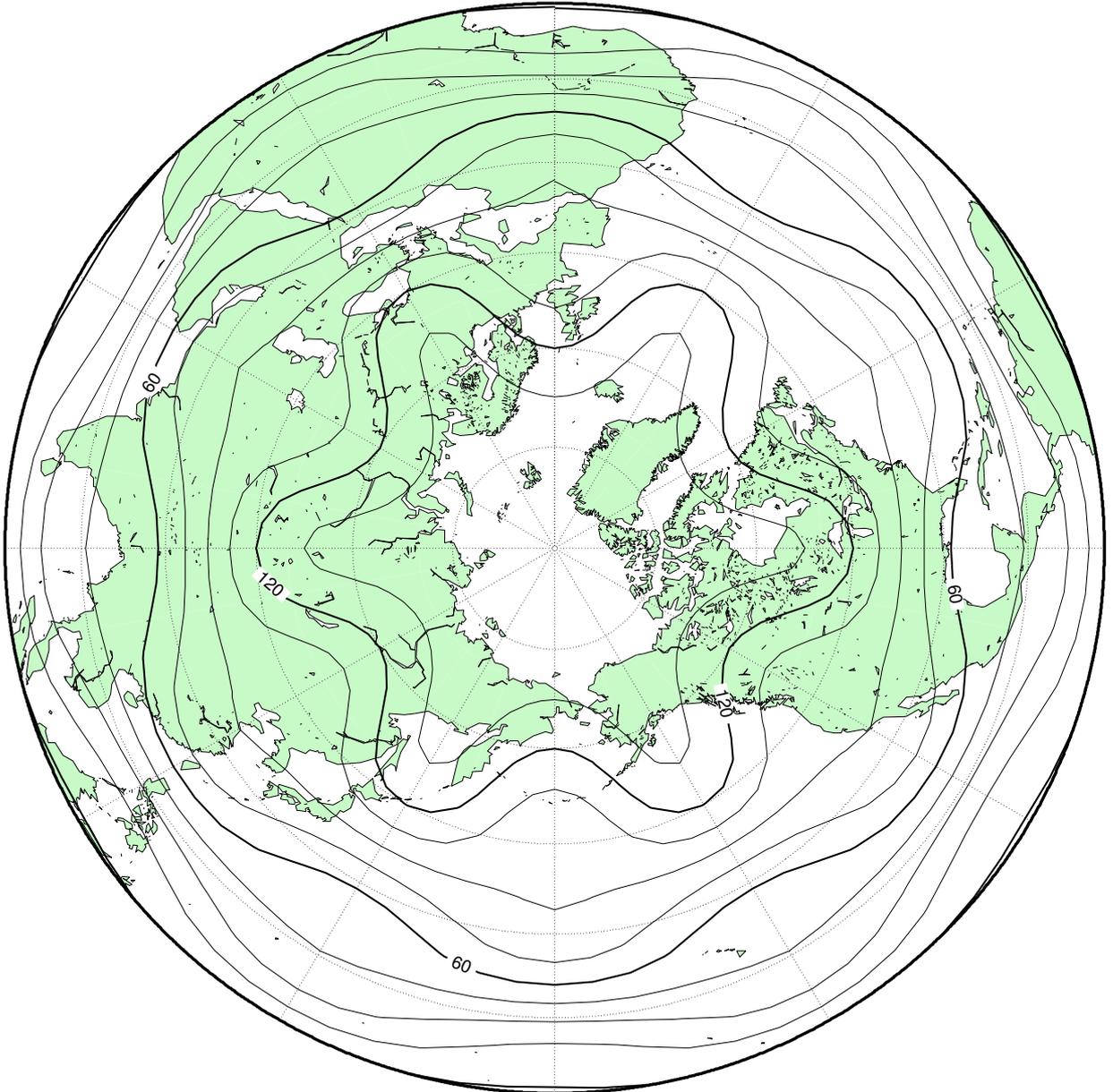


図 24: 緯度 30 ~ 45 度において $\partial q' / \partial y < 0$ を満たしたときの $n = 6, l = 3$ の渦位の分布 . 値は $10^{-10} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$.

Total Energy Spectrum

$\nabla^2 \mathbf{u} + \beta < 0$ (barotropic, 10N-80N)

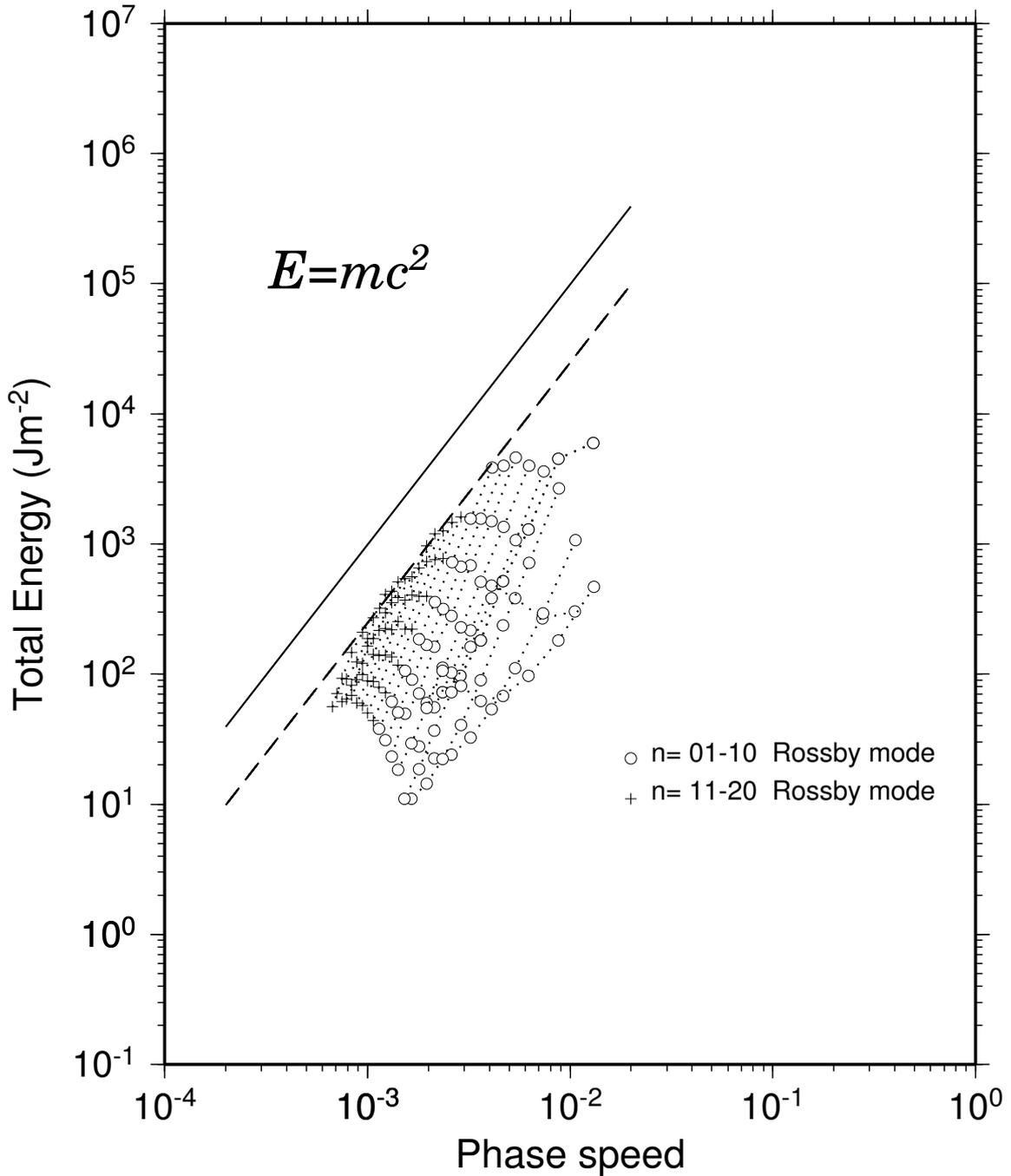


図 25: 10 ~ 80 °N において $-\nabla^2 + \beta < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル．取り除いた南北モードは図 14 と同じ．点線は同じ東西波数．実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す．横軸は位相速度 c ．

Total Energy Spectrum

$\nabla^2 \mathbf{u} + \beta < 0$ (barotropic, 30N-60N)

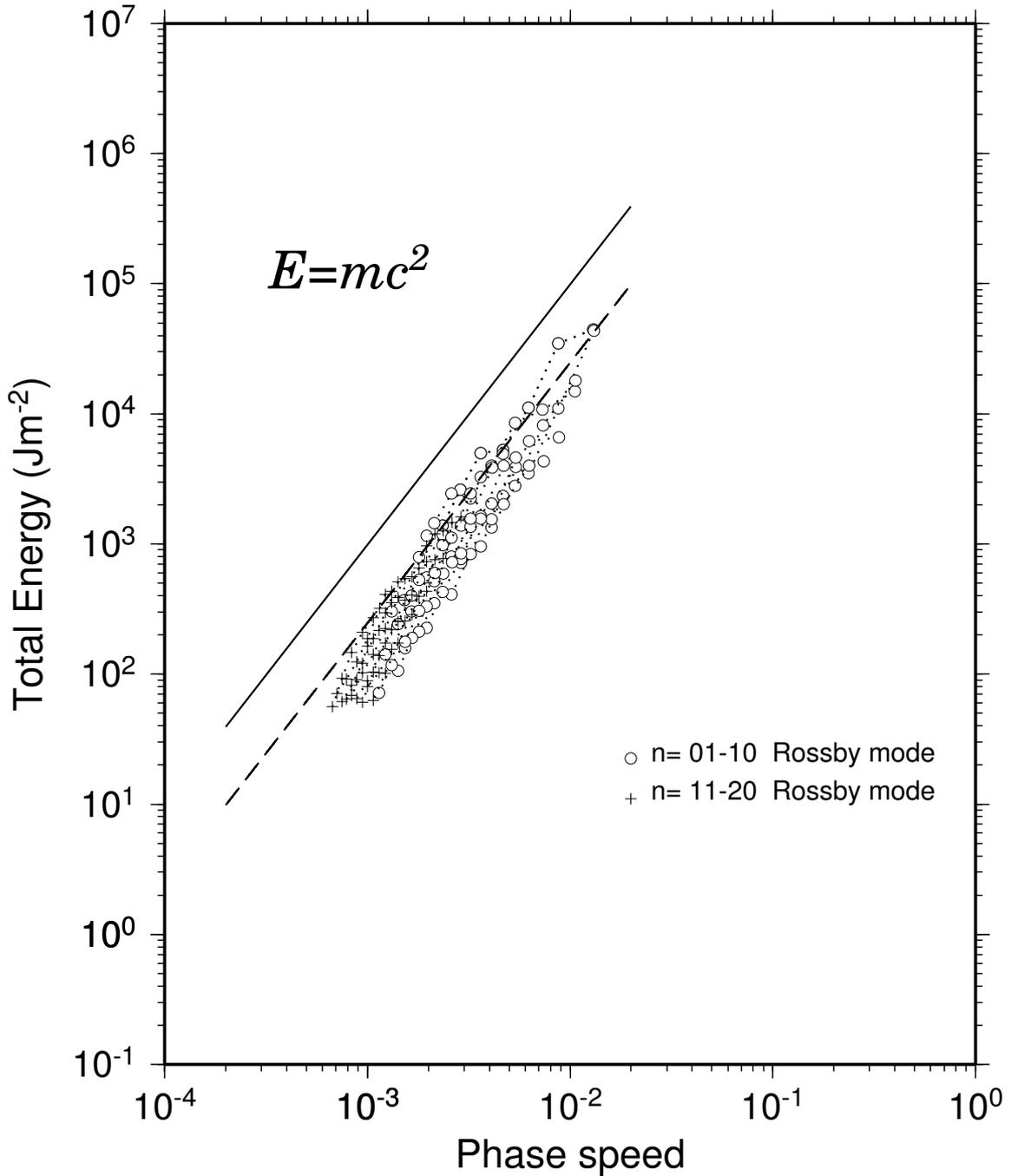


図 26: 30 ~ 60 °N において $-\nabla^2 + \beta < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル．取り除いた南北モードは図 14 と同じ．点線は同じ東西波数．実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す．横軸は位相速度 c ．

Total Energy Spectrum

$\nabla^2 \mathbf{u} + \beta < 0$ (barotropic, 30N-45N)

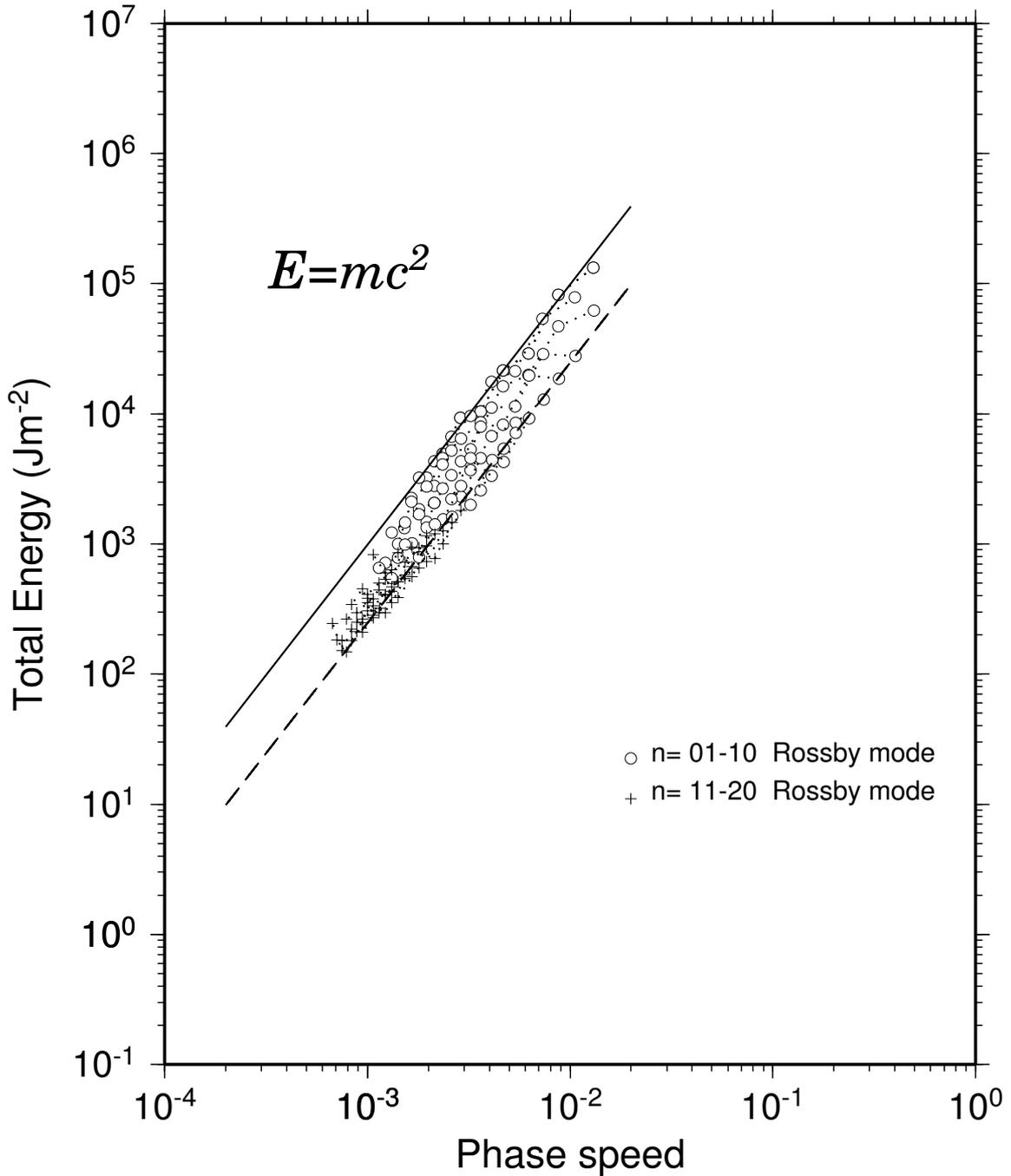


図 27: 30 ~ 45 °N において $-\nabla^2 + \beta < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル．取り除いた南北モードは図 14 と同じ．点線は同じ東西波数．実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す．横軸は位相速度 c ．

Potential Vorticity

$$\nabla^2 u + \beta < 0 \quad (k=6, l=3, 30N-60N)$$



図 28: 30 ~ 60 °N において $-\nabla^2 + \beta < 0$ を満たしたときの $n = 6, l = 3$ の渦位の分布 . 値は $10^{-10} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$.

Potential Vorticity

$$\nabla^2 u + \beta < 0 \quad (k=6, l=3, 30N-45N)$$

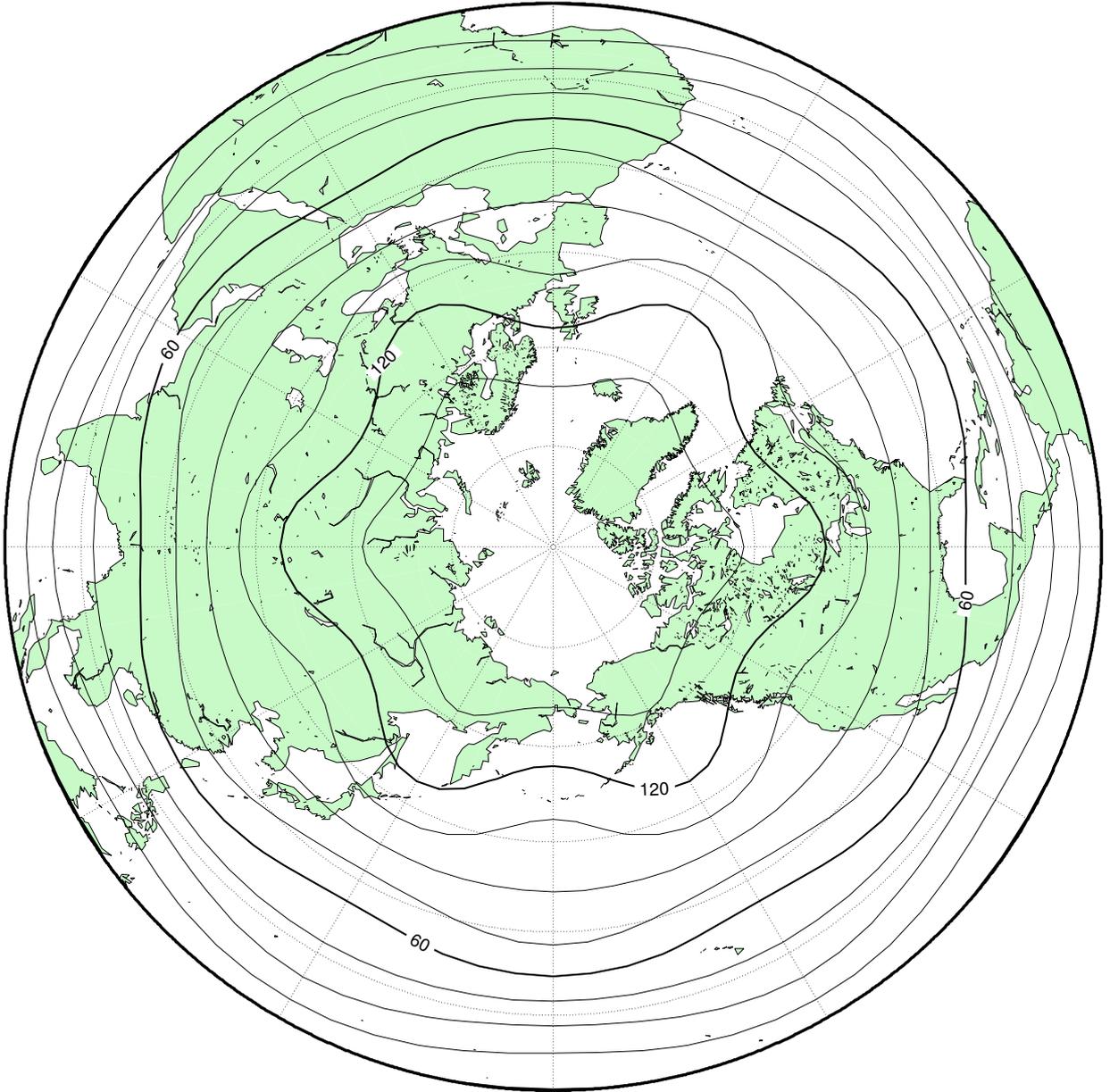


図 29: 30 ~ 45 °N において $-\nabla^2 + \beta < 0$ を満たしたときの $n = 6, l = 3$ の渦位の分布 . 値は $10^{-10} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$.

Zonalmean Wind

(DJF 1958 - 1997)

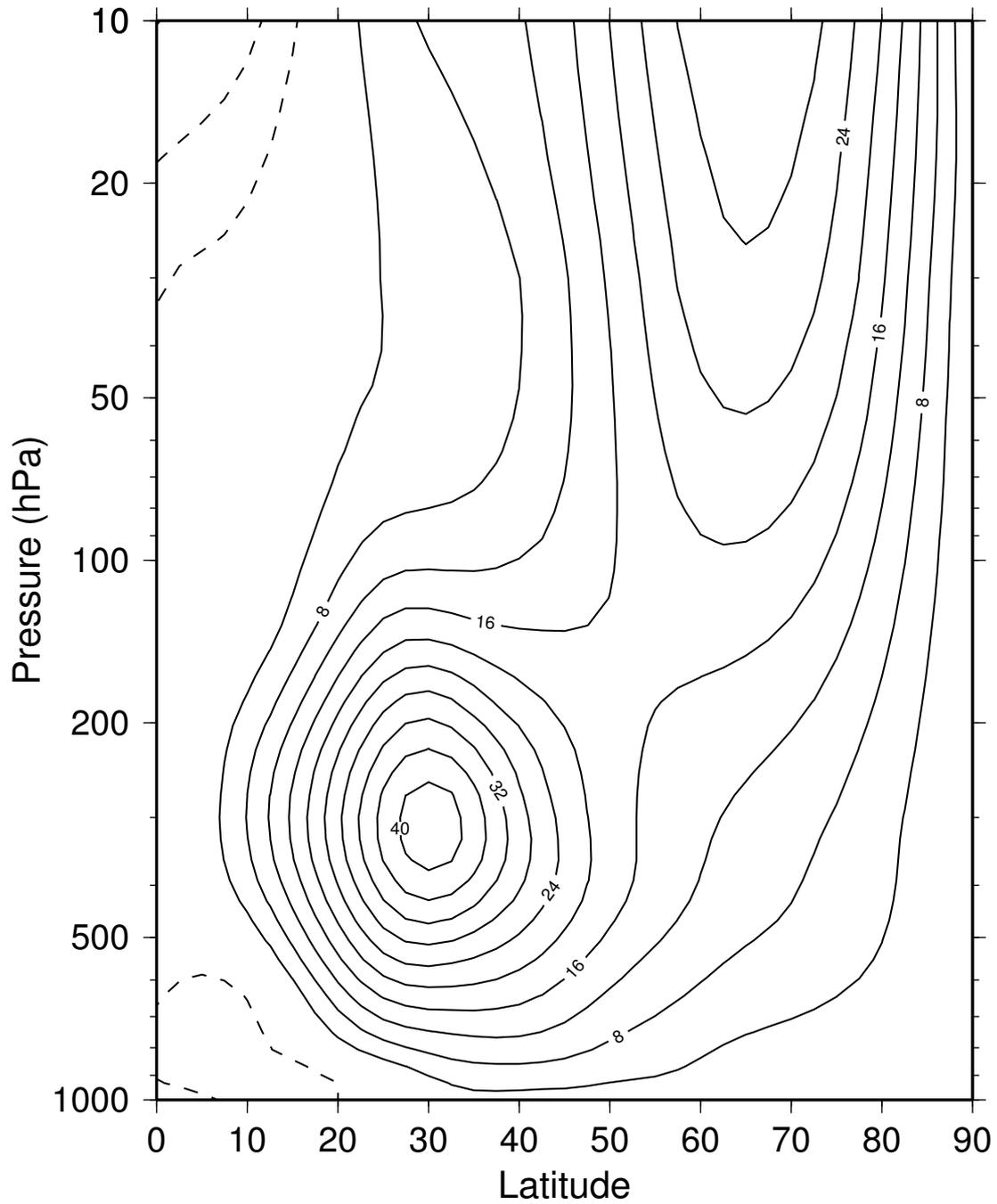


図 30: 1958 ~ 1997 年までの東西平均東西風 . 単位は m/s .

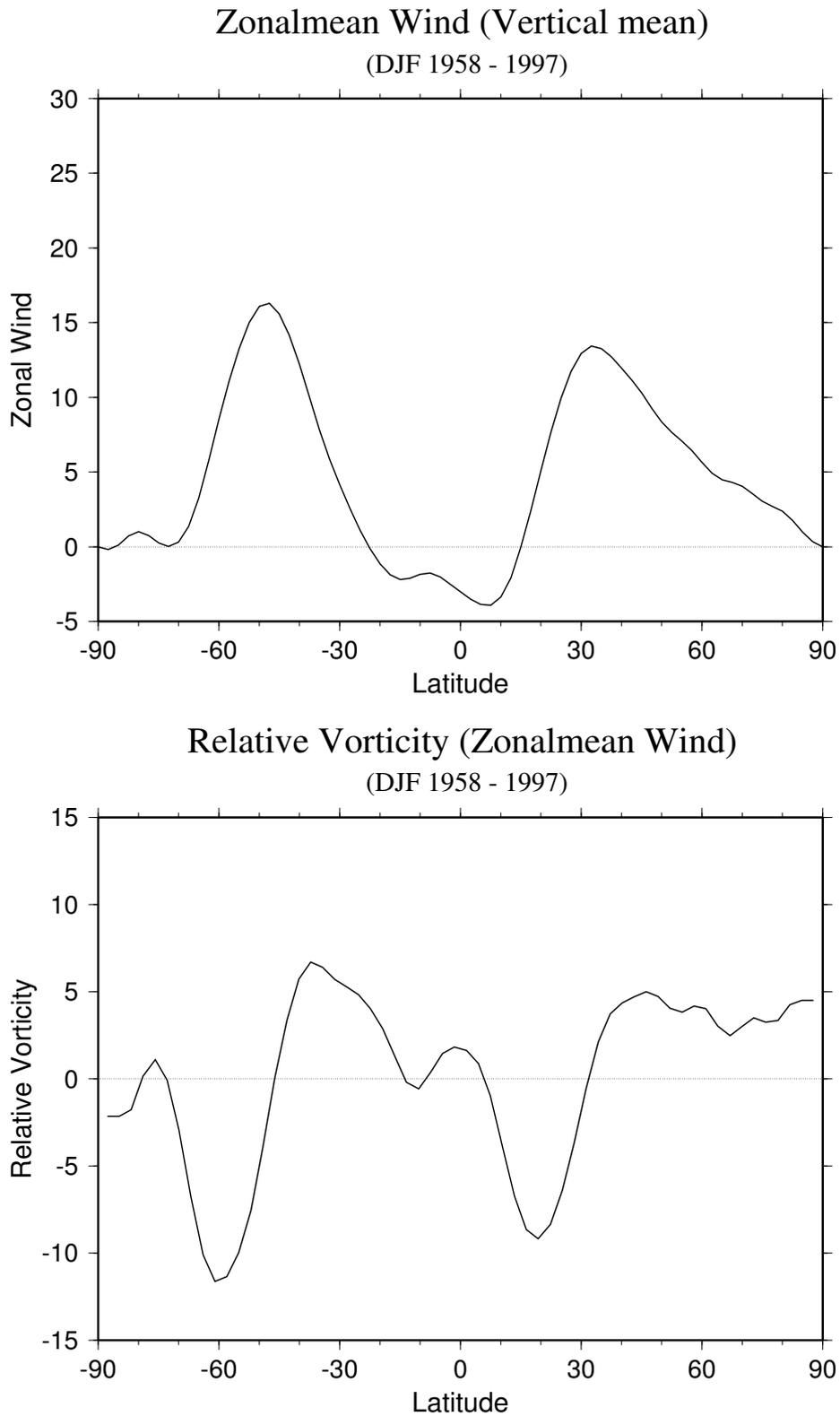


図 31: 1958~1997年までの東西平均東西風の鉛直平均(上)と鉛直平均した東西風による相対渦度の緯度分布(下)。単位はそれぞれ m/s と 10^{-6}s^{-1} である。

Total Energy Spectrum

$\partial(\bar{q}+q')/\partial y < 0$ (barotropic, 10N-80N)

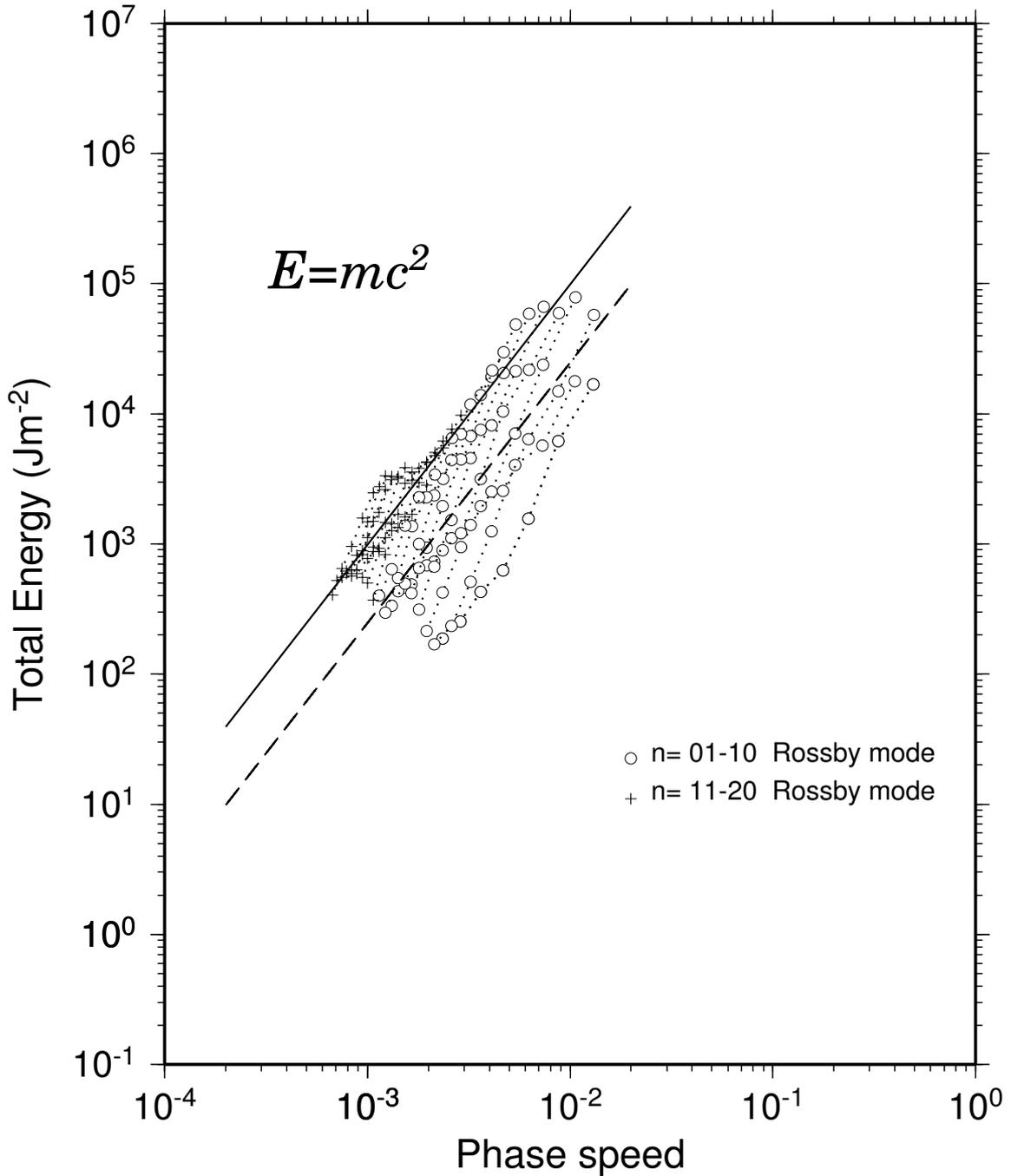


図 32: 緯度 10 ~ 80 度において $\partial(\bar{q} + q')/\partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル. 取り除いた南北モードは図 14 と同じ. 点線は同じ東西波数. 実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す. 横軸は位相速度 c .

Total Energy Spectrum

$\partial(\bar{q}+q')/\partial y < 0$ (barotropic, 30N-60N)

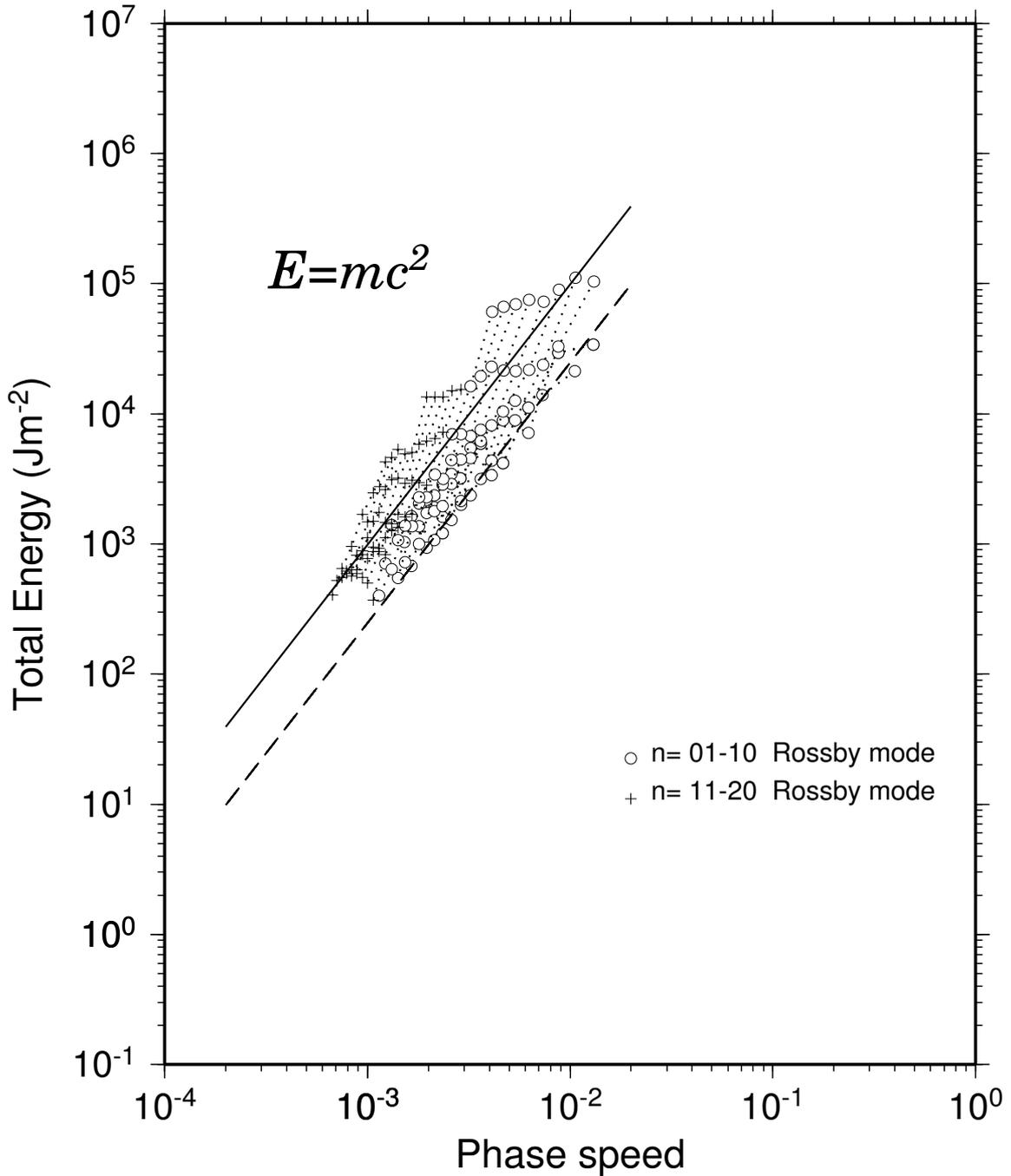


図 33: 緯度 30 ~ 60 度において $\partial(\bar{q} + q')/\partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギーースペクトル。取り除いた南北モードは図 14 と同じ。点線は同じ東西波数。実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す。横軸は位相速度 c 。

Total Energy Spectrum

$\partial(\bar{q}+q')/\partial y < 0$ (barotropic, 30N-45N)

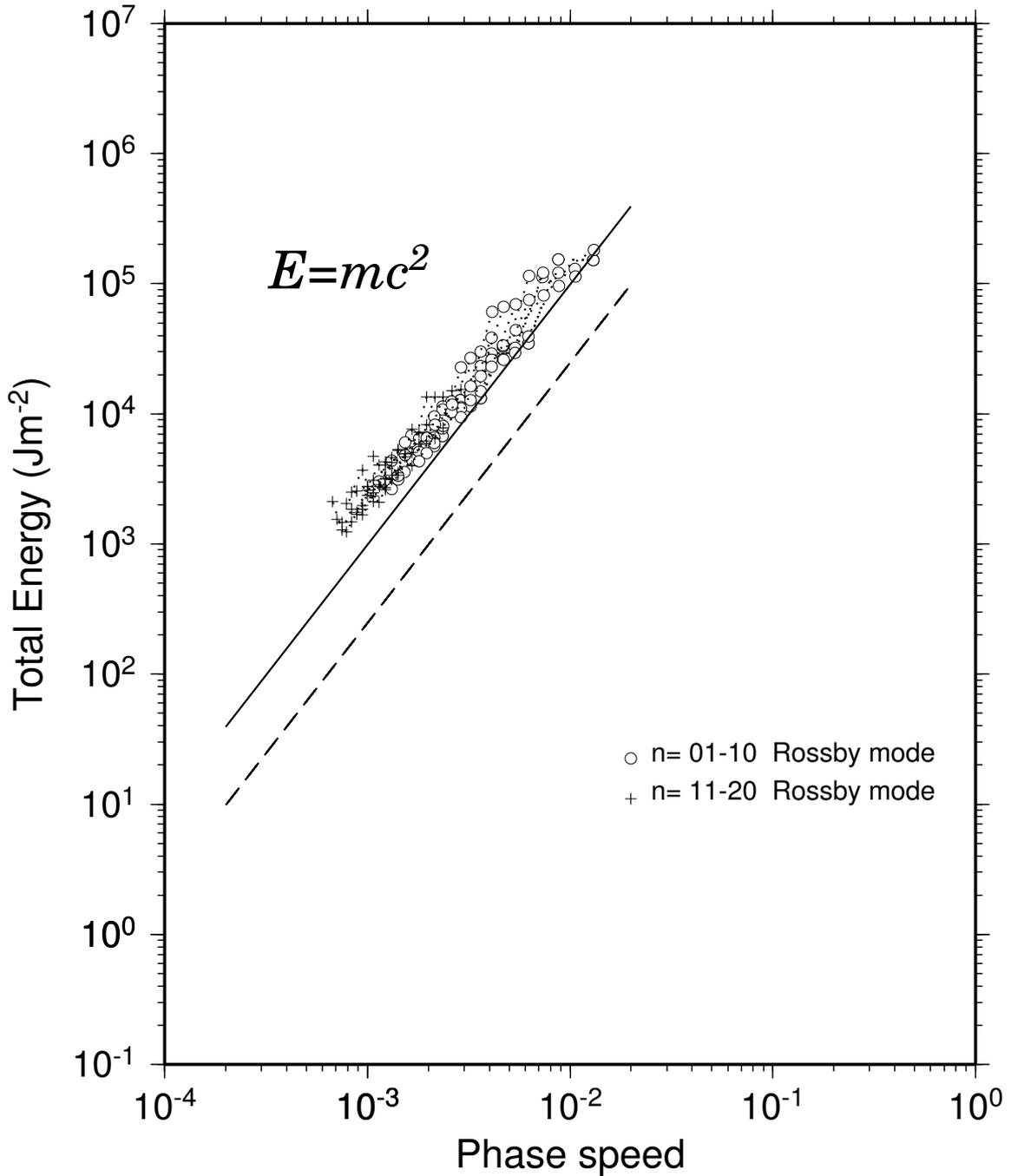


図 34: 緯度 10 ~ 80 度において $\partial(\bar{q} + q')/\partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル. 取り除いた南北モードは図 14 と同じ. 点線は同じ東西波数. 実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す. 横軸は位相速度 c .

Total Energy Spectrum

$\partial(\bar{q}+q')/\partial y < 0$ (barotropic, 10N-60N)

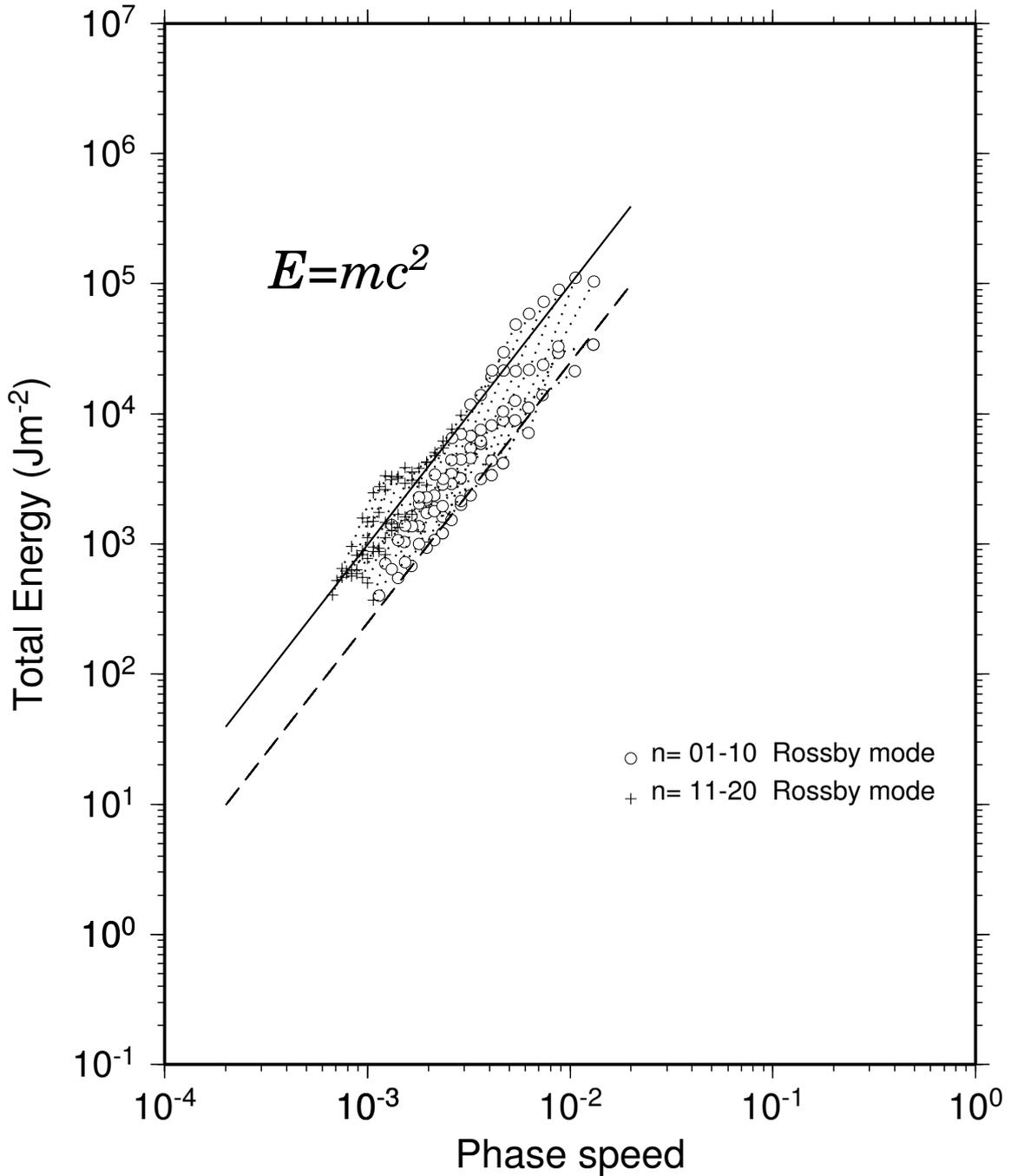


図 35: 緯度 10 ~ 60 度において $\partial(\bar{q} + q')/\partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギーースペクトル . 取り除いた南北モードは図 14 と同じ . 点線は同じ東西波数 . 実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す . 横軸は位相速度 c .

Total Energy Spectrum

$\partial(\bar{q}+q')/\partial y < 0$ (barotropic, 30N-80N)

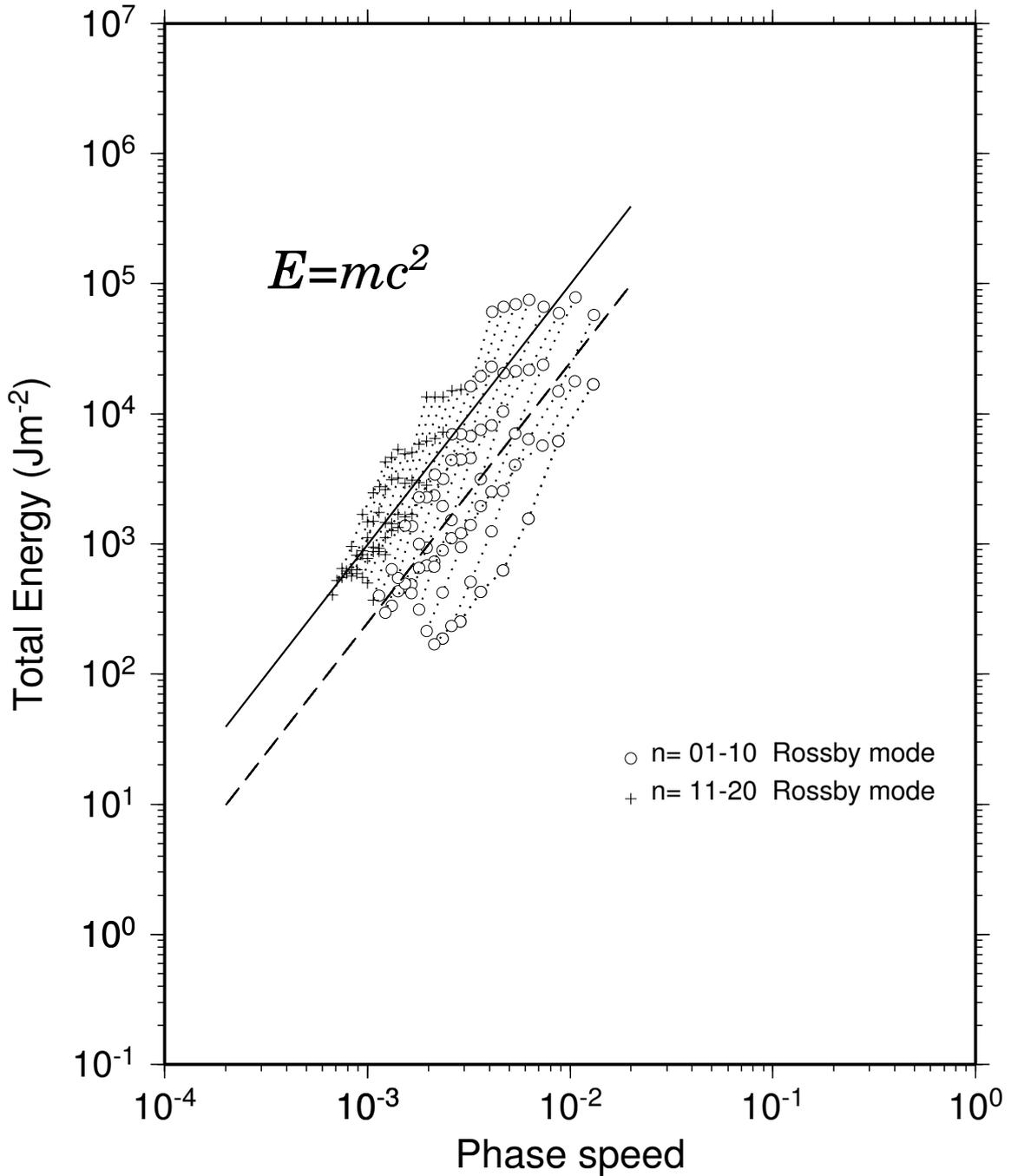


図 36: 緯度 30 ~ 80 度において $\partial(\bar{q} + q')/\partial y < 0$ を満たしたときの順圧モードのエネルギースペクトル. 取り除いた南北モードは図 14 と同じ. 点線は同じ東西波数. 実線は mc^2 の直線を、破線は $\frac{1}{4}mc^2$ の直線を表す. 横軸は位相速度 c .

Total Energy Spectrum

$|u| > |c|$ ($m=4, 10N-80N$)

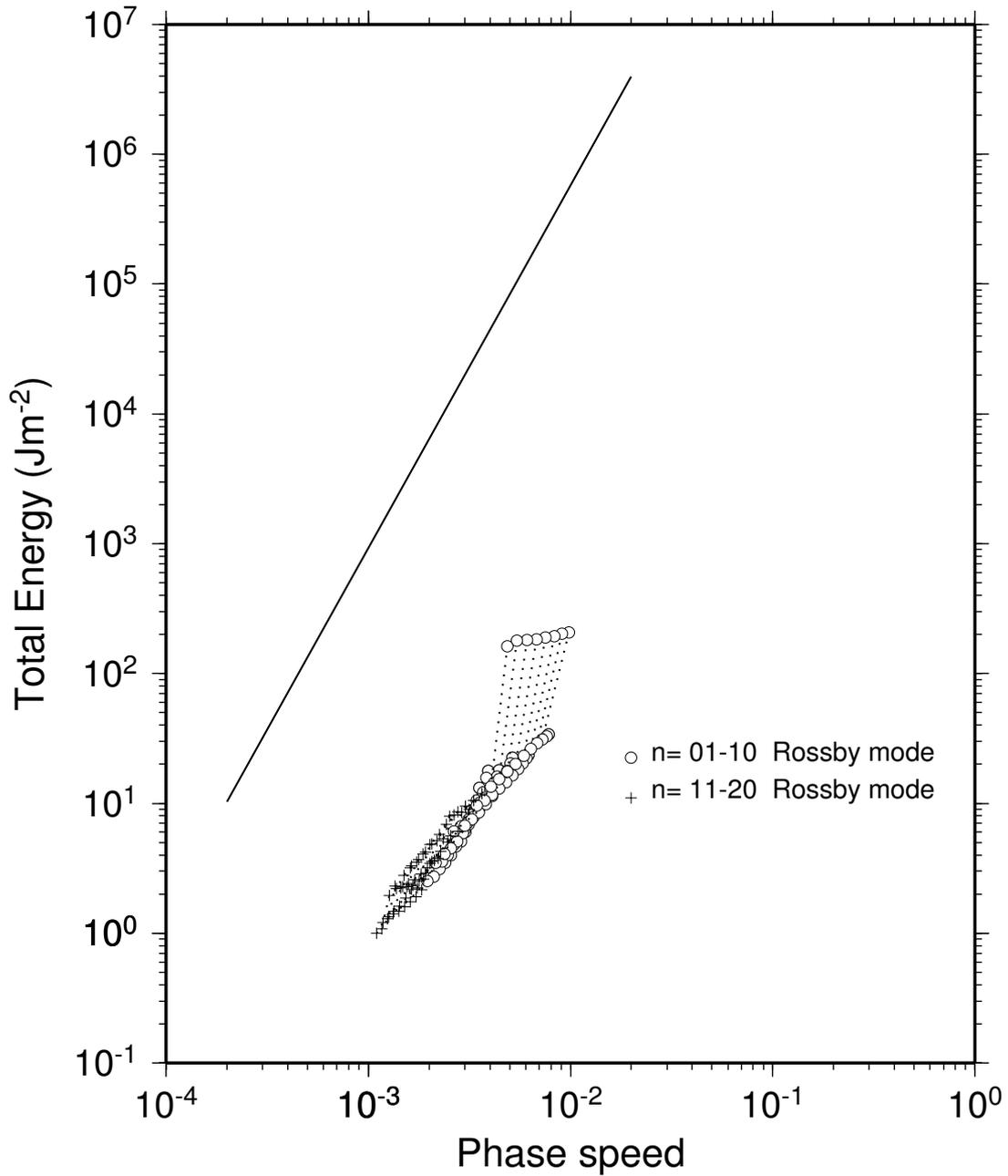


図 37: 10 ~ 80 °N において $|u| > |c|$ を満たしたときの傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル。取り除いた南北モードは図 14 と同じ。点線でつながっているものは同じ東西波数を、実線は Tanaka and Kimura(1996) で示された直線を表す。横軸は位相速度 c 。

Total Energy Spectrum

$|u| > |c|$ ($m=4$, 30N-60N)

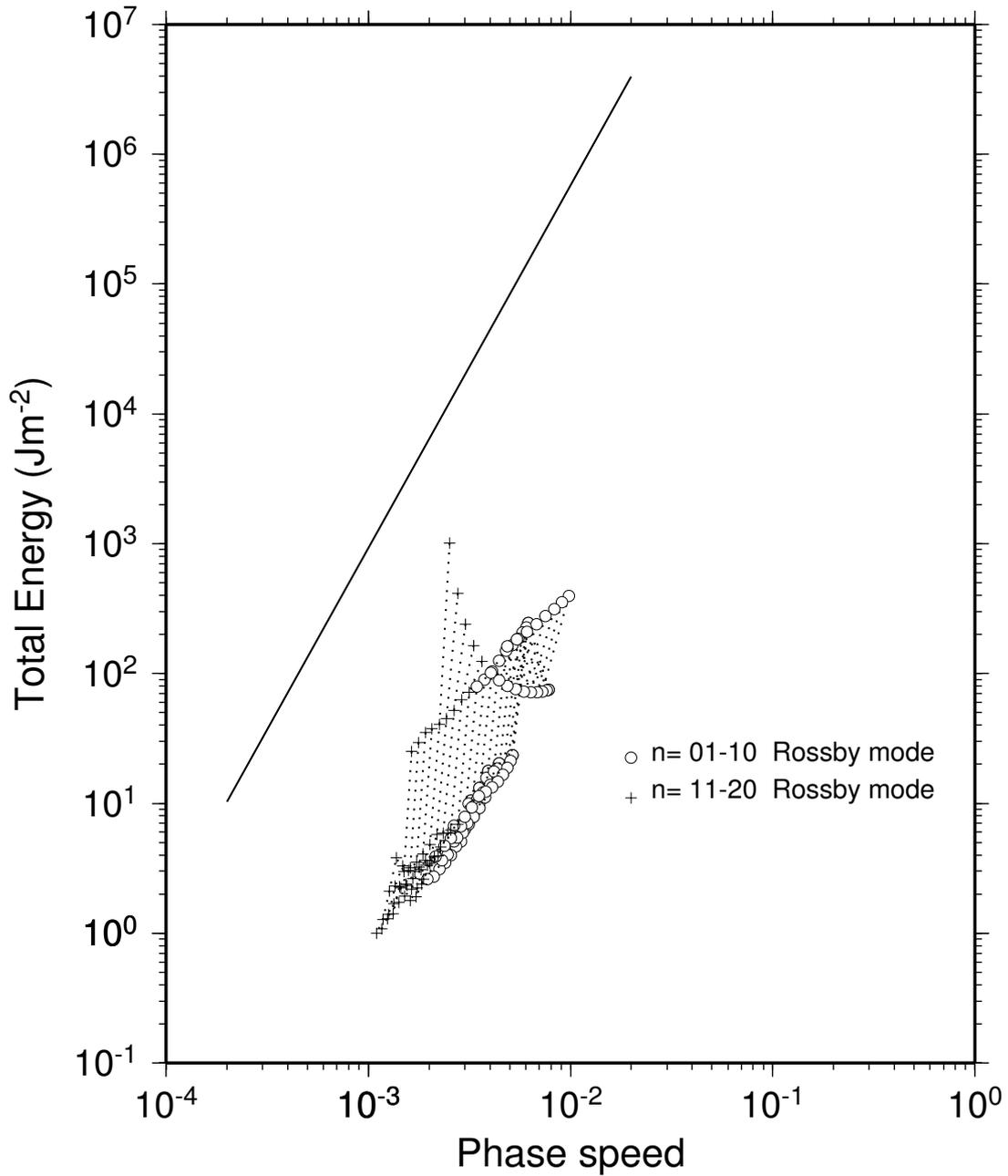


図 38: 30 ~ 60 °N において $|u| > |c|$ を満たしたときの傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル。取り除いた南北モードは図 14 と同じ。点線でつながっているものは同じ東西波数を，実線は Tanaka and Kimura(1996) で示された直線を表す。横軸は位相速度 c 。

Total Energy Spectrum

$|u| > |c|$ ($m=4$, 30N-45N)

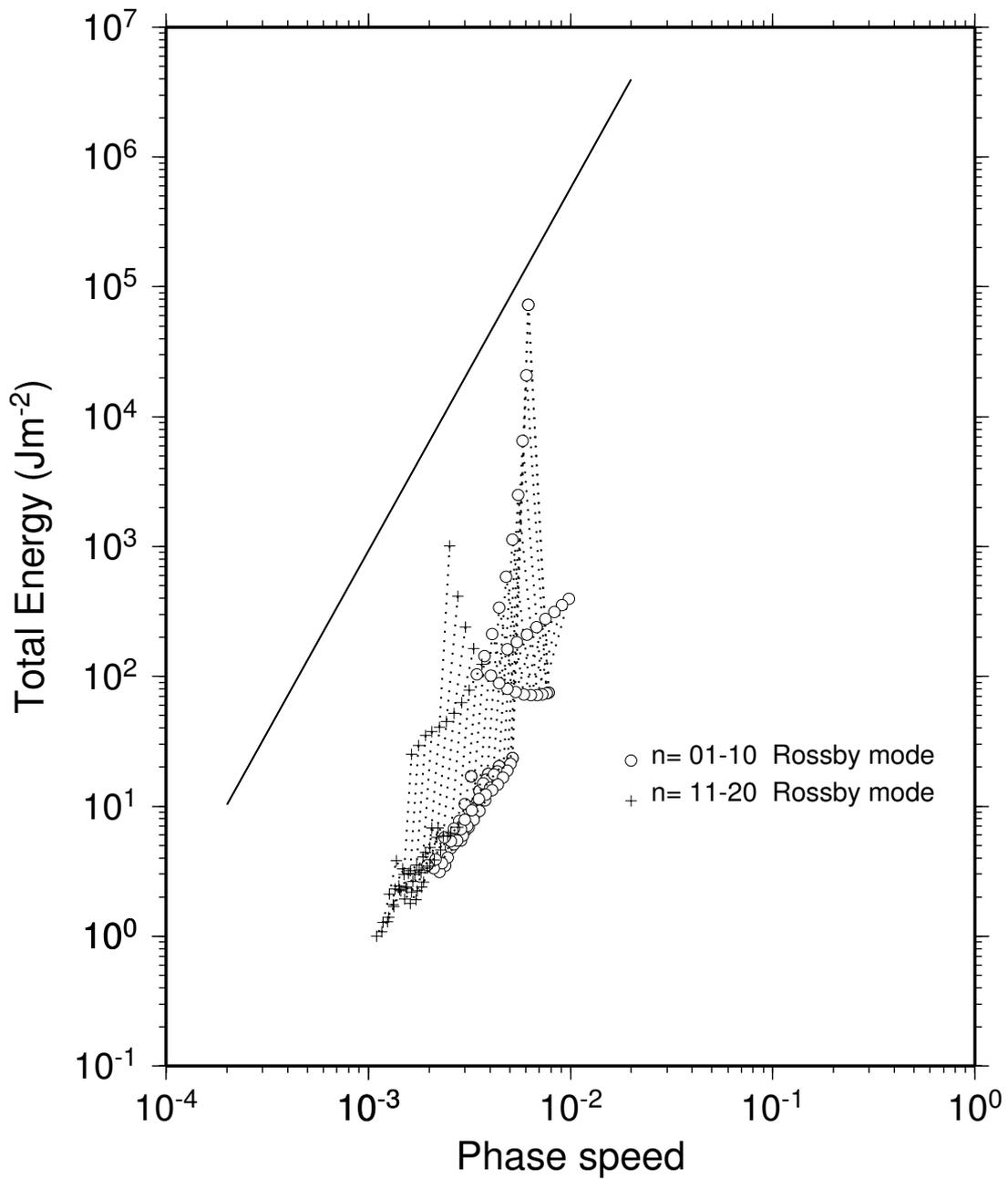


図 39: 30 ~ 45 °N において $|u| > |c|$ を満たしたときの傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル . 取り除いた南北モードは図 14 と同じ . 点線でつながっているものは同じ東西波数を , 実線は Tanaka and Kimura(1996) で示された直線を表す . 横軸は位相速度 c .

Total Energy Spectrum

$\partial q/\partial y < 0$ ($m=4$, 10N-80N)

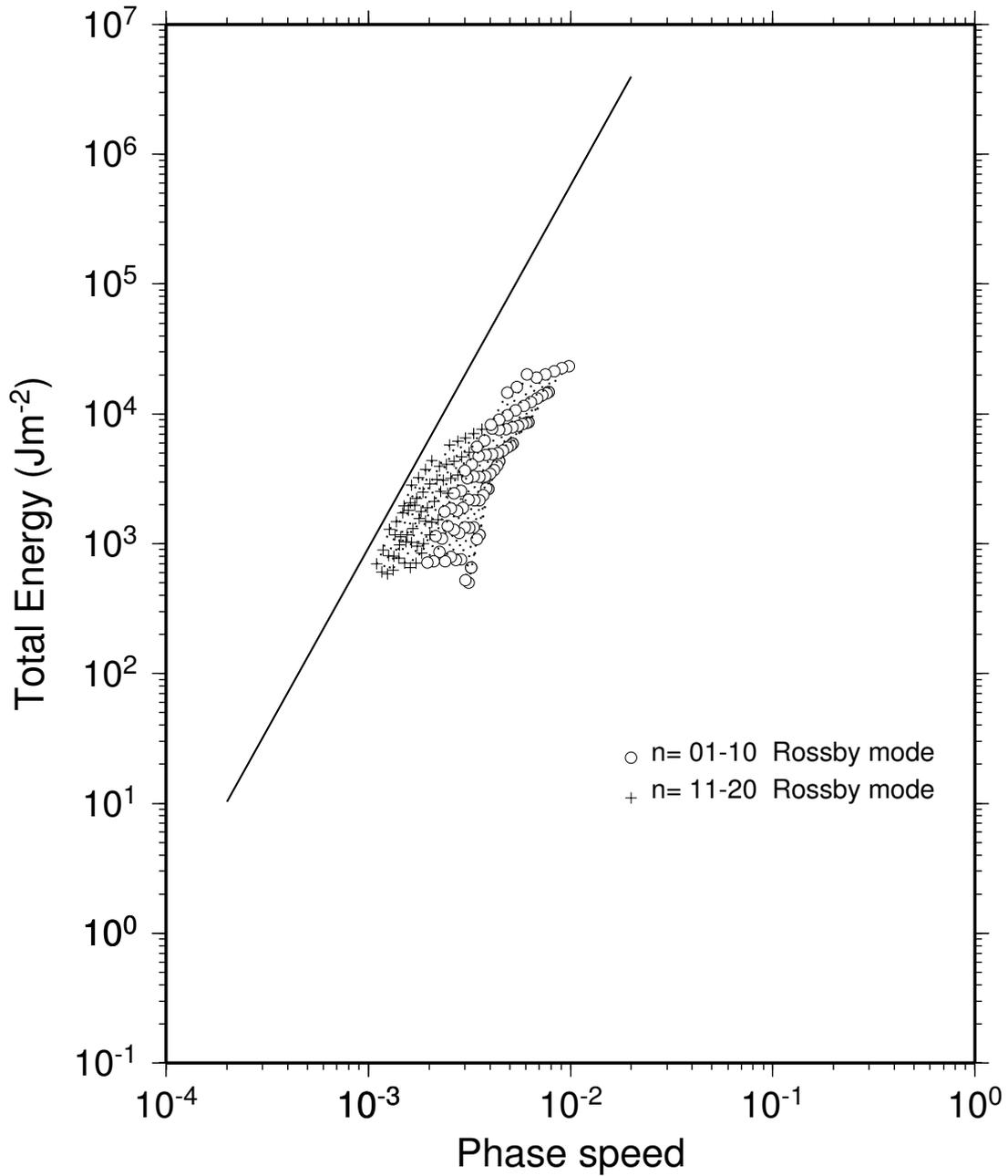


図 40: 緯度 10 ~ 80 度において $dq'/dy < 0$ を満たしたときの傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル。取り除いた南北モードは図 14 と同じ。点線でつながっているものは同じ東西波数を、実線は Tanaka and Kimura(1996) で示された直線を表す。横軸は位相速度 c 。

Total Energy Spectrum

$\partial q/\partial y < 0$ ($m=4, 30N-60N$)

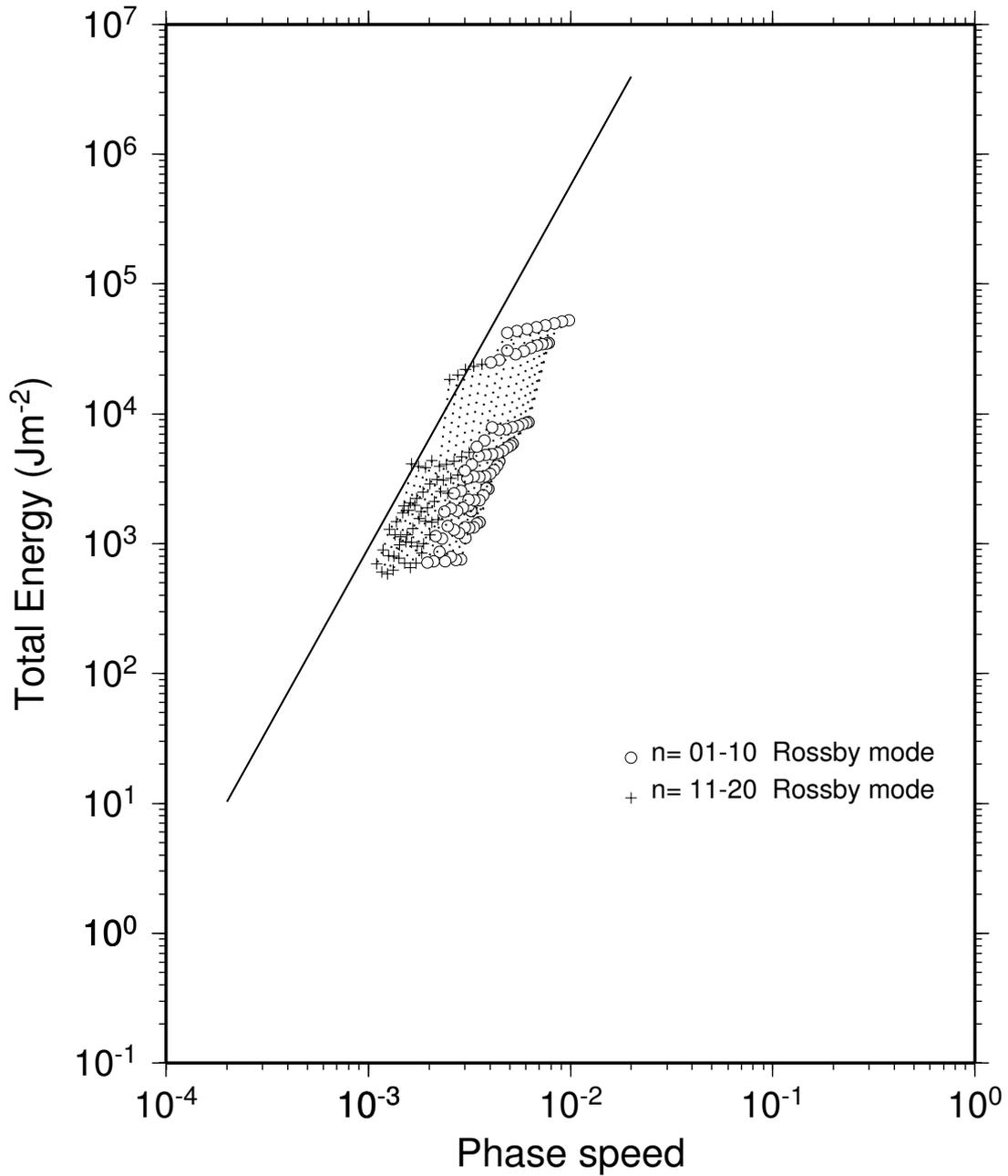


図 41: 緯度 30 ~ 60 度において $dq'/dy < 0$ を満たしたときの傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル。取り除いた南北モードは図 14 と同じ。点線でつながっているものは同じ東西波数を、実線は Tanaka and Kimura(1996) で示された直線を表す。横軸は位相速度 c 。

Total Energy Spectrum

$\partial q/\partial y < 0$ ($m=4$, 30N-45N)

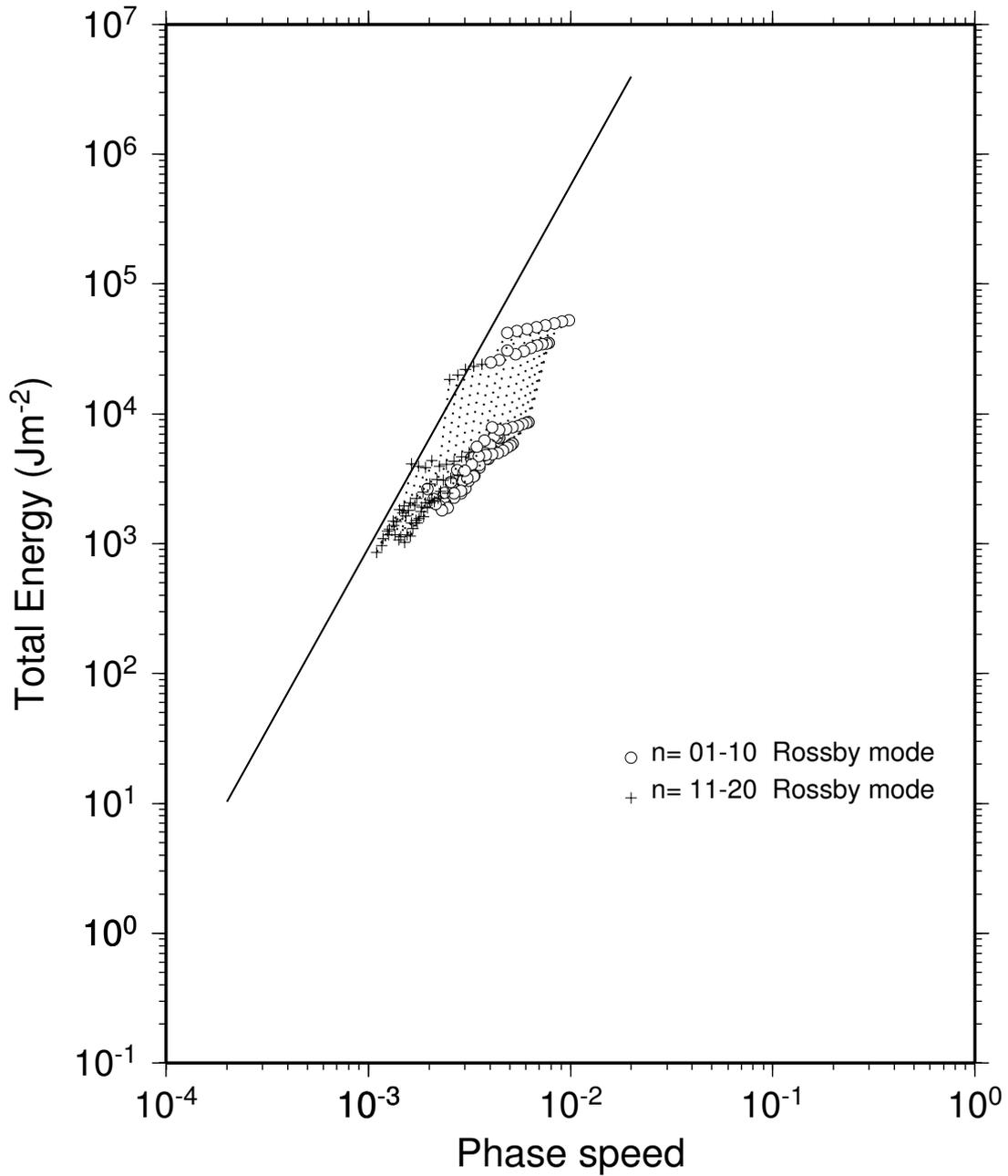


図 42: 緯度 30 ~ 45 度において $dq'/dy < 0$ を満たしたときの傾圧モード ($m = 4$) のエネルギースペクトル。取り除いた南北モードは図 14 と同じ。点線でつながっているものは同じ東西波数を, 実線は Tanaka and Kimura(1996) で示された直線を表す。横軸は位相速度 c 。