

平成18年度 卒業論文

順圧大気大循環モデルによる  
アンサンブル・カルマンフィルタの実験

筑波大学第一学群自然学類

地球科学主専攻

200310304

近藤圭一

2007年1月

# 目次

Abstract	iv
図目次	vi
1 はじめに	1
2 目的	3
3 解析方法	4
3.1 基礎方程式系	4
3.1.1 プリミティブ方程式系	4
3.1.2 鉛直構造関数	9
3.1.3 水平構造関数	13
3.1.4 3次元ノーマルモード関数展開	16
3.1.5 システム行列 A, B	18
3.2 カルマンフィルタ	19
3.3 アンサンブル・カルマンフィルタ	23
3.3.1 アンサンブル・カルマンフィルタの導入	23
3.3.2 局所アンサンブル変換カルマンフィルタ	26
3.3.3 物理的解釈	29
3.4 順圧 S-Model のアンサンブル化	31
3.4.1 外力アンサンブル	32
3.4.2 初期値アンサンブル	33
3.5 使用データ	36
4 実験概要	37
4.1 パーフェクトモデルを用いた EKF の実験	37
4.2 パーフェクトモデルを用いた EnKF の実験 1	37
4.3 パーフェクトモデルを用いた EnKF の実験 2	38
4.4 EKF の $P^f$ と EnKF の $P^f$ の比較	38
4.5 現実大気における EKF の実験	38
4.6 現実大気における EnKF の実験	38
4.7 予報精度	39

<b>5</b>	<b>結果</b>	<b>40</b>
5.1	パーフェクトモデルを用いた EKF の結果	40
5.1.1	膨張係数 $\rho = 1.00$	40
5.1.2	膨張係数 $\rho = 1.05$	40
5.1.3	膨張係数 $\rho = 1.10$	41
5.2	パーフェクトモデルを用いた EnKF の結果 1	42
5.2.1	膨張係数 $\rho = 1.00$	42
5.2.2	膨張係数 $\rho = 1.10$	42
5.2.3	膨張係数 $\rho = 1.50$	43
5.2.4	膨張係数 $\rho = 1.80$	43
5.3	パーフェクトモデルを用いた EnKF の結果 2	44
5.3.1	アンサンブルメンバー 21, 膨張係数 $\rho = 1.70$	44
5.3.2	アンサンブルメンバー 31, 膨張係数 $\rho = 1.60$	44
5.3.3	アンサンブルメンバー 41, 膨張係数 $\rho = 1.55$	45
5.3.4	アンサンブルメンバー 51, 膨張係数 $\rho = 1.53$	45
5.4	EKF の $P^f$ と EnKF の $P^f$ の比較	45
5.5	現実大気における EKF の結果	47
5.5.1	膨張係数 $\rho = 1.00$	47
5.5.2	膨張係数 $\rho = 1.05$	47
5.5.3	膨張係数 $\rho = 1.10$	47
5.5.4	膨張係数 $\rho = 1.20$	48
5.6	現実大気における EnKF の結果	49
5.6.1	膨張係数 $\rho = 1.70$	49
5.6.2	膨張係数 $\rho = 2.00$	49
5.7	予報精度	50
5.7.1	外力アンサンブル予報の結果	50
5.7.2	初期値アンサンブル予報の結果	52
5.7.3	月平均予報精度	53
<b>6</b>	<b>考察</b>	<b>54</b>
6.1	EKF と EnKF	54
6.2	アンサンブル予報	55

7 結論	57
謝辭	59
參考文獻	60

# **A Verification Experiments of Ensemble Kalman Filter Using a Barotropic General Circulation Model**

**Keiichi KONDO**

## **Abstract**

It is said that the data assimilation is one of the most important techniques in numerical forecast. There are a lot kind of data assimilation techniques and Kalman Filter is one of those techniques. But recent numerical models have over 100,000 model variables and the Kalman Filter needs to calculate inverse of a matrix having the number of model variables. So we can not calculate the Kalman Filter. We, however, can calculate Ensemble Kalman Filter which approximates the Kalman Filter with the ensemble forecasts. The Ensemble Kalman Filter must be veriflicated how much performance it has against the Kalman Filter.

In the university of Tsukuba, there is barotropic S-Model. The model is a kind of spectral model. The barotropic S-Model has a few model variables, so we can directly calculate the Kalman Filter. So we can verify the performance of the Ensemble Kalman Filter against the Kalman Filter.

First, two ensemble S-Models were developed in University of Tsukuba. Their predictabilities were verified by anomaly correlation, Root Mean Square Error (RMSE), spread and spaghetti diagram. The data used is NCEP/NCAR Reanalysis data i.e. a real atmosphere. As the results, we found that predictions by ensemble S-Models were better than a prediction by single S-Model. We, however, found some problems and we will need to improve them.

Second, perfect model experiments were carried out against the Ensemble Kalman Filter and the Kalman Filter. One of the advantages of the perfect model experiments is that we know ture condition of the atmosphere. As the result, we found that the performance of the Ensemble Kalman Filter was about 70 % performance of Kalman Filter.

## **Key Words**

Kalman Filter, Ensemble Kalman Filter, Ensemble forecast.

## 目 次

1	アンサンブル予報の概念図 . . . . .	63
2	データ同化の概要 . . . . .	63
3	真値と観測値 (パーフェクトモデルによる EKF, $\rho = 1.00$ ) . . . . .	64
4	真値, 予報値, 観測値および解析値 (パーフェクトモデルによる EKF, $\rho = 1.00$ ) . . . . .	64
5	観測誤差および解析誤差 (パーフェクトモデルによる EKF, $\rho = 1.00$ )	65
6	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (パーフェクトモデルによる EKF, $\rho = 1.00$ ) . . . . .	65
7	真値と観測値 (パーフェクトモデルによる EKF, $\rho = 1.05$ ) . . . . .	66
8	真値, 予報値, 観測値および解析値 (パーフェクトモデルによる EKF, $\rho = 1.05$ ) . . . . .	66
9	観測誤差および解析誤差 (パーフェクトモデルによる EKF, $\rho = 1.05$ )	67
10	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (パーフェクトモデルによる EKF, $\rho = 1.05$ ) . . . . .	67
11	真値と観測値 (パーフェクトモデルによる EKF, $\rho = 1.10$ ) . . . . .	68
12	真値, 予報値, 観測値および解析値 (パーフェクトモデルによる EKF, $\rho = 1.10$ ) . . . . .	68
13	観測誤差および解析誤差 (パーフェクトモデルによる EKF, $\rho = 1.10$ )	69
14	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (パーフェクトモデルによる EKF, $\rho = 1.10$ ) . . . . .	69
15	真値と観測値 (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.00$ ) . . . . .	70
16	真値, 予報値, 観測値および解析値 (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.00$ ) . . . . .	70
17	観測誤差および解析誤差 (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.00$ )	71
18	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.00$ ) . . . . .	71
19	真値と観測値 (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.10$ ) . . . . .	72
20	真値, 予報値, 観測値および解析値 (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.10$ ) . . . . .	72
21	観測誤差および解析誤差 (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.10$ )	73

22	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.10$ ) . . . . .	73
23	真値と観測値 (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.50$ ) . . . . .	74
24	真値, 予報値, 観測値および解析値 (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.50$ ) . . . . .	74
25	観測誤差および解析誤差 (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.50$ )	75
26	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.50$ ) . . . . .	75
27	真値と観測値 (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.80$ ) . . . . .	76
28	真値, 予報値, 観測値および解析値 (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.80$ ) . . . . .	76
29	観測誤差および解析誤差 (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.80$ )	77
30	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (パーフェクトモデルによる EnKF, $\rho = 1.80$ ) . . . . .	77
31	真値と観測値 (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 21) .	78
32	真値, 予報値, 観測値および解析値 (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 21) . . . . .	78
33	観測誤差および解析誤差 (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 21) . . . . .	79
34	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 21) . . . . .	79
35	真値と観測値 (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 31) .	80
36	真値, 予報値, 観測値および解析値 (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 31) . . . . .	80
37	観測誤差および解析誤差 (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 31) . . . . .	81
38	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 31) . . . . .	81
39	真値と観測値 (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 41) .	82
40	真値, 予報値, 観測値および解析値 (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 41) . . . . .	82
41	観測誤差および解析誤差 (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 41) . . . . .	83

42	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 41) . . . . .	83
43	真値と観測値 (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 51) . . . . .	84
44	真値, 予報値, 観測値および解析値 (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 51) . . . . .	84
45	観測誤差および解析誤差 (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 51) . . . . .	85
46	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (パーフェクトモデルによる EnKF, メンバー数 : 51) . . . . .	85
47	EKF の予報誤差共分散行列の固有値スペクトル . . . . .	86
48	EKF および EnKF の予報誤差共分散行列の固有値スペクトル . . . . .	86
49	真値, 予報値, 観測値および解析値 (現実大気における EKF, $\rho = 1.00$ ) . . . . .	87
50	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (現実大気における EKF, $\rho = 1.00$ ) . . . . .	87
51	真値, 予報値, 観測値および解析値 (現実大気における EKF, $\rho = 1.05$ ) . . . . .	88
52	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (現実大気における EKF, $\rho = 1.05$ ) . . . . .	88
53	真値, 予報値, 観測値および解析値 (現実大気における EKF, $\rho = 1.10$ ) . . . . .	89
54	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (現実大気における EKF, $\rho = 1.10$ ) . . . . .	89
55	真値, 予報値, 観測値および解析値 (現実大気における EKF, $\rho = 1.20$ ) . . . . .	90
56	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (現実大気における EKF, $\rho = 1.20$ ) . . . . .	90
57	真値, 予報値, 観測値および解析値 (現実大気における EnKF, $\rho = 1.70$ ) . . . . .	91
58	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (現実大気における EnKF, $\rho = 1.70$ ) . . . . .	91
59	真値, 予報値, 観測値および解析値 (現実大気における EnKF, $\rho = 2.00$ ) . . . . .	92
60	観測誤差, 予報誤差および解析誤差のノルム (現実大気における EnKF, $\rho = 2.00$ ) . . . . .	92
61	外力アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (0 日予報) . . . . .	93
62	外力アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (1 日予報) . . . . .	94
63	外力アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (3 日予報) . . . . .	94
64	外力アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (5 日予報) . . . . .	95

65	外力アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (7 日予報) . . . . .	95
66	外力アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (9 日予報) . . . . .	96
67	外力アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (11 日予報) . . . . .	96
68	外力アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (13 日予報) . . . . .	97
69	外力アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (15 日予報) . . . . .	97
70	外力アンサンブルのアノマリ相関 . . . . .	98
71	外力アンサンブルの RMSE . . . . .	98
72	外力アンサンブルのスプレッド . . . . .	99
73	外力アンサンブルのアノマリ相関 . . . . .	100
74	外力アンサンブルの RMSE . . . . .	100
75	外力アンサンブルのスプレッド . . . . .	101
76	EOF アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (0 日予報) . . . . .	102
77	EOF アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (1 日予報) . . . . .	103
78	EOF アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (3 日予報) . . . . .	103
79	EOF アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (5 日予報) . . . . .	104
80	EOF アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (7 日予報) . . . . .	104
81	EOF アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (9 日予報) . . . . .	105
82	EOF アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (11 日予報) . . . . .	105
83	EOF アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (13 日予報) . . . . .	106
84	EOF アンサンブルのスパゲッティダイヤグラム (15 日予報) . . . . .	106
85	EOF アンサンブルのアノマリ相関 (初期値 : 1989 年 1 月 2 日) . . . . .	107
86	EOF アンサンブルの RMSE (初期値 : 1989 年 1 月 2 日) . . . . .	107
87	EOF アンサンブルのスプレッド (初期値 : 1989 年 1 月 2 日) . . . . .	108
88	EOF アンサンブルのアノマリ相関 (初期値 : 1989 年 1 月 30 日) . . . . .	109
89	EOF アンサンブルの RMSE (初期値 : 1989 年 1 月 30 日) . . . . .	109
90	EOF アンサンブルのスプレッド (初期値 : 1989 年 1 月 30 日) . . . . .	110
91	予報初期時刻の 1 日前から 5 日目の予報誤差 (初期値 : 1989 年 1 月 2 日) . . . . .	111
92	予報初期時刻の 6 日前から 10 日目の予報誤差 (初期値 : 1989 年 1 月 2 日) . . . . .	112
93	初期摂動 (初期値 : 1989 年 1 月 2 日) . . . . .	113
94	1989 年 1 月のアノマリ相関の月平均 . . . . .	114
95	1989 年 1 月の RMSE の月平均 . . . . .	114

96	2005年11月のアノマリ相関の月平均 . . . . .	115
97	2005年11月のRMSEの月平均 . . . . .	115

# 1 はじめに

現在、数値予報において重要とされていることのひとつに、いかにより初期値を与えてやるかということがある。そのような初期値を数値モデルに与えることで予報精度の向上が期待されている。

そこでよりよい初期値を作成する方法に、数値予報モデルによって得られた予報値を観測値で修正するデータ同化 (Wunsch 1996, Daley 1991, Bennett 2002; 多田・村上 1997) と呼ばれる手法がある。データ同化は数値モデルが現実から離れていくのを観測の情報を取り込むことで、現実から離れないようにする働きがある。また、予報値にはモデル誤差による誤差が含まれており、予報値を求める前の解析値にも解析誤差が含まれている。一方、観測値には観測による誤差が含まれている。予報値と観測値をうまく同化することで、予報誤差および観測誤差より誤差の小さい解析値、つまり最も確からしい大気の状態を推定できる。

データ同化には様々な種類がある。観測値のみを使って観測場を表現する関数当てはめ法、観測点と格子点の距離、観測誤差、観測点の不均質な分布などを考慮した最適内挿法、3次元変分法 (3 Dimensional Variational : 3DVAR)、最近では4次元変分法 (4 Dimensional Variational : 4DVAR)(Talagrand and Courtier 1987, Courtier et al. 1994) などがあり、時代とともにデータ同化の性能はよくなってきている。

Kalman(1960)で提唱されたカルマンフィルタ (Kalman Filter : 以下KF) もデータ同化のうちのひとつで理想的な4次元同化法である。KFは、誤差の確率分布がガウス分布で与えられ、系の時間発展が線形システムである場合に厳密に定義され、推定誤差が最も小さくなるような最適な解を与える。KFは線形システムで定義されているが、大気の数値モデルは非線形システムである。そこで非線形モデルに適応したKFを拡張カルマンフィルタ (Extended Kalman Filter : 以下EKF) という。しかし、大気の数値モデルはモデル変数の次元の数 (モデルの自由度) が膨大であるため、EKFの直接の計算は不可能とされている。

一方で、予報精度の向上のためのもう一つの手法としてアンサンブル予報がある。従来の単独予報が1つの初期値から1つの予報を得るという決定論的予報であるのに対して、アンサンブル予報は様々な予報の集合を統計的に処理することで確率論的予報を行うものであり、単独予報と比較して予報誤差を減少させることができる。初期のアンサンブル予報としては、モンテカルロ法 (Leith 1974) やずらし平均法 (Hoffman and Kalnay 1983) などが提案されていた。最近ではヨーロッパ中期予

報センター (ECMWF) で用いられている特異ベクトル法 (SV : singular vector), 米国環境予報センター (NCEP), 気象庁 (JMA) で用いられている成長モード育成法 (BGM : breeding of growing mode) などがある.

このアンサンブル予報のプロセスを用いることで EKF を近似したものがアンサンブル・カルマンフィルタ (Ensemble Kalman Filter : 以下 EnKF)(Evensen 1994) である. その仕組みは, アンサンブル予報の各アンサンブルメンバーのばらつきから予報誤差を見積もり, その情報を用いて EKF を近似しようとするものである.

単独予報が 1 つの初期値から 1 つの予報するという決定論的予報に対して, アンサンブル予報とは様々な初期値から様々な予報をし, その集合を考えることで予報を行うため, 確率論的予報と呼ばれている.

また, EnKF を用いたデータ同化プロセスは, 予報とデータ同化を 1 つのサイクルでまわす効率の良い予報サイクルを組むことができる. 時間発展にはアンサンブル予報を用い, データ同化には EnKF を用いることで最適な解析値を求め, さらにその解析値と EnKF のアンサンブルアップデートによって提供される解析誤差を初期摂動とすることで, アンサンブル予報を行うことができる. これは, 初期摂動を解析時刻毎に求めなおす必要がなく, 非常に効率の良いデータ同化・予報プロセスとなっている.

今日では, EnKF の解析値とアンサンブルアップデートによって与えられる解析誤差からなる初期摂動の求め方によって, さまざまな EnKF が登場した. アンサンブル調節カルマンフィルタ (Ensemble adjustment Kalman Filter : EAKF, Anderson 2001), アンサンブル変換カルマンフィルタ (Ensemble Transform Kalman Filter : ELFK, Bishop et al. 2001), それをさらに効率化した局所アンサンブルカルマンフィルタ (Local Ensemble Transform Kalman Filter : LETKF, Hunt 2005) など様々なアンサンブル・カルマンフィルタが存在する. その他には, Tippett et al. (2003), Miyoshi (2004) にまとめられている.

このように様々な EnKF が存在するが, 一般的な数値モデルでは EKF が直接計算できないため, EnKF が EKF と比較した場合にどれほどの性能を持っているかということは検証されていない. また, アンサンブルメンバーの数についても様々な仮定や推測のもとで決定されているため, どれほどのメンバー数が必要なのかもわかっていない.

## 2 目的

本研究では, Tanaka and Nohara (2003) によって筑波大学で開発された順圧 S-Model を用いて, EnKF の同化性能が EKF のどれほどであるのかを検証することを目的とする. このモデルは, 従属変数  $(u, v, \phi')$  を三次元スペクトル展開した展開係数  $w_i$  で表され, 順圧成分のみを考慮に入れた順圧プリミティブスペクトルモデルである. さらに東西波数を 20, 南北波数を 10 で切断しているので, 全体のモデル変数の次元の数は一般的な大循環モデルと比較して大幅に少ない. そのため, EKF の直接計算が可能となっている. 順圧 S-Model をアンサンブル化し EnKF を構築した上でデータ同化を行い, その性能を EKF と比較検証する. また, EnFK でデータ同化する際には, アンサンブル予報が見積もる予報誤差共分散行列を膨張させる膨張係数を変化させて, データ同化にいかに関与するかを調べる. さらに, アンサンブルサイズの違いがデータ同化にどのような結果の違いをもたらすかを調べる.

また, EnKF を構築する際に順圧 S-Model をアンサンブル化を行った. それによって, 順圧 S-Model を用いたアンサンブル予報の予測可能限界が, 単独予報に対してどれほど変化するのも合わせて検証する.

## 3 解析方法

### 3.1 基礎方程式系

本節では、本研究で用いた数値モデルの詳細について述べる。本研究で用いたモデルは、Tanaka (1991, 1998) に基づく球面座標系順圧プリミティブスペクトルモデルである。

#### 3.1.1 プリミティブ方程式系

本研究で用いた数値モデルの基礎方程式系は、極座標表現 (緯度  $\theta$ , 経度  $\lambda$ , 気圧  $p$ ) で表されており、水平方向の運動方程式、熱力学第一法則の式、連続の式、状態方程式、静力学平衡近似の式からなる (小倉 1978)。

- ・ 水平方向の運動方程式 (予報方程式)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta \cdot v + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv + F_u \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta \cdot u + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv + F_v \quad (2)$$

- ・ 熱力学の第一法則 (予報方程式)

$$\frac{\partial c_p T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla c_p T + \omega \frac{\partial c_p T}{\partial p} = \omega \alpha + Q \quad (3)$$

- ・ 質量保存則 (診断方程式)

$$\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (4)$$

- ・ 状態方程式 (診断方程式)

$$p\alpha = RT \quad (5)$$

- ・ 静力学平衡近似式 (診断方程式)

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha \quad (6)$$

ただし、

$$\mathbf{V} \cdot \nabla ( \quad ) = \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial ( \quad )}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial ( \quad )}{\partial \theta} \quad (7)$$

である。

上記の方程式系で用いられている記号は以下の通りである.

$\theta$ : 緯度	$\omega$ : 鉛直 $p$ 速度 ( $\equiv \frac{dp}{dt}$ )
$\lambda$ : 経度	$F_u$ : 東西方向の摩擦
$p$ : 気圧	$F_v$ : 南北方向の摩擦
$t$ : 時間	$Q$ : 非断熱加熱率
$u$ : 東西風速	$\Omega$ : 地球自転角速度 ( $7.29 \times 10^{-5}$ [rad/s])
$v$ : 南北風速	$a$ : 地球半径 (6371.22 [km])
$\phi$ : ジオポテンシャル	$c_p$ : 定圧比熱 (1004 [JK <sup>-1</sup> kg <sup>-1</sup> ])
$T$ : 気温	$R$ : 乾燥空気の気体定数 (287.04 [JK <sup>-1</sup> kg <sup>-1</sup> ])
$\alpha$ : 比容	

Tanaka(1991)によると, 熱力学の第一法則の式に, 質量保存則, 状態方程式, 静力学平衡近似式を代入することで, 従属変数である気温  $T$  と比容  $\alpha$  を消去し, 基礎方程式系を3つの従属変数 ( $u, v, \phi$ ) のそれぞれの予報方程式で表すことができる.

気温  $T$  と比容  $\alpha$  とジオポテンシャル高度  $\phi$  について, 以下のような摂動を考える.

$$T(\theta, \lambda, p, t) = T_0(p) + T'(\theta, \lambda, p, t) \quad (8)$$

$$\alpha(\theta, \lambda, p, t) = \alpha_0(p) + \alpha'(\theta, \lambda, p, t) \quad (9)$$

$$\phi(\theta, \lambda, p, t) = \phi_0(p) + \phi'(\theta, \lambda, p, t) \quad (10)$$

ここで, ( )<sub>0</sub> は全球平均量で  $p$  のみの関数である. また, ( )' は摂動を表し, 全球平均からの偏差量である.

さらに, 診断方程式 (5), (6) も基本場 (全球平均) に関する式と, 摂動に関する式とに分けることができる.

< 基本場 >

$$p\alpha_0 = RT_0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial p} = -\alpha_0 \quad (12)$$

< 摂動 >

$$p\alpha' = RT' \quad (13)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial p} = -\alpha' \quad (14)$$

式 (8) ~ (14) を用いて熱力学第一法則の式 (3) を変形する.

$$\frac{\partial c_p T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla c_p T + \omega \frac{\partial c_p T}{\partial p} = \omega \alpha + Q \quad (15)$$

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} + c_p \mathbf{V} \cdot \nabla T + c_p \omega \left( \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\alpha}{c_p} \right) = Q \quad (16)$$

式 (9), (10) より,  $T = T_0 + T'$ ,  $\alpha = \alpha_0 + \alpha'$  なので

$$c_p \frac{\partial T'}{\partial t} + c_p \mathbf{V} \cdot \nabla T' + c_p \omega \left( \frac{dT_0}{dp} + \frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{\alpha_0}{c_p} - \frac{\alpha'}{c_p} \right) = Q \quad (17)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T' + \omega \left( \frac{dT_0}{dp} - \frac{\alpha_0}{c_p} \right) + \omega \left( \frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{\alpha'}{c_p} \right) = \frac{Q}{c_p} \quad (18)$$

式 (11), (13) より,  $\alpha_0 = \frac{RT_0}{p}$ ,  $\alpha' = \frac{RT'}{p}$  なので

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T' + \omega \left( \frac{dT_0}{dp} - \frac{RT_0}{pc_p} \right) + \omega \left( \frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{RT'}{pc_p} \right) = \frac{Q}{c_p} \quad (19)$$

ここで, 全球平均気温  $T_0$  と, そこからの偏差量  $T'$  との間には,  $T_0 \gg T'$  が成り立つので, 左辺第 4 項における, 気温の摂動の断熱変化項は無視することができる。つまり,

$$\left| \omega \frac{RT_0}{pc_p} \right| \gg \left| \omega \frac{RT'}{pc_p} \right| \quad (20)$$

である (このような近似は下部成層圏においてよく成り立つ)。よって,

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T' + \omega \frac{\partial T'}{\partial p} + \omega \left( \frac{dT_0}{dp} - \frac{RT_0}{pc_p} \right) = \frac{Q}{c_p} \quad (21)$$

また, 左辺第 3 項に関して, 全球平均気温  $T_0$  を用いることで, 以下のような大気の静的安定度パラメータ  $\gamma$  を導入することができる (Tanaka 1985)。

$$\gamma(p) \equiv \frac{RT_0(p)}{c_p} - p \frac{dT_0(p)}{dp} \quad (22)$$

よって,

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T' + \omega \frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{\omega}{p} \left( \frac{RT_0}{c_p} - p \frac{dT_0}{dp} \right) = \frac{Q}{c_p} \quad (23)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T' + \omega \frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{\omega \gamma}{p} = \frac{Q}{c_p} \quad (24)$$

となる。

ここで, (13), (14) より

$$T' = \frac{p\alpha'}{R} = -\frac{p}{R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \quad (25)$$

なので,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{p}{R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \mathbf{V} \cdot \nabla \left( -\frac{p}{R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \omega \frac{\partial}{\partial p} \left( -\frac{p}{R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \frac{\omega \gamma}{p} = \frac{Q}{c_p} \quad (26)$$

両辺に  $\frac{p}{\gamma}$  をかけると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{p^2}{\gamma R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \frac{p^2}{\gamma R} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} - \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \omega = \frac{Qp}{c_p \gamma} \quad (27)$$

さらに, 質量保存則を考慮するために両辺を  $p$  で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial p^2}{\partial p \gamma R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{p^2}{\gamma R} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] \\ - \frac{\partial \omega}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{Qp}{c_p \gamma} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

ここで, 質量保存則 (4) を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial p^2}{\partial p \gamma R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} \\ = \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{p^2}{\gamma R} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{R} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{Qp}{c_p \gamma} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

以上のように, 熱力学第一法則の式 (3) から, 気温  $T$  と比容  $\alpha$  を消去し, 摂動ジオポテンシャル  $\phi'$  に関する予報方程式 (29) を導くことができた. よって, 3つの従属変数 ( $u, v, \phi'$ ) に対して, 3つの予報方程式 (1), (2), (29) が存在するので, 解を一意的に求めることができる.

これらの予報方程式 (1), (2), (29) からなるプリミティブ方程式系は以下のような簡単な行列表示でまとめることができる (Tanaka 1991).

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{N} + \mathbf{F} \quad (30)$$

$\mathbf{U}$ : 従属変数ベクトル

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi' \end{pmatrix} \quad (31)$$

M : 線形演算子

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\gamma R} \frac{\partial}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (32)$$

L : 線形演算子

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \sin \theta & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ 2\Omega \sin \theta & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial(\cdot) \cos \theta}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

N : 非線形項からなるベクトル

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -V \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv \\ -V \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv \\ \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p^2}{\gamma R} V \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + \omega p \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{\gamma R} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right) \end{pmatrix} \quad (34)$$

F : 外部強制項からなるベクトル

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_u \\ F_v \\ \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{pQ}{C_p \gamma} \right) \end{pmatrix} \quad (35)$$

モデルの基礎方程式系は (30) のようなベクトル方程式で構成されていて, 時間変化項に含まれる従属変数ベクトル  $\mathbf{U}$  を, 他の 3 つの項 (線形項 :  $\mathbf{L}\mathbf{U}$ , 非線形項 :  $\mathbf{N}$ , 外部強制項 :  $\mathbf{F}$ ) のバランスから予測するようなモデルであるといえる.

### 3.1.2 鉛直構造関数

鉛直構造関数  $G_m(p)$  は以下のような直交条件を満たす.

$$\frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} G_m(p) G_n(p) dp = \delta_{mn} \quad (36)$$

ここで、添え字  $m, n$  は異なる固有ベクトルを意味し、 $\delta_{mn}$  はクロネッカーのデルタ、 $p_s$  は平均地表気圧を示す.

このような鉛直構造関数  $G_m(p)$  の正規直交性を利用することで、気圧  $p$  の任意の関数  $f(p)$  に関して、次の鉛直変換を導くことができる ( $f_m$  : 第  $m$  モードの鉛直変換係数).

$$\begin{aligned} f(p) &= \sum_{m=0}^{\infty} f_m G_m(p) \\ &= f_0 G_0(p) + f_1 G_1(p) + \cdots + f_m G_m(p) + \cdots \end{aligned} \quad (37)$$

両辺に  $G_m(p)$  をかけ、 $p$  について 0 から  $p_s$  まで積分すると

$$\int_0^{p_s} f(p) G_m(p) dp = \int_0^{p_s} (f_0 G_0(p) G_m(p) + f_1 G_1(p) G_m(p) + \cdots + f_m G_m(p) G_m(p) + \cdots) dp \quad (38)$$

$$\frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} f(p) G_m(p) dp = f_m \cdot \frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} G_m(p) G_m(p) dp \quad (39)$$

よって、

$$f_m = \frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} f(p) G_m(p) dp \quad (40)$$

この鉛直変換を用いて  $\mathbf{U}$  を展開すると

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi' \end{pmatrix} : \theta, \lambda, p, t \text{ の関数} \quad (41)$$

$$= \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \phi'_0 \end{pmatrix} G_0(p) + \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \phi'_1 \end{pmatrix} G_1(p) + \cdots + \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ \phi'_m \end{pmatrix} G_m(p) + \cdots \quad (42)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ \phi'_m \end{pmatrix} G_m(p) \quad (43)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{U}_m G_m(p) \quad : \mathbf{U}_m \text{は} \theta, \lambda, t \text{の関数} \quad (44)$$

添え字は鉛直モード (vertical mode number) を意味する.

- $m \geq 1$  : 傾圧モード (内部モード) ... 第  $m$  モードは鉛直方向に  $m$  個の節をもつ (波数  $m$ )
- $m = 0$  : 順圧モード (外部モード) ... 鉛直方向に節を持たず, 鉛直方向にはほとんど値が変化しない (鉛直平均場)

いま, 基本状態として静止大気を考える. 微小運動に対する摂動プリミティブ方程式 (30) で, 非線形項  $\mathbf{N} = 0$ , 摩擦・非断熱加熱項 (外部強制項)  $\mathbf{F} = 0$  を仮定すると,

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L} \mathbf{U} = 0 \quad (45)$$

ここで, (45) に (43) を代入し, 第  $m$  モードのみ取り出すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\gamma R} \frac{\partial}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} u_m(\theta, \lambda, t) G_m(p) \\ \frac{\partial}{\partial t} v_m(\theta, \lambda, t) G_m(p) \\ \frac{\partial}{\partial t} \phi'_m(\theta, \lambda, t) G_m(p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \sin \theta & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ 2\Omega \sin \theta & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial(\cdot) \cos \theta}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_m(\theta, \lambda, t) G_m(p) \\ v_m(\theta, \lambda, t) G_m(p) \\ \phi'_m(\theta, \lambda, t) G_m(p) \end{pmatrix} = 0 \quad (46)$$

< 第一成分 >

$$\frac{\partial}{\partial t} u_m G_m(p) - 2\Omega \sin \theta \cdot v_m G_m(p) + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \phi'_m G_m(p) = 0$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta \cdot v_m + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi'_m}{\partial \lambda} = 0 \quad (47)$$

< 第二成分 >

$$\frac{\partial}{\partial t} v_m G_m(p) + 2\Omega \sin \theta \cdot u_m G_m(p) + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi'_m G_m(p) = 0$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta \cdot u_m + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi'_m}{\partial \theta} = 0 \quad (48)$$

< 第三成分 >

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial p^2}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} \phi'_m G_m(p) \right) + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} u_m G_m(p) \\ & \quad + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi'_m G_m(p) \cos \theta = 0 \\ & -\frac{\partial \phi'_m}{\partial t} \left( \frac{\partial p^2}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} G_m(p) \right) + \frac{G_m(p)}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{G_m(p)}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi'_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \\ & \underbrace{-\frac{1}{G_m(p)} \frac{\partial p^2}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} G_m(p)}_{p \text{ のみの関数}} + \underbrace{\frac{1}{\frac{\partial \phi'_m}{\partial t}} \left( \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi'_m \cos \theta}{\partial \theta} \right)}_{\theta, \lambda, t \text{ の関数}} = 0 \end{aligned}$$

ここで、等価深度  $h_m$  (equivalent height) を用いて、変数分離すると、

$$-\frac{1}{G_m(p)} \frac{\partial p^2}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} G_m(p) = \frac{1}{gh_m} \quad (49)$$

$$\frac{1}{gh_m} + \frac{1}{\frac{\partial \phi'_m}{\partial t}} \left( \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi'_m \cos \theta}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \phi'_m}{\partial t} + gh_m \left( \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi'_m \cos \theta}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (50)$$

式 (49) は鉛直構造方程式 (vertical structure equation) と呼ばれ、適当な境界条件を与えれば有限要素法、あるいはガラーキンの法 (Galerkin method) により解が得られる (Tanaka, 1985).

本研究で使用した順圧スペクトルモデルは、鉛直モード  $m = 0$  の順圧モードだけを考慮したモデルであり、現実大気を鉛直方向に平均した大気特性をみるモデルである。また、式 (22) 中の静的安定度パラメータ  $\gamma$  は、1978 年 12 月から 1979 年 11 月までの、第 1 回 GARP(Global Atmospheric Research Program) 全球実験 (First GARP Global Experiment: FGGE) 期間中の平均気温データをもとに算出した。求めた順圧モードの等価深度は、 $h_0 = 9728.4\text{m}$  である。

### 3.1.3 水平構造関数

鉛直方向に変数分離した後の第  $m$  モードの時間および水平方向に関する方程式 (47) ~ (50) は, 行列表示で

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}_m}{\partial t} + \mathbf{L} \mathbf{U}_m = 0 \quad (51)$$

と書ける. ここで,

$$\mathbf{M}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{gh_m} \end{pmatrix} \quad \mathbf{U}_m = \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ \phi'_m \end{pmatrix} \quad (52)$$

である.

スケール行列を以下のように定義する (従属変数  $U$  と方程式系全体に次元をもたせる).

$$\mathbf{X}_m = \begin{pmatrix} \sqrt{gh_m} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{gh_m} & 0 \\ 0 & 0 & gh_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y}_m = \begin{pmatrix} 2\Omega\sqrt{gh_m} & 0 & 0 \\ 0 & 2\Omega\sqrt{gh_m} & 0 \\ 0 & 0 & 2\Omega \end{pmatrix} \quad (53)$$

これらを用いて式 (51) を変形すると

$$(\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) = 0 \quad (54)$$

ここで,

$$\mathbf{Y}_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\Omega\sqrt{gh_m}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\Omega\sqrt{gh_m}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\Omega} \end{pmatrix} \quad (55)$$

なので, 無次元時間  $\tau (\equiv 2\Omega t)$  を導入することで,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) = 0 \quad (56)$$

となる.

式 (56) は, 水平構造方程式, 又は, ラプラス潮汐方程式と呼ばれる. この解は水平構造関数, 又は, ハフ調和関数  $H_{nlm}$  と呼ばれ, 自由波の固有振動数  $\sigma_{nlm}$  とともに

固有値問題として得られる.

$H_{nlm}$  : 第  $m$  鉛直モードに相当する水平ノーマルモード (つまり自由振動) を表し, 添え字の  $n$  は東西波数,  $l$  は南北波数を意味する.

$\sigma_{nlm}$  : それぞれの振動モード  $n, l, m$  に対応する無次元化固有振動数.

式 (56) の解  $\mathbf{U}_m$  は,  $\mathbf{H}_{nlm}$  を用いることで, 次のように変数分離することができる (Kasahara and Puri 1981).

$$\mathbf{U}_m(\lambda, \theta, \tau) = \mathbf{X}_m \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) e^{(-i\sigma_{nlm}\tau)} \quad (57)$$

この式を水平構造方程式 (56) に代入すると,

$$-i\sigma_{nlm} \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) = 0 \quad (58)$$

ここで, ハフ調和関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  は, ハフベクトル関数  $\Theta_{nlm}$  と三角関数  $e^{in\lambda}$  とのテンソル積として以下のように表される:

$$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) = \Theta_{nlm}(\theta) e^{in\lambda} \quad (59)$$

$$= \begin{pmatrix} U_{nlm}(\theta) \\ -iV_{nlm}(\theta) \\ Z_{nlm}(\theta) \end{pmatrix} e^{in\lambda} \quad (60)$$

南北波数  $l$  に関しては, 異なる 3 つのモードがある.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{低周波の西進するロスビーモード } l_r \\ \text{高周波の西進する重力波モード } l_w \\ \text{高周波の東進する重力波モード } l_e \end{array} \right.$$

ハフ調和関数は次の直交条件を満たす:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_{nlm} \cdot \mathbf{H}_{n'l'm}^* \cos \theta d\lambda d\theta = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \quad (61)$$

ここで, アスタリスクは複素共役を意味し, また,  $nlm$  と  $n'l'm$  は異なるモードを意味する. この関係から, 次のフーリエハフ変換が導かれる.

第  $m$  鉛直モードに相当する物理空間における任意のベクトル関数を  $\mathbf{W}_m(\lambda, \theta, \tau)$  とすると,

$$\mathbf{W}_m(\lambda, \theta, \tau) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{nlm}(\tau) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \quad (62)$$

と書くことができる. 式 (62) の両辺に  $\mathbf{H}_{nlm}^*(\lambda, \theta)$  をかけ, 以下で定義される内積

$$\langle \mathbf{W}_m, \mathbf{H}_{nlm} \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\mathbf{W}_m \cdot \mathbf{H}_{nlm}^*) \cos \theta d\lambda d\theta \quad (63)$$

を作用させることで,

$$w_{nlm}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{W}_m(\lambda, \theta, \tau) \cdot \mathbf{H}_{nlm}^*(\lambda, \theta) \cos \theta d\lambda d\theta \quad (64)$$

を導くことができる.

式 (56) に, このフーリエハフ変換を施すと :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) (\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} w_{nlm}(\tau) + i\sigma_{nlm} w_{nlm}(\tau) &= 0 \end{aligned} \quad (65)$$

となる.

この式によると, 固有振動数  $\sigma_{nlm}$  は実数なので, 左辺第 2 項目の線形項は, 波動の位相のみを表現し, 波の振幅は変化させないことを示している.

### 3.1.4 3次元ノーマルモード関数展開

ここでは、鉛直構造関数  $G_m(p)$  と水平構造関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  を結合させ、静止大気を基本状態とした3次元ノーマルモード関数  $\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p)$  を構成し、3次元ノーマルモード関数展開を用いて、プリミティブ方程式 (30) の3次元スペクトル表記を導く。

$\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p)$  は  $G_m(p)$  と  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  とのテンソル積で定義される。

$$\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) = G_m(p)\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \quad (66)$$

$$= G_m(p)\mathbf{\Theta}_{nlm}(\theta) e^{in\lambda} \quad (67)$$

この3次元ノーマルモード関数は、以下で定義される内積のもとで直交条件を満たすことが示されている (Tanaka and Sun 1990).

$$\langle \mathbf{\Pi}_{nlm}, \mathbf{\Pi}_{n'l'm'} \rangle = \frac{1}{2\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{\Pi}_{nlm} \mathbf{\Pi}_{n'l'm'}^* \cos \theta d\lambda d\theta dp \quad (68)$$

$$= \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (69)$$

この3次元ノーマルモード関数の直交性を利用することで、式 (30) における、ベクトル  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  に関して、次のように波数展開することができる (Tanaka and Kung 1989).

$$\mathbf{U}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M w_{nlm}(\tau) \mathbf{X}_m \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (70)$$

$$\mathbf{F}(\lambda, \theta, p, \tau) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M f_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (71)$$

ここで、 $w_{nlm}(\tau)$ ,  $f_{nlm}(\tau)$  はそれぞれ、従属変数ベクトル  $\mathbf{U}$  と、外部強制項ベクトル  $\mathbf{F}$  に関する展開係数 (3次元ノーマルモード展開係数) であり、時間  $\tau$  だけの関数である。

$$\left\{ \begin{array}{ll} n : \text{東西波数} & \longrightarrow \text{波数 } N \text{ で波数切断} \\ l : \text{南北波数} & \longrightarrow \text{波数 } L \text{ で波数切断} \\ m : \text{鉛直波数} & \longrightarrow \text{波数 } M \text{ で波数切断} \end{array} \right.$$

式 (30) と  $\mathbf{\Pi}_{nlm}(\lambda, \theta, p)$  の内積をとると

$$\left\langle \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L}\mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F}, \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm} \right\rangle = 0 \quad (72)$$

この式に (70), (71) の関係式を用いると,

$$\begin{aligned}
& \left\langle \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L}\mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F}, \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm} \right\rangle \\
&= \left\langle \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}, \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm} \right\rangle + \left\langle \mathbf{L}\mathbf{U}, \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm} \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \mathbf{N}, \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm} \right\rangle - \left\langle \mathbf{F}, \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{\Pi}_{nlm} \right\rangle = 0 \quad (73)
\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{d}{d\tau} w_{nlm} + i\sigma_{nlm} w_{nlm} = -i \sum_{n'l'm'}^K \sum_{n''l''m''}^K r_{nlmn'l'm'n''l''m''} w_{n'l'm'} w_{n''l''m''} + f_{nlm}$$

ここで,

$$\begin{cases} nlm & \longrightarrow i \\ n'l'm' & \longrightarrow j \\ n''l''m'' & \longrightarrow k \end{cases}$$

とすると,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} w_i + i\sigma_i w_i &= -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w_j w_k + f_i \quad (74) \\
&(i = 1, 2, 3, \dots, K)
\end{aligned}$$

となる.

以上のように外部強制項を伴った連立常微分方程式として, スペクトル表示によるプリミティブ方程式を記述することができる.

$$\left\{ \begin{array}{l} K : \text{全波数 } (= (2N+1)(L+1)(M+1)) \\ \sigma_i : \text{静止大気を基本状態とした水平構造方程式 (ラプラス潮汐方程式) の固有値問題より得られる無次元の固有振動数.} \\ r_{ijk} : \text{非線形の波 - 波相互作用, あるいは, 帯状 - 波相互作用に関する相互作用係数であり, 全ての波数間の相互作用を示した係数であり, 実数である.} \end{array} \right.$$

以上により, 順圧成分と傾圧成分からなる鉛直構造関数  $G_m(p)$ , ロスビー波と重力波モードからなる水平構造関数  $H_{nlm}(\lambda, \theta)$  の両方を用いることで, プリミティブ方程式系をスペクトル表示 (74) で表すことができる.

### 3.1.5 システム行列 A, B

$|\epsilon|$  を最小とするようなシステム行列 A, B を同時に求める方法を述べる (本小節ではテンソル表記をベクトル表記とした).

外力  $f$  の式から気候値を除いた式は,

$$f = Aw + Bw^* + \epsilon \quad (75)$$

で与えられる. 外力  $f$  を求める際の回帰係数からなる複素行列 A および B は,  $|\epsilon|$  を最小にするように与えられる.

まず,  $A = A_R + iA_I$ ,  $B = B_R + iB_I$ ,  $w = w_R + iw_I$ ,  $w^* = w_R - iw_I$  とすると,

$$\begin{aligned} f &= Aw + Bw^* + \epsilon \\ &= (A_R + iA_I)(w_R + iw_I) + (B_R + iB_I)(w_R - iw_I) + \epsilon_R + \epsilon_I \\ &= A_R w_R - A_I w_I + B_R w_R + B_I w_I \\ &\quad + iA_I w_R + iA_R w_I + iB_I w_R - iB_R w_I + \epsilon_R + \epsilon_I \end{aligned} \quad (76)$$

上式を行列表記すると,

$$\begin{pmatrix} f_R \\ f_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_R + B_R & -A_I + B_I \\ A_I + B_I & A_R - B_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_I \end{pmatrix} \quad (77)$$

となる. ここで, 東西波数 0 はすべて実数のため, 東西波数 0 の虚部は存在しないことに注意が必要である. さらに,  $A_R + B_R = a$ ,  $A_I + B_I = b$ ,  $-A_I + B_I = c$ ,  $A_R - B_R = d$  とおくと,

$$\begin{pmatrix} f_R \\ f_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_I \end{pmatrix} \quad (78)$$

両辺に右から  $(w_R, w_I)^\top$  をかける.

$$\overline{\begin{pmatrix} f_R \\ f_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^\top} = \overline{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^\top} + \overline{\begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^\top} \quad (79)$$

ここで時間平均をとることで, 右辺第二項は 0 となる. よって,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} f_R \\ f_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^\top} \left[ \overline{\begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_R \\ w_I \end{pmatrix}^\top} \right]^{-1} \quad (80)$$

右辺を計算することで,  $a, b, c, d$  が求まり, これらから  $A_R, A_I, B_R, B_I$  を同時に求めることができる. 以上より, システム行列 A, B を求めることができる.

## 3.2 カルマンフィルタ

KF は 1960 年に Kalman が提唱したアルゴリズムであり、時間発展が線形モデル、誤差の確率分布関数がガウス分布という 2 つの仮定の下で、推定誤差を最小とする最適な解を与える (Kalman 1960). 本節ではカルマンフィルタを構成する 5 つの方程式の詳細を述べる (本節では三好 (2005, 2006) に基き, EnKF の概要を解説する). また, より数学的に厳密な解説は Jazwinski (1970), KF の詳細な解説は Gelb et al. (1974) をご覧頂きたい.

KF のアルゴリズムは, 大きく 2 つの部分からなる. 1 つは予報方程式に基づいて状態および予報誤差の時間発展を計算する部分, もう 1 つは観測データや数値モデルの結果よりも高精度となる解析値を計算する部分, つまりデータ同化の部分である.

まず, 本節以降に出てくる添え字は, 上付きが解析 ( $a$ ), 予報 ( $f$ ), 真値 ( $t$ ) を表し, 下付は時刻を表す. また線形モデル  $M$  は, 非線形モデルである  $M$  (順圧 S-Model) を  $\mathbf{x}_0$  のまわりで Taylor 展開し,

$$M(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}) = M(\mathbf{x}_0) + \mathbf{M}\delta\mathbf{x} + O(\delta\mathbf{x}^2) \quad (81)$$

上式の 2 次以上の項を無視することで線形化したもの, つまり非線形モデル  $M$  のヤコビアン

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\delta M}{\delta \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \quad (82)$$

で表される. このような近似をして KF を非線形モデルにも適用できるようにしたものを拡張カルマンフィルタ (Extended Kalman Filter : EKF) と呼ぶ. また状態変数とは数値モデルのモデル変数と同義であるとする (以下同じ).

時間発展のプロセスは線形モデル  $M$  を用いて一時刻前の状態  $\mathbf{x}_{i-1}^a$  を現在の状態  $\mathbf{x}_i$  に写す. 本研究では順圧 S-Model で初期値から次の時刻の予報を計算することに相当する. 状態の時間発展は,

$$\mathbf{x}_i^f = \mathbf{M}\mathbf{x}_{i-1}^a \quad (83)$$

で与えられる. 予報誤差の時間発展では, 解析値や予報値の誤差, つまり解析誤差, 予報誤差を,

$$\delta\mathbf{x}^{a,f} = \mathbf{x}^{a,f} - \mathbf{x}^t \quad (84)$$

と定義する. これらの誤差の共分散行列  $\mathbf{P}^{a,f}$  は,

$$\mathbf{P}^{a,f} = \left\langle \delta \mathbf{x}^{a,f} \left( \delta \mathbf{x}^{a,f} \right)^\top \right\rangle \quad (85)$$

のように与えられる. ここで記号  $\langle \bullet \rangle$  は統計期待値を表す. 一般的に線形モデル  $M$  は完全ではないため, モデル誤差  $\mathbf{w}$  が含まれる.

$$\mathbf{x}_i^t = M \mathbf{x}_{i-1}^t - \mathbf{w} \quad (86)$$

ただしここでは簡単のため, モデル誤差  $\mathbf{w}$  はバイアスがないとする ( $\langle \mathbf{w} \rangle = 0$ ). これらを用いると, 予報誤差の共分散行列  $\mathbf{P}$  は, 以下のように変形される.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i^f &= \left\langle \delta \mathbf{x}^f \left( \delta \mathbf{x}^f \right)^\top \right\rangle \\ &= \left\langle \left( \mathbf{x}_i^f - \mathbf{x}_i^t \right) \left( \mathbf{x}_i^f - \mathbf{x}_i^t \right)^\top \right\rangle \\ &= \left\langle \left( M \left( \mathbf{x}_{i-1}^a - \mathbf{x}_{i-1}^t \right) + \mathbf{w} \right) \left( M \left( \mathbf{x}_{i-1}^a - \mathbf{x}_{i-1}^t \right) + \mathbf{w} \right)^\top \right\rangle \\ &= \left\langle \left( M \delta \mathbf{x}_{i-1}^a + \mathbf{w} \right) \left( M \delta \mathbf{x}_{i-1}^a + \mathbf{w} \right)^\top \right\rangle \\ &= \left\langle \left( M \delta \mathbf{x}_{i-1}^a \right) \left( M \delta \mathbf{x}_{i-1}^a \right)^\top + \left( M \delta \mathbf{x}_{i-1}^a \right) \mathbf{w}^\top + \mathbf{w} \left( M \delta \mathbf{x}_{i-1}^a \right)^\top + \mathbf{w} \mathbf{w}^\top \right\rangle \\ &= \left\langle M \delta \mathbf{x}_{i-1}^a \left( \delta \mathbf{x}_{i-1}^a \right)^\top M^\top \right\rangle + \left\langle \mathbf{w} \mathbf{w}^\top \right\rangle \\ &= M \mathbf{P}_{i-1}^a M^\top + \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (87)$$

ここで,  $M^\top$  は線形モデル  $M$  のアジョイントモデルと呼ばれるのもである. また解析誤差  $\delta \mathbf{x}^a$  とモデル誤差  $\mathbf{w}$  の間には相関がないと仮定し ( $\langle \delta \mathbf{x}^a \mathbf{w}^\top \rangle = 0$ ),  $\mathbf{Q}$  をモデル誤差の共分散行列とした ( $\langle \mathbf{w} \mathbf{w}^\top \rangle = \mathbf{Q}$ ). 式 (87) は, 誤差共分散行列の時間発展の式である.

次に, 解析のプロセスである. このプロセスは EKF の核となる部分である. 最適推定値である解析  $\mathbf{x}^a$  は, 数値モデルから得られた予報  $\mathbf{x}^f$  と観測  $\mathbf{y}^0$  との加重平均で与えられ, 予報を観測で修正するプロセスである. この  $\mathbf{K}$  はカルマンゲイン行列と呼ばれており, 観測の信頼度に応じた重みである. 予報  $\mathbf{x}^f$  と観測  $\mathbf{y}^0$  は同じ空間に属していないので, 観測演算子  $H$  で予報  $\mathbf{x}^f$  と観測  $\mathbf{y}^0$  を結びつける. 観測演算子  $H$  は非線形の観測演算子  $H$  を,  $M$  と同様に線形化した接線形演算子である. また, 観測  $\mathbf{y}^0$  の重みを  $\mathbf{K}$  としたとき, 解析  $\mathbf{x}^a$  は,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^a &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}H) \mathbf{x}^f + \mathbf{K} \mathbf{y}^0 \\ &= \mathbf{x}^f + \mathbf{K} \left( \mathbf{y}^0 - H \mathbf{x}^f \right) \end{aligned} \quad (88)$$

と表される. ここで  $\mathbf{K}$  は推定される解析誤差を最小にしようとするものであり, 解析誤差の分散を最小にすることで得られる. 以降はこの  $\mathbf{K}$  を求めていく.

観測誤差を  $\delta \mathbf{y}^0 = \mathbf{y}^0 - \mathbf{H}(\mathbf{x}^t)$  と定義すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^0 - \mathbf{H}\mathbf{x}^f &= \mathbf{y}^0 - \mathbf{H}\mathbf{x}^t + \mathbf{H}\mathbf{x}^t - \mathbf{H}\mathbf{x}^f \\ &= \delta \mathbf{y}^0 - \mathbf{H}\delta \mathbf{x}^f \end{aligned} \quad (89)$$

これを用いると, 式 (88) は,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}^a &= \delta \mathbf{x}^f + \mathbf{K} (\delta \mathbf{y}^0 - \mathbf{H}\delta \mathbf{x}^f) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \delta \mathbf{x}_i^f + \mathbf{K}\delta \mathbf{y}^0 \end{aligned} \quad (90)$$

と変形できる. これから解析誤差共分散行列  $\mathbf{P}^a$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^a &= \langle \delta \mathbf{x}^a (\delta \mathbf{x}^a)^\top \rangle \\ &= \langle ((\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \delta \mathbf{x}_i^f + \mathbf{K}\delta \mathbf{y}^0) ((\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \delta \mathbf{x}_i^f + \mathbf{K}\delta \mathbf{y}^0)^\top \rangle \\ &= \langle (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \langle \delta \mathbf{x}^f (\delta \mathbf{x}^f)^\top \rangle (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})^\top + \mathbf{K} \langle \delta \mathbf{y}^0 (\delta \mathbf{y}^0)^\top \rangle \mathbf{K}^\top \rangle \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \mathbf{P}^f (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})^\top + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^\top \end{aligned} \quad (91)$$

として求まる. ここでは予報誤差と観測誤差には相関がない, つまり  $\langle \delta \mathbf{x}^f (\mathbf{K}\delta \mathbf{y}^0) \rangle = 0$  とした.  $\mathbf{R}$  は観測誤差共分散行列と呼ばれるもので  $\langle \delta \mathbf{y}^0 (\delta \mathbf{y}^0)^\top \rangle$  で定義される. 解析誤差分散の総和  $trace(\mathbf{P}^a)$  が最も小さくなるような  $\mathbf{K}$  を求めるには,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} (trace(\mathbf{P}^a)) = 0 \quad (92)$$

を解く. このような微分方程式では, 数学公式

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} (trace(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^\top)) = \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^\top) \quad (93)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} (trace(\mathbf{A}\mathbf{B})) = \mathbf{B}^\top \quad (94)$$

を使う (Gelb et al. (1974) の式 (2.1-72), (2.1-73) を参照). 式 (91) に式 (92) を代入し, 式 (93), (94) を使い, 誤差共分散行列  $\mathbf{P}$  と  $\mathbf{R}$  が対称行列であることを利用すると

$$-2(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top + 2\mathbf{K}\mathbf{R} = 0 \quad (95)$$

となる. これを  $\mathbf{K}$  について解くと, カルマンゲイン行列  $\mathbf{K}$  を求める式,

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top (\mathbf{H}\mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top + \mathbf{R})^{-1} \quad (96)$$

が得られる. この式 (91) に代入すると,

$$\mathbf{P}^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \mathbf{P}^f \quad (97)$$

が得られる.

以上より EKF に必要な 5 つの式がそろったので簡単にまとめると,

・ 一時刻前の状態  $\mathbf{x}_{i-1}$  を線形モデル  $M$  を用いて現在の状態  $\mathbf{x}_i$  を求めるという状態の時間発展のプロセス

$$\mathbf{x}_i^f = M\mathbf{x}_{i-1}^a \quad (98)$$

・ 誤差の時間発展のプロセス

$$\mathbf{P}_i^f = M\mathbf{P}_{i-1}^a M^T + \mathbf{Q} \quad (99)$$

・ 観測の重みであるカルマンゲイン行列を求める式

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_i^f \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{P}_i^f \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (100)$$

・ 同化方程式, つまり予報  $\mathbf{x}_i^f$  を観測  $\mathbf{y}^0$  で修正し, より精度の高い解析  $\mathbf{x}_i^a$  を計算するプロセス

$$\mathbf{x}_i^a = \mathbf{x}_i^f + \mathbf{K}_i (\mathbf{y}^0 - \mathbf{H}\mathbf{x}_i^f) \quad (101)$$

・ 解析誤差を小さくするプロセス

$$\mathbf{P}_i^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}) \mathbf{P}_i^f \quad (102)$$

である.

### 3.3 アンサンブル・カルマンフィルタ

本節では前節に引き続き三好 (2005, 2006) に基づき, EnKF の概要を解説する.

#### 3.3.1 アンサンブル・カルマンフィルタの導入

前節の EKF ではカルマンゲイン行列を求める式 (101) で, 誤差共分散行列の逆行列の計算を求めている. 現在の数値予報モデルはモデル変数の次元の数が優に  $10^6$  を超えており, 誤差共分散行列はモデル変数の次元の数を一辺とする行列であるため,  $10^6 \times 10^6$  のサイズであり, このような行列の逆行列を計算することは不可能とされている. この問題は今後解決されるような問題ではない. 数値モデルの解像度を 2 倍にするためには計算機の性能を 2 倍にすればよいが, 誤差共分散行列の計算をするには単純計算で 4 倍の性能が必要である. しかし, 計算機の性能が上がるとまずは数値モデルの解像度が上げられるので, 事実上, 誤差共分散行列の逆行列を計算することは不可能となっている.

そこで, この問題を解決する方法としてアンサンブル予報を用いて誤差共分散行列  $\mathbf{P}$  を近似することを考える. 誤差共分散行列  $\mathbf{P}$  は

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \langle \delta \mathbf{x} (\delta \mathbf{x})^\top \rangle \\ &\approx \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^N \delta \mathbf{x}^{(l)} (\delta \mathbf{x}^{(l)})^\top\end{aligned}\quad (103)$$

と書ける. ここで,  $N$  はサンプル数,  $l$  はサンプル番号である. これより  $\mathbf{P}$  を完全に表現するには無限サンプル数が必要である.  $\mathbf{P}$  は実対称行列なので, 実行列の平方根を持つから,

$$\mathbf{P}^f = \mathbf{E}^f (\mathbf{E}^f)^\top \quad (104)$$

と表される.  $\mathbf{E}$  は  $N \times N$  行列で,  $\mathbf{U}\mathbf{U}^\top = \mathbf{I}$  を満たすだけの自由度があるため, 一意に定まるものではない.  $\mathbf{E}\mathbf{U}$  もこの関係を満たすため  $\mathbf{E}$  は平方根といえる. 式 (103), (104) から  $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left[ \delta \mathbf{x}^{(1)} \dots \delta \mathbf{x}^{(N)} \right] \quad (105)$$

のように  $\mathbf{E}$  の各列をアンサンブル摂動と見なし, その共分散が  $\mathbf{P}$  をなすように見ることができる. しかし, このままではモデル変数の次元  $N$  と同じ数だけのアン

サンプルメンバーが必要となり、計算は現実的ではない。しかし  $\mathbf{P}$  を固有値分解すると

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{\top}\end{aligned}\quad (106)$$

固有値  $\mathbf{\Lambda}$  とそれに伴う固有ベクトルからなる直交行列  $\mathbf{V}$  に分解できる。ただし、この固有値をみると、固有値の多くが 0 に十分近く、有効な固有値の数はモデル変数の次元の数  $N$  よりずっと小さいため、 $\mathbf{P}$  が縮退していると推測されているが、実際の  $\mathbf{P}$  が実際にどれほど縮退しているのかわかっていない。ここで有効な固有値の数を  $m$  とすると  $\mathbf{\Lambda}$  は  $m \times m$  の対角行列で、 $\mathbf{V}$  は  $N \times m$  行列となる。この事実を利用すると、 $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{m-1}} \left[ \delta \mathbf{x}^{(1)} \cdots \delta \mathbf{x}^{(m)} \right] \quad (107)$$

のように、 $m$  メンバーのアンサンブル摂動からなる行列と書くことができる。効率よくアンサンブルメンバーを選ぶことで、数少ないアンサンブルメンバーで誤差共分散行列  $\mathbf{P}$  をよく表現し、近似してやることができる。

この事実を利用すると、誤差の時間発展式 (99) は、モデル誤差を無視すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_i^f &= \mathbf{E}_i^f \left( \mathbf{E}_i^f \right)^{\top} \\ &= \mathbf{M} \mathbf{P}_{i-1}^a \mathbf{M}^{\top} \\ &= \mathbf{M} \mathbf{E}_{i-1}^a \mathbf{E}_{i-1}^{a\top} \mathbf{M}^{\top} \\ &= \mathbf{M} \mathbf{E}_{i-1}^a \left( \mathbf{M} \mathbf{E}_{i-1}^a \right)^{\top}\end{aligned}\quad (108)$$

となり、その平方根  $\mathbf{E}_i^f$  は、

$$\mathbf{E}_i^f = \mathbf{M} \mathbf{E}_{i-1}^a \quad (109)$$

と表される。右辺の  $\mathbf{E}_{i-1}^a$  に (107) を代入して変形すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i^f &= \mathbf{M} \mathbf{E}_{i-1}^a \\ &= \frac{1}{\sqrt{m-1}} \left[ \mathbf{M} \delta \mathbf{x}_{i-1}^{a(1)} \cdots \mathbf{M} \delta \mathbf{x}_{i-1}^{a(m)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{m-1}} \left[ M \left( \bar{\mathbf{x}}_{i-1}^a + \delta \mathbf{x}_{i-1}^{a(1)} \right) - M \left( \mathbf{x}_{i-1}^a \right) \cdots M \left( \bar{\mathbf{x}}_{i-1}^a + \delta \mathbf{x}_{i-1}^{a(m)} \right) - M \left( \mathbf{x}_{i-1}^a \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{m-1}} \left[ M \left( \mathbf{x}_{i-1}^{a(1)} \right) - \bar{\mathbf{x}}_i^f \cdots M \left( \mathbf{x}_{i-1}^{a(m)} \right) - \bar{\mathbf{x}}_i^f \right]\end{aligned}\quad (110)$$

となる. ここで,  $l$  番目のアンサンブルメンバーを  $\mathbf{x}^{(l)} = \bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}^{(l)}$ , アンサンブル平均を  $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \mathbf{x}^{(l)}$  とした. このように式 (110) は  $m$  メンバーのアンサンブル予報を表している. このように誤差共分散行列  $\mathbf{P}$  は  $m$  個という少ないアンサンブルメンバーで表現できるようになる.

以上のことを用いると, 逆行列計算を必要とするカルマンゲイン行列の式 (100) も変形することができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top (\mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^\top + \mathbf{R})^{-1} \\ &= \mathbf{E}^f (\mathbf{H} \mathbf{E}^f)^\top \left[ \mathbf{H} \mathbf{E}^f (\mathbf{H} \mathbf{E}^f)^\top + \mathbf{R} \right]^{-1} \\ &= \mathbf{E}^f \left[ \mathbf{I} + (\mathbf{H} \mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}^f \right]^{-1} (\mathbf{H} \mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1} \end{aligned} \quad (111)$$

このように変形すれば, アンサンブルメンバーの数  $m$  を一辺とする正方行列の逆行列の計算で済む. ここで, 観測誤差共分散行列  $\mathbf{R}$  があるが, 各々の観測は独立しているため観測誤差には相関がなく, 誤差共分散行列は対角行列であるため, その逆行列  $\mathbf{R}^{-1}$  は簡単に求まる.

以上が EnKF の数学的な説明である (詳細は三好 2005, 2006 を参照). 上の説明ではモデルの誤差  $\mathbf{w}$  を無視してきた. つまりモデルが完全であるとしてきた. さらに, モデルの非線形性を考慮に入れていない. そのため, 予報誤差共分散を必要以上に小さく見積もる可能性が出てくる. 予報誤差共分散を小さく見積もると, EnKF は観測の情報を必要以上に取り込まなくなる. 4次元データ同化は観測の情報を取り入れることによって数値モデルが現実から離れていかないようにする働きがあるが, 上記の理由で観測の情報を取り入れなくなると, 同化サイクルを繰り返すことで徐々に現実から離れていく. これを防ぐ1つの方法として共分散膨張 (covariance inflation) と呼ばれる解決法がある. 共分散膨張とは予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}^f$  に1よりわずかに大きい数をかけて,  $\mathbf{P}^f$  を大きくすることである. 具体的には,

$$\mathbf{P}'^f = (1 + \delta) \mathbf{P}^f \quad (112)$$

とすることで,

$$\mathbf{Q} = \delta \mathbf{P}^f \quad (113)$$

に相当するような操作を加える. このように誤差共分散を大きくすることで観測の情報をより多く取り込み, 数値モデルが現実から離れていかないようにすることができる.

実際には計算機資源に限界があるためアンサンブルメンバー数にも限りがある。そのため、数少ないアンサンブルメンバーで誤差共分散行列を精度よく再現することが重要である。アンサンブルメンバーが少ないとサンプリングエラーが大きくなるため、離れた点同士の相関では共分散が大きくなり、また、同じ点同士の相関では分散が必要以上に小さく見積もられてしまい、誤差共分散行列を精度よく再現することができないことが知られている (Houtekamer and Mitchell 1998, Hamill and Snyder 2000)。

### 3.3.2 局所アンサンブル変換カルマンフィルタ

EnKF は、限られたアンサンブルを用いて予報誤差共分散行列を表現する。アンサンブルメンバー数が少なければ、サンプリングエラーは大きくなってしまう。そのような場合、離れた点同士の誤差相関を大きく見積もってしまう可能性がある。このため、離れた点の相関を強制的に小さくする局所化を行う必要がある。この局所化を取り入れた EnKF の 1 つに、局所アンサンブル・カルマンフィルタ (LEKF : Local Ensemble Kalman Filter)、局所アンサンブル変換カルマンフィルタ (LETKF : Local Ensemble Transform Kalman Filter) がある。Patil et al. (2001) は米国環境予測センター (National Center for Environmental Prediction : NCEP) の Breeding 法の摂動ベクトルが張る空間が、局所的低次元性であることを示した。この局所低次元性を利用し、Ott et al. (2004) は LEKF を考案した。局所低次元性とは、全体としては複雑に見える大気力学系でも、ある小さな領域に注目すると、誤差の広がる方向が非常に低次元になっていることである (三好 2006)。LEKF は各格子点のまわりの小領域内でのアンサンブルを使って、小領域内の観測点のみを同化する。そして、小領域の中心の格子点を解析値にとり、各小領域内の解析値から全体の解析値を得る。このようにすることで、小領域の範囲を超えた誤差相関は強制的に 0 とする。つまり離れた点同士の相関を 0 であると仮定することができ、アンサンブルメンバーが少ないことによるサンプリングエラーを小さくすることができる。また、小領域内の観測データのみを同化するだけでよく、各小領域で同化に必要とされる計算は互いに独立しているため、計算効率が高い。

さらに LEKF では、小領域での予報誤差共分散行列を主成分分析し、主成分を用いて解析を行う。詳細は三好 (2006) および Ott et al. (2004) を参照していただきたい。

本研究で用いた EnKF は、LEKF をさらに効率化した LETKF で、Hunt (2005)

により考案された. LETKF は LEKF と根本的には同じ原理であるが, 主成分解析を行わないためさらに効率が良くなっている. Harlim and Hunt (2005) によると, LETKF と LEKF をいくつかのモデルに適応して比較実験を行ったところ, データ同化性能にほとんど違いがないことが確かめられている.

LETKF では  $\mathbf{P}^f$  の主成分解析を行わず, アンサンブル摂動  $\mathbf{E}[N \times m]$  を直接用いて,  $m$  個のアンサンブルメンバーが張る  $m$  次元空間内で解析を行う.

まず, 状態の時間発展は初期アンサンブルメンバー  $\mathbf{x}_{i-1}^{a(1)}, \dots, \mathbf{x}_{i-1}^{a(m)}$  と非線形モデル  $M$  を用いて,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i^f &= M\left(\mathbf{x}_{i-1}^{a(1)}, \dots, \mathbf{x}_{i-1}^{a(m)}\right) \\ &= M\mathbf{x}_{i-1}^a\end{aligned}\quad (114)$$

で与えられる. ここで,  $\mathbf{x}_i^f, \mathbf{x}_{i-1}^a$  は  $N \times m$  の行列である.

物理空間での予報誤差共分散行列  $\mathbf{P}^f[N \times N]$  は,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^f &= \mathbf{E}^f\left(\mathbf{E}^f\right)^\top \\ &= \mathbf{E}^f\mathbf{I}\left(\mathbf{E}^f\right)^\top\end{aligned}\quad (115)$$

で与えられる. また,  $m$  次元空間内での予報誤差共分散行列  $\tilde{\mathbf{P}}^f[m \times m]$  を,

$$\tilde{\mathbf{P}}^f = \mathbf{I}\quad (116)$$

とすれば, 式 (115) は,  $\tilde{\mathbf{P}}^f$  を用いて,

$$\mathbf{P}^f = \mathbf{E}^f\tilde{\mathbf{P}}^f\left(\mathbf{E}^f\right)^\top\quad (117)$$

と書き表せる. 同様にして, 物理空間での解析誤差共分散行列  $\mathbf{P}^a[N \times N]$  は,

$$\mathbf{P}^a = \mathbf{E}^f\tilde{\mathbf{P}}^a\left(\mathbf{E}^f\right)^\top\quad (118)$$

と表せる. ここで, 式 (102) に式 (111) を代入すると, ,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^a &= (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{P}^f \\ &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{E}^f\left[\mathbf{I} + (\mathbf{HE}^f)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{HE}^f\right]^{-1}(\mathbf{HE}^f)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\right)\mathbf{E}^f\left(\mathbf{E}^f\right)^\top \\ &= \mathbf{E}^f\left(\mathbf{E}^f\right)^\top - \mathbf{E}^f\left[\mathbf{I} + (\mathbf{HE}^f)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{HE}^f\right]^{-1}(\mathbf{HE}^f)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{HE}^f\left(\mathbf{E}^f\right)^\top \\ &= \mathbf{E}^f\left(\mathbf{E}^f\right)^\top - \mathbf{E}^f\left[\mathbf{I} + (\mathbf{HE}^f)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{HE}^f\right]^{-1}\left(\left[\mathbf{I} + (\mathbf{HE}^f)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{HE}^f\right] - \mathbf{I}\right)\left(\mathbf{E}^f\right)^\top \\ &= \mathbf{E}^f\left[\mathbf{I} + (\mathbf{HE}^f)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{HE}^f\right]^{-1}\left(\mathbf{E}^f\right)^\top\end{aligned}\quad (119)$$

$m$ 次元空間内での解析誤差共分散行列  $\tilde{\mathbf{P}}^a[m \times m]$  は,

$$\tilde{\mathbf{P}}^a = \left[ \mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{E}^f \right]^{-1} \quad (120)$$

と求められる.

解析値  $\bar{\mathbf{x}}_i^a [N \times m]$  を求めるプロセスは,

$$\bar{\mathbf{x}}_i^a = \bar{\mathbf{x}}_i^f + \mathbf{K}_i (\mathbf{y}^0 - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}_i^f) \quad (121)$$

である. ここでは, 線形観測演算子  $\mathbf{H}$  のかわりにもともとの非線形の観測演算子  $H$  を使うことができる. さらに, この式に (111) を代入して,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_i^a &= \bar{\mathbf{x}}_i^f + \mathbf{E}^f \left[ \mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{E}^f \right]^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^0 - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}_i^f) \\ &= \bar{\mathbf{x}}_i^f + \mathbf{E}^f \tilde{\mathbf{P}}^a (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^0 - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}_i^f) \end{aligned} \quad (122)$$

このように変形することで, カルマンゲイン行列を直接求めずとも解析値を求めるができる.

次の初期摂動を作り出すアンサンブルアップデートは,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i^a &= \mathbf{E}_i^a (\mathbf{E}^a)^\top \\ &= \mathbf{E}_i^f \tilde{\mathbf{P}}_i^a (\mathbf{E}^f)^\top \\ \mathbf{E}^a &= \mathbf{E}_i^f \tilde{\mathbf{P}}_i^{a\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (123)$$

となり, 新しい初期摂動は  $\tilde{\mathbf{P}}_i^a$  の平方根で与えられる.  $\tilde{\mathbf{P}}_i^a$  の平方根は一意ではないが,  $\tilde{\mathbf{P}}_i^{a\frac{1}{2}}$  が対称になるように選ぶ. ここでは  $\tilde{\mathbf{P}}_i^{a-1}$  を固有値分解することによって  $\tilde{\mathbf{P}}_i^{a\frac{1}{2}}$  が対称行列になるようにする.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_i^{a-1} &= \mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{E}^f)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{E}^f \\ &= \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^\top \end{aligned} \quad (124)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_i^a = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{V}^\top \quad (125)$$

$$(\tilde{\mathbf{P}}_i^a)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}^\top \quad (126)$$

このように固有値分解を行うことで, アンサンブルアップデートのプロセスは,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^a &= \mathbf{E}_i^f \tilde{\mathbf{P}}_i^{a\frac{1}{2}} \\ &= \mathbf{E}_i^f \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}^\top \end{aligned} \quad (127)$$

で与えられる.

以上より, 解析値および初期摂動が求まったので, これをもとに次のアンサンブルメンバー  $\mathbf{x}_i^a [N \times m]$  は,

$$\mathbf{x}_i^a = \bar{\mathbf{x}}_i^a + \sqrt{m-1} \mathbf{E}^a \quad (128)$$

で与えられ, これを初期値として新たな予報を行う.

アンサンブルアップデートで与えられた初期摂動は  $m-1$  次元の空間を張ることができる. 一方で, breeding 法や SV 法で与えられる初期摂動は  $\frac{1}{2}(m-1)$  の次元しか張ることができず, アンサンブルアップデートで与えられた初期摂動の方が優位であると言える.

### 3.3.3 物理的解釈

EnKF は EKF をアンサンブル予報で補うというものである. アンサンブル予報は 1 つの初期値から 1 つの予報をするという決定論的な予報とは違い, 複数の数値予報の集合を統計的に処理することで, 単独予報では得られない予報誤差の時間発展を予測する. 一方, EKF は誤差が時間と共にどのように発展していくかというプロセスと, 数値モデルによる予報と観測とを同化することによって, より精度の高い解析を求めるというプロセスである. EnKF はアンサンブル予報から誤差の時間発展を見積もり, これが EKF を補っているという関係にある.

図 1 は, アンサンブル予報が与える誤差の時間発展を位相空間上で表している. 初期時刻  $t = t_i$  では誤差は最も確からしい状態である星印のまわりに分布している. アンサンブルメンバー (細い実線) はこの誤差の分布の範囲内で与えられる. ここでは, 真値は未知であるが星印のまわりのどこかにあり, アンサンブルメンバーがそれを捉えているものと想定している. 時刻  $t = t_i$  から終端時刻  $t = t_i + 1$  までの予報では, 状態が時間発展するのに伴い, 誤差も時間発展している. アンサンブル予報では初期時刻  $t = t_i$  では初期誤差は円形であるのに対し, 終端時刻  $t = t_i + 1$  では誤差の分布は扁平な形状をしている. 終端時刻  $t = t_i + 1$  での誤差の分布は日々変化するので, アンサンブル予報はその日特有の予報誤差の分布を与えることができる. 一方, 単独予報では予報誤差の分布は統計的に与えるしかないため円形である.

図 2 は誤差の時間発展を考慮する EnKF とそれを考慮しない 3DVAR(3 次元変分法) のような同化法を比較した模式図である. 左の黒い星印は観測値, 右の黒い

星印は予報値を表してゐる。観測の誤差分布は円形に広がっており、上記で述べたように EnKF で与えられた誤差分布は扁平な形、3DVAR などの誤差の時間発展を考慮しない同化法では、予報誤差分布は統計的に与えられるため円形である。データ同化の解析値は白い星印で表されており、EnKF、3DVAR で与えられる解は観測からは同じくらい離れている。このように、EnKF の誤差分布は日によって変化するため、その日に特有の誤差分布を与えることができる点で、3DVAR より優位であるといえる。

### 3.4 順圧 S-Model のアンサンブル化

本節では、順圧 S-Model のアンサンブル化、つまりアンサンブルメンバー作成法について述べていく。

Lorenz(1963) では、非線形モデルにごくわずかに異なった 2 つの初期値を与えると、時間とともにそれらの差は急激に大きくなり、この振る舞いをカオスと呼んだ。このような数値モデルにおける初期値依存性のため、長期間の大気の前報は不可能とされている。また、たとえ完璧な数値モデルが存在したとしても、観測には誤差が伴うため初期値誤差は避けることができず、予報限界が存在する。

しかし、当時は数値モデルの完成度、計算機性能が十分でなかったため、数値モデルの前報誤差が初期値誤差より大きく、カオスの問題はそれほど重要ではなかったが、今日では計算機性能の向上とともに数値モデルも改良が続けられ、予報誤差も小さくなっている。そのため一週間以上の中期前報においてはカオスの問題が大きくなり、モデルを改良したとしても従来の単独前報では初期値誤差の影響を大きく受けししまう。

これを解決するひとつの方法としてアンサンブル前報がある。数値モデルの初期値である客観解析値にはわずかながらではあるが解析誤差が含まれている。ある時点での客観解析値に考えられる程度のさまざまな誤差を加え、多数の初期値からアンサンブルメンバーを作成し、それらの誤差の時間発展を予測する。言い換えると、初期の誤差の確率分布関数の広がりかどのように時間発展するかを予測する。そのため、この初期誤差の確率分布関数の広がりをアンサンブルメンバーが捉えられるように効率よくアンサンブルメンバーのサンプリングを行う必要がある。アンサンブルメンバーをランダムにサンプリングする方法ではサンプリングの数が多く、より多くの計算機資源が必要となるため現実的ではない。数少ないアンサンブルメンバーで効率よく確率分布関数の広がりを捉えることが計算機資源の関係から重要となってくる。このように複数の前報を行うことで、初期値問題を軽減するというのがアンサンブル前報の考え方であり、これまでの 1 つの初期値から 1 つの前報を得るという決定論的前報とは大きく異なる。

順圧 S-Model はモデルのバイアスが大きいという特徴がある。本研究ではこの大きなモデルバイアスを修正するために、二つの方法によって順圧 S-Model をアンサンブル化した。ひとつはモデルバイアスの修正量を時間ステップ毎に加えていく方法、もうひとつは初期値に加える初期摂動を観測誤差より大きくしてやることでモデルバイアスを修正しようとする方法である。

### 3.4.1 外力アンサンブル

順圧 S-Model は一般的な大循環モデルと異なり, 力学的不安定が小さいという特徴がある (Tanaka and Nohara 2001). そのため初期値に観測誤差程度のランダム摂動を加えても誤差が時間発展しにくく, アンサンブルメンバーのばらつきが小さい. またモデルバイアスが大きいため, 時間とともに各アンサンブルメンバーが真値から大きく離れてしまう. 以上の理由から, 現実大気においては初期値にランダムな摂動を与える手法ではアンサンブル予報が真値を捉えることができず, 予報誤差共分散行列を十分に再現できないと考えられる. 本小節では, 順圧 S-Model のモデルバイアスを修正するため過去のモデルバイアスを見積もり, それを  $m$  日平均したものを積分ステップ毎に修正することでアンサンブルメンバーを作成し, アンサンブル予報を行う外力アンサンブルについて述べる. 本研究では, 過去 60 日間の予報値と解析値との差であるモデルバイアスを見積もり, その 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 日平均したものを修正量としてステップ毎に上乘せし, 7 メンバーを作成する. そして修正量を上乘せしないコントロールランと合わせて 8 メンバーによるアンサンブル順圧 S-Model を開発した.

以下は重複するが順圧 S-Model の説明である. 3次元ノーマルモード展開された順圧 S-Model は,

$$\begin{aligned} \frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i &= -i \sum_{j,k} r_{ijk} w_j w_k + f_i \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (129)$$

と書き表せる.  $w_i$  はノーマルモード展開係数,  $\tau$  は無次元時間,  $\sigma_i$  はラプラス潮汐方程式,  $r_{ijk}$  は非線形相互作用係数である. 外力  $f_i$  は現実大気における物理過程を観測データから統計的に求めた最適な外力で,

$$f_i = \tilde{f}_i + A_{ij} w_j + B_{ij} w_j^* + \delta_i \quad (130)$$

と表され,  $\tilde{f}_i$  は外力の気候値,  $w_j^*$  は  $w_j$  の複素共役,  $\delta$  は残差である. 行列  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  は残差  $\delta_i$  を最小にするように求められている. そのため  $\delta_i$  は長期的には平均が 0 であるが, 数時間から数ヶ月程度の短期間では  $\delta_i$  の平均は 0 ではなく, これがモデルバイアスとなって予報に大きく影響してくる.

外力アンサンブルでは外力  $f_i$  にモデルバイアスの修正量  $\epsilon_i$  を加えることによって, このモデルバイアス  $\delta_i$  を修正する.

$$f_i - \epsilon_i = \tilde{f}_i + A_{ij} w_j + B_{ij} w_j^* + \delta_i - \epsilon_i \quad (131)$$

修正量  $\epsilon_i$  がモデルバイアス  $\delta_i$  を打ち消すことができれば、予報は完璧となる。本研究では、修正量  $\epsilon_i$  を予報誤差である過去の予報値と解析値との差から見積もる。

まず、初期時刻  $t$  での初期値となる解析値を  $\mathbf{x}_t^a$ 、1 時刻 (6 時間) 前の解析値を  $\mathbf{x}_{t-1}^a$ 、以下同様にして、 $n$  日前の解析値を  $\mathbf{x}_{t-n \times 4}^a$  とする。過去  $n$  日のモデルバイアスを見積もるために、 $n$  日前の解析値  $\mathbf{x}_{t-n \times 4}^a$  を初期値として順圧 S-Model を走らせる。6 時間後の予報値  $\mathbf{x}_{t-n \times 4+1}^f$  は、

$$\mathbf{x}_{t-n \times 4+1}^f = M \mathbf{x}_{t-n \times 4}^a \quad (132)$$

で与えられる。ここで  $M$  は順圧 S-Model とする。モデルバイアス  $\epsilon$  は予報値と解析値の差の 6 時間平均で与えられ、1 時間あたりの修正量を意味している。時刻  $t - n \times 4 + 1$  でのモデルバイアス  $\epsilon_{t-n \times 4+1}$  は、

$$\epsilon_{t-n \times 4+1} = \frac{\mathbf{x}_{t-n \times 4+1}^f - \mathbf{x}_{t-n \times 4+1}^a}{6 \times \delta \tau} \quad (133)$$

と求められる。以下同様にして初期時刻  $t$  までのモデルバイアスは、 $\epsilon_{t-i}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n \times 4$ ) となる。

$\epsilon_{t-i}$  の  $m$  日平均  $\bar{\epsilon}_m$  は、

$$\bar{\epsilon}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m \times 4} \epsilon_{t-i} \quad (134)$$

で与えられる。

次に実際のアンサンブル予報についてである。外力アンサンブルでは、上記で求めた修正量  $\bar{\epsilon}_m$  を積分ステップ毎 (本研究では 1 時間毎) に上乘せすることで、モデルバイアスを修正しながら予報を行っていく。アンサンブルメンバーの作成については、 $\epsilon_{t-i}$  を何日平均するかによる違いによってメンバーを作成している。本研究では、 $m = 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22$  とすることで 7 メンバー作成し、修正を加えないコントロールランと合わせて 8 メンバーによるアンサンブル予報となっている。

### 3.4.2 初期値アンサンブル

順圧 S-Model においては、観測誤差程度のランダム誤差では摂動の大きさが小さいため、モデルバイアスを修正しきれずアンサンブル予報が真値を捉えにくい。そこで本小節では、大きなモデルバイアスに対処するため観測誤差より大きな摂動を与えてやることで、モデルバイアスを修正しようとする方法を述べる。

評価時刻  $t$  での解析値を  $\mathbf{x}_t^a$  とすると、一日前を初期値とする評価時刻における予報値を  $\mathbf{x}_{t-1}^f$ 、二日前を初期値とする評価時刻における予報値を  $\mathbf{x}_{t-2}^f$ 、以下同様に、 $m$  日前を初期値とする評価時刻における予報値は  $\mathbf{x}_{t-m}^f$  となる。ここで、評価時刻とはアンサンブル予報を行う時刻である。それぞれの予報誤差は、

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}_{t-i}^f &= \mathbf{x}_{t-i}^f - \mathbf{x}_t^a \\ i &= 1, 2, 3, \dots, m\end{aligned}\quad (135)$$

で与えられる。古い初期値を用いた予報誤差のノルムは新しい初期値を用いた予報誤差のノルムより大きいので、このまま  $\delta \mathbf{x}_{t-i}^f$  を初期摂動として用いるには誤差のノルムが大きすぎ、利用することはできない。そこで、予報誤差のスケールダウンを行う。具体的にはまず規格化を行う。予報誤差のノルムは  $\|\delta \mathbf{x}_{t-i}^f\|$  で与えられるので、これより  $\frac{\delta \mathbf{x}_{t-i}^f}{\|\delta \mathbf{x}_{t-i}^f\|}$  として規格化を行い、これに  $\|\delta \mathbf{x}_{t-j}^f\|$  をかけると初期摂動  $\delta \mathbf{p}_i^f$  は、

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{p}_i^f &= \|\delta \mathbf{x}_{t-j}^f\| \times \frac{\delta \mathbf{x}_{t-i}^f}{\|\delta \mathbf{x}_{t-i}^f\|} \\ i &= 1, 2, 3, \dots, m, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m\end{aligned}\quad (136)$$

で与えられる。本研究では  $j = 1$  とした。つまり予報誤差  $\delta \mathbf{x}_{t-i}^f$  のノルムを1日前の予報誤差のノルム  $\|\delta \mathbf{x}_1^f\|$  に揃えた。

順圧 S-Model は線形性が強く力学的不安定が小さいため、一般的な大循環モデルと比べ初期値依存性が小さい。そのため似通った初期値を数多く作成しても、それは偏ったアンサンブルメンバーを作成していることとなり、数少ないアンサンブルメンバーで効率よく確率分布関数の広がりを捉えるというアンサンブル化のメリットが得られにくいと考えられる。それを考慮に入れると、初期摂動  $\delta \mathbf{p}_i^f$  を直交化し、重複する摂動を取り除く必要がある。本研究では初期摂動の直交化に EOF 解析 (Empirical Orthogonal Function Analysis : 経験的直交関数解析) を用いた。EOF 解析をすることで、卓越する成長モードを取り出すことができるというメリットがある。

一般的に EOF 解析とは、あるデータの時間変動の中で最も分散の大きい空間パターンを得る解析法である。本研究で用いるデータとは、同時刻  $t$  における初期摂動  $\delta \mathbf{p}_i^f$  であり、一般的な EOF 解析ではない。

本研究では、EOF 解析によって得られた EOF 第1モード : EOF1, 以下 EOF2,  $\dots$ , EOF5 の誤差空間パターンを  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_5$  とすると、今求めたい初期摂動  $\delta \mathbf{p}_i^f$

は、ノルムを  $\|\delta\mathbf{x}_1^f\|$  にそろえるので、

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{p}_i'^f &= \|\delta\mathbf{x}_{t-1}^f\| \times \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|} \\ i &= 1, 2, 3, 4, 5\end{aligned}\tag{137}$$

で与えられる. ここまでで求められた  $\delta\mathbf{p}_i'^f (i = 1, 2, \dots, 5)$  は, 互いに直交し最も誤差成長の大きい5つの初期摂動となっている. この初期摂動  $\delta\mathbf{p}_i'^f$  を解析値  $\mathbf{x}_t^a$  に加算・減算することで, アンサンブルメンバーは,

$$\mathbf{x}_t^{a(2i-1)} = \mathbf{x}_t^a + \delta\mathbf{p}_i'^f\tag{138}$$

$$\mathbf{x}_t^{a(2i)} = \mathbf{x}_t^a - \delta\mathbf{p}_i'^f\tag{139}$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5$$

で与えられ, 5個の初期摂動から10個の初期値を作成する. さらにこれに解析値である  $\mathbf{x}_t^a$  も初期値とし, 11メンバーによるアンサンブル予報を行った.

### 3.5 使用データ

本研究で使用したデータは、NCEP/NCAR 再解析データで詳細は以下の通りである。

- 水平グリッド間隔： $2.5^{\circ} \times 2.5^{\circ}$
- 鉛直グリッド間隔：17層 (1000, 925, 850, 700, 600, 500, 400, 300, 250, 200, 150, 100, 70, 50, 30, 20, 10 hPa)
- 気象要素：水平風 ( $u, v$ ), ジオポテンシャル高度  $\phi$
- 期間：1950年1月1日～2005年12月31日
- 時間間隔：0000Z, 0600Z, 1200Z, 1800Z

再解析データとは、同一の数値予報モデルとデータ同化手法を用いて過去数10年間にわたりデータ同化を行い、長期間にわたって出来る限り均質になるように作成したデータセットのことである。このような均質な大気解析データセットは、きわめて信頼度の高い基礎資料になりうる。特に気候変動の解明、大気大循環の解析と全球のエネルギー循環の研究の際には有用である。

NCEP/NCAR では1949年1月から50年以上という長期にわたって同一のデータ同化手法により再解析が行われており、このデータは解析に用いることが出来る。ただし、1979年に初めて人工衛星 TIROS が打ち上げられ、客観解析に初めて衛星データが導入されたことにより、1979年を境にデータの不連続的な変動が残っていることに留意しなくてはならない。モデルや解析スキーム等による見かけの気候変動は取り除かれているが、入力データの質の不連続は明瞭に残っている。また、 $2.5^{\circ} \times 2.5^{\circ}$  の等圧面データには、すべての変数に対して T30 の波数切断で平滑化施されているため、高緯度地方では波動状の誤差が顕著に現れる。しかし長周期の変動の研究では、長期間にわたる均質なデータである再解析データは貴重である。

NCEP/NCAR 再解析データに用いられている予報モデルの水平分解能は T62, 鉛直分解能は 30 層, データ同化手法は 3 次元変分法で、その解析レベルはモデル面である。ただし、先に述べたとおり等圧面データには平滑化のために T30 の波数切断が行われている。

## 4 実験概要

本研究では、EKF を直接計算できる順圧 S-Model を用いて、EnKF が EKF に対して 4 次元同化のどれほどの性能を持っているか、比較検証実験を行った。EnKF には LETKF を用いた。まず、パーフェクトモデルでの実験を行い、EKF および EnKF が観測データを同化し真値に収束するか実験した。つまり EKF および EnKF が観測誤差、予報誤差を取り除き、4 次元同化の機能を果たしているか確かめた。次に、実際のアンサンブル予報を用いて現実大気における EKF および EnKF による同様の実験を行った。

パーフェクトモデルでの実験では、順圧 S-Model が完璧となるような理想的な大気を作成した。まず、1950 年 1 月 1 日 00 UTC を初期値とし 56 年間順圧 S-Model を走らせ、その予報値を真値とした。次に、真値に観測誤差程度のランダム誤差を加え、観測値を作成した。この観測値を初期値とし、順圧 S-Model を走らせ、EKF および EnKF で観測データを同化させ、真値に収束するか検証する。

### 4.1 パーフェクトモデルを用いた EKF の実験

EKF では、モデルの非線形性を考慮に入れていないため予報誤差共分散行列が実際より小さく見積もられてしまい、観測の情報が取り込まれにくくなってしまうという現象が発生する。それを防ぐために、膨張係数  $\rho$  を導入し、意図的に予報誤差共分散行列を膨張させる必要がある。この実験では  $\rho = 1.00, 1.05, 1.10$  とし、それぞれについて 100 ステップ (25 日間) のモデルランを行った。

### 4.2 パーフェクトモデルを用いた EnKF の実験 1

4.1 節と同様に膨張係数  $\rho$  を導入し、 $\rho = 1.00, 1.10, 1.50, 1.80, 2.00$  とし、それぞれについて 100 ステップ (25 日間) のモデルランを行った。パーフェクトモデルではモデルバイアスは常に 0 であるため、3.4 節で述べた外力アンサンブル予報は使用できない。そのため、 $\rho$  の違いによる影響を調べる実験では、アンサンブルメンバー作成法として、ランダム誤差による初期摂動作成法を用いた。真値に観測誤差程度のランダム誤差を加える操作を 20 回繰り返すことでそれを初期値とし、アンサンブルメンバー数を 20 とした。

EnKF を収束させるために膨張係数  $\rho$  の値を EKF より大きくし, さらにアンサンブルメンバー数の少なさを補うために EnKF の構成式を以下のように修正した.

アンサンブルメンバーが少ない場合での欠点は, 誤差共分散行列  $\tilde{P}^f$  の対角成分である誤差の分散が小さく見積もられ, 一方で非対角成分である誤差の共分散が分散と比較して大きく見積もられてしまう. そこで本研究では, 式 (120) に膨張係数  $\rho$  を導入するが,  $\tilde{P}^f$  全体を膨張させた上で, さらに  $\tilde{P}^f$  の対角成分を膨張させた.

### 4.3 パーフェクトモデルを用いた EnKF の実験 2

本節の実験では膨張係数の違いではなく, アンサンブルメンバー数の違いにより, それがどの程度同化に影響するのかを調べた. この実験では, アンサンブルメンバー作成法として 3.4 節で述べた EOF アンサンブルを用いた. アンサンブルメンバー数は, 21, 31, 41, 51 とし, それぞれ実験した.

### 4.4 EKF の $P^f$ と EnKF の $P^f$ の比較

EKF の予報誤差共分散行列  $P^f$  は大きく縮退しており,  $P^f$  の固有値の多くが 0 となるため, 有効な固有値の数をアンサンブルメンバー数とすることで, アンサンブルメンバーの数を少なくすることができるという仮定の下で, EnKF によるデータ同化が行われている. しかし, 実際には EKF の  $P^f$  は計算できないためそのような仮定が正しいのかどうかはわかっていない. そこで, EKF の  $P^f$  と EnKF の  $P^f$  を固有値分解し, それぞれの固有値を比較してみる.

### 4.5 現実大気における EKF の実験

4.1 節と同様に膨張係数  $\rho$  を導入し,  $\rho = 1.00, 1.05, 1.10$  とした. それぞれについて 100 ステップ (25 日間) のモデルランを行った. AO インデックスが大きく正に振れた 1989 年の冬を対象としたため, 1989 年 1 月 1 日を初期値とした.

### 4.6 現実大気における EnKF の実験

4.2 節と同様に EnKF の構成式を修正した. 膨張係数は  $\rho = 1.00, 1.10, 1.50, 1.80, 2.00$  とし, それぞれについて 100 ステップ (25 日間) のモデルランを行った. 初期値は

4.5 節と同様, 1989 年 1 月 1 日とした.

#### 4.7 予報精度

外力アンサンブルおよび EOF アンサンブルを用いて 15 日予報を行い, アノマリ相関, RMSE(Root Mean Square Error: 根号平均二乗誤差) を求めることにより, アンサンブル化による予報精度への影響を調べる. 初期値は, 外力アンサンブルがモデルバイアス修正量を比較的うまく見積もることができた 1989 年 1 月 2 日 00Z と, 逆にうまく見積もることができなかった 1989 年 1 月 30 日 00Z とする. さらに, 月平均での予報精度を見るため, 予報精度が全体的に良かった 1989 年 1 月と悪かった 2005 年 11 月の月平均アノマリ相関および月平均 RMSE を求めた. 外力アンサンブルは 8 メンバー, EOF アンサンブルは 11 メンバーとする.

## 5 結果

### 5.1 パーフェクトモデルを用いた EKF の結果

本節ではパーフェクトモデルを用いた EKF の結果を示す。膨張係数  $\rho$  を変化させ、予報誤差分散行列を膨張させた。

#### 5.1.1 膨張係数 $\rho = 1.00$

図 3 から図 6 は膨張係数  $\rho = 1.00$  で、膨張を行っていないときである。図 3 は、真値と観測値の時系列を示している。図 4 は真値、予報値、観測値および解析値を示しており、EKF が予報に観測を同化することで、予報が観測で修正され解析値が真値に収束していることがわかる。図 5 では、EKF によって観測誤差が取り除かれ、解析誤差が観測誤差より小さくなっていることがわかる。図 6 からは、EKF は始めの数ステップは予報誤差および解析誤差ノルムともに大きいですが、同化を繰り返すことで予報誤差、解析誤差は観測誤差を下回り、その後は一定の大きさを示していることがわかる。結果的に予報誤差、観測誤差を取り除き 4 次元同化の機能を果たしていることがわかる。また、観測誤差と予報誤差を比較すると、予報誤差共分散行列を膨張させていないため予報誤差の方が小さく、その結果、観測に対する重み  $K$  は小さくなり、観測を同化しにくい状況である。しかし、この実験はパーフェクトモデルを用いているため、観測に対する重みが小さくても予報に少しの観測を同化するだけで真値に収束することがわかった。

#### 5.1.2 膨張係数 $\rho = 1.05$

図 7 から図 10 は膨張係数  $\rho = 1.05$  のときであるが、結果は  $\rho = 1.00$  のときとほぼ同じである。図 7 は図 3 と同様、真値と観測値の時系列を示している。図 8 は真値、予報値、観測値および解析値を示しており、EKF が予報に観測を同化することで、予報が観測で修正され解析値が真値に収束していることがわかる。図 9 では、EKF によって観測誤差が取り除かれ、解析誤差が観測誤差より小さくなっていることがわかる。図 10 からは、EKF は始めの数ステップは予報誤差および解析誤差ノルムともに大きいですが、同化を繰り返すことで予報誤差、解析誤差は観測誤差を下回り、その後は一定の大きさを示していることがわかる。結果的に予報誤差、観測誤差を取り除き 4 次元同化の機能を果たしていることがわかる。また、膨張係数に

よって予報誤差共分散行列は膨張させられているが、観測誤差よりは依然として小さく、EKF は観測を取り込みにくいいため、膨張係数をもう少し大きくする必要がある。

### 5.1.3 膨張係数 $\rho = 1.10$

図 11 から図 14 は膨張係数  $\rho = 1.10$  のときであるが、結果は  $\rho = 1.00$  のときとほぼ同じである。図 11 は図 3 と同様、真値と観測値の時系列を示している。図 12 は真値、予報値、観測値および解析値を示しており、EKF が予報に観測を同化することで、予報が観測で修正され解析値が真値に収束していることがわかる。図 13 では、EKF によって観測誤差が取り除かれ、解析誤差が観測誤差より小さくなっていることがわかる。図 14 からは、EKF は始めの数ステップは予報誤差および解析誤差ノルムともに大きいですが、同化を繰り返すことで予報誤差、解析誤差は観測誤差を下回り、その後は一定の大きさを示していることがわかる。結果的に予報誤差、観測誤差を取り除き 4 次元同化の機能を果たしていることがわかる。また、膨張係数を  $\rho = 1.10$  程度にすることで観測誤差ノルムと予報誤差ノルムが同程度となり、どちらかに偏った同化をすることを防いでいる。

パーフェクトモデルを用いた EKF 実験では、膨張係数を大きくしても同化結果には大きな違いは見られなかった。パーフェクトモデルでは、予報値と真値にそれほど違いが見られないため、観測に対する重みが小さくとも解析値は真値から離れず、真値に収束することがわかった。

## 5.2 パーフェクトモデルを用いた EnKF の結果 1

本節ではパーフェクトモデルを用いた EnKF の結果を示す。膨張係数  $\rho$  を変化させ、予報誤差共分散行列を膨張させた。アンサンブルメンバー数は 20 で一定とする。

### 5.2.1 膨張係数 $\rho = 1.00$

図 15 から図 18 は膨張係数  $\rho = 1.00$  で、膨張を行っていないときである。図 15 は、真値と観測値の時系列を示している。図 16 は真値、予報値、観測値および解析値を示しており、EnKF が予報に観測を同化することで、予報が観測で修正され解析値が真値に収束しているように見える。しかし図 17 を見ると、解析誤差は観測誤差と比較して小さくしているとは言いがたく、4次元同化の機能を果たしていない。図 18 からは、EnKF ははじめの数ステップは予報誤差および解析誤差ノルムともに大きいですが、その後、予報誤差および解析誤差ノルムはほぼ 0 になり EnKF は同化の際に予報が正しいと判断し、観測の情報を取り込んでいないことを示している。つまり、EnKF は観測を同化していないに等しい。図 16 では解析値は収束しているように見えるが、これはパーフェクトモデルのためそのように見えるだけである。また、初期値に含まれている観測誤差が時間と共にほとんど成長していないことから、順圧 S-Model は初期値依存性が小さいことを再確認できる。観測の情報を取り入れないのは、EnKF が予報誤差共分散行列を必要以上に小さく見積もるため、観測の情報を必要としていないからである。これを解決する方法としては、膨張係数を大きくし予報誤差共分散行列を人為的に膨張させてやる必要がある。

### 5.2.2 膨張係数 $\rho = 1.10$

図 19 から図 22 は膨張係数  $\rho = 1.10$  のときである。図 19 は図 15 と同様、真値と観測値の時系列を示している。図 20 は真値、予報値、観測値および解析値を示しており、 $\rho = 1.00$  のときと同様に、EnKF が予報に観測を同化することで予報が観測で修正され解析値が真値に収束しているように見える。しかし図 21 を見ると、 $\rho = 1.00$  のときと比較してわずかに観測の情報を取り入れているが、十分とは言いがたい。図 22 からは、EnKF ははじめの数ステップは予報誤差および解析誤差ノルムともに大きいですが、その後、予報誤差および解析誤差ノルムはほぼ 0 になり EnKF は同化の際に予報が正しいと判断し、観測の情報を取り込んでいないことを示している。つまり、EnKF は観測を同化していないに等しい。観測の情報を取り入れない

のは, EnKF が予報誤差共分散行列を必要以上に小さく見積もるため, 観測の情報を必要としていないからである. 膨張係数を  $\rho = 1.10$  することで, 観測の情報を取り込むようにはなったが十分ではない. そのためさらに膨張係数を大きくする必要がある.

### 5.2.3 膨張係数 $\rho = 1.50$

図 23 から図 22 は膨張係数  $\rho = 1.50$  のときである. 図 23 は図 15 と同様, 真値と観測値の時系列を示している. 図 24 は真値, 予報値, 観測値および解析値を示しており,  $\rho = 1.00$  のときと同様に, EnKF が予報に観測を同化することで予報が観測で修正され解析値が真値に収束しているように見える. しかし図 25 を見ると,  $\rho = 1.00$  のときと比較するとよく観測の情報を取り入れ誤差を小さくしているが, まだ十分とは言いがたい. 図 26 からは, EnKF は始めの数ステップは予報誤差および解析誤差ノルムともに大きい, その後, 予報誤差および解析誤差ノルムは 0 にはならず, 一定の値をとっていることがわかる. 予報誤差ノルムが観測誤差ノルムからはまだ小さいので, 観測の情報を取り入れていない. そのため, 観測誤差をうまく取り除けていない. 膨張係数を  $\rho = 1.50$  することで, 観測の情報を取り込むようにはなったが十分ではない. そのためさらに膨張係数を大きくする必要がある.

### 5.2.4 膨張係数 $\rho = 1.80$

図 27 から図 30 は膨張係数  $\rho = 1.80$  のときである. 図 27 は図 15 と同様, 真値と観測値の時系列を示している. 図 28 は真値, 予報値, 観測値および解析値を示しており,  $\rho = 1.00$  のときと同様に, EnKF が予報に観測を同化することで予報が観測で修正され解析値が真値に収束しているように見える. 図 29 を見ると,  $\rho = 1.80$  のときは EnKF が観測誤差を取り除き, データ同化としての機能を果たしているといえる.

以上の結果から, 順圧 S-Model を用いた EnKF では膨張係数を相当大きくすることで, 解析値を真値に収束させることができる. つまり, 精度の高い誤差共分散行列を見積もることが重要であるといえる.

### 5.3 パーフェクトモデルを用いた EnKF の結果 2

本節ではパーフェクトモデルを用いた EnKF の結果を示す。アンサンブルメンバー数を変化させた。膨張係数  $\rho$  は、アンサンブルメンバー数に応じて適宜調節した。

#### 5.3.1 アンサンブルメンバー 21, 膨張係数 $\rho = 1.70$

図 31 から図 34 はアンサンブルメンバー数が 21, 膨張係数  $\rho = 1.70$  のときである。本実験以降は、初期摂動作成法に EOF アンサンブルを用いており、予報誤差共分散行列のノルムが観測誤差共分散のノルムと同程度、もしくはわずかに小さい程度となるような膨張係数を選んだ。図 31 は、真値と観測値の時系列を示している。図 32 は真値、予報値、観測値および解析値を示しており、EnKF が予報に観測を同化することで予報が観測で修正され解析値が真値に収束しているように見える。しかし図 33 を見ると、解析誤差は小さくなっておらず、データ同化の機能を果たしているとは言いがたい。アンサンブルメンバー数はランダム誤差アンサンブルと同程度、膨張係数も同程度であるが、データ同化の結果に大きな違いが出てくるのは、初期摂動作成法によるメンバーの選び方にあるといえる。図 34 を見ると、予報誤差共分散行列のノルムが観測誤差共分散のノルムよりわずかに小さい程度となっていることがわかる。

#### 5.3.2 アンサンブルメンバー 31, 膨張係数 $\rho = 1.60$

図 35 から図 38 はアンサンブルメンバー数が 31, 膨張係数  $\rho = 1.60$  のときである。図 35 は図 31 と同様、真値と観測値の時系列を示している。図 36 は真値、予報値、観測値および解析値を示しており、EnKF が予報に観測を同化することで予報が観測で修正され解析値が真値に収束しているように見える。しかし図 37 を見ると、アンサンブルメンバーが 21 のときよりは解析誤差を小さくすることには成功しているが、全体的に見て解析誤差はそれほど小さくなっておらず、データ同化の機能を果たしているとは言いがたい。アンサンブルメンバーを増やすことで、サンプリングエラーが減少し、データ同化の結果にも影響していることがわかる。図 38 を見ると、予報誤差共分散行列のノルムが観測誤差共分散のノルムよりわずかに小さい程度となっていることがわかる。

### 5.3.3 アンサンブルメンバー 41, 膨張係数 $\rho = 1.55$

図 39 から図 42 はアンサンブルメンバー数が 41, 膨張係数  $\rho = 1.55$  のときである. 図 39 は図 31 と同様, 真値と観測値の時系列を示している. 図 40 は真値, 予報値, 観測値および解析値を示しており, EnKF が予報に観測を同化することで予報が観測で修正され解析値が真値に収束しているように見える. 図 41 を見ると, 観測誤差を小さくしているように見え, データ同化の機能を果たしているといえる. 図 42 を見ると, 予報誤差共分散行列のノルムが観測誤差共分散のノルムよりわずかに小さい程度となっていることがわかる.

### 5.3.4 アンサンブルメンバー 51, 膨張係数 $\rho = 1.53$

図 43 から図 42 はアンサンブルメンバー数が 51, 膨張係数  $\rho = 1.53$  のときである. 図 43 は図 31 と同様, 真値と観測値の時系列を示している. 図 44 は真値, 予報値, 観測値および解析値を示しており, EnKF が予報に観測を同化することで予報が観測で修正され解析値が真値に収束しているように見える. 図 45 を見ると, 観測誤差を小さくしているように見え, データ同化の機能を果たしているといえる. 図 46 を見ると, 予報誤差共分散行列のノルムが観測誤差共分散のノルムよりわずかに小さい程度となっていることがわかる.

以上の結果より, アンサンブルメンバーの数が多いほど観測誤差を小さくすることに成功していることがわかる. これは, アンサンブルメンバーが少ないとサンプリングエラーが大きくなり, その結果, 予報誤差  $P^f$  を精度よく見積もることを示している. また, アンサンブルメンバー数が多ければ, 膨張係数も小さい値で済むことがわかり, アンサンブルメンバー数が多いほうが優位といえる.

## 5.4 EKF の $P^f$ と EnKF の $P^f$ の比較

EKF の  $P^f$  は固有値分解すると, ほとんどの固有値が 0 に近い値のため大幅に縮退しているとされているが, 一般的な数値モデルではサイズが大きくなり, 固有値分解することはできないため, どれほど縮退しているのかははっきりしていない. 本研究では順圧 S-Model を使用しているため,  $P^f$  の固有値を計算することが可能である. そこで, EKF の  $P^f$  と EnKF の  $P^f$  を固有値分解し, EnKF がどれほど EKF を近似できているかを固有値の観点から調べた. その結果が, 図 47 と図 48 である. 固有値を大きい順に並べ, プロットしたものである. まず, 図 47 であるが, これを見ると

最初の5個ほどの固有値がEKFの $P^f$ の主要なモードとなっている。そして、一番大きい固有値のおおよそ10分の1となるのが40番目の固有値である。全固有値を見ても、EKFの $P^f$ が大幅に縮退しているとは言いがたい。

一方で、図48はEnKFの $P^f$ を固有値分解し、EKFの $P^f$ と比較した図である。アンサンブルメンバー数は51のため、そのアンサンブルが張る空間は $51 - 1$ である。そのためEnKFの $P^f$ の次元が50となっているのも、固有値が51番目以降で0になっていることからわかる。この図からは、EnKFの $P^f$ の固有値は最初の5個が他の固有値と比較して特に大きいとは言えず、EKFの $P^f$ の固有値スペクトルとはこの部分が大きく異なっている。

## 5.5 現実大気における EKF の結果

本節では現実大気での EKF の結果を示す。NCEP/NCAR 再解析データにも誤差が含まれていると仮定することで観測値と見立て、順圧 S-Model による予報値と同化させる。膨張係数  $\rho$  を変化させ、予報誤差分散行列を膨張させた。

### 5.5.1 膨張係数 $\rho = 1.00$

図 49 から図 50 は膨張係数  $\rho = 1.00$  で、膨張を行っていないときである。図 49 は、真値、観測値および解析値の時系列を示しており、EKF が予報に観測を同化することで、予報が観測で修正され解析値が真値に収束していることがわかる。図 50 からは、EKF ははじめの数ステップは予報誤差および解析誤差ノルムともに大きいですが、同化を繰り返すことで予報誤差、解析誤差は観測誤差を下回り、その後は一定の大きさを示していることがわかる。結果的に予報誤差、観測誤差を取り除き 4 次元同化の機能を果たしていることがわかる。

### 5.5.2 膨張係数 $\rho = 1.05$

図 51 から図 52 は膨張係数  $\rho = 1.05$  のときである。図 51 は、真値、観測値および解析値の時系列を示しており、EKF が予報に観測を同化することで、予報が観測で修正され解析値が真値に収束していることがわかる。図 52 からは、EKF ははじめの数ステップは予報誤差および解析誤差ノルムともに大きいですが、同化を繰り返すことで予報誤差、解析誤差は観測誤差を下回り、その後は一定の大きさを示していることがわかる。結果的に予報誤差、観測誤差を取り除き 4 次元同化の機能を果たしていることがわかる。

### 5.5.3 膨張係数 $\rho = 1.10$

図 53 から図 54 は膨張係数  $\rho = 1.10$  のときである。図 53 は、真値、観測値および解析値の時系列を示しており、EKF が予報に観測を同化することで、予報が観測で修正され解析値が真値に収束していることがわかる。図 54 からは、EKF ははじめの数ステップは予報誤差および解析誤差ノルムともに大きいですが、同化を繰り返すことで予報誤差、解析誤差は観測誤差を下回り、その後は一定の大きさを示しているこ

とがわかる. 結果的に予報誤差, 観測誤差を取り除き 4次元同化の機能を果たしていることがわかる.

#### 5.5.4 膨張係数 $\rho = 1.20$

図 55 から図 56 は膨張係数  $\rho = 1.20$  のときである. 図 55 は, 真値, 観測値および解析値の時系列を示しており, EKF が予報に観測を同化することで, 予報が観測で修正され解析値が真値に収束していることがわかる. 図 56 からは, EKF は始めの数ステップは予報誤差および解析誤差ノルムともに大きい, 同化を繰り返すことで予報誤差, 解析誤差は観測誤差を下回り, その後は一定の大きさを示していることがわかる. 結果的に予報誤差, 観測誤差を取り除き 4次元同化の機能を果たしていることがわかる.

以上の結果から, 順圧 S-Model を用いた EKF では, 順圧 S-Model のモデル誤差が大きいため, 予報誤差共分散行列  $P^f$  はすでに十分大きく, 膨張係数を変化させても大きな変化はなかったことがわかる.

## 5.6 現実大気における EnKF の結果

### 5.6.1 膨張係数 $\rho = 1.70$

図 57 から図 58 は膨張係数  $\rho = 1.70$  のときである。EOF アンサンブル予報を用い、アンサンブルメンバー数はパーフェクトモデル実験同様 51 である。図 57 は真値、観測値および解析値の時系列を示しており、収束していないことがわかる。パーフェクトモデルでは十分収束するはずであるが、現実大気では収束していない。図 58 からは、EnKF は始めの数ステップは予報誤差および解析誤差ノルムともに大きいですが、その後、予報誤差および解析誤差ノルムは観測誤差ノルムを大きく下回り、EnKF は同化の際に予報が正しいと判断し、十分に観測の情報を取り込んでいないことを示している。つまり、EnKF は観測を同化していないに等しい。

### 5.6.2 膨張係数 $\rho = 2.00$

図 59 から図 60 は膨張係数  $\rho = 2.00$  のときである。EOF アンサンブル予報を用い、アンサンブルメンバー数はパーフェクトモデル実験同様 51 である。図 59 は真値、観測値および解析値の時系列を示しており、収束していないことがわかる。パーフェクトモデルでは十分収束するはずであるが、現実大気では収束していない。図 60 からは、EnKF は始めの数ステップは予報誤差および解析誤差ノルムともに大きいですが、その後、予報誤差は観測誤差と同程度、解析誤差は小さくなっている。しかし、EnKF は同化の際に予報が正しいと判断し、十分に観測の情報を取り込んでいないことを示している。

従って、現実大気で順圧 S-Model を用いた EnKF は収束させることが難しく、EnKF の調整が必要である。

## 5.7 予報精度

### 5.7.1 外力アンサンブル予報の結果

図 61 から図 69 は外力アンサンブル予報でのスパゲッティダイアグラムである。外力アンサンブルは、モデルバイアス修正量を一時間毎に上乘せすることで、モデルバイアスを修正しているのので、初期時刻 1989 年 1 月 2 日 00Z のように図 61 では各アンサンブルメンバーは同一の値をとる。図 62 から図 69 は、それぞれ 0 日予報、1 日予報、3 日予報、5 日予報、7 日予報、9 日予報、11 日予報、13 日予報、15 日予報である。予報初期では各メンバー間には大きな違いはないが、時間とともにそれぞれ異なる予報をしていることがわかる。また、アンサンブル化しているものの各メンバーの挙動が同じような振る舞いを示しており、集団的に予想を外していることから、アンサンブルメンバーが実況を十分に捉えきれていないことがわかる。アンサンブルメンバーは異なった外力の修正量によって作成されているが、この結果を見る限りアンサンブルメンバーの作成法、つまりバイアス修正量の求め方に問題があるといえる。

図 70 は、上記の事例での 15 日間のアノマリ相関の図である。相関が 0.6 を下回るまでの日数を予測可能限界とすると、1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とした事例では、コントロールランの予測可能限界が 6 日であるのに対して、アンサンブル平均の予測可能限界は 10 日以上となっている。また、アンサンブル平均の予測可能限界が各アンサンブルメンバーより長いことから、各メンバーの平均を取ることにより良い予報ができることを示している。また、各アンサンブルメンバーもコントロールランより予測可能限界が長い。これはモデルバイアス修正量  $\epsilon$  を精度よく見積ることができたと言える。このところは同期間での RMSE を表している図 71 を見ても同様のことが見て取れる。RMSE は予報と実況とがどれほど離れているかを表しているため、RMSE が横ばいとなっている予報期間後半では誤差の増加は起こらず、誤差は飽和してしまったと言え、それ以降の予報に信頼性はない。本事例では、11 日以降で RMSE が横ばいとなっているので、これ以降の予報は意味がなく、この結果はアノマリ相関での結果と一致する。

図 73、図 74 は 1989 年 1 月 30 日を初期値とした 15 日予報のアノマリ相関と RMSE の図である。この事例では、予測可能限界はコントロールランで 10 日、アンサンブル予報が 6 日程度という結果になり、アンサンブル平均がコントロールランを下回ることになった。RMSE の図 74 を見ても、同様に予測可能限界はアンサンブル平均がコントロールランより短い。この結果から、1989 年 1 月 2 日の事例とは異なりモ

デルバイアス修正量を精度よく見積もることができなかったことは明らかである。

1989年1月2日の事例では、アンサンブル予報が単独予報に比べ誤差を小さくすることに成功したといえるが、実際のところ、アンサンブル予報が誤差の広がりをも的確に捉えているかはわからない。そこで、RMSEとスプレッドを比較してみる。図72, 75は上記二事例のRMSEとスプレッドの対応を表した図である。スプレッドはアンサンブル予報のばらつきを表しており、言い換えると誤差の確率分布の広がりを表している。アンサンブル予報ではこの誤差の確率分布の広がりをうまく捉えることが重要である。スプレッドの大きさがRMSEと同程度であるということは、アンサンブル予報のばらつきが実況を捉えるができるということであり、アンサンブル予報が見積もる確率分布の広がりを捉えているといえる。RMSEとスプレッドを比較したとき、RMSEが大きい場合にはアンサンブル予報の見積もる誤差の確率分布の広がりが小さいことを示し、また逆にスプレッドが大きい場合には、確率分布の広がりが大きすぎることを示している。そのためRMSEとスプレッドが同程度であることが理想である。しかし、本研究のどちらの事例でもスプレッドはRMSEを大きく下回っており、これはアンサンブル予報が見積もる確率分布の広がりが実況を捉えていないことを意味する。アンサンブル予報が確率分布の広がりを捉えていないことは、スパゲッティダイアグラムの図61から図69で、各アンサンブルメンバーが集団的に予報を外し、その上、各メンバーのばらつきが小さいことから読み取れる。

外力アンサンブルは、モデルバイアスを修正することで予報精度の向上を図ったものであり、アノマリ相関、RMSEの結果を見る限りでは、モデルバイアス修正量を良く見積もっているようにも見える。しかし、スパゲッティダイアグラムを見ると、各メンバーが集団的に予報を外していることから、モデルバイアスを修正しきれていないことがいえる。また、スプレッドを見てみると、アンサンブル予報が誤差の確率分布をうまく捉えることができていないといえる。

### 5.7.2 初期値アンサンブル予報の結果

図 76 から図 84 は初期値 1989 年 1 月 2 日 00Z とする EOF アンサンブル予報でのスパゲッティダイアグラムであり、それぞれ 0 日予報、1 日予報、3 日予報、5 日予報、7 日予報、9 日予報、11 日予報、13 日予報、15 日予報である。EOF アンサンブルは初期値に摂動を加えることでアンサンブルメンバーを作成しているため、外力アンサンブルと異なり、初期状態である一定のばらつきを持っている。EOF アンサンブルは、予報期間初期は各アンサンブル予報が実況を良く捉えていることがわかる。しかし、予報期間中期である 5 日目あたりからアンサンブルメンバーが同じような振る舞いを示しており、集団的に予報を外していることがわかる。つまり外力アンサンブル同様、アンサンブル予報が実況を十分に捉えきれていない。

図 85 は、上記の事例での 15 日間のアノマリ相関の図である。相関が 0.6 以上である日数を予測可能限界とすると、この事例ではコントロールランの予測可能限界が 6 日であるのに対して、アンサンブル平均の予測可能限界は 10 日以上となっている。また、アンサンブルメンバーの多くはコントロールランより予測可能限界が短い。アンサンブル平均ではコントロールランの結果を大幅に上回っていることから、アンサンブル予報の誤差は単独予報より小さくなっていることがわかる。しかし、アンサンブル予報が初期誤差の広がりから将来の誤差の広がりを捉えているかという点、この図からはそこまではわからない。また、このことは同期間での RMSE を表している図 71 を見ても同様のことが見て取れる。

図 88、図 89 は 1989 年 1 月 30 日を初期値とした 15 日予報のアノマリ相関と RMSE の図である。この事例では、外力アンサンブルではアンサンブル平均の予測可能限界がコントロールランより悪いが、EOF アンサンブルではアンサンブル平均の予測可能限界がコントロールランを 3 日以上上回る結果となっている。RMSE の図 89 を見ても、同様にアンサンブル平均がコントロールランの結果を上回り、EOF アンサンブル予報が単独予報よりも誤差を小さくすることに成功しているといえる。

しかし、上記でも述べたように EOF アンサンブル予報が初期誤差の広がりを良く捉えているかどうかはわからない。そこで外力アンサンブル同様、RMSE とスプレッドを比較してみる。図 87、90 は上記二事例の RMSE とスプレッドの対応を表した図である。EOF アンサンブルは初期摂動を加えることでアンサンブルメンバーを作成しているため、予報初期のスプレッドは RMSE を上回っている。本研究では初期摂動の大きさを 1 日目の予報誤差のノルムに揃えているため、予報 1 日目まではスプレッドが RMSE を上回り、誤差の確率分布を捉えているといえる。しかし、

その後は RMSE のほうが大きくなり、スプレッドは終始 RMSE を下回り、アンサンブル予報が見積もる確率分布の広がりが実況を捉えていないことを意味する。

外力アンサンブル予報と同様に、EOF アンサンブル予報が誤差の確率分布の広がりを捉えていないことは、スパゲッティダイアグラムの図 76 から図 84 で、予報期間中期ごろから各アンサンブルメンバーが集団的に予報を外し、結果的にアンサンブル平均が実況に近づかないことから示唆される。

### 5.7.3 月平均予報精度

前節までは、日単位でのアンサンブル予報についての結果であるため、平均的にみたアンサンブル予報が単独予報を上回っているのかはわからない。そこで、アンサンブル予報の月平均の予報精度を見てみる。図 94, 95 は 1989 年 1 月のアノマリ相関、RMSE の月平均である。この図からは、EOF アンサンブル予報の予測可能限界がコントロールランを上回っている一方で、外力アンサンブル予報の予測可能限界はコントロールランを下回っている。外力アンサンブル予報は個々の事例では、コントロールより予測可能限界が大きくなることがわかっているが、月平均で見るとそうとは言えない場合が多いことを示している。

また、図 96, 97 は 2005 年 11 月のアノマリ相関、RMSE の月平均である。この月は 1989 年 1 月と異なり、外力アンサンブル予報の予測可能限界がコントロールランを上回っている。また、EOF アンサンブルはコントロールランをわずかに上回る程度となっている。一方で RMSE を見ると、アノマリ相関ほど顕著な差は出ず、むしろ EOF アンサンブルの方が精度が良いという結果となっている。

以上の結果から、EOF アンサンブル予報はさまざまな事例で予測可能限界の向上に健闘しているが、外力アンサンブル予報は大気の場合によって大きく結果が異なることを示している。

## 6 考察

### 6.1 EKF と EnKF

本研究の目的のひとつは, EnKF が EKF と比較してどれほどの性能を持っているかを調べることである. パーフェクトモデルを用いた研究では, EKF, EnKF とともに真値に収束することが確認でき, EnKF は EKF のおよそ 70 % ほどの性能を示すことがわかった. EnKF は EKF の式変形だけではパーフェクトモデルを用いても観測を同化することはできなかつた. 観測を同化しない原因は, アンサンブル予報によって見積もられる誤差共分散行列  $\tilde{P}^a$  が小さいためと考えられる.

この原因の 1 つとして, アンサンブルメンバーが少ないことが考えられる. アンサンブルメンバーが少ない場合は, アンサンブルメンバーのサンプリングエラーが大きいため, 誤差の分散 (誤差共分散行列  $\tilde{P}^a$  の対角成分) が必要以上に小さく, 一方で誤差の共分散 (誤差共分散行列  $\tilde{P}^a$  の非対角成分) が大きく見積もられてしまう. 分散と共分散の差が小さいことは, カルマンゲイン行列  $K$  の対角成分 (LETKF が形成する小領域での中心点) が小さく見積もられてしまうことを意味する ( $K$  の非対角成分はもともと小さい). その結果, 重みが小さくなり観測の情報を取り込まなくなる.

もう 1 つとしては, アンサンブルメンバーの選び方に問題があると考えられる. ランダム誤差を初期摂動に用いる手法は, 初期摂動を適当に選んできているため確率分布を捉えるにはかなりの数のアンサンブルメンバーを必要とし, 高々 20 から 30 メンバー程度のメンバー数で効率的に確率分布を捉えているとは考えられず, 初期摂動作成法としては不適切であると考えられる. このことは, EOF 初期値アンサンブルを用いた EnKF がランダム誤差アンサンブルを用いた EnKF より優れていることから, 明らかであるといえる. 以上より, EnKF にはある程度のメンバー数, 初期値作成法が重要であると考えられる.

現実大気での実験では, EnKF はパーフェクトモデル実験のようにはうまく作用しない. 現実大気では当然のことながらモデル誤差が無視できない. パーフェクトモデル実験では EnKF が収束したとしても現実大気で同様に収束するとは限らない. むしろ, モデルバイアスが大きいいため収束しにくい. EKF ではモデル誤差は, 予報誤差共分散行列  $P^f$  にモデル誤差共分散行列  $Q$  を加えることで考慮されているが, EnKF ではモデル誤差は予報誤差  $\delta x^f$  の中にすでに含まれている. そのため, アンサンブルメンバー数が少ないと予報誤差共分散行列  $P^f$  を求める際に, モデル

誤差を正確に見積もることができていないと考えられる。収束しないもうひとつの理由は、スパゲッティダイアグラムを見てもわかるように、アンサンブルメンバーが集団的に予報を外している上に、各メンバーのばらつきが小さいため、予報誤差を必要以上に小さく見積もってしまっている。つまり、モデルバイアスが大きいためにアンサンブル予報が現実を捉えきれず、その結果が EnKF の同化状況に影響していると考えられる。また、EKF から EnKF を導く際の前提として、EKF の予報誤差共分散行列  $P^f$  は縮退しており、固有値分解すると固有値のほとんどが 0 に近いため、有効な固有値の数は少なく、アンサンブルメンバー数をずっと少なくすることができるとしていた。しかし、順圧 S-Model を用いた EKF の  $P^f$  を固有値分解すると、実際にはそれほど縮退していないことが示され、アンサンブルメンバー数もそれに応じて多くしなければいけないことが示された。そこで、アンサンブルメンバーを効率よく選ぶ必要がある。アンサンブルメンバーを効率よく選ぶことで、アンサンブルメンバー数を少なくすることができる。しかし、順圧 S-Model は力学的不安定が弱いことによりカオス性が弱いいため、初期値依存性よりモデルバイアスが大きいことが考えられ、初期値作成を変えたところでどれほどの効果があるのかはわかっておらず、今後の課題であるといえる。

## 6.2 アンサンブル予報

本研究では、外力アンサンブル予報、EOF アンサンブル予報の 2 つについて順圧 S-Model においてアンサンブル化が予測可能限界にどれほどの影響を与えるかを検証した。その結果、外力アンサンブル予報では大気の場合によって予測可能限界は大きく変化してくることがわかった。外力アンサンブルではモデルバイアス修正量  $\epsilon$  を過去のモデルバイアスの平均で求められている。そのため、過去の大気の場合が将来にわたって持続するような場合には、モデル修正量はモデルバイアスを修正できるのではないかと考えられる。1989 年 1 月は AO インデックスが正のときでもあり、1988 年 12 月から 1989 年 1 月の初期にかけては似たような大気の場合が持続していた。実際、持続予報ですら長期間の予報を実現していたことから、そのことが読み取れる。このような場では、1989 年 1 月 2 日のアノマリ相関図 (図 73)、RMSE 図 (図 74) を見れば、モデルバイアスの修正が成功し予測可能限界が伸びたと考えられる。しかし、過去と将来の大気の場合が異なる場合や、過去や将来において短い周期で大気の場合が変化するような場合には、日々のモデルバイアスが大きく変化すると考えられる。日々のモデルバイアスが大きいとしても、モデルバイア

ス修正量はそれらの平均となってしまうため、そのような状況では大きく変動する将来のモデルバイアスを精度よく見積もっているとはいえない。モデルバイアスを修正できなかったときには、1989年1月30日の事例のように、コントロールランよりアンサンブル平均が予報精度が悪くなるという結果になってしまう。モデルバイアス修正量の求め方にはさらに検討が必要であると考えられる。

EOF アンサンブル予報は過去数日間で最も発達した誤差を取り出し、それを初期摂動としているが、それが将来において最も発達する摂動であるとは限らない。そのため、線形発展の範囲ではあるが、将来までに最も発達する摂動を求めることができる SV(singular vector : 特異ベクトル) 法を用いることで、予測可能限界が伸びるのではないかと考えられる。

RMSE とスプレッドを比較した場合、外力アンサンブル予報、EOF アンサンブル予報ともにスプレッドの増加率が RMSE の増加率に追いついていない。これに対処する方法として、順圧 S-Model は力学的不安定が小さいため線形性が強く、カオス性が弱いこと誤差が発展しないことが原因のひとつであると考えられるが、アンサンブルメンバー作成法にも問題があると考えられる。また、アンサンブル予報の改善によって EnKF の性能も向上すると考えられる。

## 7 結論

本研究では、EKF を直接計算できる Tanaka and Nohara (2001) の順圧 S-Model を用いて、EnKF の性能が EKF のどれほどであるのかを調べるために数値実験を行った。このモデルは、東西波数 20、南北波数 10 で切断された比較的簡単なモデルである。

まず、EKF、EnKF によるデータ同化が真値に対してどれほど収束するかを調べるために、パーフェクトモデル実験を行った。その結果、EKF は膨張係数が小さくても収束することが確認できた。EnK は膨張係数をやや大きめにすることで真値に収束することが確認できた。EKF は、もともと時間発展が線形モデルで与えられる場合に厳密に成り立つ KF を非線形モデルに拡張したものである。そのため、EKF はモデルの非線形性を考慮に入れておらず、EKF の見積もる予報誤差共分散行列が実際より小さく評価されてしまい、それを防ぐ目的で膨張係数を導入している。一方 EnKF の場合は、少ないアンサンブルメンバーのサンプリングエラーが影響して、予報誤差共分散の見積もりに誤差が含まれていることや、EnKF を導出する際の理論の過程が実際に満たされていないことなどが原因となり、膨張係数を導入している。そのため、膨張係数を変化させることは EnKF の性能に大きく関わってくるのがわかった。また、EnKF の性能にはサンプリングエラーも大きな原因となっており、少ないアンサンブルメンバーでは EnKF がうまく機能しないこともわかった。膨張係数が小さく、さらにアンサンブルメンバーが少ないと、予報誤差共分散行列が実際より小さく見積もられ、それが原因で EnKF 自身がモデルが正しいと判断し、観測の情報を取り込まなくなり、同化を繰り返すとともに現実からモデルが離れてしまう。

一般的にアンサンブルメンバー数は、予報誤差共分散行列  $P^f$  が実際にはかなり縮退し、 $P^f$  のランクがモデル変数の次元の数より大幅に小さくなっているという仮定のもとで決定されている。しかし、順圧 S-Model を用いて EKF で見積もられる  $P^f$  を固有値分解しその固有値を見てみると、一番大きな固有値からおおよそ 40 番目で固有値が 10 の 1 となるため、大幅に縮退しているとはいえない。ただこれは順圧 S-Model の場合であり、一般的な大循環モデルではどうなっているかは今日の計算機では計算不可能なので検証することはできない。

アンサンブル予報については、モデルバイアスを異なる修正量で修正することでアンサンブルメンバーを作成する外力アンサンブル予報は、予報しやすい場と予報しにくい場があり、大気の場合によって予測可能限界に大きな変動があることがわ

かった。そのため、2週間程度の比較的短期間の予報では必ずしも単独予報より良いとは限らない。

順圧 S-Model は力学的不安定が小さく線形性が強いいため、初期摂動を与えたとしてもその誤差はほとんど発展せず、初期摂動作成法によるアンサンブル予報では効果が現れにくいと考えられていた。しかし、本研究では過去に最も大きく成長する誤差を取り出し、それを初期摂動とすることでアンサンブル予報を行う EOF アンサンブル予報が、予測可能性限界の向上に参与していることが確かめられた。

しかし、両アンサンブル予報の RMSE とスプレッドを比較すると、スプレッドが RMSE を大きく下回ることがわかった。これは、順圧 S-Model の誤差の時間発展が小さいため各アンサンブルメンバーのばらつきが小さいことを表している。また、順圧 S-Model はモデルバイアスが大きいいため、アンサンブルメンバーが同様の挙動を示し集団的に予報を外している。これに対処できるようなモデルバイアス修正量を求めることが、予報精度の向上に大きく関与すると考えられる。さらに、モデルバイアス修正量でモデルバイアスを修正できない場合は、初期摂動を与えることでそれを補うことも、予測可能限界に影響を与えるのではないかと考えられる。

以上のことから、アンサンブル予報の改善は EnKF の改善にもつながるため、今後一層の研究が望まれる。

## 謝辞

本研究を進めるにあたって、指導教官である筑波大学計算科学研究センター田中博教授には、終始適切な御指導をして頂きました。また、同大学陸域環境研究センターの渡来靖準研究員、同大学生命環境科学研究科の川瀬宏明さん、寺崎康児さん、大庭雅道さん、横山直美さん、井尾展悠さん、向野智彦さん、高野真之さん、同大学環境科学研究科の鈴木一步さんには、セミナーおよび様々な場で多くの貴重なアドバイスを頂きました。そして、同大学生命環境科学研究科の松枝未遠さんには、研究を進めるにあたり数多くの貴重なアドバイス・御指導をして頂きました。

さらに、同大学生命環境科学研究科の木村富士男教授、林陽生教授、上野健一助教授、植田宏昭講師、同大学計算科学研究センター日下博幸講師や大学院生の皆様には、方針発表、最終発表およびポスター発表の場で貴重な御意見、御助言を頂きました。最後に、共に卒論作業を進めた気候学・気象学専攻の4年生の皆様には、時折良き相談相手となって頂きました。

本論文は以上の皆様のご協力により完成させることができました。心より感謝いたします。

尚、本研究で用いた主な図は、The GMT System (Wessel and Smith, 1991) にて作図した。

## 参考文献

- Anderson, J.L., 2001 : An ensemble adjustment Kalman filter for data assimilation, *Mon. Wea. Rev.*, **129**, 2884-2903.
- Bennett, A. F., 2002: Inverse Modeling of the Ocean and Atmosphere, *Cambridge University Press*, Cambridge.
- Bishop, C.H., B.J. Etherton and S.J. Majumdar, 2001: Adaptive sampling with the ensemble transform Kalman Filter. Part 1: Theoretical aspects, *Mon. Wea. Rev.*, **129**, 420-436.
- Courtier, P., T. and Hollingsworth, A, 1994: A strategy for operational implementation of 4DVAR, using an incremental approach, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **120**, 1367-1387.
- Daley, R., 1991: Atmospheric Data Analysis, *Cambridge University Press*, Cambridge.
- Evensen, G., 1994: Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics, *J. Geophys. Res.*, **99C5**, 10143-10162.
- Gelb, A., J.F. Kasper, R.A. Nash, C.F. Price and A. A. Sutherland, 1974: Applied optimal estimation, *The M.I.T. Press*, 374pp.
- Hamill, T.M., 2003: Ensemble-based atmospheric data assimilation: A tutorial, *NOAA-CIRES Climate Diagnostics Center*, 46pp.
- Hoffman, R.N. and E. Kalnay, 1983: Lagged average forecasting, an alternative to Monte Carlo forecasting. *Tellus*, **35A**, 100-118.
- Houtekamer, P.L. and H.L. Mitchell, 1998: Data assimilation using an ensemble Kalman filter technique, *Mon. Wea. Rev.*, **126**, 796-811.
- Hunt, B.R., E. Kalnay, E.J. Kostelich, E. Ott, D.J. Patil, T. Sauer, I. Szunyogh, J.A. Yorke and A.V. Zimin, 2004: Four-dimensional ensemble Kalman filter, *Tellus*, **56A**, 273-277.

- Jazwinski, A.H., 1970 : Stochastic processes and filtering theory, *Academic Press*, 376pp.
- Kalman,R.,1960: A new approach to linear filtering and predicted problems, *J. Basic Eng.*, **82**, 35-45.
- Kasahara, A. and K. Puri, 1981: Spectral representation of three-dimensional global data expansion in normal mode functions. *Mon. Wea. Rev.*, **109**, 37–51.
- Leith, C.E., 1974: Theoretical skill of Monte Carlo forecasts. *Mon. Wea. Rev.*, **102**, 409-418.
- Lorenz, E.N.,1963: Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130-141
- Miyoshi, T., 2004: A review of the deterministic ensemble Kalman filtering methods and related techniques, Masters Scholarly Paper. *Department of Meteorology, University of Maryland*, College Park, 20pp.
- Patil, D.J., B.R. Hunt, E.Kalnay, J.A.Yorke and E. Ott, 2001: Local low dimensionality of atmospheric dynamics, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 5878-5881.
- Talagrand, O. and Courtier, 1987: Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation : Theory, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **113**, 1311-1328.
- Tanaka, H. L., 1985: Global energetics analysis by expansion into three-dimensional normal mode function during the FGGE winter. *J. Meteor. Soc. Japan.*, **63**, 180–200.
- Tanaka, H. L., 1991: A numerical simulation of amplification of low-frequency planetary waves and blocking formations by the upscale energy cascade. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 2919-2935.
- Tanaka, H. L., 1998: Numerical simulation of a life-cycle of atmospheric blocking and the analysis of potential vorticity using a simple barotropic model. *J. Meteor. Soc. Jan.*, **76**, 983-1008.

- Tanaka, H. L. and D. Nohara 2001: A Study of Deterministic Predictability for the Barotropic Component of the Atmosphere, *Science Rep.*, **22A**, *Institute Geoscience, University of Tsukuba*, 45 pp.
- Tanaka, H. L. and E. C. Kung, 1989: A study of low-frequency unstable planetary waves in realistic zonal and zonally varying basic state. *Tellus*, **41A**, 179–199.
- Tanaka, H. L. and S. Sun, 1990: A study of baroclinic energy source for large-scale atmospheric normal modes. *J. Atmos. Sci.*, **47**, 2674–2695.
- Tippett, M.K., J.L. Anderson, C.H. Bishop, T.M. Hamill, and J.S. Whitaker, 2003 : Ensemble square root filters, *Mon. Wea. Rev.*, **131**, 1485-1490.
- Wunsch, C., 2003: The Ocean Circulation Inverse Problem, *Cambridge University Press.*, Cambridge.
- 小倉義光, 1978: 気象力学通論. 東京大学出版会. 249pp.
- 多田英夫, 村上茂教, 1997: データ同化の現状と展望・第一章データ同化概論. 数値予報課報告・別冊第 43 号, 1-16.
- 三好建正, 2005: アンサンブル・カルマンフィルタ データ同化とアンサンブル予報の接点 . 天気, 52(2), 93-104.
- 三好建正, 2006: アンサンブル技術の短期・中期予報への利用 ~ 激しい気象現象の予測向上を目指して ~ . 数値予報課報告・別冊第 52 号, 80-99.

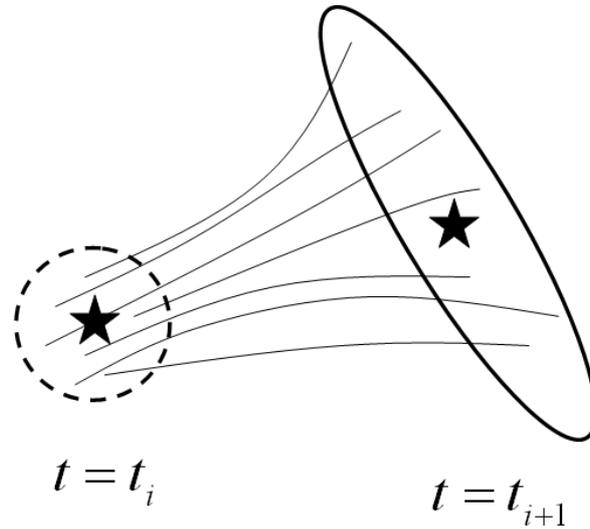


図 1: アンサンブル予報の位相空間上の概念図. 星は初期時刻  $t_i$  および終端時刻  $t_{i+1}$  における最も確からしい状態を示す. 点線の円は初期時刻での誤差の広がり (確率分布関数の等値線), 実践の楕円は終端時刻での誤差の広がりを表す. 細い実線は, 各アンサンブルメンバーを表す.

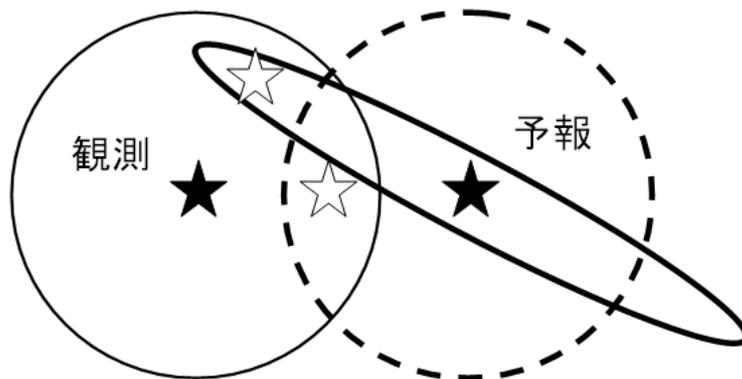


図 2: データ同化の位相空間上の概要図. 左の黒い星は観測データ, 右の黒い星は予報値を示す. 3DVAR などの誤差の時間発展を考慮しない同化法では, 予報誤差分布は統計的に与えられるため, 予報誤差の広がり (確率分布関数の等値線) は円形 (点線) である. 一方で, EnKF では予報誤差の広がり (太実線) は楕円である.

## Kalman Filter

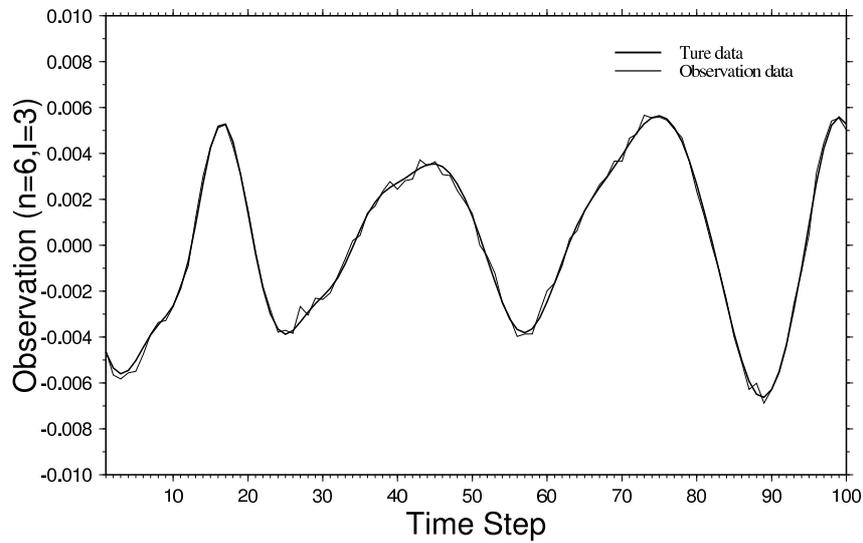


図 3: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する真値 (太線) と観測値 (細線). 横軸はタイムステップ数 (1 タイムステップは 6 時間, 以下同じ), 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数は  $\rho = 1.00$ . データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Kalman Filter

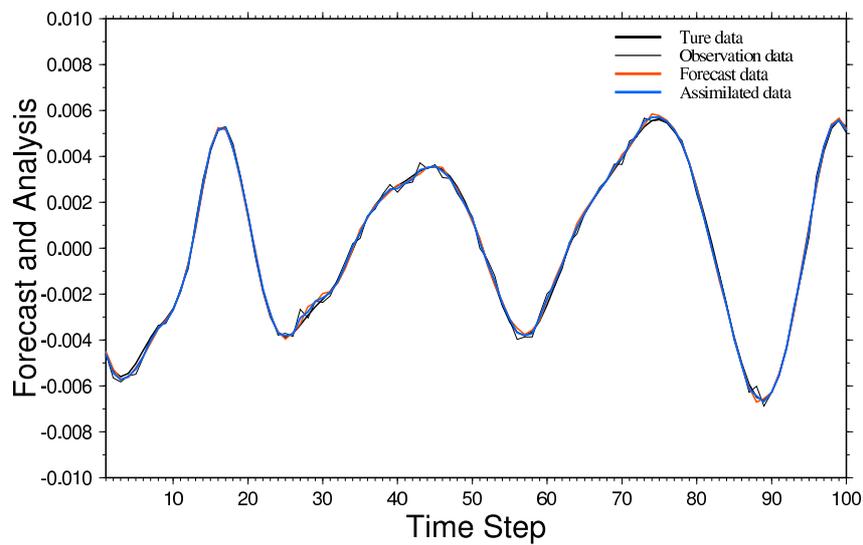


図 4: 真値 (黒太線), 予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 膨張係数は  $\rho = 1.00$ . 実験設定は図 3 と同じ.

## Kalman Filter

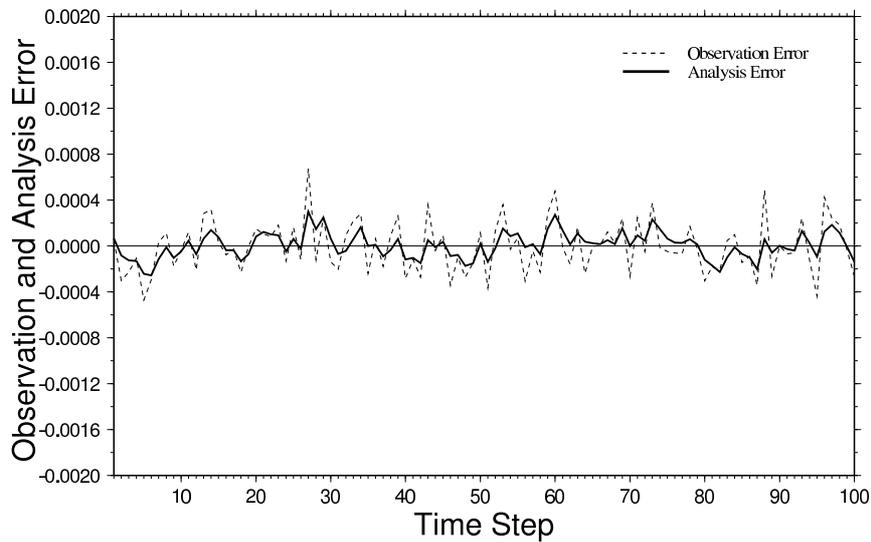


図 5: 観測誤差 (点線) および解析誤差 (実線). 膨張係数は  $\rho = 1.00$ . 実験設定は図 3 と同じ.

## Kalman Filter

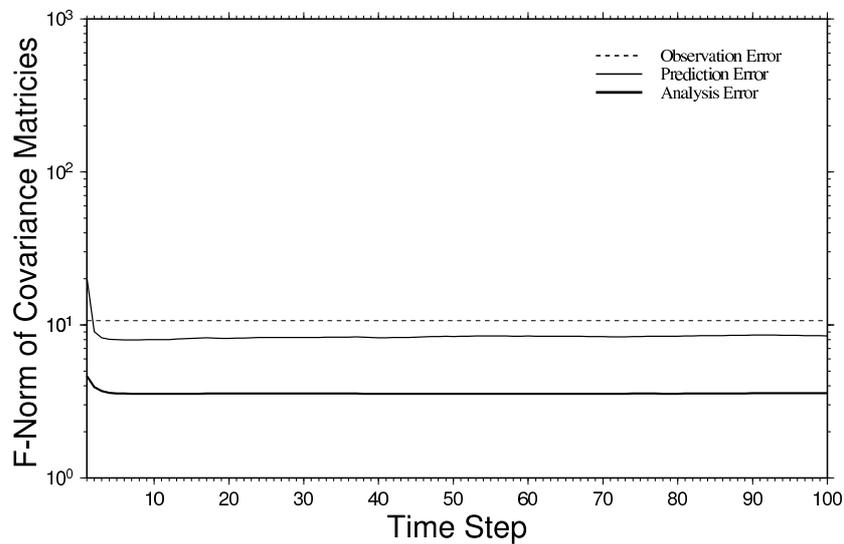


図 6: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.00$  とし, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Kalman Filter

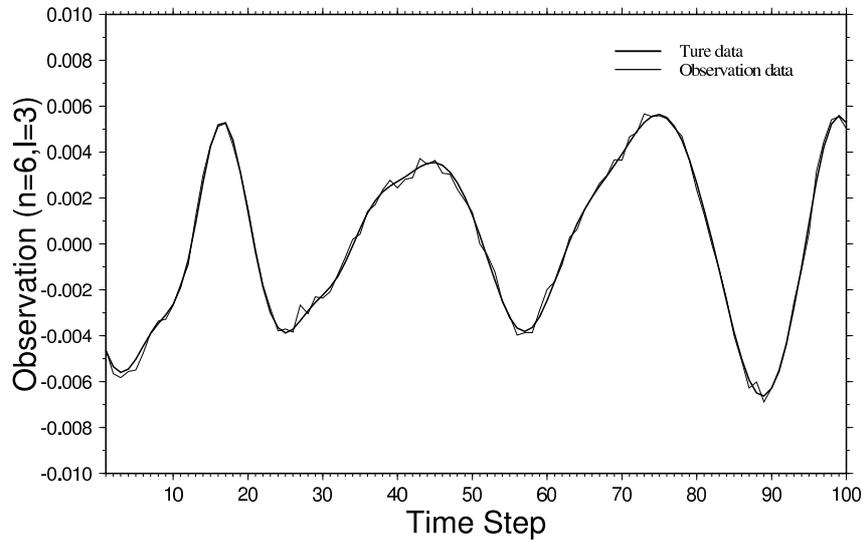


図 7: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する真値 (太線) と観測値 (細線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数  $\rho = 1.05$  とした. データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Kalman Filter

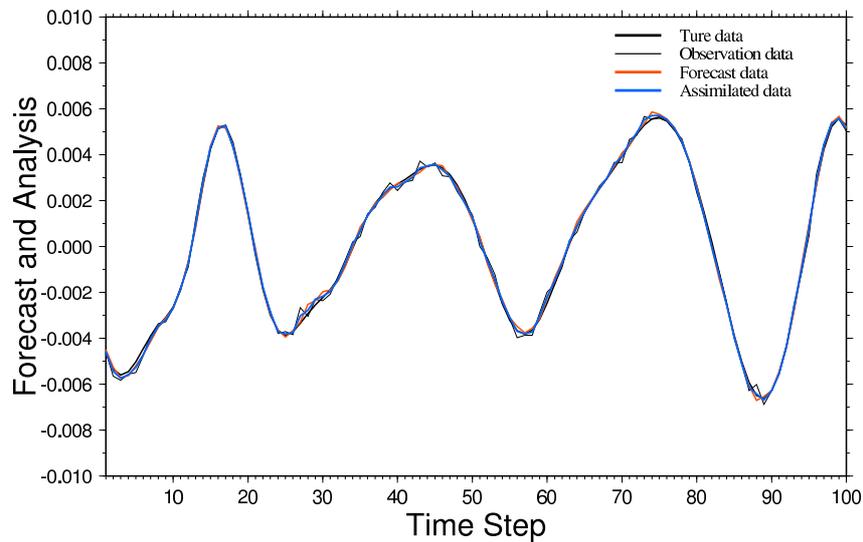


図 8: 真値 (黒太線), 予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 膨張係数は  $\rho = 1.05$ . 実験設定は図 7 と同じ.

## Kalman Filter

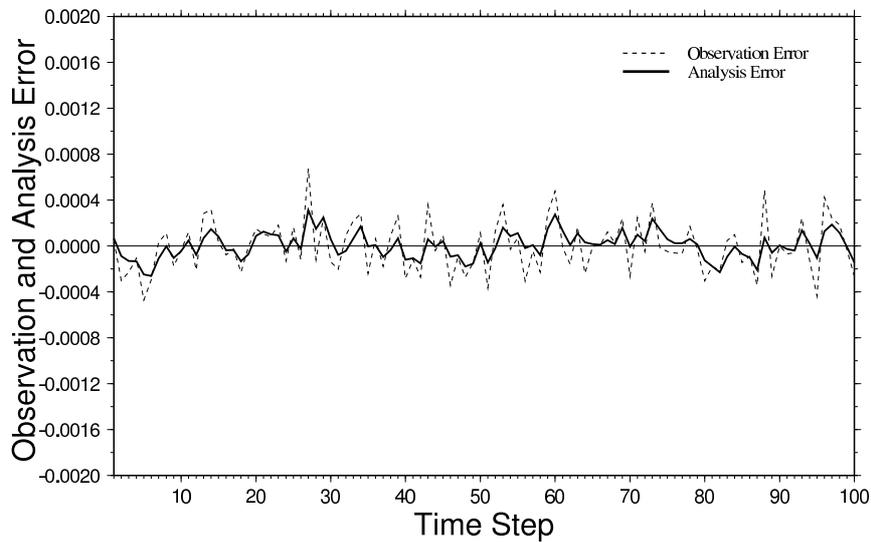


図 9: 観測誤差 (点線) および解析誤差 (実線). 膨張係数は  $\rho = 1.05$ . 実験設定は図 7 と同じ.

## Kalman Filter

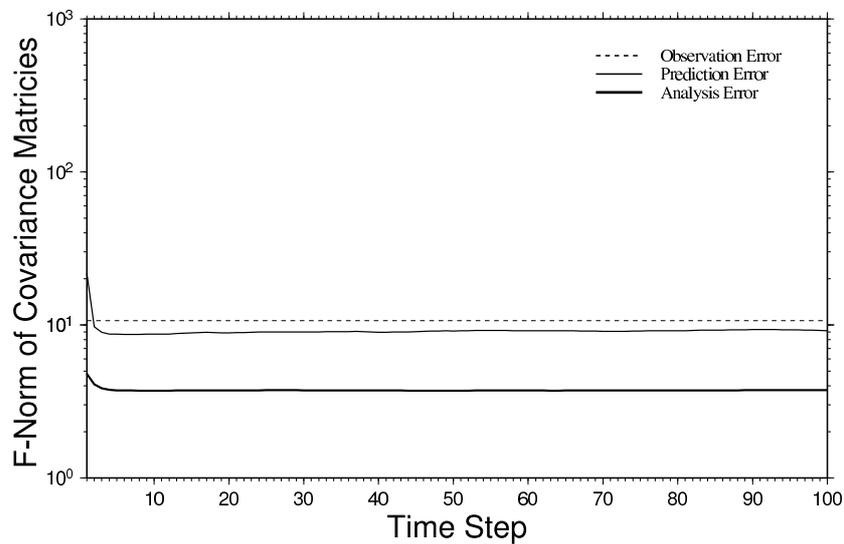


図 10: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.05$  とし, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Kalman Filter

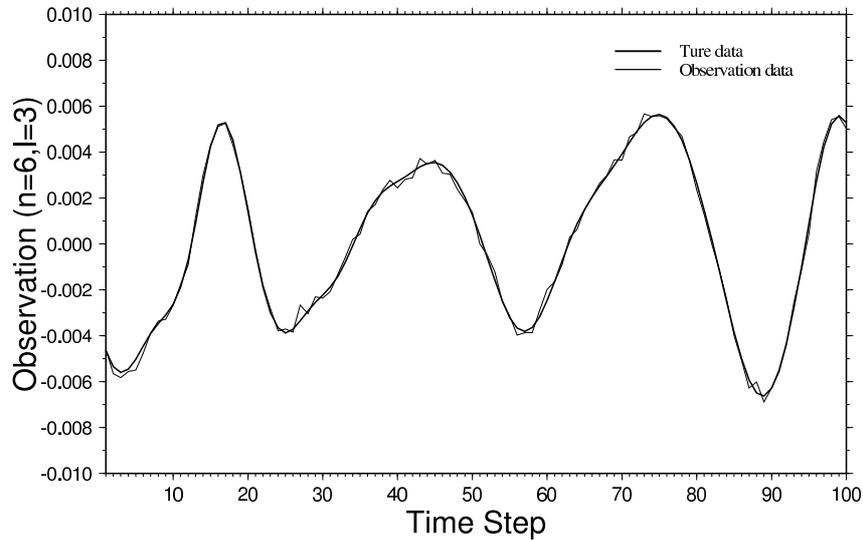


図 11: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する真値 (太線) と観測値 (細線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数  $\rho = 1.10$  とした. データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Kalman Filter

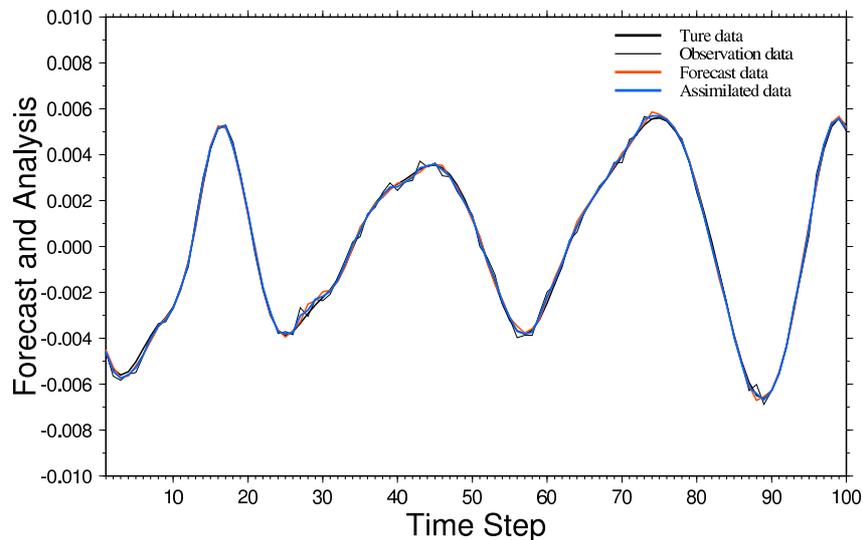


図 12: 真値 (黒太線), 予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 膨張係数は  $\rho = 1.10$ . 実験設定は図 11 と同じ.

## Kalman Filter

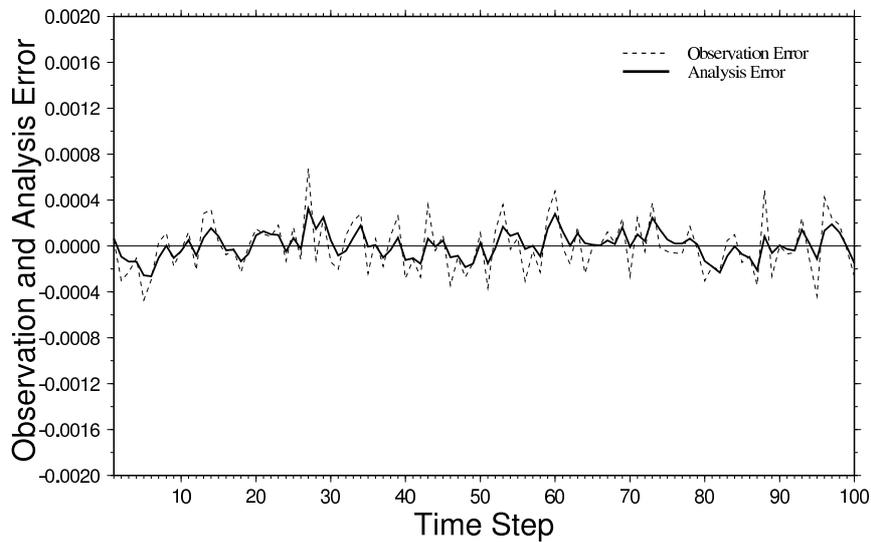


図 13: 観測誤差 (点線) および解析誤差 (実線). 膨張係数は  $\rho = 1.10$ . 実験設定は図 11 と同じ.

## Kalman Filter

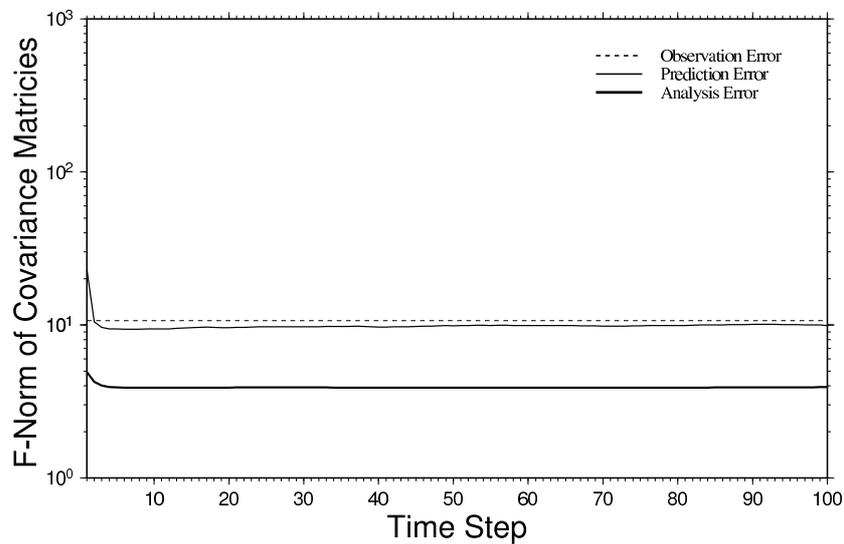


図 14: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は6時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.10$  とし, 初期値は1990年1月1日.

## Ensemble Kalman Filter

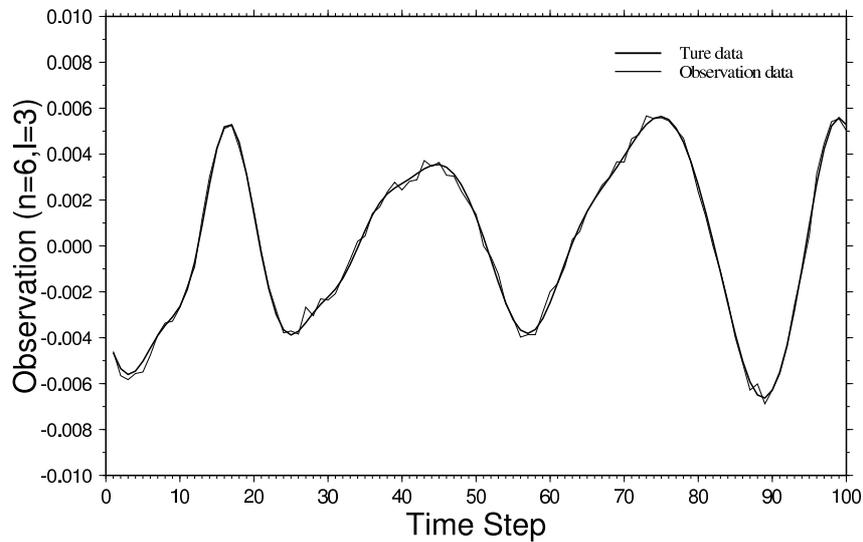


図 15: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する真値 (太線) と観測値 (細線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数は  $\rho = 1.00$ . データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

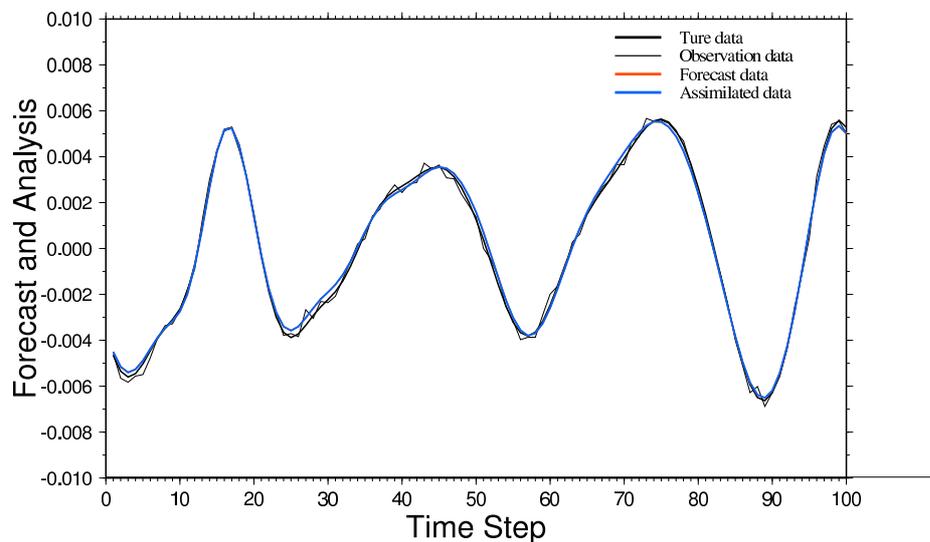


図 16: 真値 (黒太線), 予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 膨張係数は  $\rho = 1.00$ . 実験設定は図 15 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

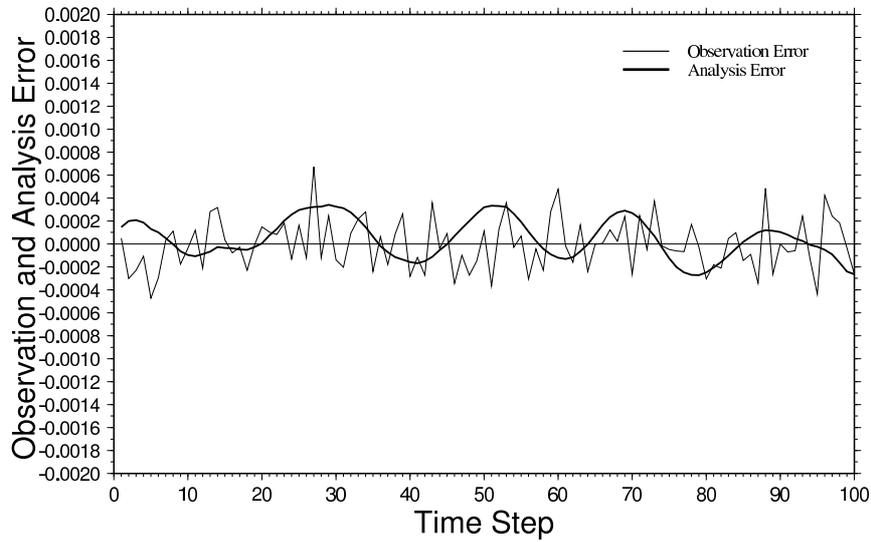


図 17: 観測誤差 (点線) および解析誤差 (実線). 膨張係数は  $\rho = 1.00$ . 実験設定は図 15 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

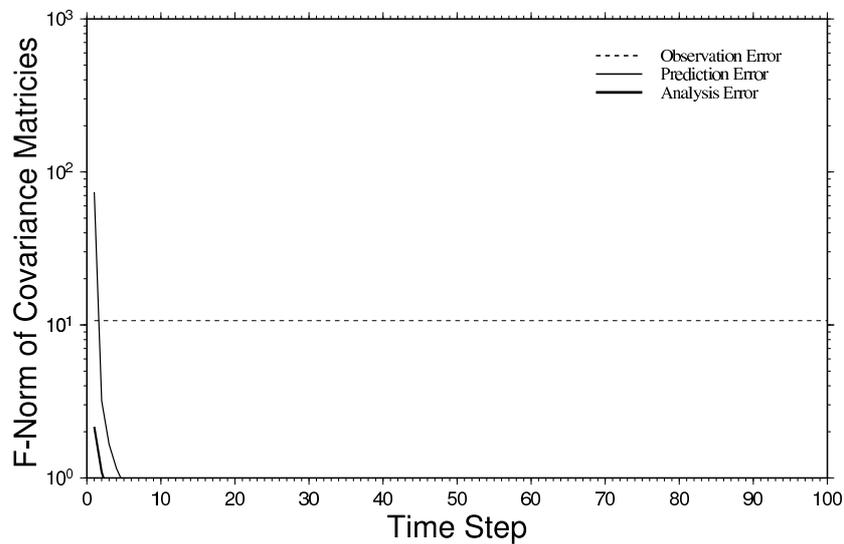


図 18: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.00$  とし, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

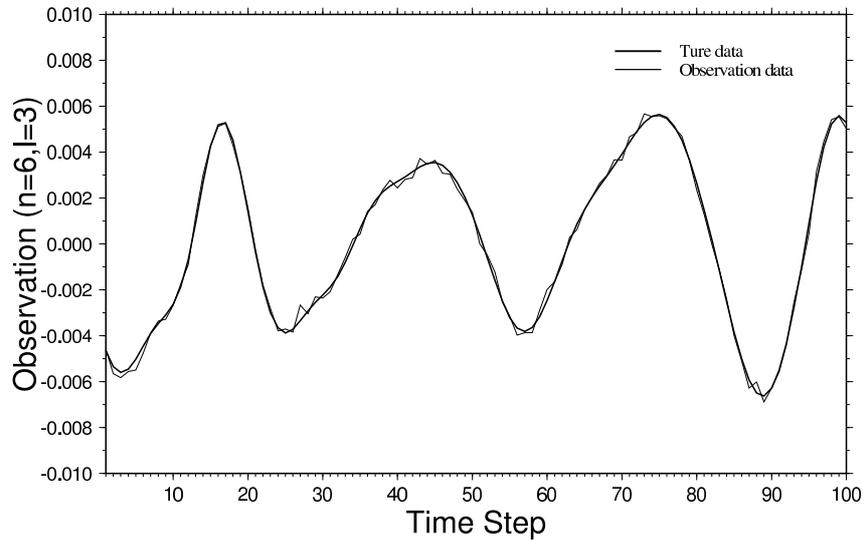


図 19: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する真値 (太線) と観測値 (細線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数は  $\rho = 1.10$  である. データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

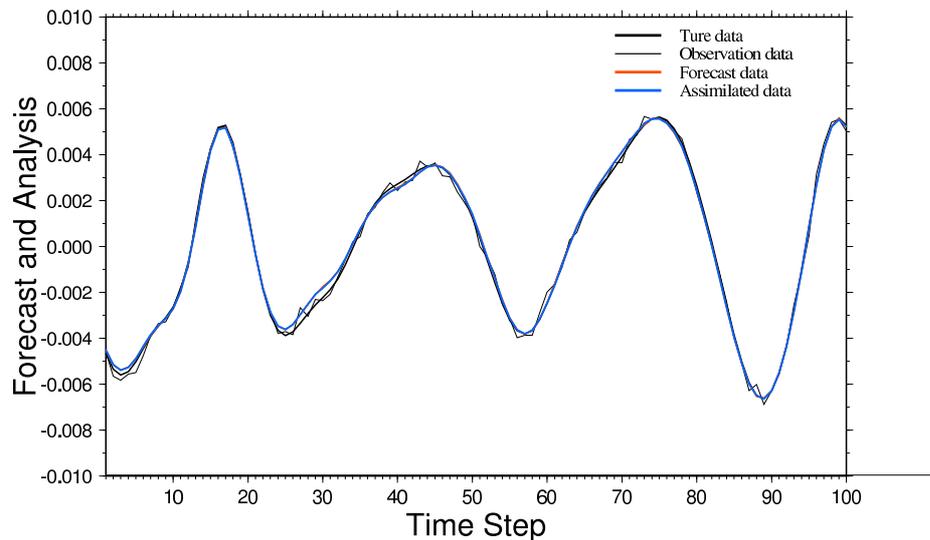


図 20: 真値 (黒太線), 予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 膨張係数は  $\rho = 1.10$ . 実験設定は図 19 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

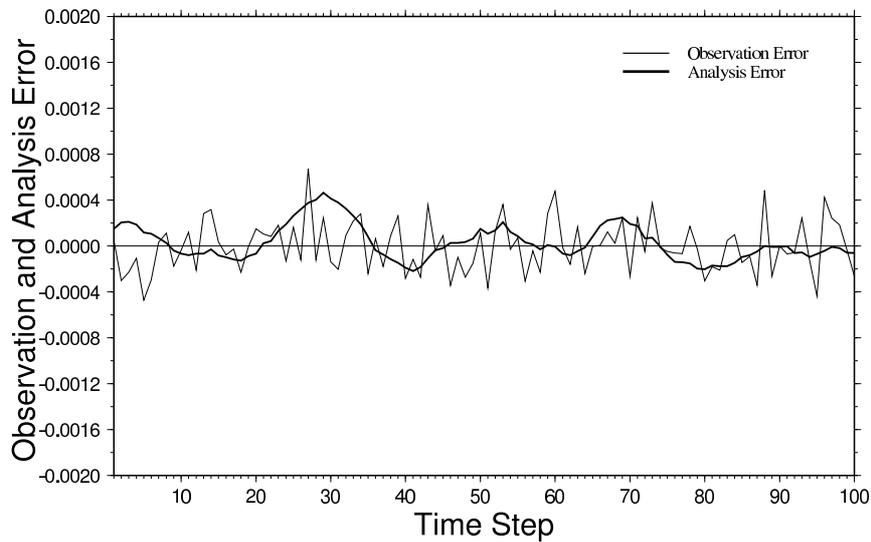


図 21: 観測誤差 (点線) および解析誤差 (実線). 膨張係数は  $\rho = 1.10$ . 実験設定は図 19 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

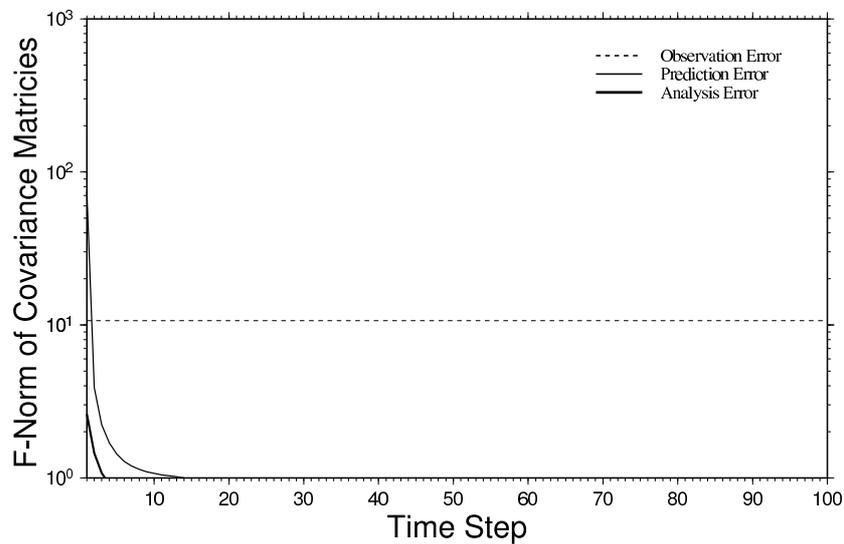


図 22: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.10$  とし, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

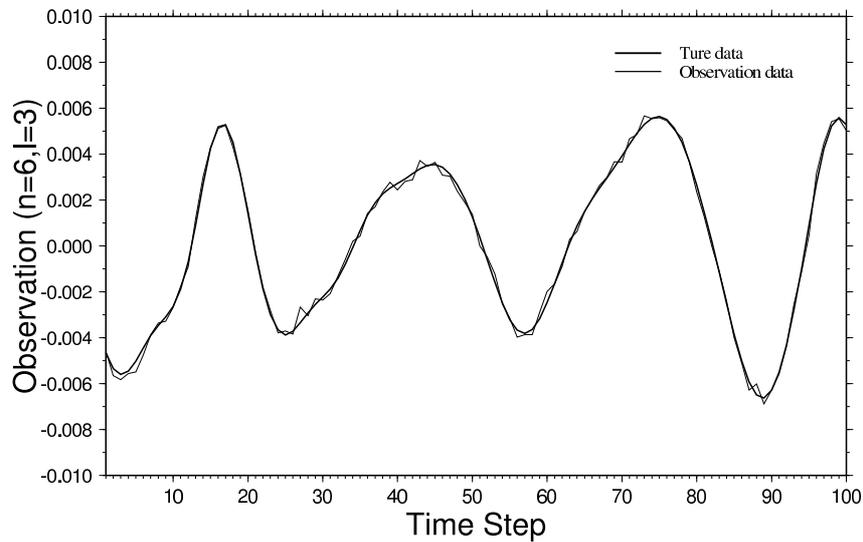


図 23: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する真値 (太線) と観測値 (細線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数は  $\rho = 1.50$ . データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

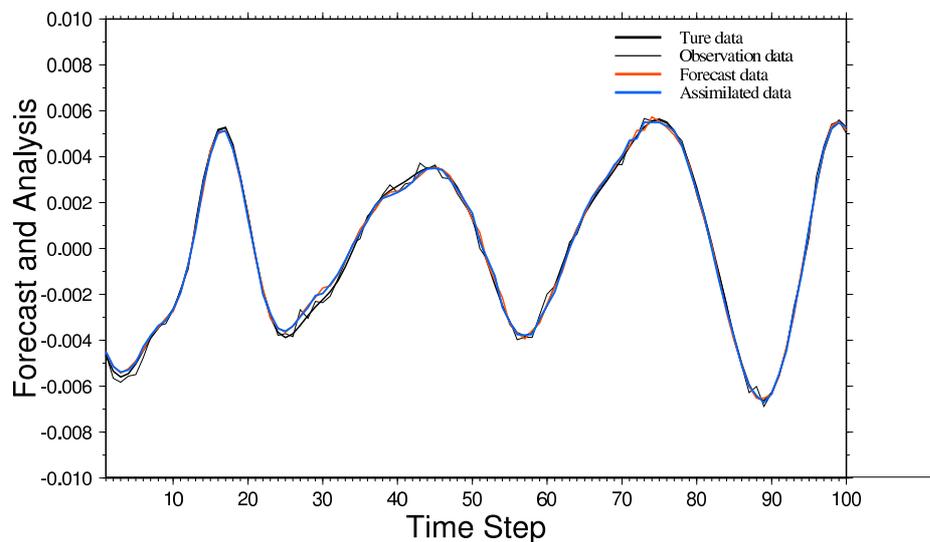


図 24: 真値 (黒太線), 予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 膨張係数は  $\rho = 1.50$ . 実験設定は図 23 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

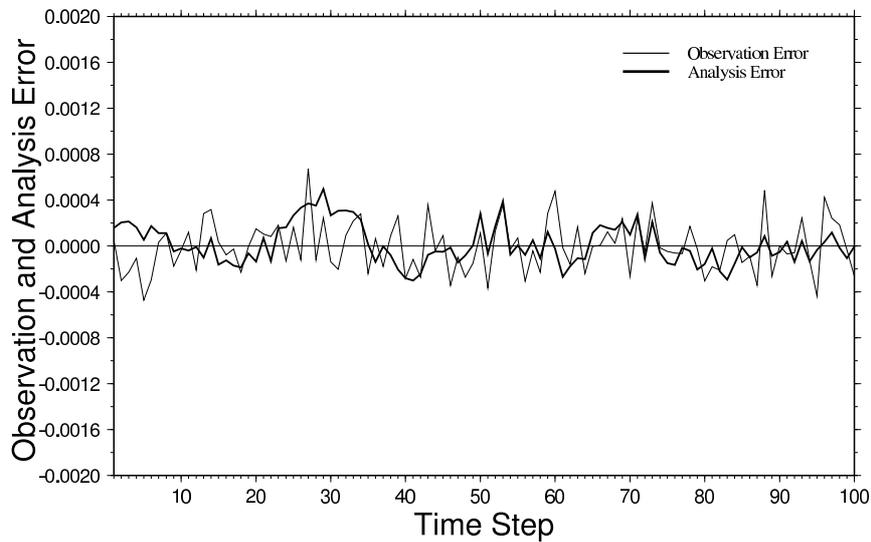


図 25: 観測誤差 (点線) および解析誤差 (実線). 膨張係数は  $\rho = 1.50$ . 実験設定は図 23 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

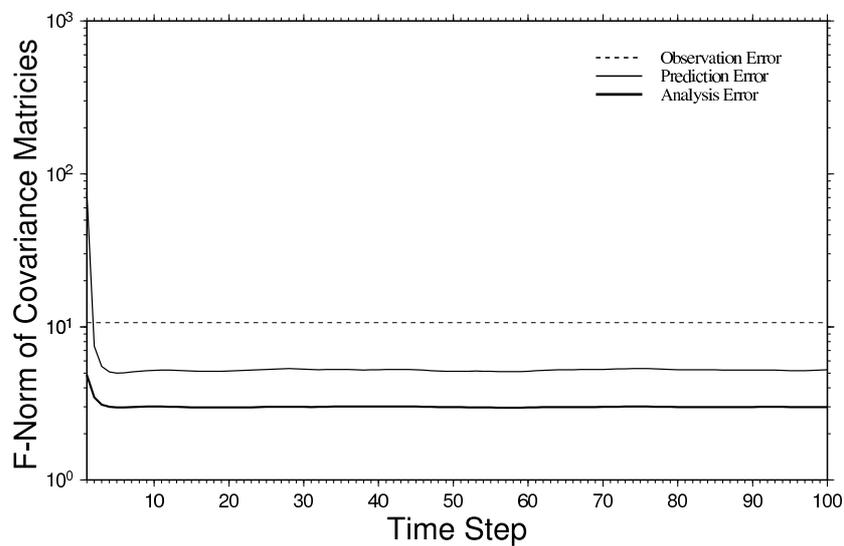


図 26: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.50$  とし, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

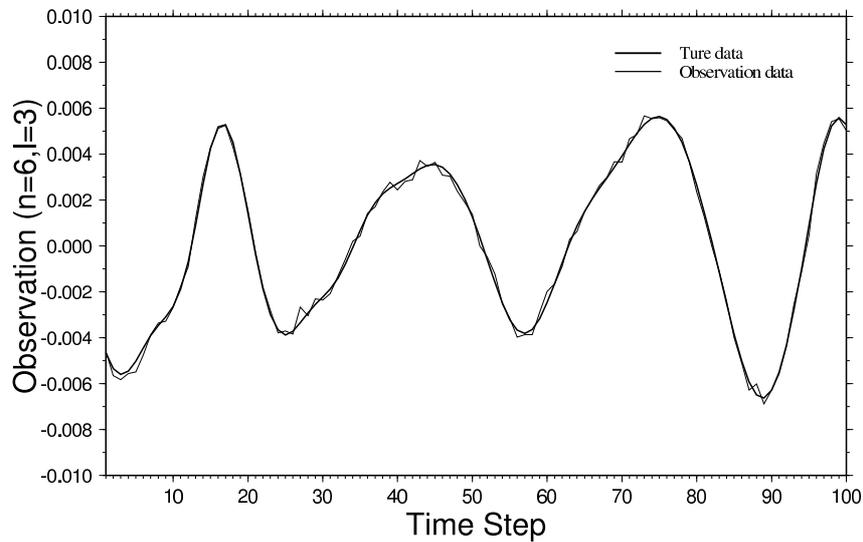


図 27: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する真値 (太線) と観測値 (細線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数は  $\rho = 1.80$ . データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

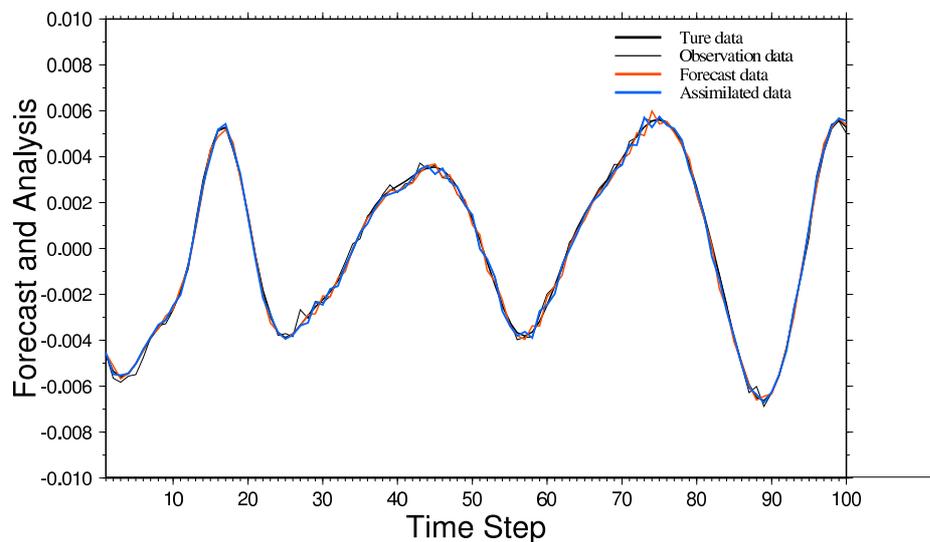


図 28: 真値 (黒太線), 予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 膨張係数は  $\rho = 1.80$ . 実験設定は図 27 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

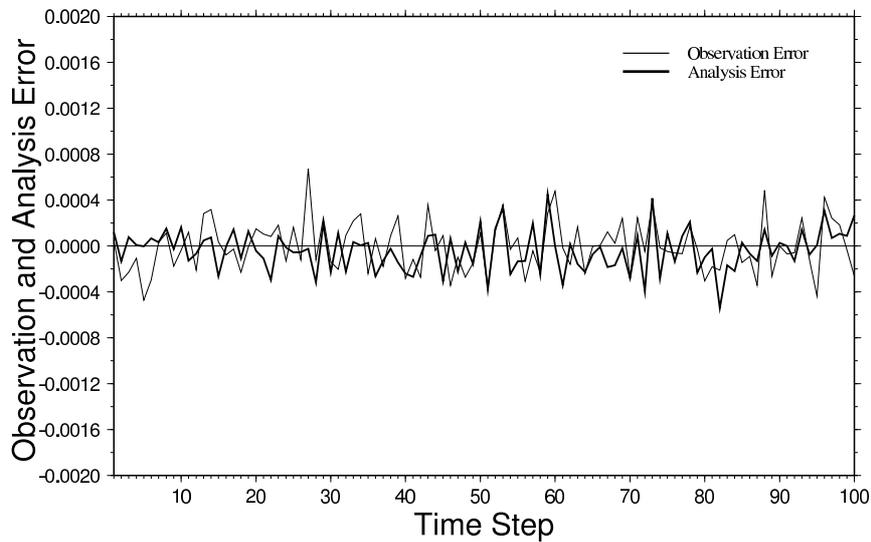


図 29: 観測誤差 (点線) および解析誤差 (実線). 膨張係数は  $\rho = 1.80$ . 実験設定は図 27 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

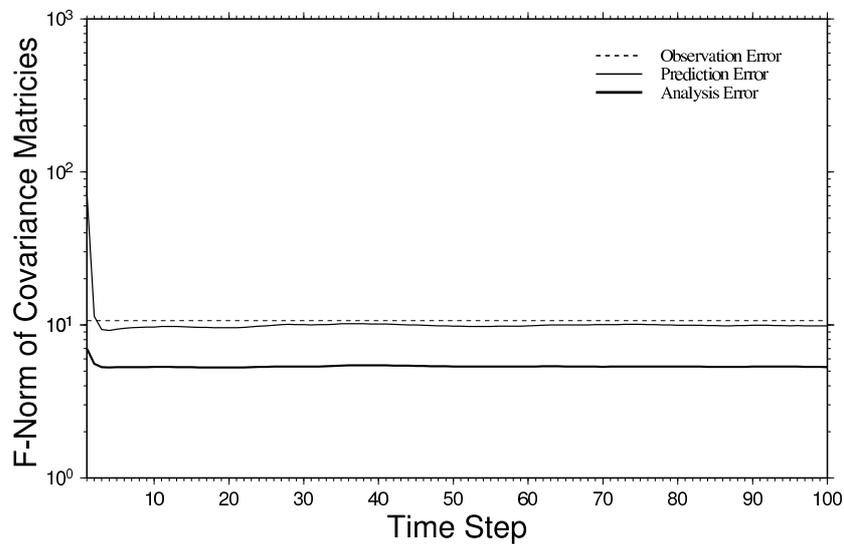


図 30: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.80$  とし, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

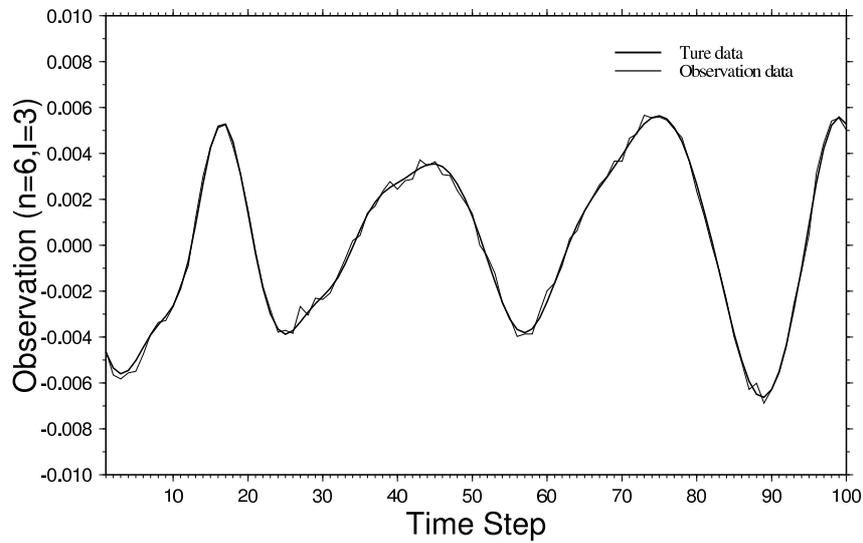


図 31: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する真値 (太線) と観測値 (細線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数は  $\rho = 1.70$ , アンサンブルメンバー数は 21. データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

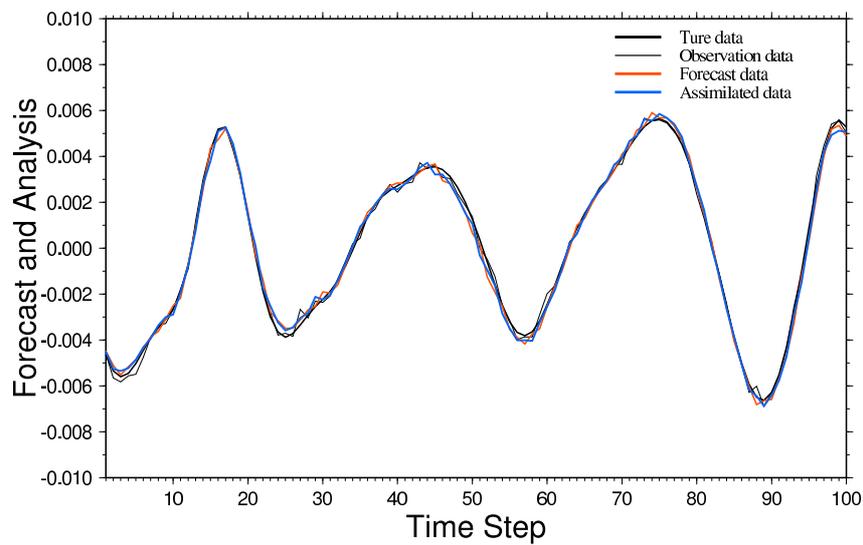


図 32: 真値 (黒太線), 予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 膨張係数は  $\rho = 1.70$ , アンサンブルメンバー数は 21. 実験設定は図 31 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

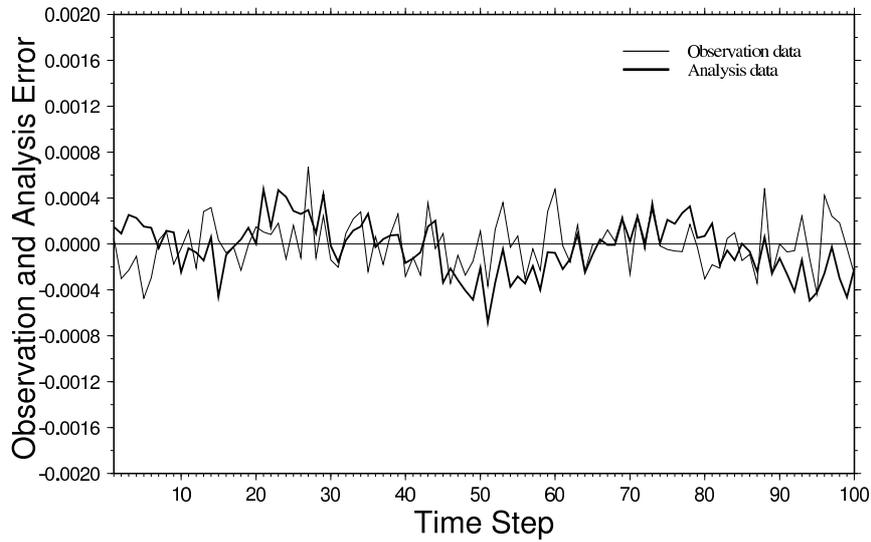


図 33: 観測誤差 (点線) および解析誤差 (実線). 膨張係数は  $\rho = 1.70$ , アンサンブルメンバー数は 21. 実験設定は図 31 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

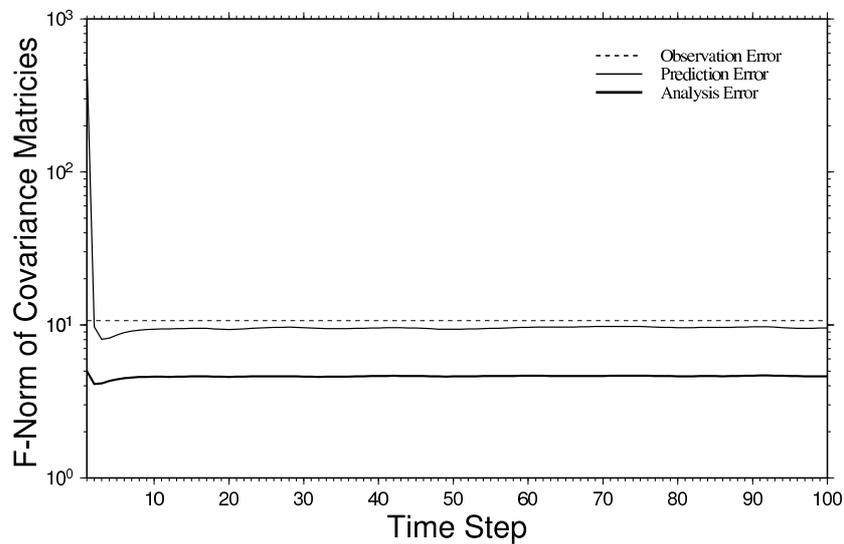


図 34: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.70$ , アンサンブルメンバー数は 21 とし, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

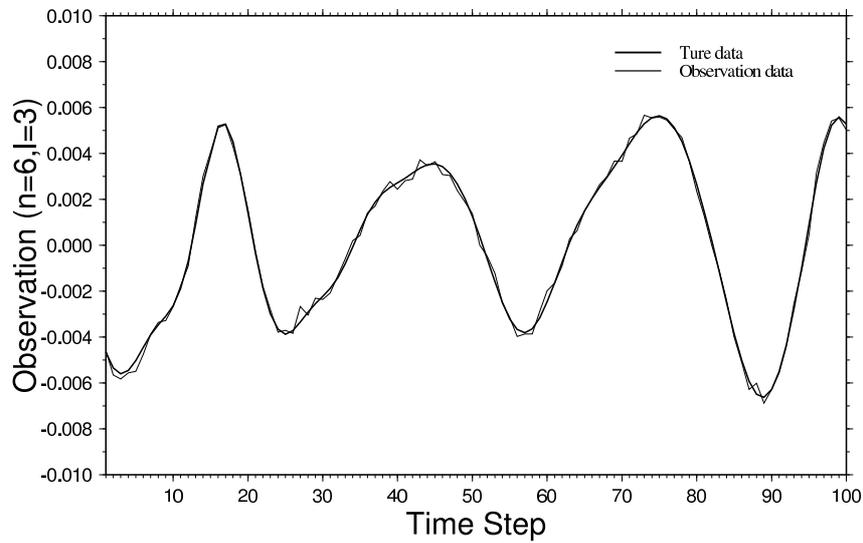


図 35: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する真値 (太線) と観測値 (細線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数は  $\rho = 1.60$ , アンサンブルメンバー数は 31. データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

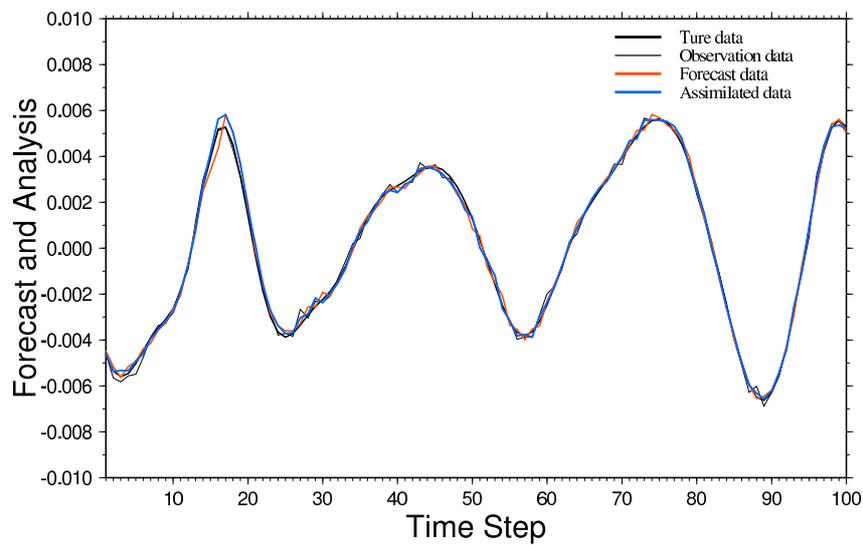


図 36: 真値 (黒太線), 予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 膨張係数は  $\rho = 1.60$ , アンサンブルメンバー数は 31. 実験設定は図 35 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

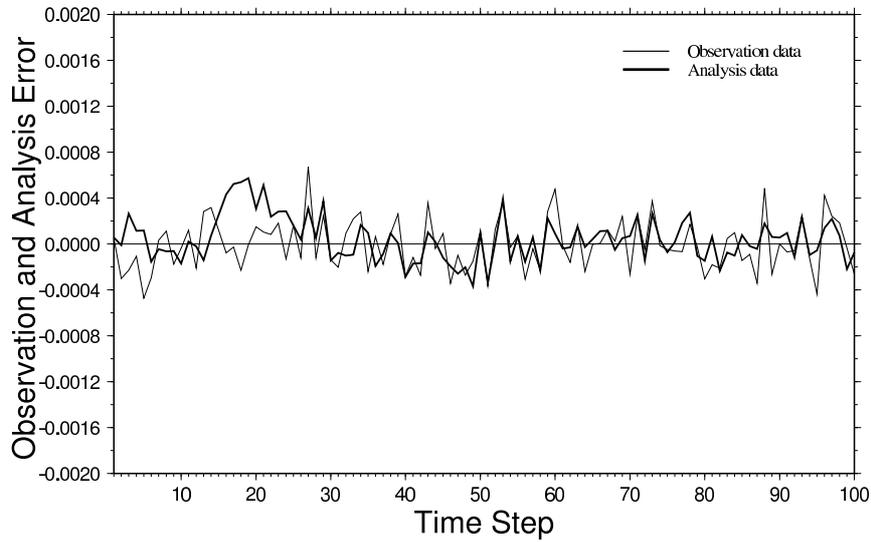


図 37: 観測誤差 (点線) および解析誤差 (実線). 膨張係数は  $\rho = 1.60$ , アンサンブルメンバー数は 31. 実験設定は図 35 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

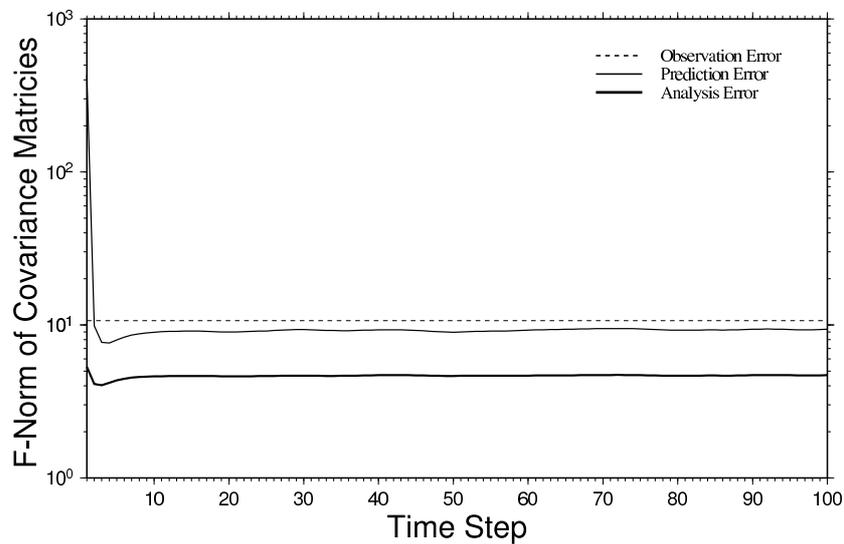


図 38: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.60$ , アンサンブルメンバー数は 31 とし, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

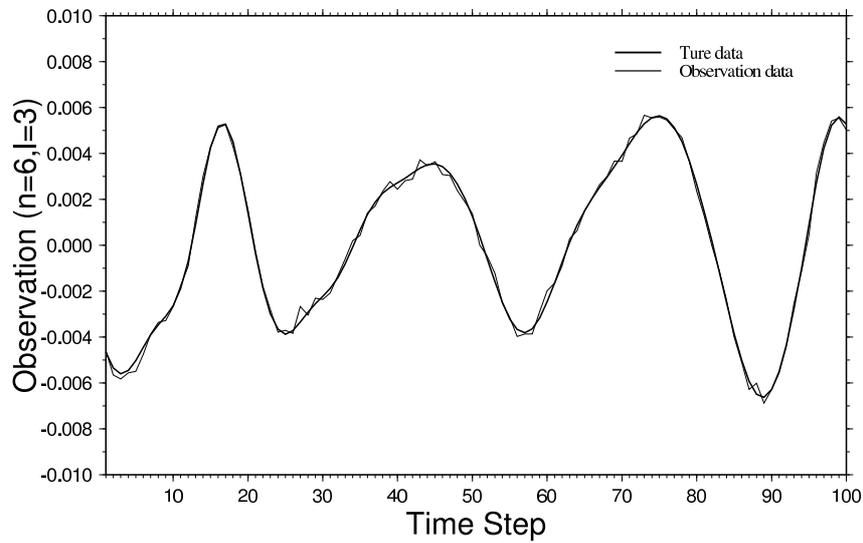


図 39: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する真値 (太線) と観測値 (細線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数は  $\rho = 1.55$ , アンサンブルメンバー数は 41. データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1990 年 1 月 1 日である.

## Ensemble Kalman Filter

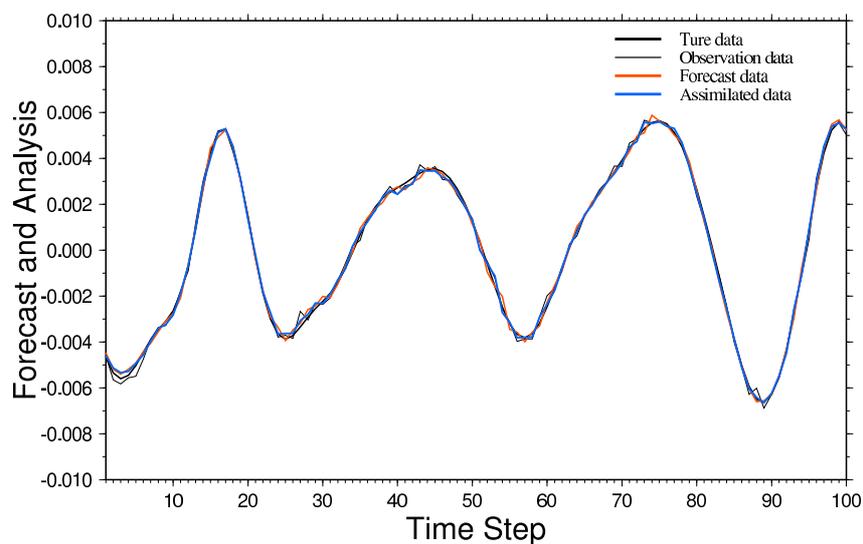


図 40: 真値 (黒太線), 予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 膨張係数は  $\rho = 1.55$ , アンサンブルメンバー数は 41. 実験設定は図 39 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

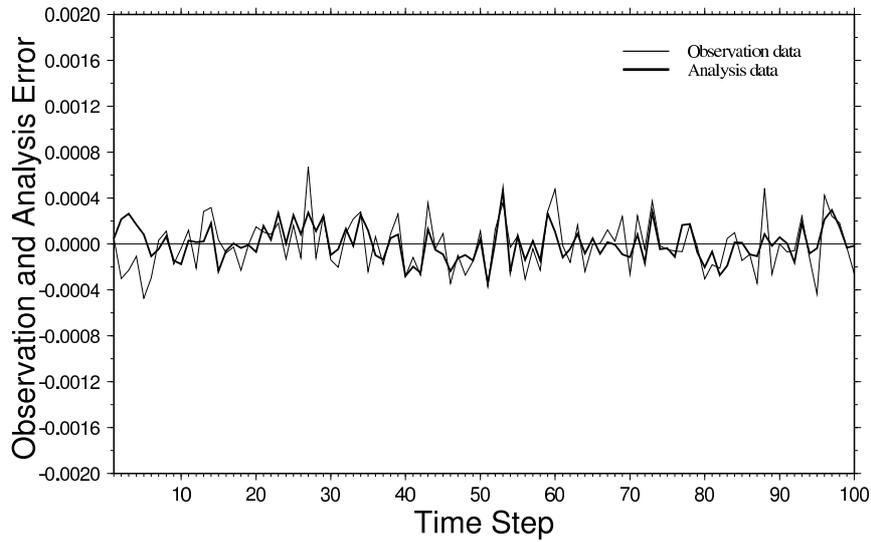


図 41: 観測誤差 (点線) および解析誤差 (実線). 膨張係数は  $\rho = 1.55$ , アンサンブルメンバー数は 41. 実験設定は図 39 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

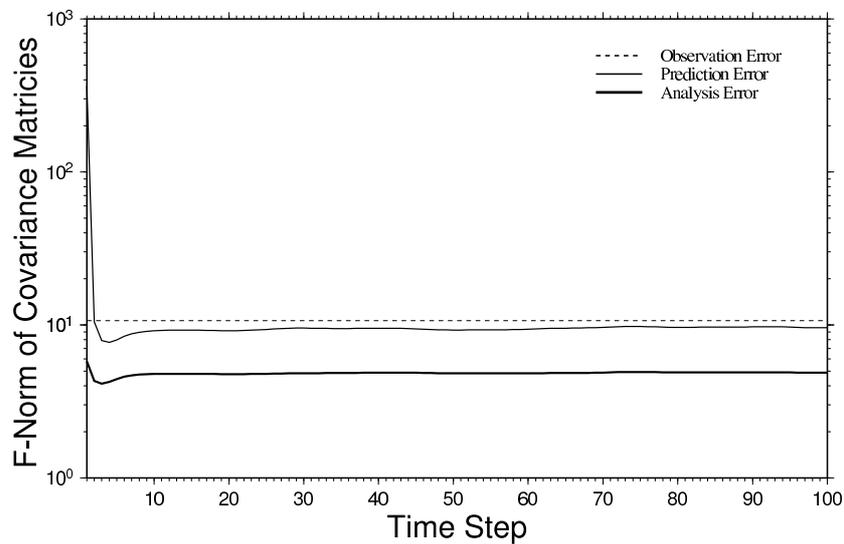


図 42: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.55$ , アンサンブルメンバー数は 41 とし, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

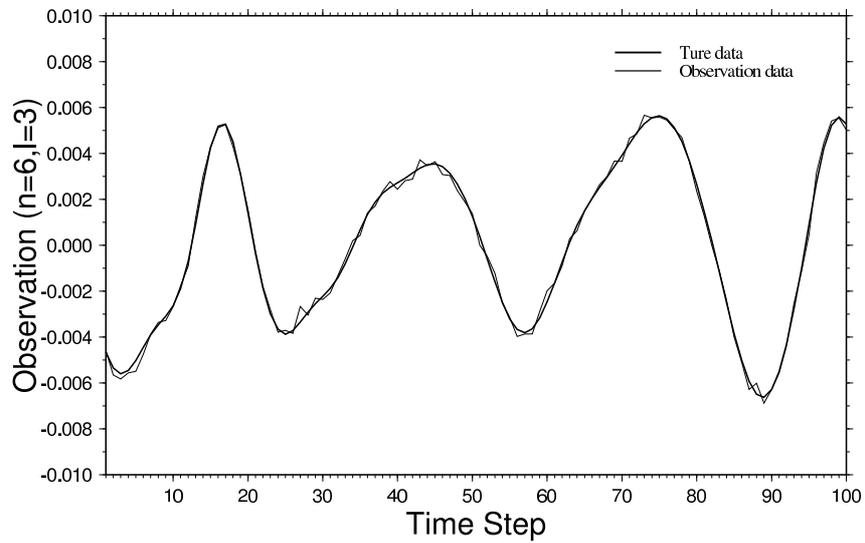


図 43: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する真値 (太線) と観測値 (細線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数は  $\rho = 1.53$ , アンサンブルメンバー数は 51. データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

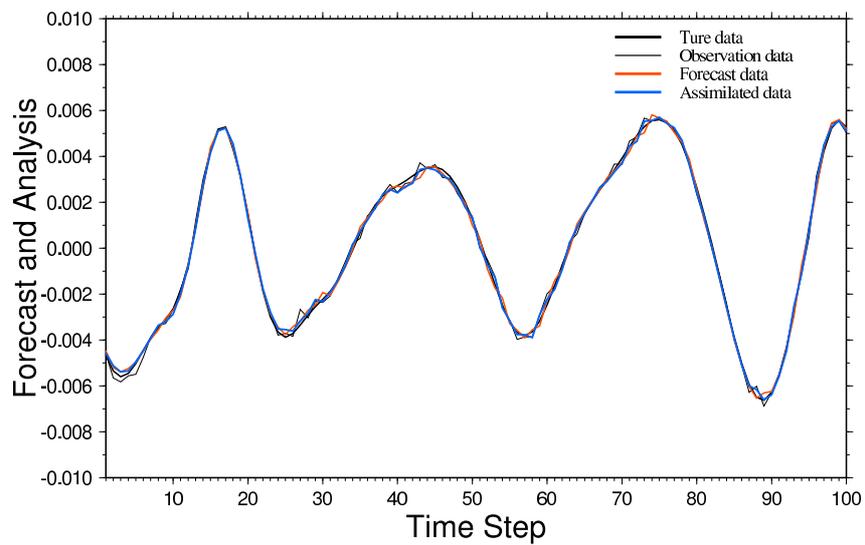


図 44: 真値 (黒太線), 予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 膨張係数は  $\rho = 1.53$ , アンサンブルメンバー数は 51. 実験設定は図 43 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

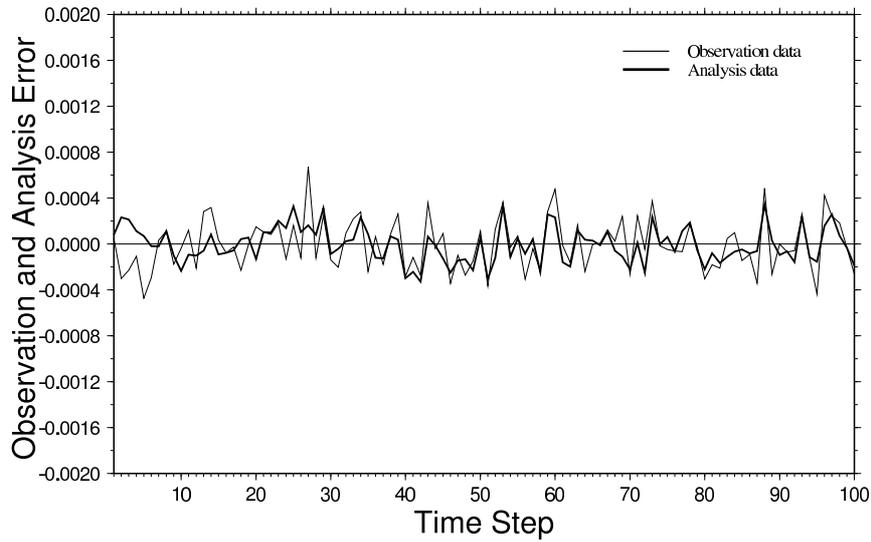


図 45: 観測誤差 (点線) および解析誤差 (実線). 膨張係数は  $\rho = 1.53$ , アンサンブルメンバー数は 51. 実験設定は図 43 と同じ.

## Ensemble Kalman Filter

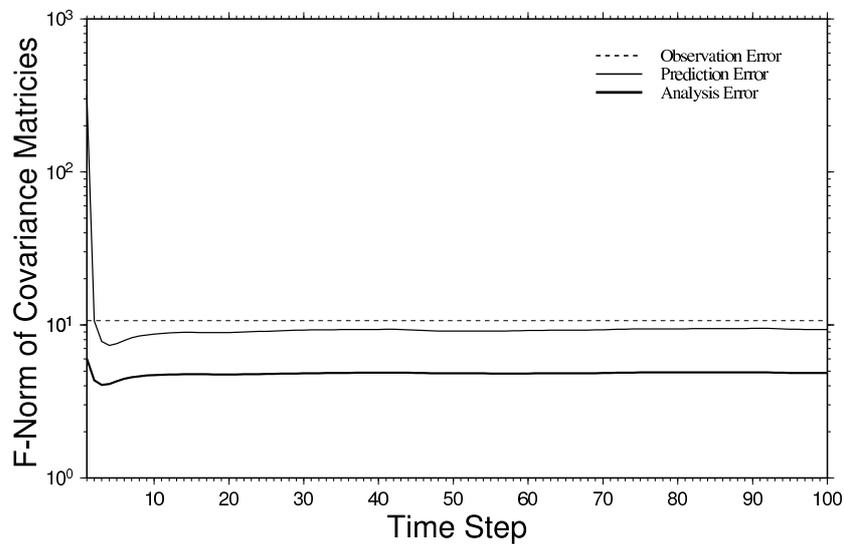


図 46: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.53$ , アンサンブルメンバー数は 51 とし, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Kalman Filter

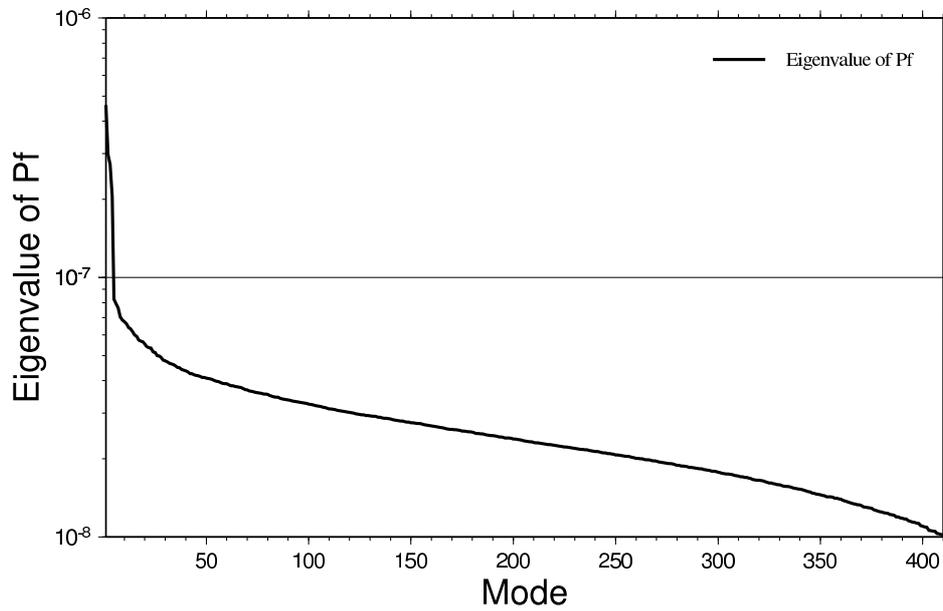


図 47: EKF の  $P^f$  の固有値スペクトル.

## EKF and EnKF

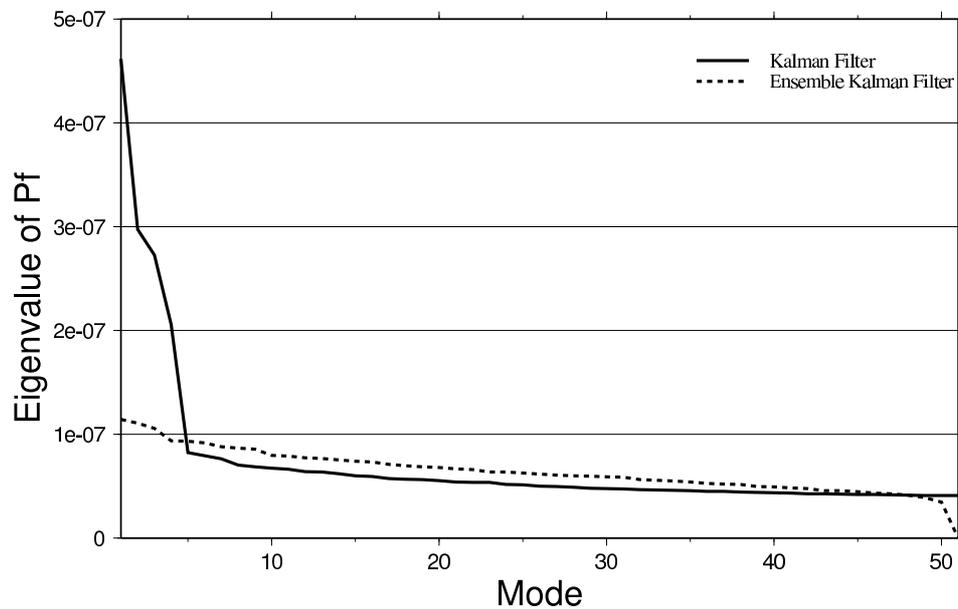


図 48: EKF および EnKF の  $P^f$  の固有値スペクトル. 実線は  $P^f$  の固有値スペクトル, 破線は  $P^f$  の固有値スペクトル. EnKF のアンサンブルメンバー数は 51.

## Kalman Filter

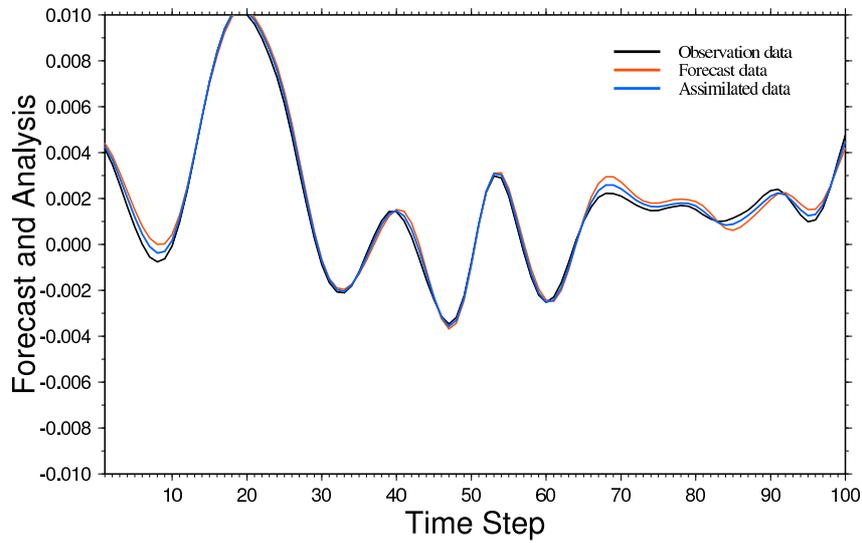


図 49: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数は  $\rho = 1.00$  である. データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Kalman Filter

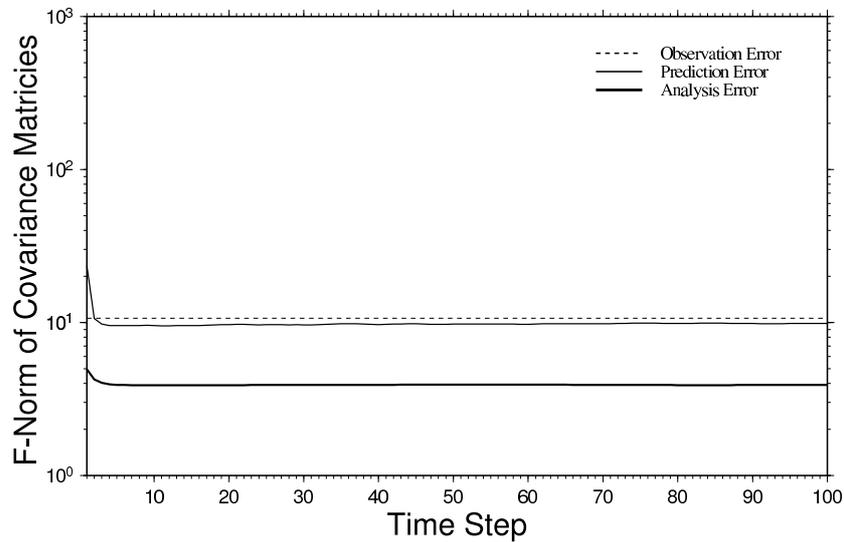


図 50: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.00$  とし, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Kalman Filter

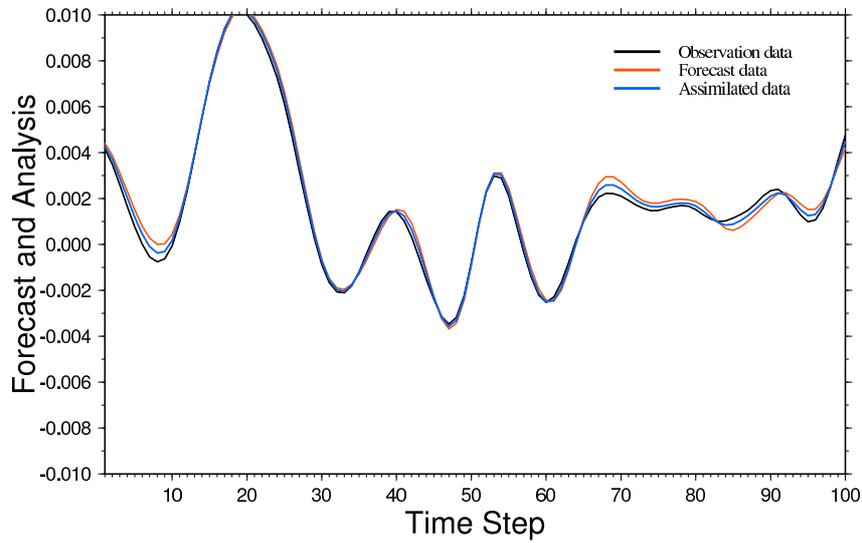


図 51: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数は  $\rho = 1.05$ . データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Kalman Filter

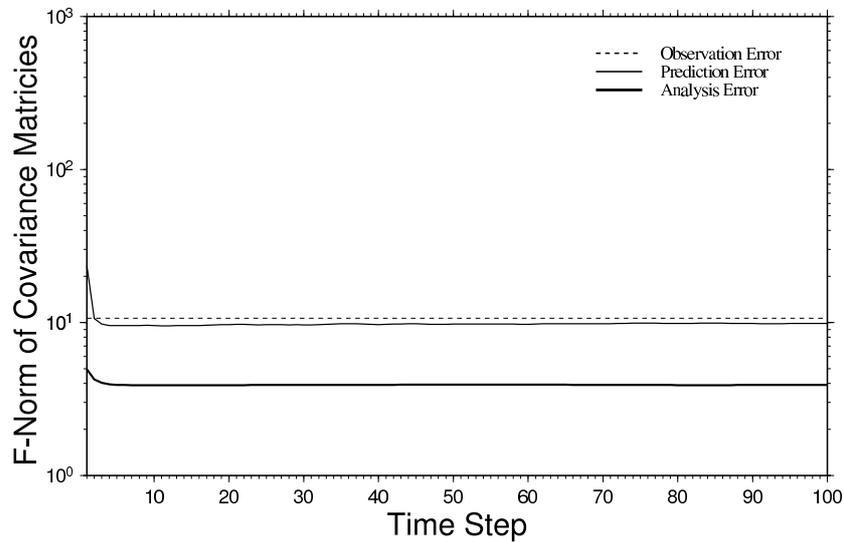


図 52: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.05$  とし, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Kalman Filter

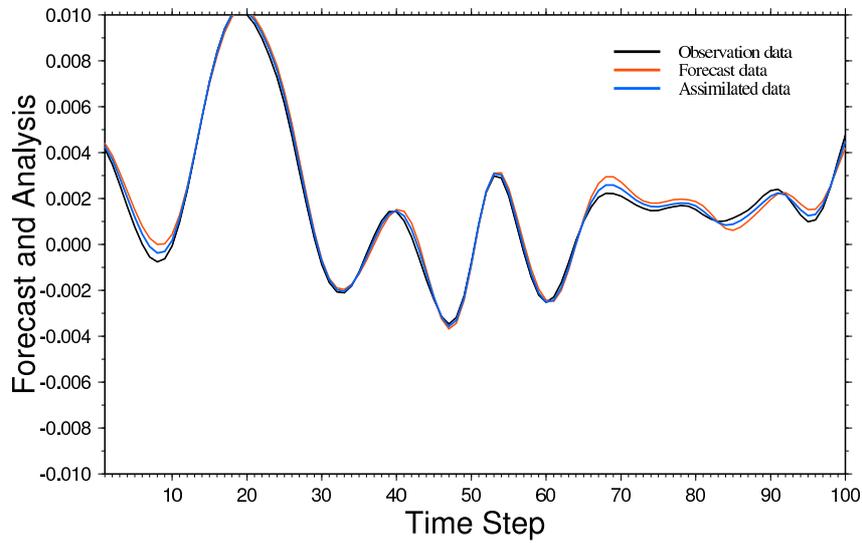


図 53: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数は  $\rho = 1.10$ . データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Kalman Filter

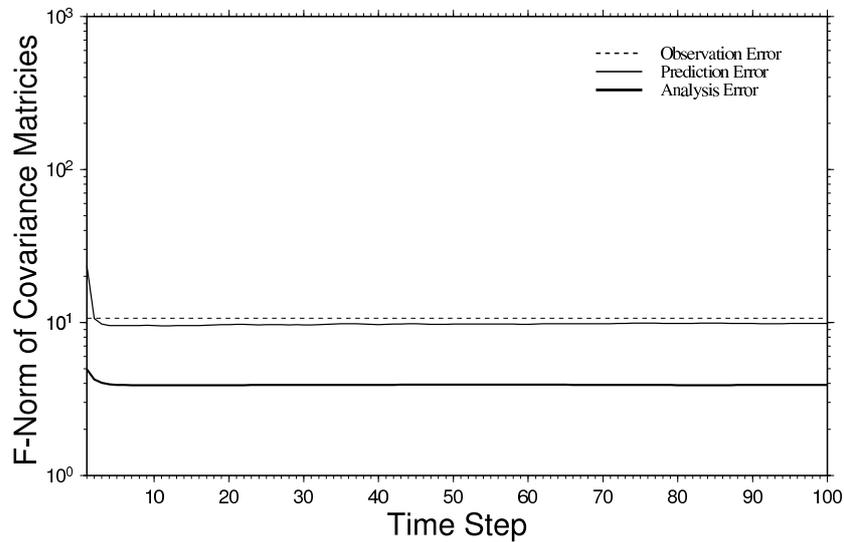


図 54: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.10$  とし, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Kalman Filter

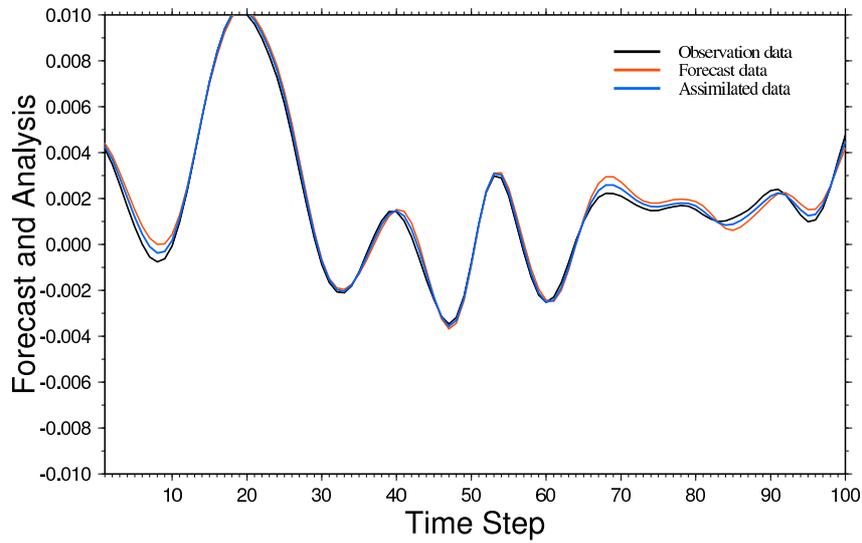


図 55: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数は  $\rho = 1.20$ . データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Kalman Filter

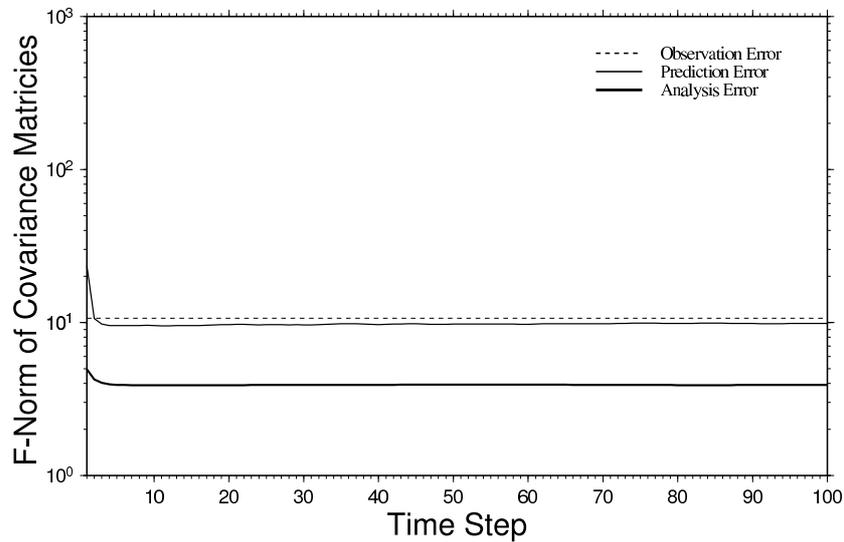


図 56: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.20$  とし, 初期値は 1990 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

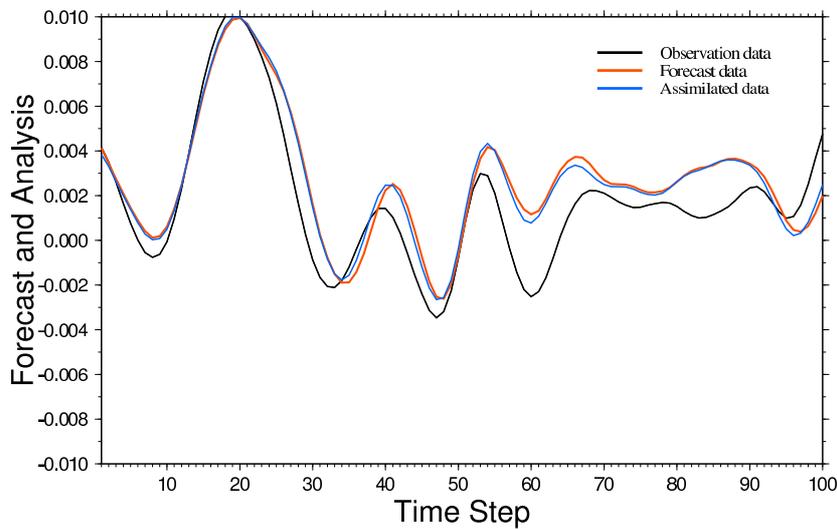


図 57: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数は  $\rho = 1.70$ , アンサンブルメンバー数は 51 である. データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1989 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

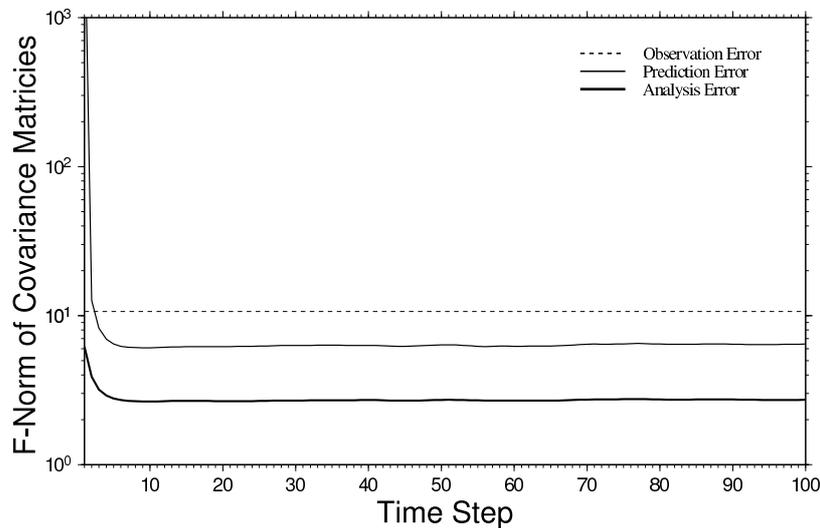


図 58: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 1.70$  とし, アンサンブルメンバー数は 51, 初期値は 1989 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

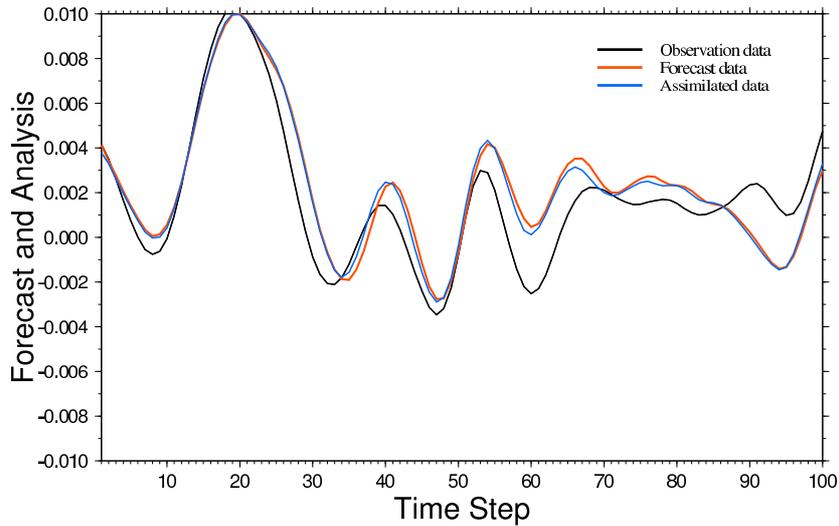


図 59: 東西波数 3, 南北波数 1 の展開係数 (実部) に対する予報値 (赤線), 観測値 (細黒線) および解析値 (青線). 横軸はタイムステップ数, 縦軸は展開係数  $w$ . また膨張係数は  $\rho = 2.00$ , アンサンブルメンバー数は 51 である. データ同化は 6 時間間隔で行い, 初期値は 1989 年 1 月 1 日.

## Ensemble Kalman Filter

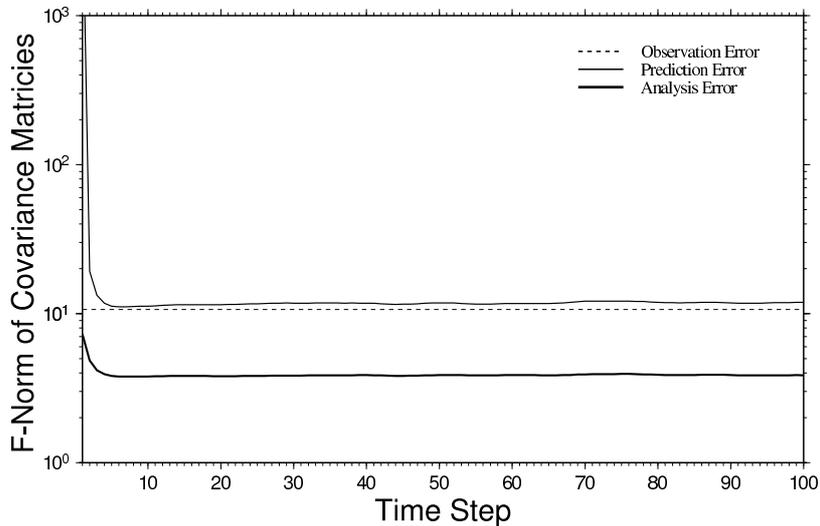


図 60: 観測誤差  $R$ , 予報誤差  $P^f$  および解析誤差  $P^a$  のノルムを示す. 横軸はタイムステップ数, 縦軸はノルムを示す. データ同化は 6 時間間隔で行い, 膨張係数は  $\rho = 2.00$ , アンサンブルメンバー数は 51 とし, 初期値は 1989 年 1 月 1 日.

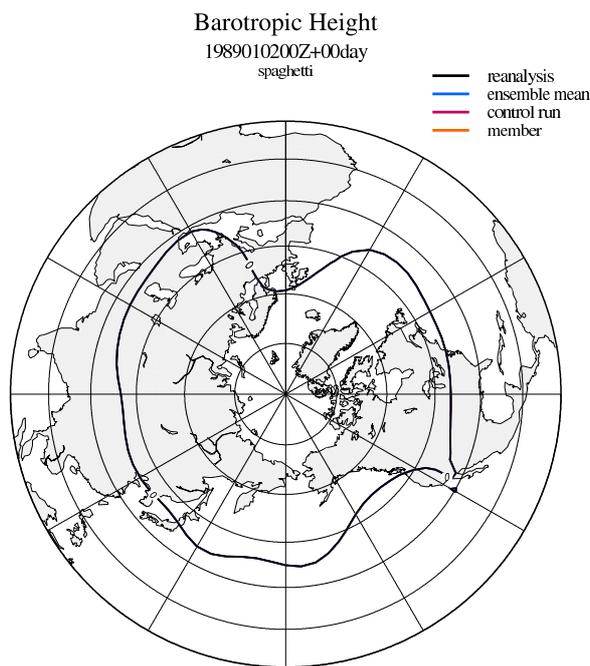


図 61: 外力アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 0 日予報のスパゲッティダイヤグラム (8 メンバー). 順圧高度 0 m の等値線. 黒線が NCEP/NCAR 再解析値, 青線がアンサンブル平均, 赤線が各メンバー, ピンクはコントロールランを示す.

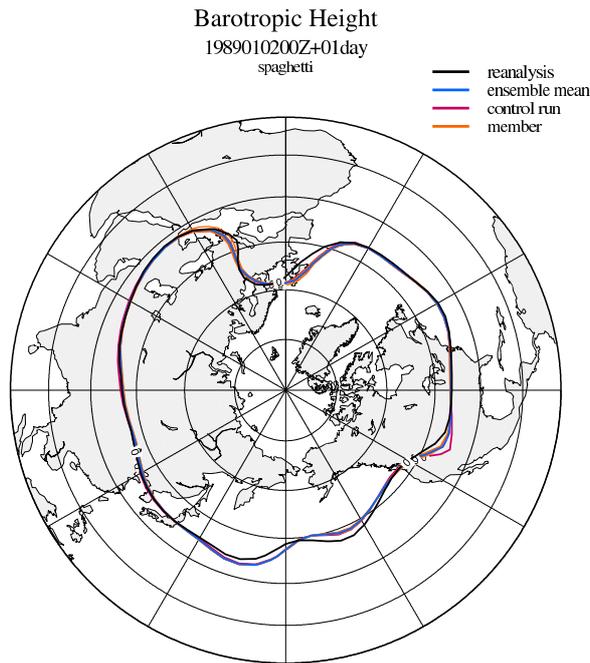


図 62: 外力アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 1 日予報のス  
パゲッティダイヤグラム (8 メンバー). 図の見方は, 図 61 と同じ.

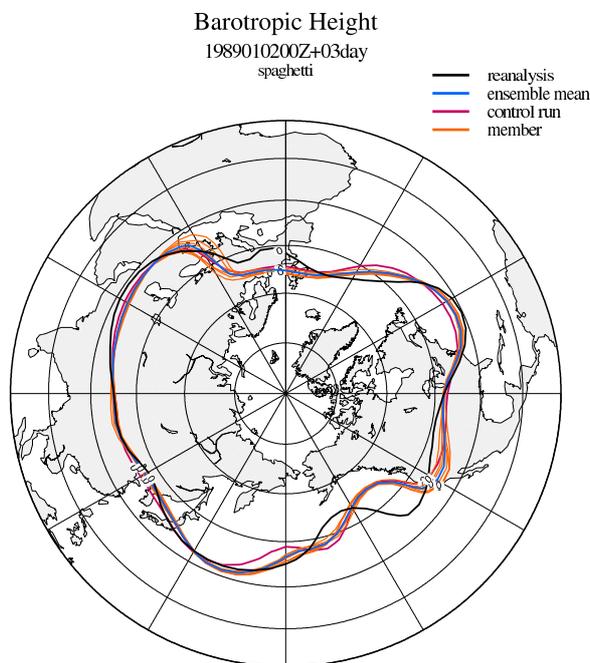


図 63: 外力アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 3 日予報のス  
パゲッティダイヤグラム (8 メンバー). 図の見方は, 図 61 と同じ.

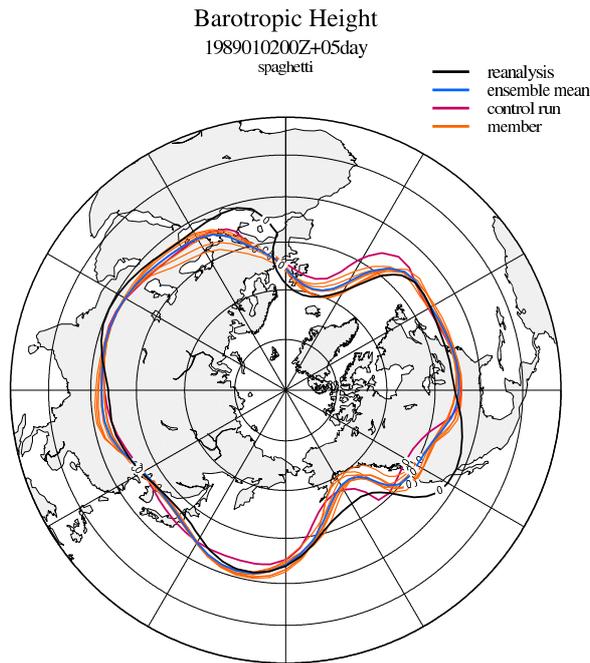


図 64: 外力アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 5 日予報のス  
パゲッティダイヤグラム (8 メンバー). 図の見方は, 図 61 と同じ.

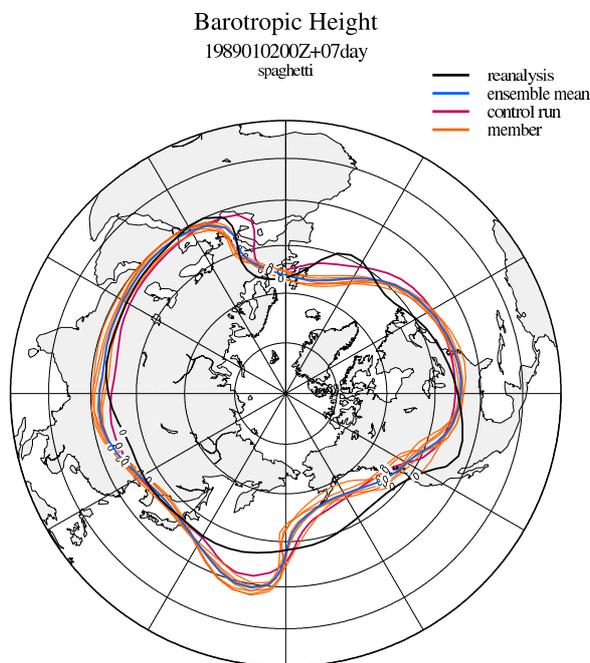


図 65: 外力アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 7 日予報のス  
パゲッティダイヤグラム (8 メンバー). 図の見方は, 図 61 と同じ.

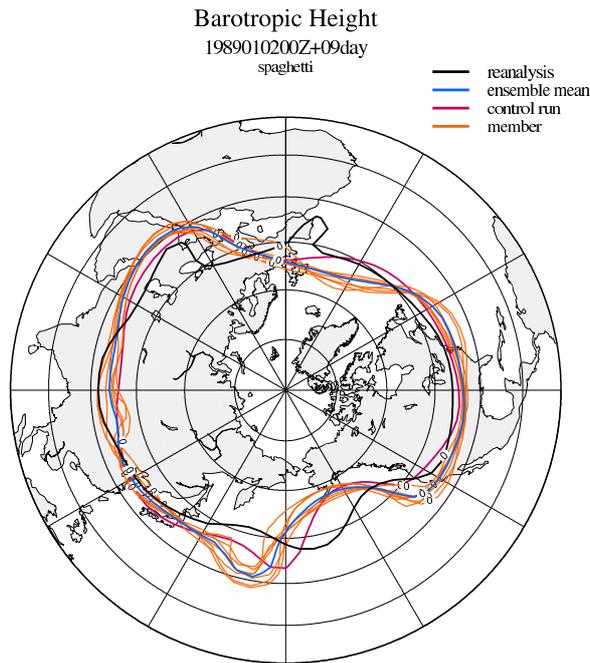


図 66: 外力アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 9 日予報のスパゲッティダイヤグラム (8 メンバー). 図の見方は, 図 61 と同じ.

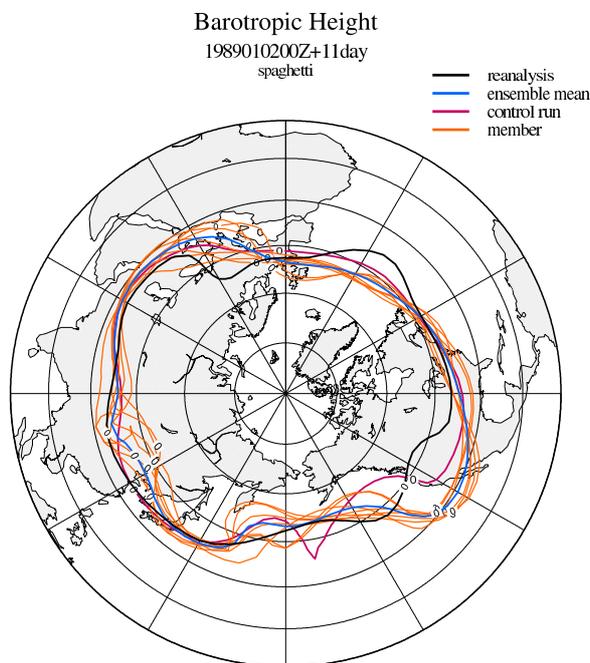


図 67: 外力アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 11 日予報のスパゲッティダイヤグラム (8 メンバー). 図の見方は, 図 61 と同じ.

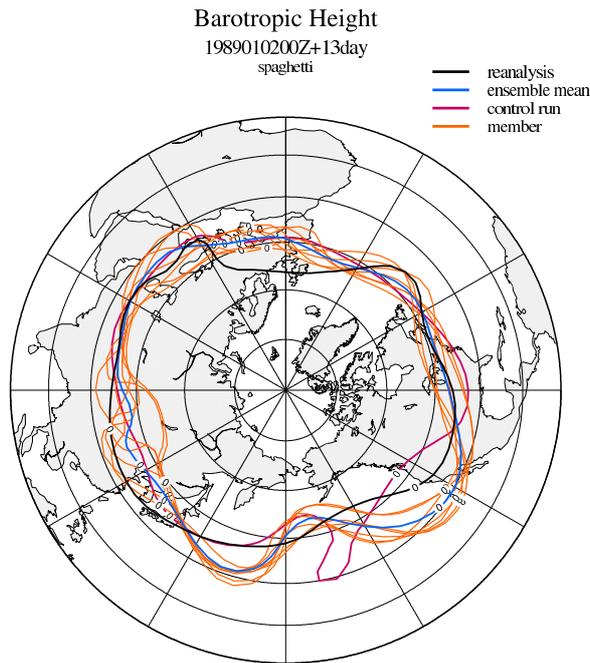


図 68: 外力アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 13 日予報のスパゲッティダイヤグラム (8 メンバー). 図の見方は, 図 61 と同じ.

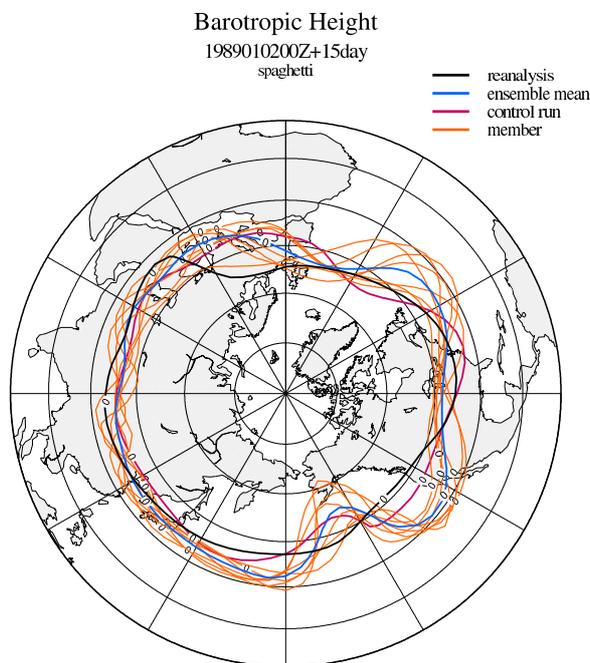


図 69: 外力アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 15 日予報のスパゲッティダイヤグラム (8 メンバー). 図の見方は, 図 61 と同じ.

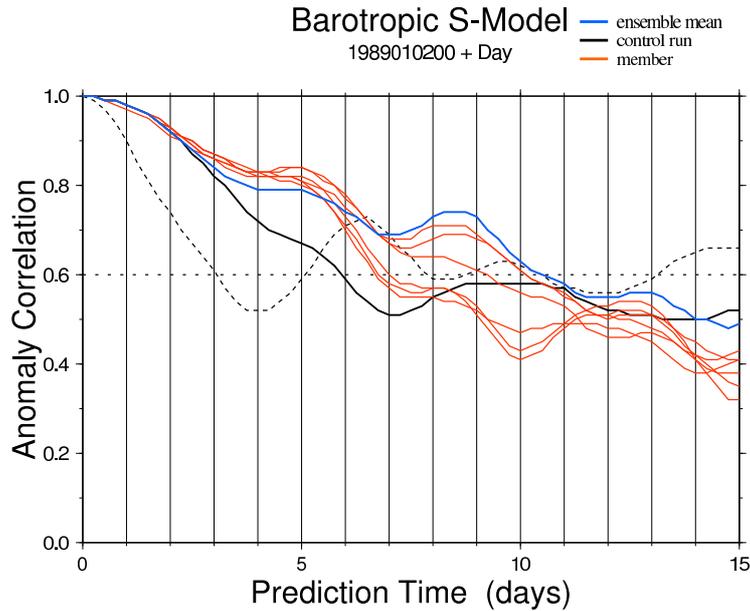


図 70: 8 メンバー外カアンサンプルの順圧高度に対する 15 日予報のアノマリ相関. 横軸は予報時間, 縦軸はアノマリ相関. アノマリ相関が 0.6 を上回っている期間を予測可能限界とする. 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とし, 青線がアンサンブル平均, 黒線がコントロールラン, 赤線が各メンバー, 破線が持続予報を示す.

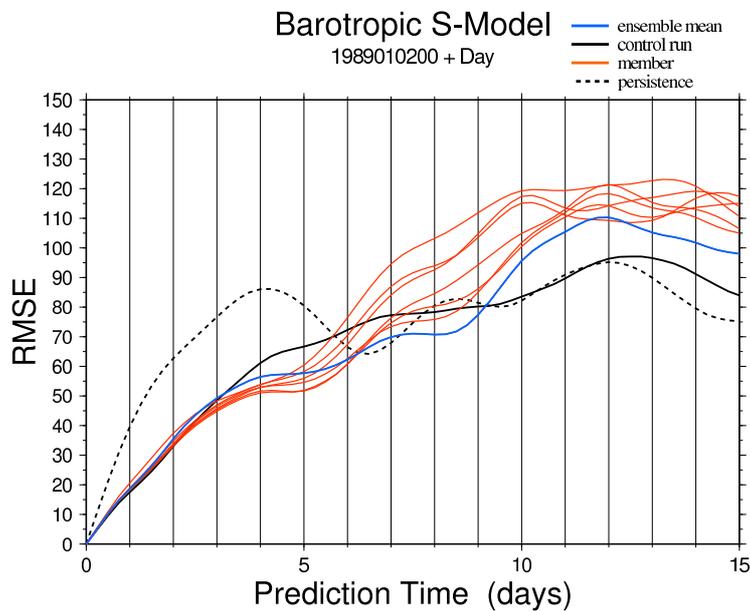


図 71: 8 メンバー外カアンサンプルの順圧高度に対する 15 日予報の RMSE. 横軸は予報時間, 縦軸は RMSE. 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とし, 青線がアンサンブル平均, 黒線がコントロールラン, 赤線が各メンバー, 破線が持続予報を示す.

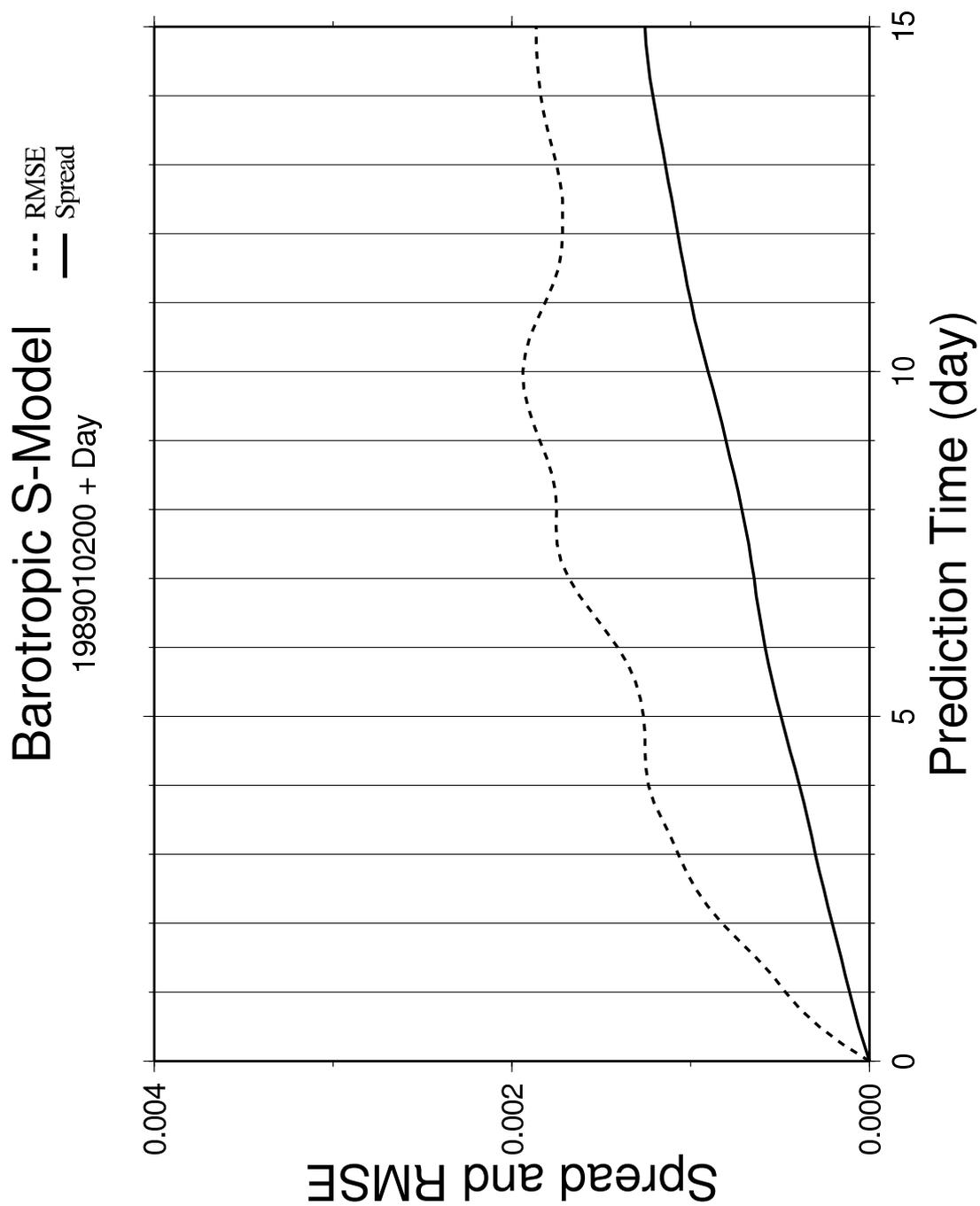


図 72: 8 メンバー外カアンサンプルの展開係数  $w_i$  に対する 15 日予報の RMSE とスプレッド. 横軸は予報時間, 縦軸は RMSE およびスプレッド. 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とし, 破線が RMSE, 実線がスプレッドを示す.

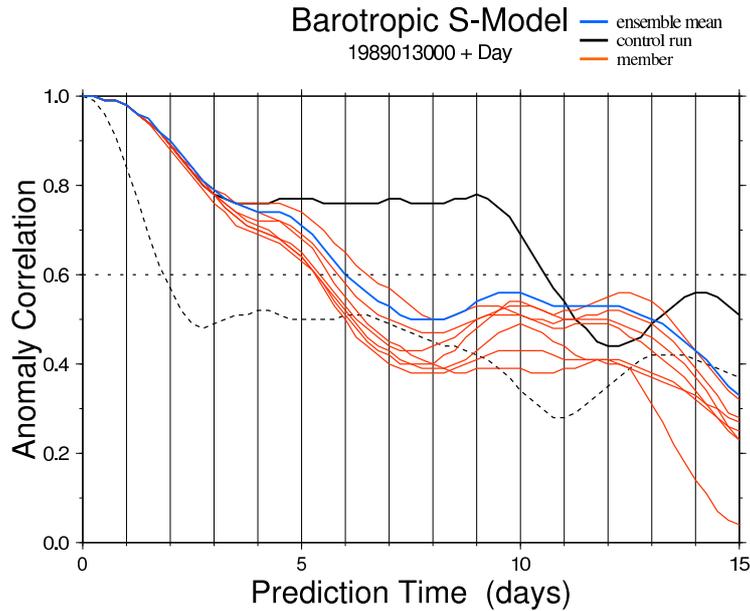


図 73: 8 メンバー外力アンサンブルの順圧高度に対する 15 日予報のアノマリ相関. 横軸は予報時間, 縦軸はアノマリ相関. アノマリ相関が 0.6 を上回っている期間を予測可能限界とする. 1989 年 1 月 30 日 00Z を初期値とし, 青線がアンサンブル平均, 黒線がコントロールラン, 赤線が各メンバー, 破線が持続予報を示す.

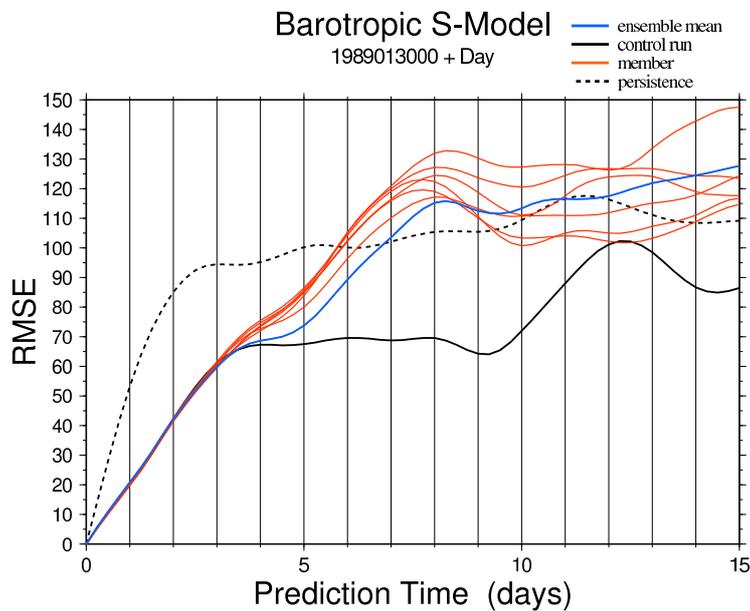


図 74: 8 メンバー外力アンサンブルの順圧高度に対する 15 日予報の RMSE. 横軸は予報時間, 縦軸は RMSE. 1989 年 1 月 30 日 00Z を初期値, 青線がアンサンブル平均, 黒線がコントロールラン, 赤線が各メンバー, 破線が持続予報を示す.

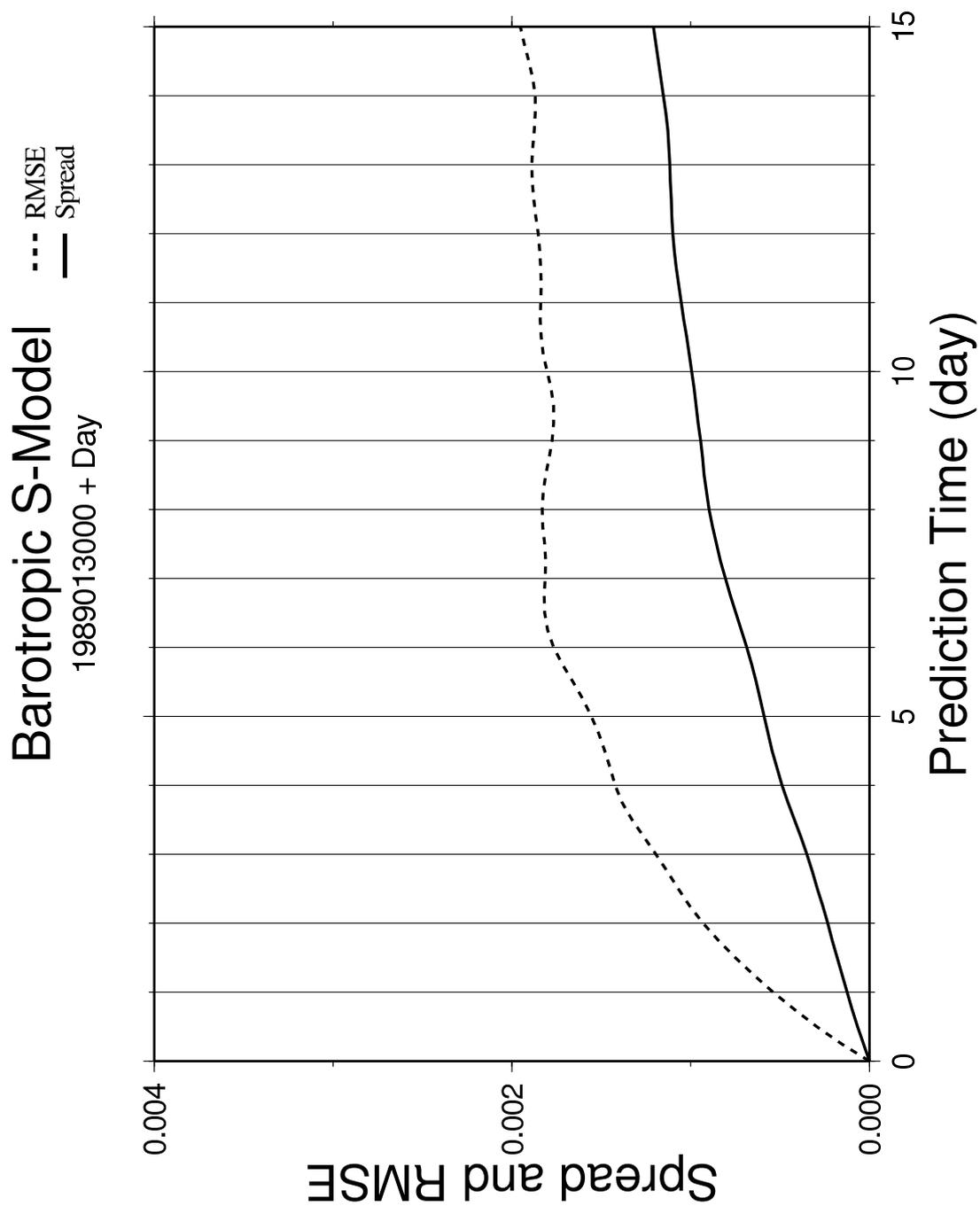


図 75: 8メンバー外カアンサンプルの展開係数  $w_i$  に対する 15 日予報の RMSE とスプレッド. 横軸は予報時間, 縦軸は RMSE およびスプレッド. 1989 年 1 月 30 日 00Z を初期値とし, 破線が RMSE, 実線がスプレッドを示す.

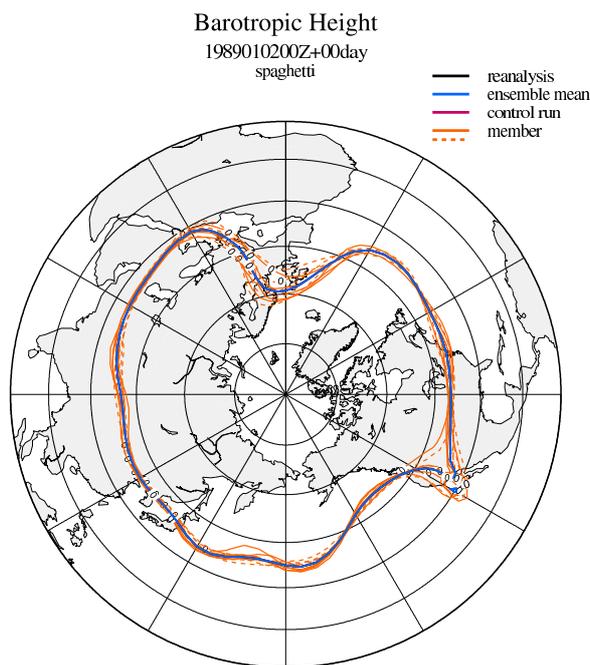


図 76: EOF アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 0 日予報のスパゲッティダイヤグラム (11 メンバー). 順圧高度 0 m の等値線. 黒線が NCEP/NCAR 再解析値, 青線がアンサンブル平均, 赤線が各メンバー (実線: 摂動を加えたメンバー, 波線: 摂動を引いたメンバー), ピンクはコントロールランを示す.

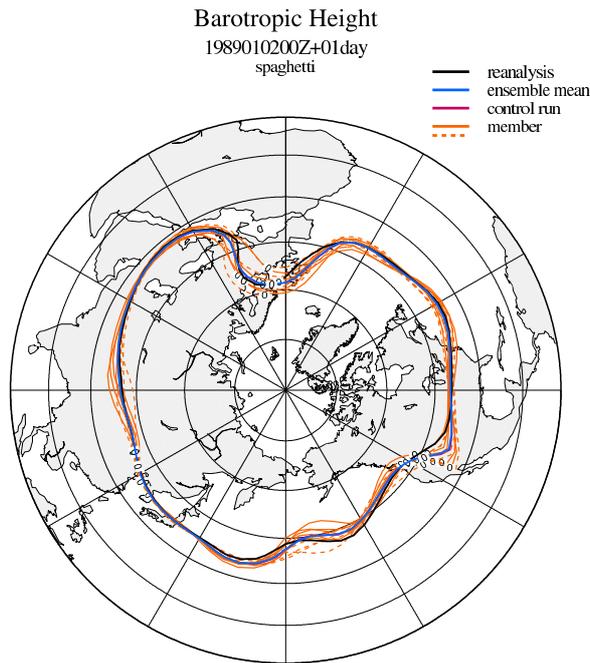


図 77: EOF アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 1 日予報のスパゲッティダイヤグラム (11 メンバー). 図の見方は, 図 76 と同じ.

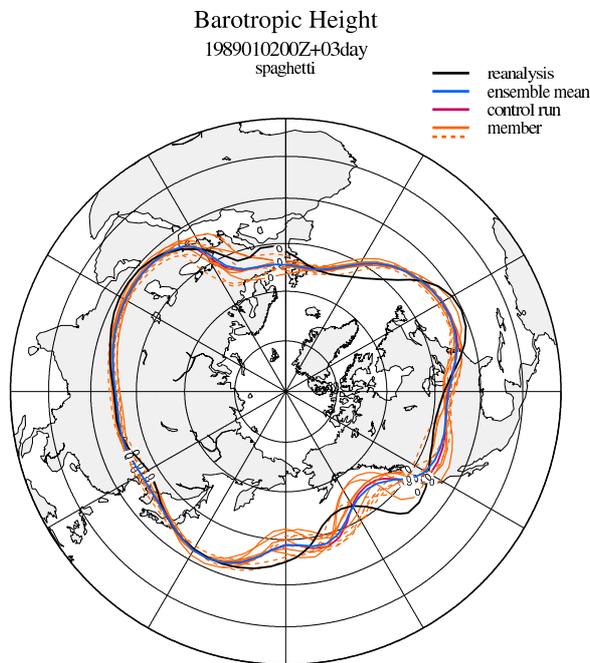


図 78: EOF アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 3 日予報のスパゲッティダイヤグラム (11 メンバー). 図の見方は, 図 76 と同じ.

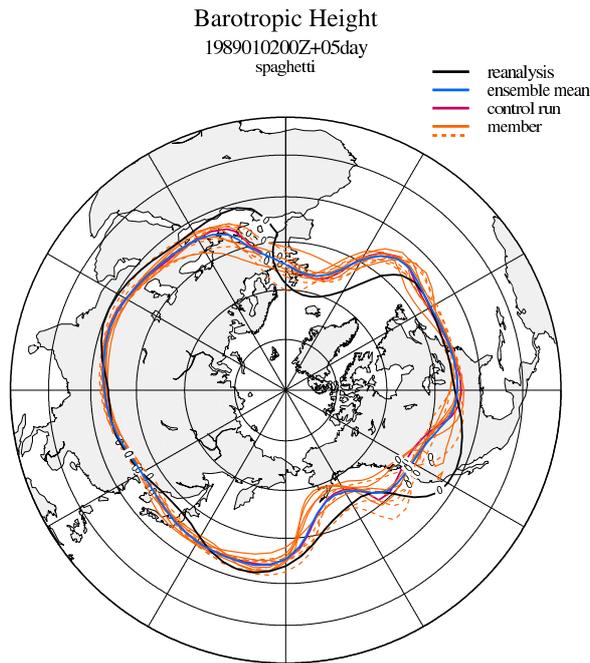


図 79: EOF アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 5 日予報のスパゲッティダイヤグラム (11 メンバー). 図の見方は, 図 76 と同じ.

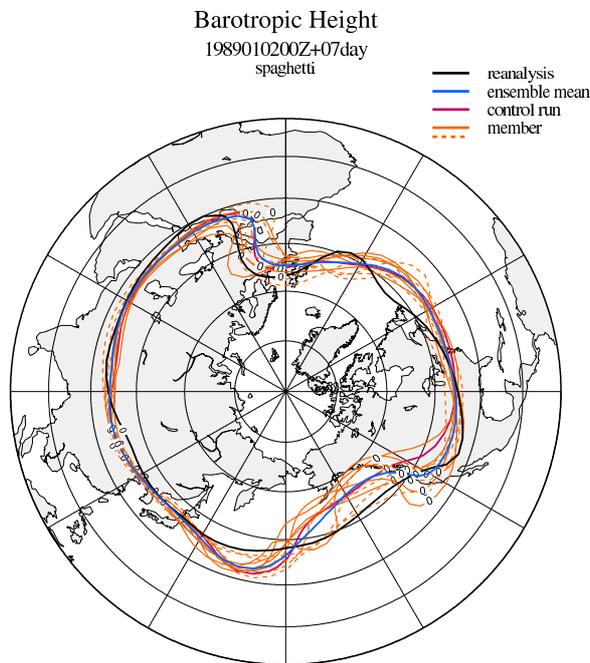


図 80: EOF アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 7 日予報のスパゲッティダイヤグラム (11 メンバー). 図の見方は, 図 76 と同じ.

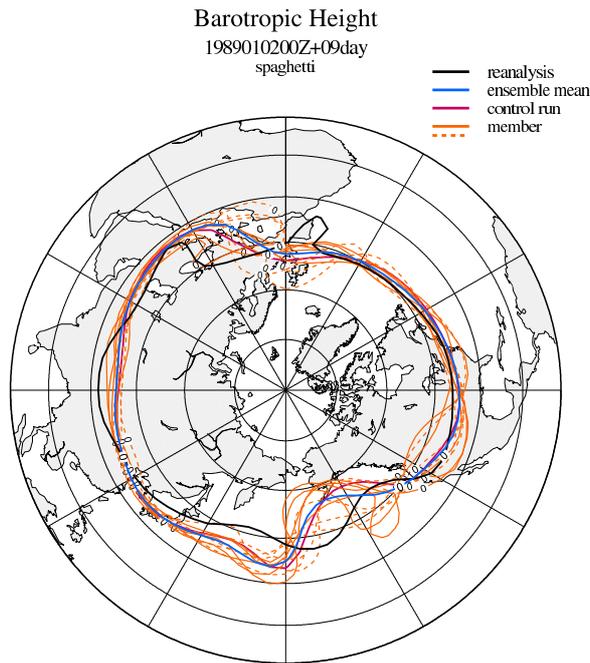


図 81: EOF アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 9 日予報のスパゲッティダイヤグラム (11 メンバー). 図の見方は, 図 76 と同じ.

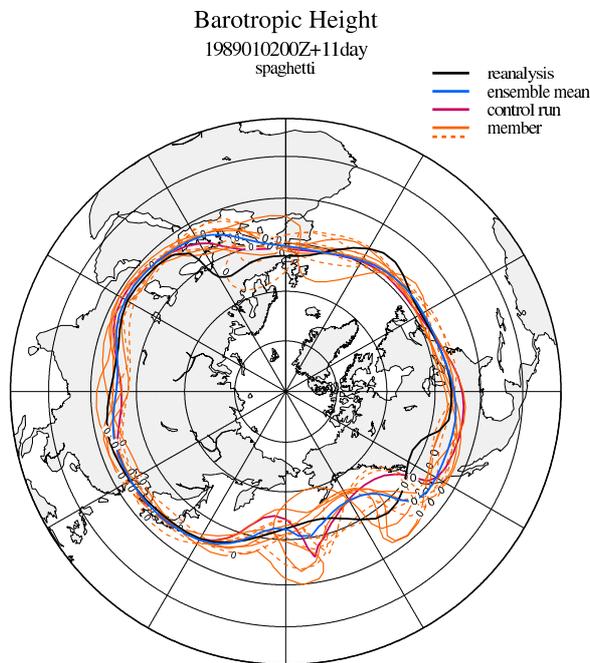


図 82: EOF アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 11 日予報のスパゲッティダイヤグラム (11 メンバー). 図の見方は, 図 76 と同じ.

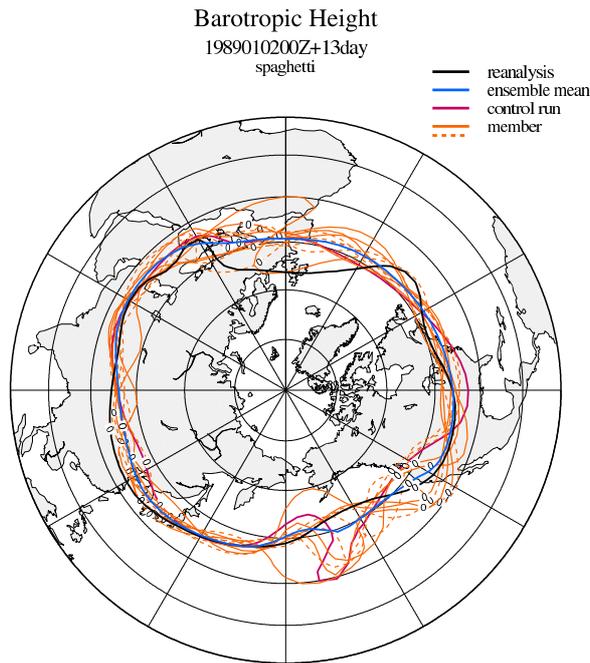


図 83: EOF アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 13 日予報のスパゲッティダイヤグラム (11 メンバー). 図の見方は, 図 76 と同じ.

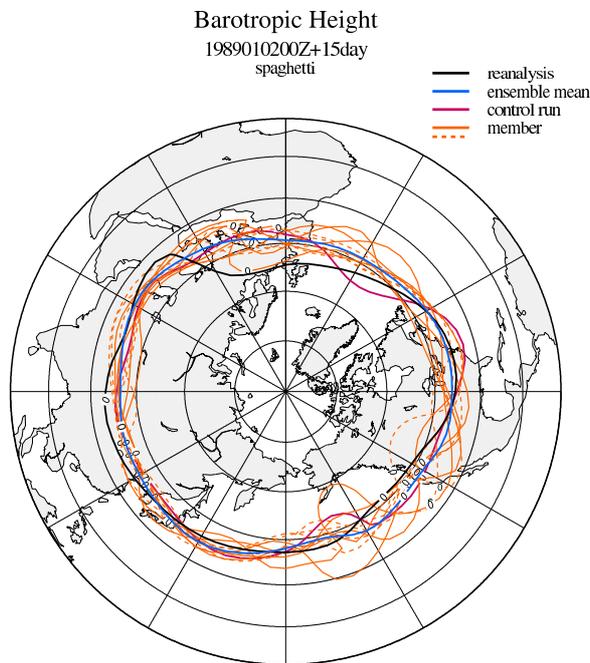


図 84: EOF アンサンブルによる 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とする 15 日予報のスパゲッティダイヤグラム (11 メンバー). 図の見方は, 図 76 と同じ.

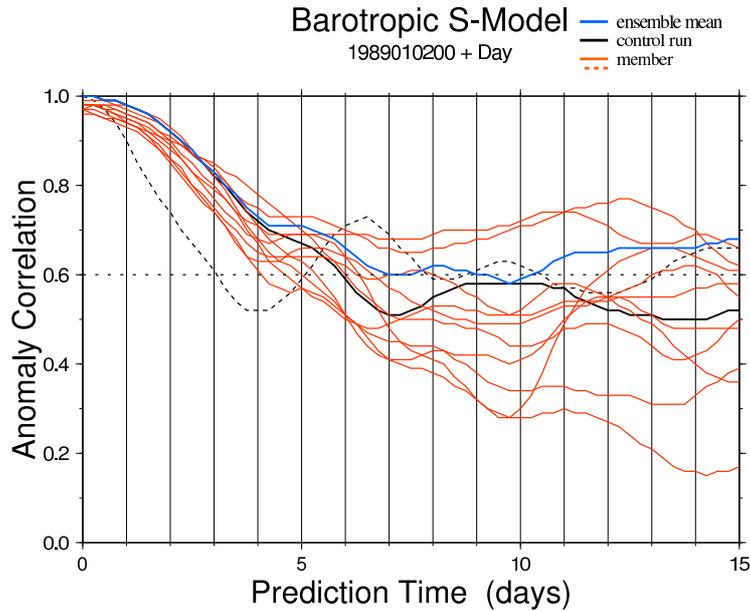


図 85: 11 メンバー EOF アンサンブルの順圧高度に対する 15 日予報のアノマリ相関. 横軸は予報時間, 縦軸はアノマリ相関. アノマリ相関が 0.6 を上回っている期間を予測可能限界とする. 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とし, 青線がアンサンブル平均, 黒線がコントロールラン, 赤線が各メンバー, 破線が持続予報を示す.

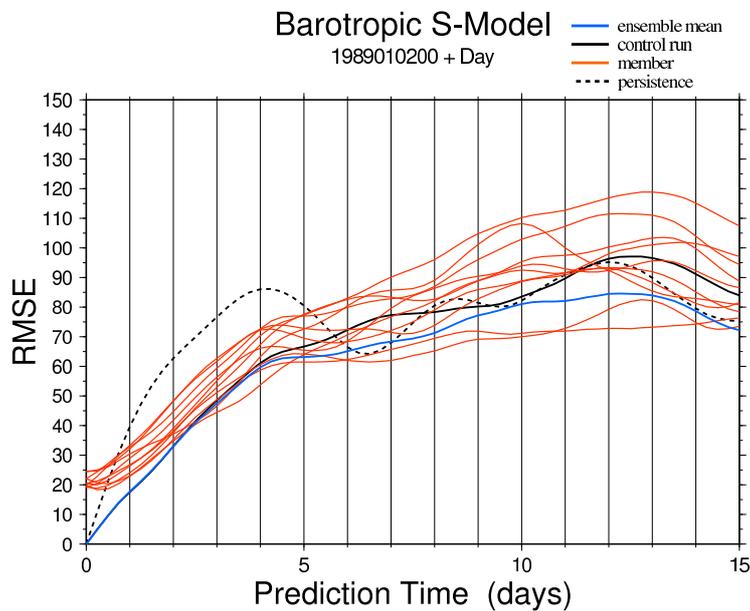


図 86: 11 メンバー EOF アンサンブルの順圧高度に対する 15 日予報の RMSE. 横軸は予報時間, 縦軸は RMSE. 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とし, 青線がアンサンブル平均, 黒線がコントロールラン, 赤線が各メンバー, 破線が持続予報を示す.

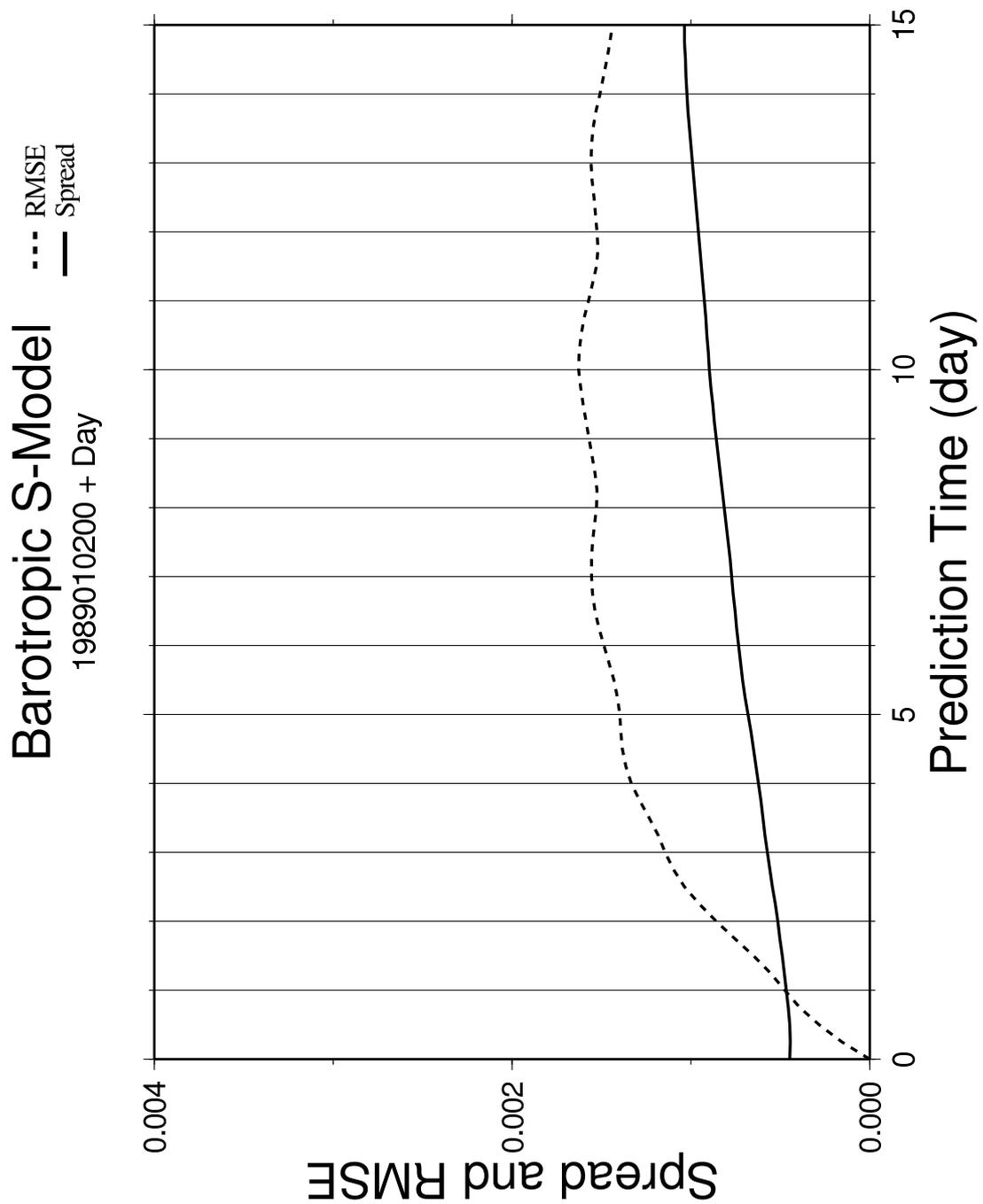


図 87: 11 メンバー EOF アンサンブルの展開係数  $w_i$  に対する 15 日予報の RMSE とスプレッド. 横軸は予報時間, 縦軸は RMSE およびスプレッド. 1989 年 1 月 2 日 00Z を初期値とし, 破線が RMSE, 実線がスプレッドを示す.

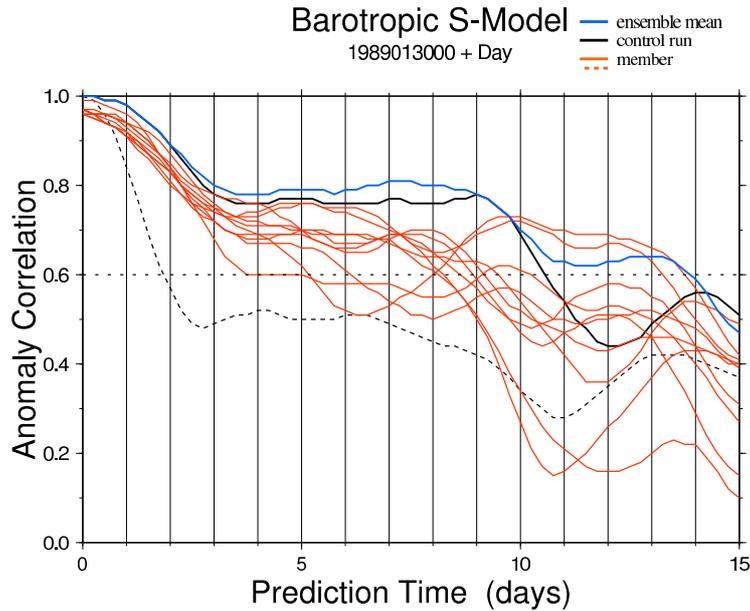


図 88: 11 メンバー EOF アンサンブルの順圧高度に対する 15 日予報のアノマリ相関. 横軸は予報時間, 縦軸はアノマリ相関. アノマリ相関が 0.6 を上回っている期間を予測可能限界とする. 1989 年 1 月 30 日 00Z を初期値とし, 青線がアンサンブル平均, 黒線がコントロールラン, 赤線が各メンバー, 破線が持続予報を示す.

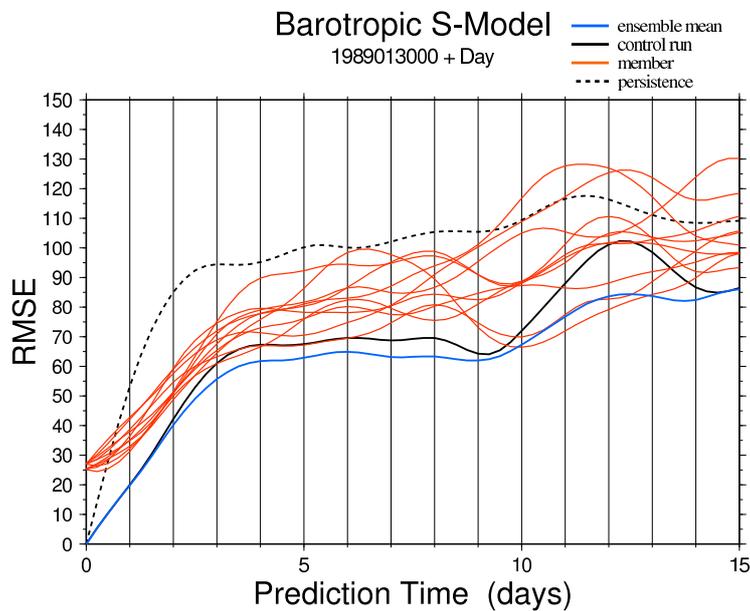


図 89: 11 メンバー EOF アンサンブルの順圧高度に対する 15 日予報の RMSE. 横軸は予報時間, 縦軸は RMSE. 1989 年 1 月 30 日 00Z を初期値とし, 青線がアンサンブル平均, 黒線がコントロールラン, 赤線が各メンバー, 破線が持続予報を示す.

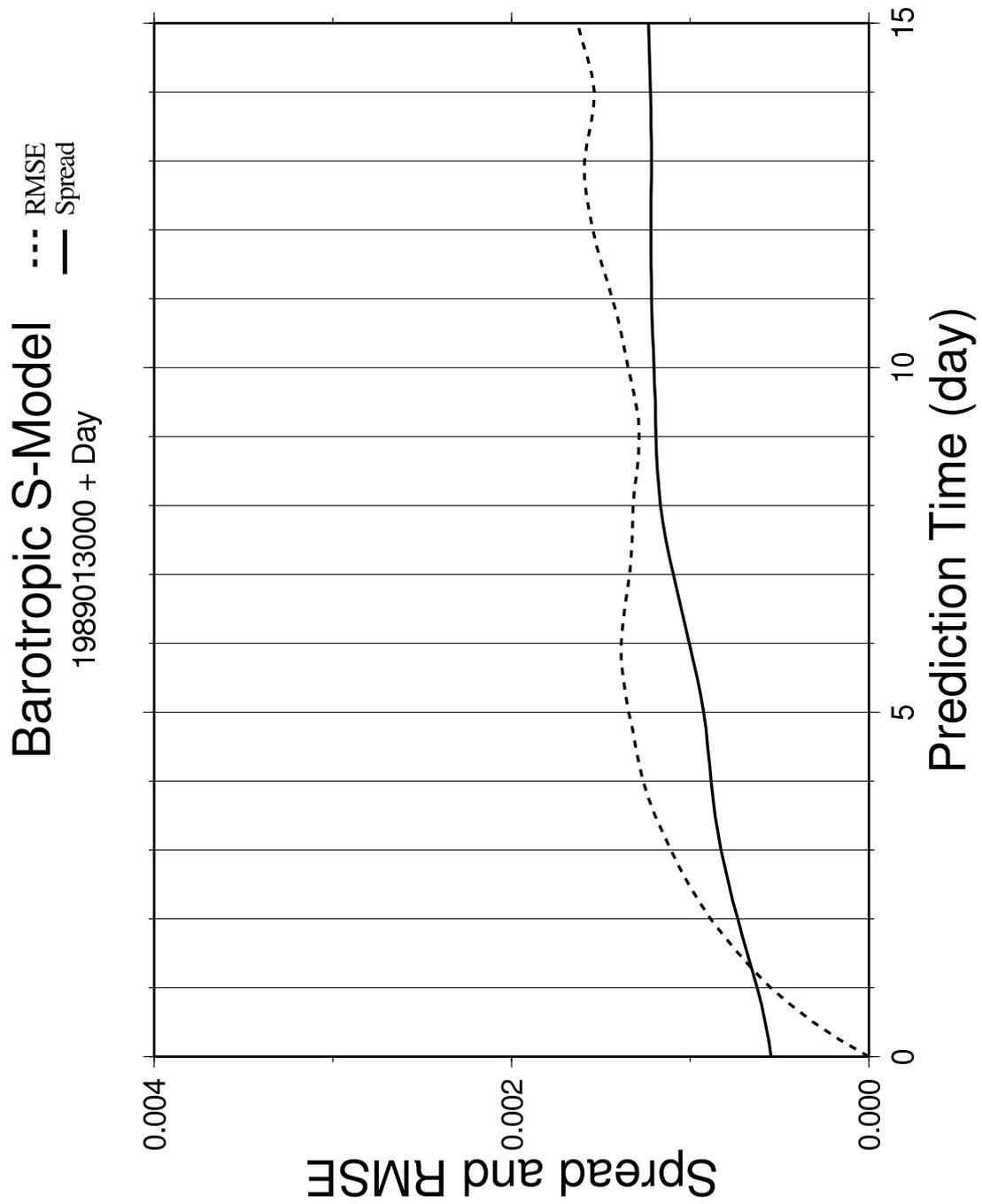


図 90: 11 メンバー EOF アンサンブルの展開係数  $w_i$  に対する 15 日予報の RMSE とスプレッド. 横軸は予報時間, 縦軸は RMSE およびスプレッド. 1989 年 1 月 30 日 00Z を初期値とし, 破線が RMSE, 実線がスプレッドを示す.

# Forecast error

1989010200Z

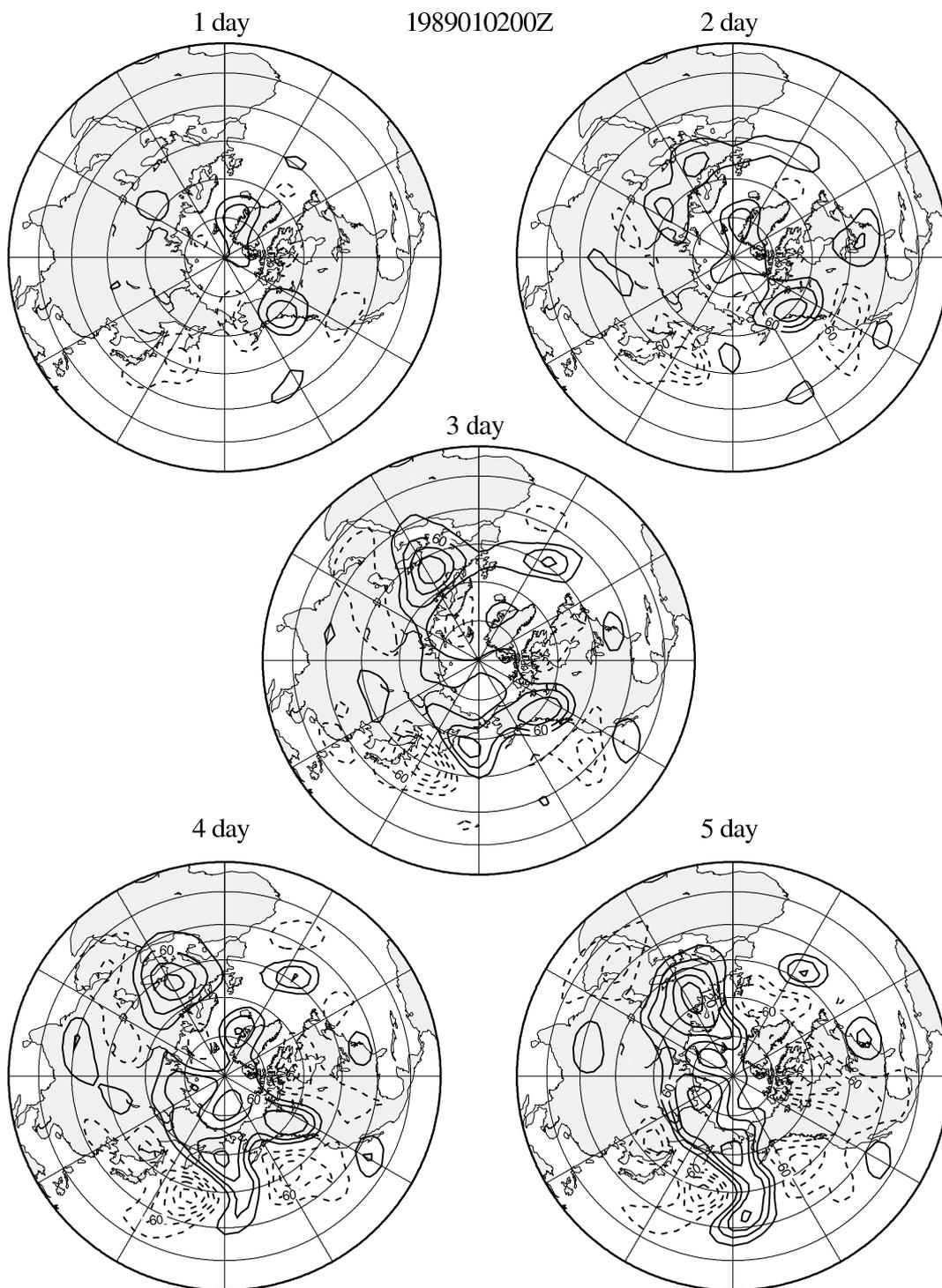


図 91: 予報初期時刻 1989 年 1 月 2 日 00Z の 1 日前, 2 日前, 3 日前, 4 日前および 5 日前の予報誤差. コンター間隔は 30m.

Forecast error

1989010200Z

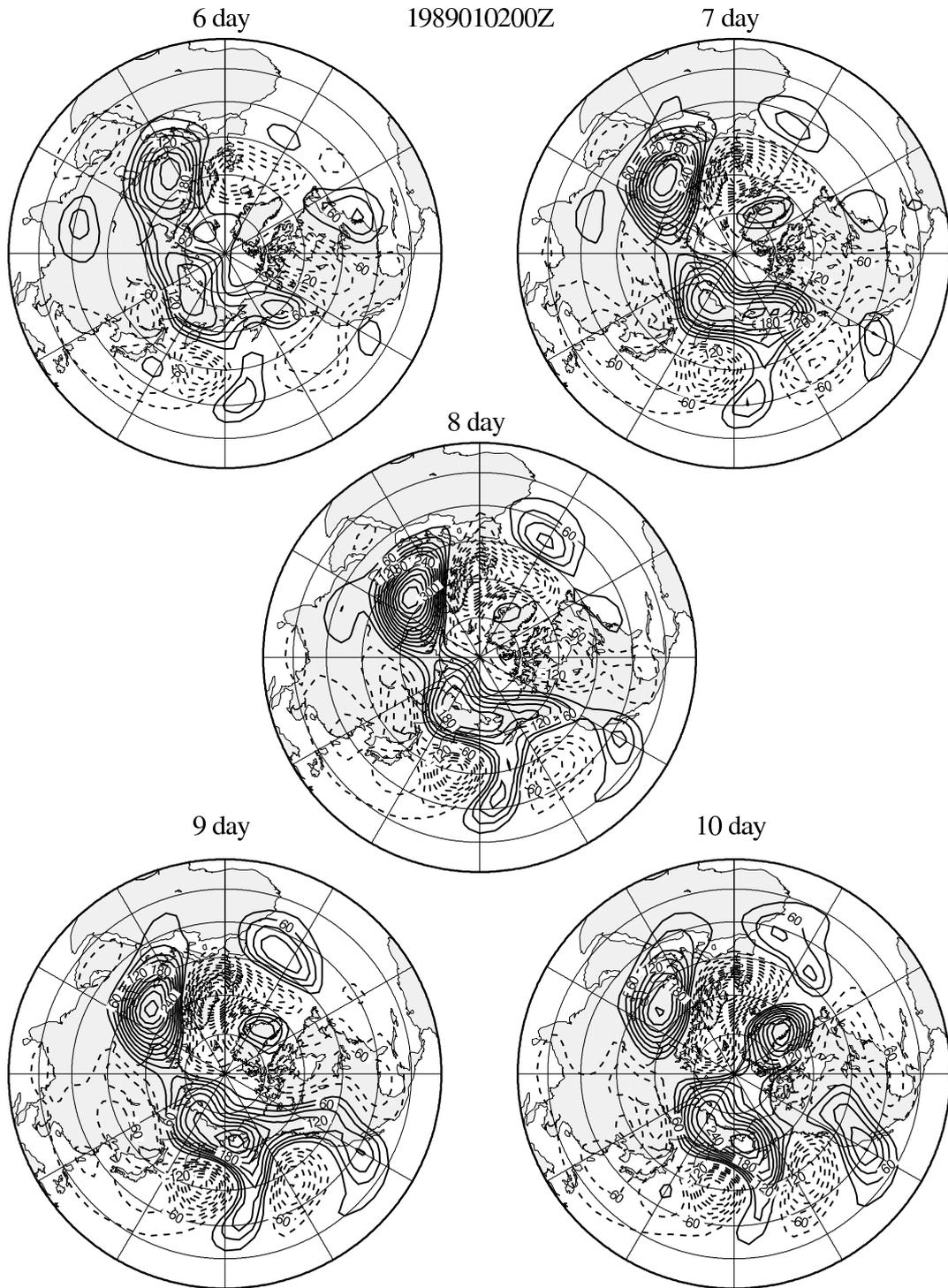


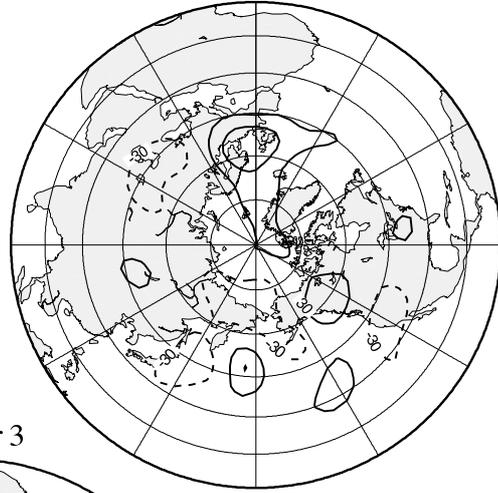
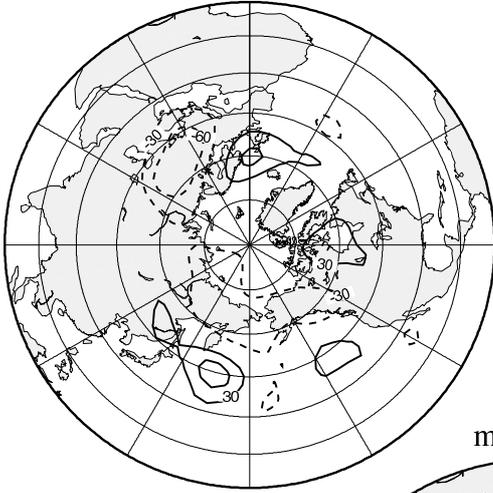
図 92: 予報初期時刻 1989 年 1 月 2 日 00Z の 6 日前, 7 日前, 8 日前, 9 日前および 10 日前の予報誤差. コンター間隔は 30m.

# Perturbation

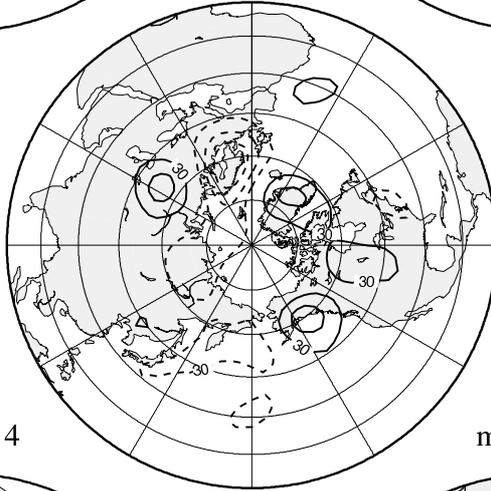
1989010200Z

member 1

member 2



member 3



member 4

member 5

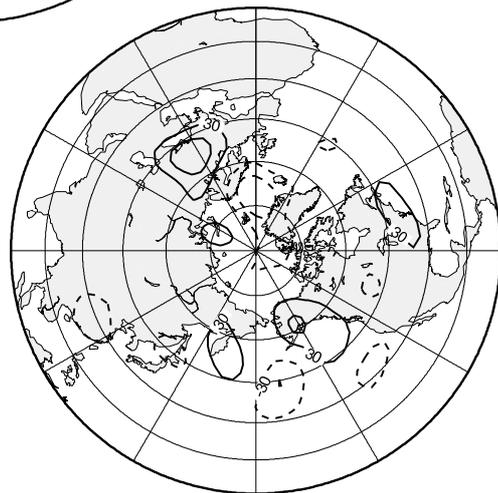
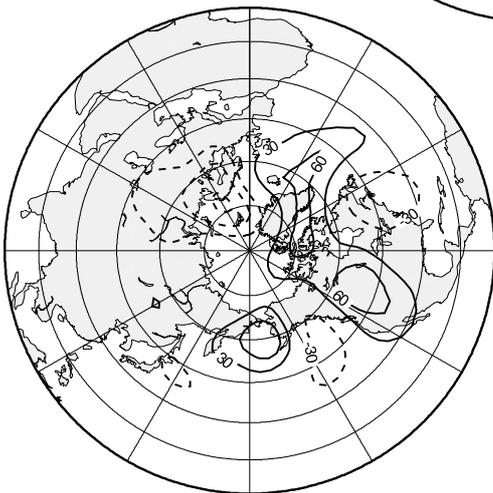


図 93: ノルムを揃えた 10 個の予報誤差に EOF 解析を行い, 正規直交化された 5 つの初期摂動. コンター間隔は 30m.

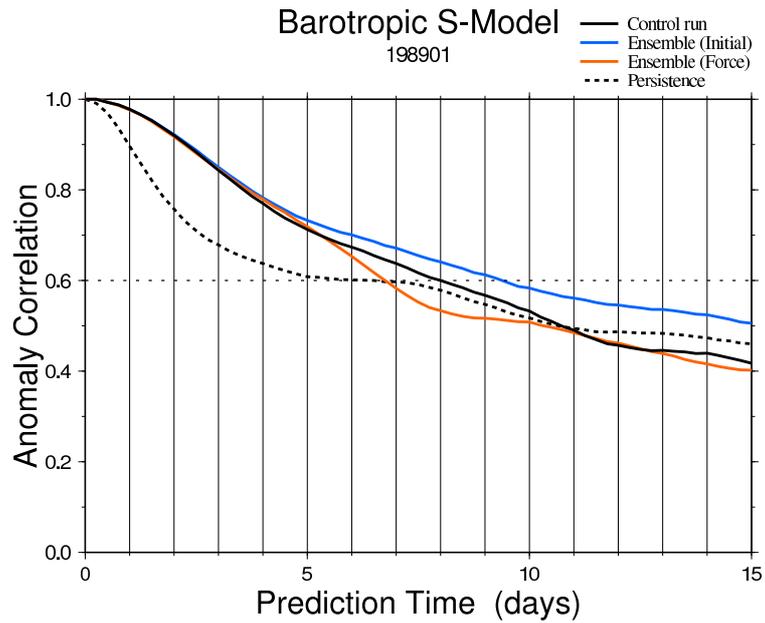


図 94: 1989 年 1 月における 8 メンバー外力アンサンブルおよび 11 メンバー EOF アンサンブルの順圧高度に対するアノマリ相関の月平均. 黒線がコントロールラン, 青線が EOF アンサンブル, 赤線が外力アンサンブル, 破線が持続予報を示す.

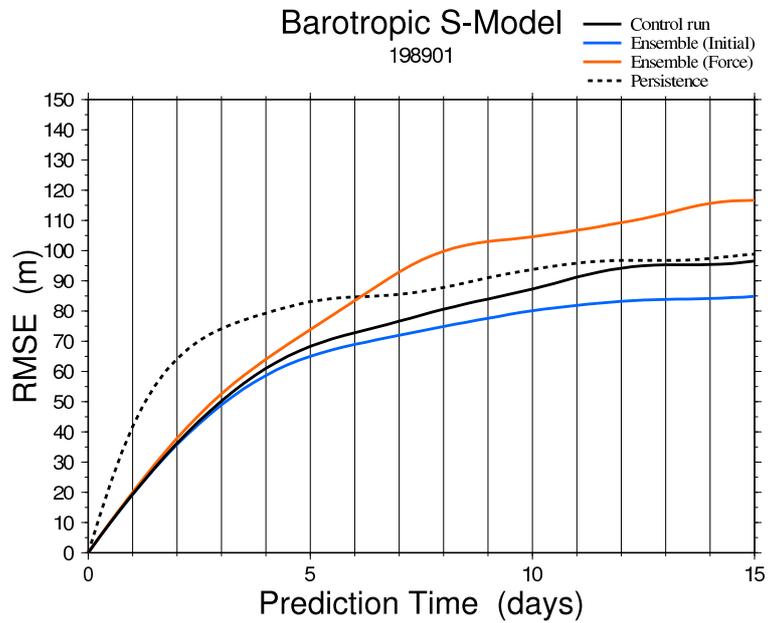


図 95: 1989 年 1 月における 8 メンバー外力アンサンブルおよび 11 メンバー EOF アンサンブルの順圧高度に対する RMSE の月平均. 黒線がコントロールラン, 青線が EOF アンサンブル, 赤線が外力アンサンブル, 破線が持続予報を示す.

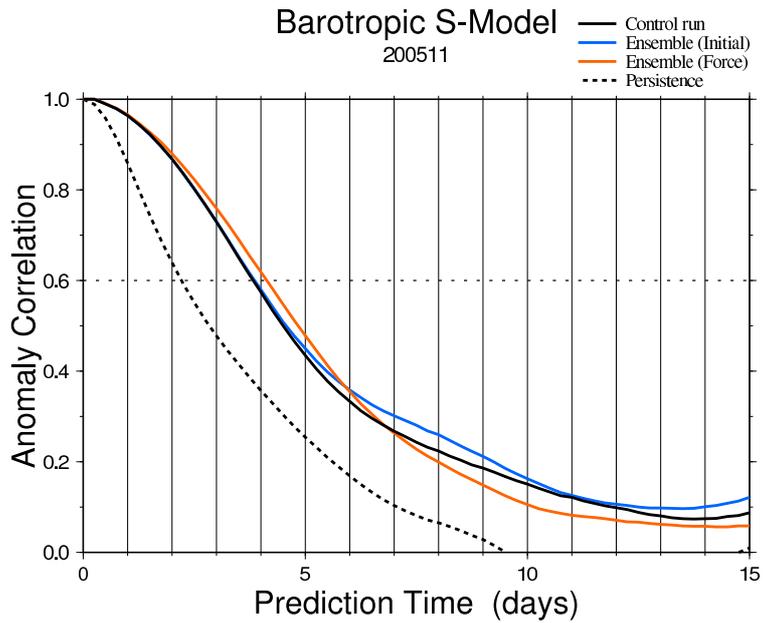


図 96: 2005 年 11 月における 8 メンバー外力アンサンブルおよび 11 メンバー EOF アンサンブルの順圧高度に対するアノマリ相関の月平均. 黒線がコントロールラン, 青線が EOF アンサンブル, 赤線が外力アンサンブル, 破線が持続予報を示す.

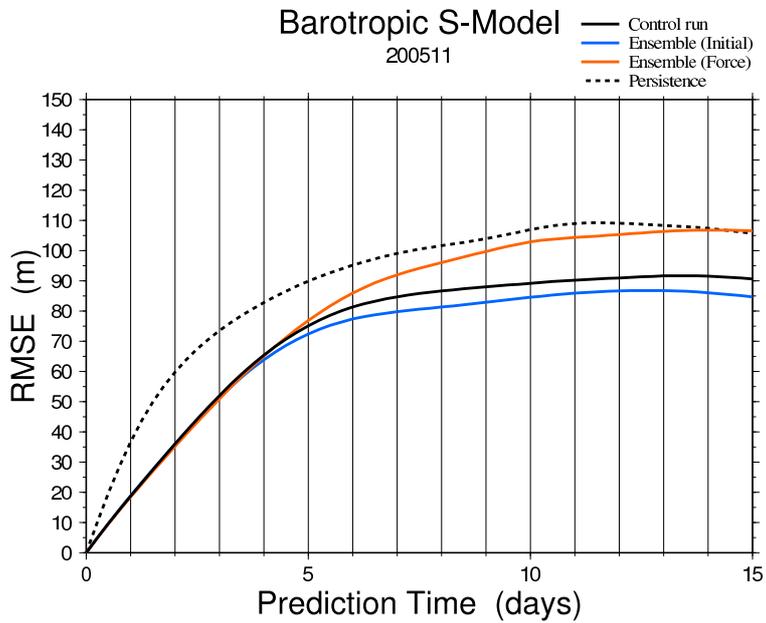


図 97: 2005 年 11 月における 8 メンバー外力アンサンブルおよび 11 メンバー EOF アンサンブルの順圧高度に対する RMSE の月平均. 黒線がコントロールラン, 青線が EOF アンサンブル, 赤線が外力アンサンブル, 破線が持続予報を示す.