

平成17年度 卒業論文

準地衡風モデルによる大気大循環の  
エネルギースペクトルの検証

筑波大学第一学群自然学類

地球科学主専攻

200200321

鈴木一步

2006年1月

# 目次

Abstract	iii
図目次	iv
<b>1 序論</b>	<b>1</b>
1.1 過去の研究	1
1.2 本研究の目的	4
<b>2 方法</b>	<b>5</b>
2.1 基礎方程式系	5
2.2 プリミティブ方程式系の導出	8
2.2.1 基礎方程式系の線形化	8
2.2.2 鉛直構造関数	10
2.2.3 水平構造関数	14
2.2.4 3次元ノーマルモード関数展開	17
2.3 エネルギー関係式	20
2.4 エネルギースペクトル	22
2.5 球面 Rhines 比	23
2.6 準地衡風理論	23
<b>3 データ解析</b>	<b>26</b>
3.1 使用データ	26
3.2 データ解析の手順	26
<b>4 結果</b>	<b>27</b>
4.1 プリミティブ方程式系によるスペクトル解析	27
4.1.1 エネルギースペクトル	27
4.1.2 球面 Rhines 比	28
4.2 準地衡風理論によるスペクトル解析	29
4.2.1 波数に対するエネルギースペクトル	30
4.2.2 ロスビー波の位相速度に対するエネルギースペクトル	30

<b>5</b>	<b>考察</b>	<b>33</b>
5.1	プリミティブ方程式系によるエネルギースペクトル . . . . .	33
5.2	準地衡風理論によるエネルギースペクトル . . . . .	34
5.2.1	波数に対するエネルギースペクトル . . . . .	34
5.2.2	ロスビー波の位相速度に対するエネルギースペクトル . . . . .	34
<b>6</b>	<b>まとめ</b>	<b>36</b>
	謝辞	38
	参考文献	39

# The Verification of Energy Spectrum in the General Circulation of the Atmosphere with Quasi-Geostrophic Theory

Ippo SUZUKI

## Abstract

In this study, energy spectrum of the large-scale atmospheric motions is investigated in the framework of the quasi-geostrophic theory. It had been shown by Tanaka et al. (2004) that the barotropic energy spectrum of the general circulation  $E$  can be represented by  $E = c^2$  in the framework of the 3D normal mode decomposition. In this study, the energy spectra of the barotropic component of the atmosphere are decomposed in rotational and divergent components, using stream function and velocity potential.

The results suggest that the spectrum obeys -3 or -4 power law of the zonal wavenumber, and a power law of the squared Rossby wave phase speed. This result agrees with the precedent studies. It is found that the power spectrum in the small-scale turbulent regime is common for summer and winter. The peak of the spectrum at the Rhines scale, however, extends to the larger scale, corresponding to the increased zonal jet in winter.

## Key words

energy spectrum, rotation, divergence, barotropic atmosphere, power law of the Rossby wave phase speed

## 目 次

1	プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル (2003年、冬) . . . . .	40
2	プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル (2003年、春) . . . . .	41
3	プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル (2003年、夏) . . . . .	42
4	プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル (2003年、秋) . . . . .	43
5	プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル (2004年、冬) . . . . .	44
6	プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル (2004年、春) . . . . .	45
7	プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル (2004年、夏) . . . . .	46
8	プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル (2004年、秋) . . . . .	47
9	球面 Rhines 比 (2003年、冬) . . . . .	48
10	球面 Rhines 比 (2003年、春) . . . . .	49
11	球面 Rhines 比 (2003年、夏) . . . . .	50
12	球面 Rhines 比 (2003年、秋) . . . . .	51
13	球面 Rhines 比 (2004年、冬) . . . . .	52
14	球面 Rhines 比 (2004年、春) . . . . .	53
15	球面 Rhines 比 (2004年、夏) . . . . .	54
16	球面 Rhines 比 (2004年、秋) . . . . .	55
17	流線関数 (2000年1月1日) . . . . .	56
18	Barotropic Height(2000年1月1日) . . . . .	57
19	流線関数 (1999年12月~2月の3ヶ月平均) . . . . .	58
20	準地衡風理論による東西波数に対するエネルギースペクトル (回転 成分) . . . . .	59
21	準地衡風理論による全波数に対するエネルギースペクトル (回転成分)	60

22	準地衡風理論による東西波数に対するエネルギースペクトル(回転成分+発散成分) . . . . .	61
23	準地衡風理論による全波数に対するエネルギースペクトル(回転成分+発散成分) . . . . .	62
24	準地衡風理論によるエネルギーの分布 ( $m$ : 東西波数, $n$ : 全波数) .	63
25	準地衡風理論によるエネルギースペクトル(1999年12月、回転成分)	64
26	準地衡風理論によるエネルギースペクトル(2000年1月、回転成分)	65
27	準地衡風理論によるエネルギースペクトル(2000年2月、回転成分)	66
28	準地衡風理論によるエネルギースペクトル(1999年12月~2000年2月の3ヶ月平均、回転成分と発散成分) . . . . .	67
29	準地衡風理論によるエネルギースペクトル(1999年1月~2000年2月の3ヶ月平均、回転成分+発散成分) . . . . .	68
30	準地衡風理論によるエネルギースペクトル(2000年6月、回転成分)	69
31	準地衡風理論によるエネルギースペクトル(2000年7月、回転成分)	70
32	準地衡風理論によるエネルギースペクトル(2000年8月、回転成分)	71
33	準地衡風理論によるエネルギースペクトル(2000年6月~8月の3ヶ月平均、回転成分と発散成分) . . . . .	72
34	準地衡風理論によるエネルギースペクトル(2000年6月~8月の3ヶ月平均、回転成分+発散成分) . . . . .	73
35	東西風速度の分布図(1999年12月~2000年2月の3ヶ月平均) . . . .	74
36	東西風速度の分布図(2000年6月~2000年8月の3ヶ月平均) . . . .	75
37	1999年12月~2000年2月の3ヶ月平均帯状風速度の緯度分布図。この期間中の全球平均帯状風速度は7.86m/sの西風である。 . . . .	76
38	2000年6月~2000年8月の3ヶ月平均帯状風速度の緯度分布図。この期間中の全球平均帯状風速度は0.49m/sの西風である。 . . . .	77

# 1 序論

## 1.1 過去の研究

大気中には様々な空間および時間スケールの変動が含まれている。その流れを解明する方法に、大気もつエネルギーを波数分解し、スペクトル解析する方法がある。この方法では、時空間的に卓越する変動スケールを定量的に見積もり、様々なスケール間の相互作用を調べることができる。総観規模の擾乱について、エネルギースペクトル解析することは、時間的空間的に卓越する変動スケールを定量的に見積もることや、多様なスケール間の相互作用を調べる上で重要である。

地球規模のエネルギーについて、様々な研究がなされてきた。大気のエネルギーのほとんどは位置エネルギーと運動エネルギーであり、それがどうなっているのか、たびたび焦点が当てられてきた。それに伴い、大気のエネルギースペクトル解析について様々な研究がなされてきた。

Nastrom and Gage (1985) は、GASP (The Global Atmospheric Sampling Program) で観測された 1975 年から 1979 年までの大気の風速と気温のデータからスペクトル解析をおこなった。それによって、大気のエネルギースペクトルは、数百 km のスケールの波数帯では、水平波数  $k$  の  $-5/3$  に従う。また、より大きな 1000 から 3000km のスケールの波数帯では、水平波数  $k$  の  $-3$  に従う、ということが示された。

また、総観規模スケールのエネルギースペクトルの特徴である  $k^{-3}$  則は、エンストロフィーカスケード慣性小領域において生じる 2 次元一様等方性乱流において見出される。以下にその詳細を示す。

簡単のため、均質非圧縮で密度が一定値  $\rho_0$  の粘性流体を考える。そのとき、運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad}p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{K}.$$

ここで  $\mathbf{u}$  は速度、 $p$  は圧力、 $\mathbf{K}$  は外力である。

非圧縮性流体の 2 次元運動 ( $\partial/\partial z = 0$ ) において、速度場は  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v, 0)$  であり、渦度は  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \text{rot}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (0, 0, \omega)$  である。ここで  $\text{rot}\mathbf{K} = 0$  とすると、渦度方程式が得られる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\omega = \nu \Delta_2 \omega.$$

ここで、 $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  である。非粘性の場合には、渦度  $\omega$  が流体の運動とともにラグランジュ的に保存する。3次元流体と違って渦管の伸長がないので、非粘性極限でのエネルギー散逸メカニズムが働かない。渦度方程式は、流れ関数  $\psi$  を導入すると、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} = \nu \Delta_2 \omega, \quad \omega = \Delta_2 \psi,$$

と書ける。

$\psi$ 、あるいは  $\omega$  をかけて平均を取ると、乱れの運動エネルギー  $\epsilon = \langle |\text{grad}\psi|^2 \rangle / 2$  およびエンストロフィー  $Q = \langle \omega^2 \rangle / 2$  の時間変化を表す式が得られる。

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -2\nu Q, \quad \frac{dQ}{dt} = -2\nu P.$$

ここで、 $P \equiv \langle (\text{grad}\omega)^2 \rangle / 2$  はパリンストロフィーである。まず、 $\nu = 0$  と置くと、エネルギーとエンストロフィーが保存することがわかる。これらの束縛のもとでは、より多くのエネルギーが低端数側に伝達され、同時により多くのエンストロフィーが高波数側に伝達される (フヨルトフトの定理)。エネルギーの重みで平均した波数、

$$\bar{k} \equiv \frac{\int_0^\infty k E(k) dk}{\int_0^\infty E(k) dk},$$

を導入する。初期には、エネルギーの重みで平均した波数  $\bar{k}$  のまわりにエネルギーが集中していたものが、乱流運動により時間とともにスペクトルが広がるとしよう。このとき、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty (k - \bar{k})^2 E(k) dk > 0,$$

である。ここで、 $\bar{k}$  と  $E(k)$  はともに時間の関数である。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (k - \bar{k})^2 E(k) dk &= \int_0^\infty k^2 E(k) dk - 2\bar{k} \int_0^\infty k E(k) dk + \bar{k}^2 \int_0^\infty E(k) dk \\ &= \int_0^\infty k^2 E(k) dk - \bar{k}^2 \int_0^\infty E(k) dk, \end{aligned}$$

であるので、エネルギーとエンストロフィーが保存されるならば、 $\int_0^\infty E(k) dk$  と  $\int_0^\infty k^2 E(k) dk$  が時間変化せず、

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{k}^2 = - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty (k - \bar{k})^2 E(k) dk}{\int_0^\infty E(k) dk} < 0,$$



となる。すなわち、スペクトルが広がるとともにエネルギー重みの平均波数  $\bar{k}$  は低波数側に移動する。また、エンストロフィーの高波数側への伝達も同様に考えることができる。

運動粘性率  $\nu \neq 0$  のとき、エンストロフィーが有限に留まるので、 $\nu \rightarrow 0$  の非粘性極限でエネルギーは散逸されない。これは、3次元乱流の場合には、非粘性極限でエンストロフィーが発散してエネルギー散逸が起こるのと対照的である。2次元乱流では、非粘性極限でパリンストロフィーが発散してエンストロフィー散逸が起こる。このとき、エンストロフィーの散逸率を  $\eta = -dQ/dt$  として、コルモゴロフ理論と同様の次元解析を行うと、高波数領域  $k \gg k_0$  では

$$E(k) = \eta^{\frac{1}{6}} \nu^{\frac{3}{2}} F(k/k_d), \quad kd = \eta^{\frac{1}{6}} \nu^{-\frac{1}{2}},$$

の形のエネルギースペクトル相似則を得る。ここで、 $F$  は任意の無次元関数である。さらに、乱れのレイノルズ数が極端に大きい場合に、粘性の影響を受けないエンストロフィーカスケード慣性小領域  $k_0 \ll k \ll k_d$  があるとすれば、そこでのエネルギースペクトルは、

$$E(k) = C_2 \eta^{\frac{2}{3}} k^{-3}.$$

となる。ここで、 $C_2$  は無次元普遍定数である。2次元乱流の場合にはエンストロフィーカスケード慣性小領域スペクトルが-3乗となる。

これを受けて、Boer and Shepherd (1983) は、FGGE -a data sets を用いたスペクトル解析を行った。それによると、波数の大きい領域ではエンストロフィーカスケード慣性小領域の理論で説明ができるが、波数の小さい領域では、波数が大きい領域と対照的に、波の定常成分とエネルギーの等分配がなされない非等方性によって決定され、慣性小領域の理論では説明できていない。

一方、この大気大循環のエネルギースペクトルを別の視点から見た研究がある。Tanaka et al. (2004) では、3次元ノーマルモード展開によるプリミティブ方程式を用いて、スペクトル解析を行った。3次元ノーマルモード展開における展開係数  $\omega_i$  の大きさは、ラプラス潮汐方程式の固有振動数  $\sigma_i$  を用いて表される。一方、ロスビー波の西進位相速度は  $c_i = \sigma_i/n$  と表され、エネルギースペクトルをロスビー波の西進位相速度を用いて表現することを可能にした。ここで、 $n$  は東西波数である。こうして得られたエネルギースペクトルが、 $c_i$  の2乗に比例することを、ロスビー波の砕波理論で  $E = mc^2$  に従うことを以下のように示した。ロスビー波の砕

波条件は、ポテンシャル渦度  $q$ , 流線関数  $\psi$ , プラネタリー渦度  $f$  を用いて、

$$\frac{\partial q}{\partial y} < 0, \quad q = \nabla^2 \psi + f.$$

と表せる。ここで中緯度  $\beta$  平面を仮定すると、ロスビー波の碎波条件からロスビー波の飽和する擾乱の東西速度  $u$  の速度が導かれる。

$$\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 \psi + f) = -\nabla^2 u + \beta < 0,$$

一方、この飽和点の速度  $u$  はロスビー波の西進位相速度  $c$  を用いて、

$$u < \frac{-\beta}{n^2 + l^2} = c,$$

ここで  $n, l$  は、それぞれ東西波数, 南北波数である。

この際、エネルギーは

$$E = \frac{1}{g} \int_0^{p_s} \frac{1}{2} (u^2 + v^2) dp = \frac{p_s}{g} c^2 = mc^2.$$

ここで  $p_s$  は地上気圧、 $g$  は重力加速度、 $m = p_s/g$  である。

## 1.2 本研究の目的

Tanaka et al. (2004) で論じられた大気大循環のエネルギー Spektral がロスビー波の西進位相速度  $c$  の 2 乗に比例するという理論は、準地衡風理論に基づいている。にもかかわらず、解析は 3 次元ノーマルモード展開によるプリミティブ方程式に基づいており、理論と解析手法の間に不一致が見られる。

そこで本研究では、この不具合を解消するために、準地衡風理論に基づくエネルギー Spektral を解析し、大気大循環のエネルギー Spektral を形成する理論としてロスビー波の碎波理論が正しいのか、従来から言われているエンストロフィーカスケード慣性小領域理論が正しいのか検証する。

## 2 方法

本研究では、まず、Tanaka et al. (2004) と同様に 3 次元ノーマルモード展開によるプリミティブ方程式を用いて、順圧エネルギースペクトルの解析を行った。その上で、準地衡風理論に基づいたエネルギースペクトルを解析し、検証を行った。

### 2.1 基礎方程式系

本研究では、まず、Tanaka et al. (2004) と同様の解析を行った。ここでは、その方程式系について説明する。

球面座標系  $(\lambda, \theta, p)$  のプリミティブ方程式系は、以下のようになる。

- 水平方向の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv + F_u \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv + F_v \quad (2)$$

- 熱力学第一法則の式

$$\frac{\partial c_p T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla c_p T + \omega \left( \frac{\partial c_p T}{\partial p} - \alpha \right) = Q \quad (3)$$

- 質量保存則 (連続の式)

$$\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (4)$$

- 状態方程式

$$p\alpha = RT \quad (5)$$

- 静力学平衡の式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha \quad (6)$$

ここで、

$$\mathbf{V} = (u, v)$$
$$\mathbf{V} \cdot \nabla = \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

方程式中で用いられている記号は以下の通りである。

$\lambda$ : 経度	$\omega$ : 鉛直 $p$ -速度 ( $= dp/dt$ )
$\theta$ : 緯度	$F_u$ : 東西方向の摩擦力
$u$ : 東西方向の風速	$F_v$ : 南北方向の摩擦力
$v$ : 南北方向の風速	$Q$ : 非断熱加熱率
$t$ : 時間	$\Omega$ : 地球自転角速度 ( $7.292 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ )
$p$ : 気圧	$a$ : 地球半径 (63712.2km)
$T$ : 気温	$R$ : 乾燥空気の気体定数 ( $287.04 \text{JK}^{-1} \text{kg}^{-1}$ )
$\phi$ : ジオポテンシャル	$C_p$ : 定圧比熱 ( $1004 \text{JK}^{-1} \text{kg}^{-1}$ )
$\alpha$ : 比容	

これらの基礎方程式系を3つの従属変数 ( $u, v, \phi$ ) のみで示すことを考える。そのために、熱力学第一法則の式 (3) の従属変数である気温  $T$  と比容  $\alpha$  を、式 (4), (5), (6) を用いて消去する。

まず、気温  $T$ 、比容  $\alpha$  とジオポテンシャル  $\phi$  について、摂動を定義する。

$$T(\lambda, \theta, p, t) = T_0(p) + T'(\lambda, \theta, p, t) \quad (7)$$

$$\alpha(\lambda, \theta, p, t) = \alpha_0(p) + \alpha'(\lambda, \theta, p, t) \quad (8)$$

$$\phi(\lambda, \theta, p, t) = \phi_0(p) + \phi'(\lambda, \theta, p, t) \quad (9)$$

ここで、 $T_0(p), \alpha_0(p), \phi_0(p)$  は、それぞれ気温、比容、ジオポテンシャルの全球平均である。また  $T', \alpha', \phi'$  はそれぞれ気温、比容、ジオポテンシャルの全球平均からの偏差である。これらを、(5), (6) 式に適用すると

$$p\alpha_0 = RT_0 \quad (10)$$

$$\frac{d\phi_0}{dp} = -\alpha_0 \quad (11)$$

$$p\alpha' = RT' \quad (12)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial p} = -\alpha' \quad (13)$$

以上で得られた (7) ~ (13) 式を用いると、(3) 式は、

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T' + \omega \left( \frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{RT'}{pc_p} \right) + \omega \left( \frac{dT_0}{dp} - \frac{RT_0}{pc_p} \right) = \frac{Q}{c_p} \quad (14)$$

ここで、全球平均気温  $T_0$  とその偏差  $T'$  において、 $T_0 \gg T'$  が成り立つので、(14) 式において左辺第 3 項の気温の摂動の断熱変化項は無視することができる。すなわち、

$$\omega \frac{RT_0}{pc_p} \gg \omega \frac{RT'}{pc_p} \quad (15)$$

また、以下のような大気の安定度パラメータ  $\gamma(p)$  を定義する。

$$\gamma(p) = \frac{RT_0(p)}{c_p} - p \frac{dT_0(p)}{dp} \quad (16)$$

すると、式 (14) は、

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T' + \omega \frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{\omega \gamma}{p} = \frac{Q}{c_p} \quad (17)$$

(12),(13) 式より、

$$T' = \frac{p\alpha'}{R} = -\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p}$$

これを (17) 式に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \frac{p}{R} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} - \omega \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \frac{\omega \gamma}{p} = \frac{Q}{c_p} \quad (18)$$

となる。両辺に  $p/\gamma$  をかけて、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ -\left( \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi' \right] - \frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} - \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \omega = \frac{pQ}{c_p \gamma} \quad (19)$$

これで、(3) 式を  $\phi'$  だけの方程式にできた。方程式系 (1), (2), (19) は閉じているが、連続の式 (4) を組み込むために、(19) 式の両辺を  $p$  で微分して左辺第 4 項に (4) 式を代入する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\left( \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi' \right] + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ & = -\frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \frac{\omega p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{pQ}{c_p \gamma} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

これで、3つの従属変数  $(u, v, \phi')$  に対して、(1), (2), (20) の3つの方程式があり、この方程式系は閉じている。この方程式系において、一意に解を求めることができる。この3つの方程式はまとめて、以下のように行列表示することができる。

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{N} + \mathbf{F} \quad (21)$$

ここで  $\tau$  は無時限化された時間であり、 $\tau = 2\Omega t$  である。また、各行列は以下の通りである。

・  $\mathbf{U}$  : 従属変数ベクトル

$$\mathbf{U} = (u, v, \phi')^T \quad (22)$$

・  $\mathbf{M}, \mathbf{L}$  : 線形演算子

$$\mathbf{M} = 2\Omega \text{diag} \left( 1, 1, -\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \right) \quad (23)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \sin \theta & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ 2\Omega \sin \theta & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial(\cdot) \cos \theta}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

・  $\mathbf{N}$  : 非線形項ベクトル

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv \\ -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} + \omega p \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (25)$$

・  $\mathbf{F}$  : 外部強制項からなるベクトル

$$\mathbf{F} = \left( F_u, F_v, \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{pQ}{c_p \gamma} \right) \right)^T \quad (26)$$

ただし、

$\text{diag}()$  : 対角行列

$()^T$  : 転置行列

とする。

## 2.2 プリミティブ方程式系の導出

### 2.2.1 基礎方程式系の線形化

3-D NMFs の定義にあたり、まず大気の静止 (基本) 状態を考慮する。

(21) 式の基礎方程式系の基本状態として、断熱かつ摩擦なし、つまり  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  の静止大気  $((\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi}') = \mathbf{0})$  を考え、そこに微小擾乱  $(u', v', \phi'')$  を与える。このとき、

(21) 式 of 非線形演算子  $\mathbf{N}$  は、

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) u' - \omega \frac{\partial}{\partial p} u' + \frac{\tan \theta}{a} u' v' \\ -\left(\frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) v' - \omega \frac{\partial}{\partial p} v' + \frac{\tan \theta}{a} u' v' \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{p^2}{R\gamma} \left(\frac{u'}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v'}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \frac{\partial \phi''}{\partial p} + \omega p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi''}{\partial p}\right) \right] \end{pmatrix} \quad (27)$$

2 次以上の摂動項を無視すると、結局  $\mathbf{N} = \mathbf{0}$  となり、(21) 式を線形化した基本状態は以下のように表せる。

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial \tau} + \mathbf{L} \mathbf{U}' = \mathbf{0} \quad (28)$$

$$\mathbf{U}' = (u', v', \phi'')^T$$

これ以降は簡単のため、 $\mathbf{U}' = (u', v', \phi'')$  を  $\mathbf{U} = (u, v, \phi)$  と略記する。この方程式 (28) において、鉛直構造関数  $G_m(p)$  を導入して、鉛直方向と水平方向に変数分離を行う。

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\lambda, \theta, p, \tau) &= (u, v, \phi)^T \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (u_m, v_m, \phi_m)^T G_m(p) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{U}_m(\lambda, \theta, \tau) G_m(p) \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、添え字の  $m$  は鉛直モード番号 (vertical mode number) を意味する。これを (28) 式に代入し、分離された各変数に関する方程式を導く。ここではジオポテンシャル成分 ( $\mathbf{U}$  の第 3 成分) を例に説明する。

第  $m$  鉛直モードのみの方程式について表すと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial}{\partial p} (\phi_m G_m) \right] + \frac{G_m}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{G_m}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (30)$$

ここで  $\phi_m$  は  $(\lambda, \theta, t)$  の関数で  $p$  には依存しないことを考慮して、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ -\phi_m \frac{1}{G_m} \frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m}{dp} \right] + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (31)$$

また  $p$  の時間依存性はないので、

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial t} \frac{1}{G_m} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial G_m}{\partial p} = \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \left( \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} \right)^{-1} = G_m \left( \frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m}{dp} \right)^{-1} \quad (32)$$

(32) 式の左辺は  $\lambda, \theta, t$  のみに依存し、右辺は  $p$  のみに依存する。等号が恒等的に成り立つには、両辺が定数でなくてはならない。この分離定数を  $-gh_m$  と置くことにより、以下の二つの方程式を得る。

$$\frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m}{dp} + \frac{1}{gh_m} G_m = 0 \quad (33)$$

$$\frac{1}{gh_m} \frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v_m \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (34)$$

常微分方程式 (33) を鉛直構造方程式 (vertical structure equation) と呼ぶ。また水平風成分についても同様に鉛直構造関数を導入すると、

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - 2\Omega \sin \theta v_m + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi_m}{\partial \lambda} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u_m + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi_m}{\partial \theta} = 0 \quad (36)$$

(34), (35), (36) をまとめて水平構造方程式 (horizontal structure equation) と呼ぶ。ここで分離定数にある  $h_m$  は距離の次元 ( $L$ ) をもち、鉛直構造方程式 (33) の固有関数である鉛直構造関数  $G_m(p)$  に対応する固有値として求まる。また、水平構造方程式 (34) は、流体層の厚さ  $h_m$  の線形浅水方程式系と同じ形であることから、 $h_m$  は等価深度 (equivalent height) の意味をもつ。

### 2.2.2 鉛直構造関数

鉛直構造方程式 (33) の解で、3-D NMFs を構成する鉛直構造関数  $G_m(p)$  の導出と、鉛直構造関数  $G_m(p)$  を用いた鉛直方向の波数展開について述べる。

まず、鉛直構造方程式 (33) を次のように整理する。

$$\mathbf{L}[G_m(p)] + \frac{1}{gh_m} G_m(p) = 0 \quad (37)$$

ここで

$$\mathbf{L} = \frac{d}{dp} \frac{\beta}{R} \frac{d}{dp} = \frac{\beta}{R} \frac{d^2}{dp^2} + \frac{1}{R} \frac{d\beta}{dp} \frac{d}{dp}$$

$$\beta(p) = \frac{p^2}{\gamma(p)}$$



である。ここで、境界条件がある。

$$\omega \rightarrow 0, \text{ as } p \rightarrow 0 \quad (38)$$

$$(u, v, w) = 0, \text{ at } p = p_s \quad (39)$$

(38) は上部の境界において質量が保存される条件、(39) は下部の境界において速度が0であるという条件である。

(38),(39) から鉛直構造関数に関する境界条件を導ける。熱力学第一法則の式(19)を線形化して、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p^2}{R\gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + \omega = 0 \quad (40)$$

(40) 式に対して境界条件(38)を考慮して、(29)式を代入することによって鉛直構造関数を代入すると上部境界は以下ようになる。

$$\frac{p^2}{\gamma} \frac{dG_m(p)}{dp} \rightarrow 0, \text{ as } p \rightarrow 0 \quad (41)$$

また、境界条件(39)より、

$$g\omega = \left. \frac{d\phi'}{dt} \right|_{p=p_s} = \left[ \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi' + \omega \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right]_{p=p_s} = 0 \quad (42)$$

また(5),(6)、及び、地表水平移流項が0であることを考慮して、

$$\left. \frac{\partial \phi'}{\partial t} \right|_{p=p_s} - \omega \frac{RT_s}{p_s} = 0 \quad (43)$$

ここで、 $T_s$  は地上気圧  $p_s$  における気温。(41), (44) 式から  $\omega$  を消去して、鉛直構造関数を用いると、

$$\frac{dG_m(p)}{dp} + \frac{\gamma}{pT} G_m(p) = 0, \text{ at } p = p_s \quad (44)$$

鉛直構造方程式(37)を境界条件(41), (44)の下で、Sturm-Liouville型の境界値問題として解くことができる。これが  $G_m(p) = 0$  以外の解を持つ時、解  $G_m(p)$  は、境界条件(41),(44)のもとでの方程式(37)の固有関数であり、 $h_m$  の値は、この固有関数に対する固有値となる。

この固有値問題は、有限要素法、あるいは Galerkin 法により解を数値的に算出することができる (Tanaka, 1985)。まず鉛直構造関数を Legendre 多項式  $P_i(p)$  により級数展開すると、

$$G_m(p) = \sum_{i=0}^{J-1} a_i P_i(p) \quad (45)$$

ここで  $J$  は自然数で、Legendre 多項式は以下のように直交性を持っている。

$$\frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} P_i(p) P_j(p) dp = \delta_{ij} \quad (46)$$

$a_i$  を求めるために以下の式を考える。

$$\int_0^{p_s} \left( \frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dG_m(p)}{dp} + \frac{1}{gh_m} G_m(p) \right) P_j(p) dp = 0 \quad (47)$$

(45) を代入すると、

$$\int_0^{p_s} \left( \frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{d}{dp} \sum_{i=0}^{J-1} a_i P_i(p) \right) P_j(p) dp + \frac{1}{gh_m} \sum_{i=0}^{J-1} a_i \int_0^{p_s} P_i(p) P_j(p) dp = 0 \quad (48)$$

Legendre 多項式の直交性 (46) より、

$$\sum_{i=0}^{J-1} a_i \int_0^{p_s} \left( \frac{d}{dp} \frac{p^2}{R\gamma} \frac{d}{dp} P_i(p) \right) P_j(p) dp + \frac{1}{gh_m} p_s a_j = 0 \quad (49)$$

ここで (45) 式から、境界条件 (41), (44) は以下ようになる。

$$\left. \frac{dP_i(p)}{dp} \right|_{p \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad \text{as } p \rightarrow 0 \quad (50)$$

$$\left. \frac{dP_i(p)}{dp} \right|_{p=p_s} + \frac{\gamma(p_s)}{T_0(p_s)} P_i(p_s) = 0, \quad \text{at } p = p_s \quad (51)$$

この条件から、(49) 式は、

$$\sum_{i=0}^{J-1} \mathbf{K}_{ij} a_i = \frac{1}{gh_m} a_j \quad (52)$$

ここで、 $\mathbf{K}_{ij}$  は、

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{p_s^2}{RT_0(p_s)} P_i(p_s) P_j(p_s) + \int_0^{p_s} dp \frac{p^2}{R\gamma} \frac{dP_i(p)}{dp} \frac{dP_j(p)}{dp} \quad (53)$$

(52) 式の固有値問題を解くことによって固有値  $h_m$  と固有関数  $a_i$  が求まり、これを (45) 式に代入することで鉛直構造関数  $G_m(p)$  が求まる。

このようにして得られた鉛直構造関数  $G_m(p)$  が正規直交関数であるならば、これを基底に物理量を鉛直方向に波数展開できる。この型の固有値問題の解は直交

性をもつという特徴があるが、確認のため鉛直構造関数が直交性を持つことを示しておく。

$$\int_0^{p_s} G_{m'} \mathbf{L}[G_m] dp = \frac{\beta}{R} G_{m'} \left. \frac{dG_m}{dp} \right|_{p=0}^{p_s} - \int_0^{p_s} \frac{\beta}{R} \frac{dG_m}{dp} \frac{dG_{m'}}{dp} dp \quad (54)$$

$$\int_0^{p_s} G_m \mathbf{L}[G_{m'}] dp = \frac{\beta}{R} G_m \left. \frac{dG_{m'}}{dp} \right|_{p=0}^{p_s} - \int_0^{p_s} \frac{\beta}{R} \frac{dG_m}{dp} \frac{dG_{m'}}{dp} dp \quad (55)$$

(54) から (55) を両辺引いて、

$$\int_0^{p_s} (G_{m'} \mathbf{L}[G_m] - G_m \mathbf{L}[G_{m'}]) dp = \left[ G_{m'} \frac{\beta}{R} \frac{dG_m}{dp} - G_m \frac{\beta}{R} \frac{dG_{m'}}{dp} \right]_{p=0}^{p_s} = 0 \quad (56)$$

鉛直構造方程式 (37) より、

$$\mathbf{L}[G_m(p)] = -\frac{1}{gh_m} G_m(p) \quad (57)$$

$$\mathbf{L}[G_{m'}(p)] = -\frac{1}{gh_{m'}} G_{m'}(p) \quad (58)$$

それぞれを (56) 式に代入して、境界条件 (41), (44) を考慮すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{h_m - h_{m'}}{h_m h_{m'}} \int_0^{p_s} G_m(p) G_{m'}(p) dp &= \left[ G_{m'} \frac{\beta}{R} \frac{dG_m}{dp} - G_m \frac{\beta}{R} \frac{dG_{m'}}{dp} \right]_{p=0}^{p_s} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (59)$$

(59) より、 $h_m \neq h_{m'}$  の時に鉛直構造関数が直交関係が成り立つことがわかる。適当な定数をかけると以下の正規直交関係を得る。

$$\frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} G_m(p) G_{m'}(p) dp = \delta_{mm'} \quad (60)$$

以上の鉛直構造関数  $G_m(p)$  の正規直交性により、気圧  $p$  の任意の関数  $f(p)$  について、鉛直方向に展開することができる。

$$f(p) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m G_m(p) \quad (61)$$

$$f_m = \frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} f(p) G_m(p) dp \quad (62)$$

ここで  $f_m$  は第  $m$  鉛直モードの直交変換係数である。

鉛直モード  $m = 0$  は順圧 (barotropic) モード、または外部 (external) モードといい、鉛直方向に節を持たず、ほとんど全層で一定のまま変化しないモードである。

これに対して鉛直モード  $m \geq 1$  は傾圧 (baroclinic) モード、または内部 (internal) モードといい、 $m$  番目のモードに関しては鉛直方向に  $m$  個の節を持つ。

本研究では、鉛直モード  $m = 0$  の順圧モードだけを考慮したモデルであり、鉛直方向に平均平均した大気の特性を考慮するのに適したモデルを用いている。順圧モード  $m = 0$  における等価深度  $h_0$  は 9728.4m である。

### 2.2.3 水平構造関数

本節では、鉛直構造関数  $G_m(p)$  とともに 3-D NMFs を構成する水平構造関数  $H_{nlm}(\lambda, \theta)$  を導入し、水平構造関数  $H_{nlm}(\lambda, \theta)$  を用いた水平方向の波数展開について述べる。

前節で第  $m$  鉛直モードの鉛直構造関数の固有値として得た等価深度  $h_m$  を用いて、水平構造方程式 (34), (35), (36) を解く。まず、(34), (35), (36) 式は、行列表記できる。

$$\mathbf{M}_m \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U}_m + \mathbf{L} \mathbf{U}_m = 0 \quad (63)$$

ここで、添字の  $m$  は第  $m$  鉛直モードを意味する。また、各行列は、以下のようにある。

$$\mathbf{M}_m = 2\Omega \text{diag} \left( 1, 1, \frac{1}{gh_m} \right)$$

$$\mathbf{U}_m = (u_m, v_m, \phi_m)^T$$

ここで次のスケール行列  $\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m$  を導入する。

$$\mathbf{X}_m = \text{diag} \left( \sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, gh_m \right) \quad (64)$$

$$\mathbf{Y}_m = 2\Omega \text{diag} \left( \sqrt{gh_m}, \sqrt{gh_m}, 1 \right) \quad (65)$$

これらを (63) 式に作用させる。

$$\left( \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m \right) + \left( \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m \right) \left( \mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m \right) = 0 \quad (66)$$

ここで、

$$\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{M}_m \mathbf{X}_m = \text{diag}(1, 1, 1) \quad (67)$$

なので、(66) 式は、

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m \right) + \left( \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m \right) \left( \mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m \right) \quad (68)$$

尚、

$$\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta & \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ \sin \theta & 0 & \alpha_m \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\alpha_m}{\cos \theta} \frac{\partial (\cdot) \cos \theta}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (69)$$

ここで、(69) 式の  $\alpha_m$  は笠原パラメータと呼ばれるもので、以下のように定義される。これを用いると、浅水方程式中の4つの惑星パラメータ  $g, h_m, \Omega, a$  を、唯一の惑星固有パラメータ  $\alpha_m$  で表せる。

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{gh_m}}{2\Omega a} \quad (70)$$

(68) 式は時間  $\tau$  の線形システムであるから、次のように解を仮定して、水平方向成分と時間成分とに変数分離することができる。

$$\mathbf{X}_m^{-1} \mathbf{U}_m(\lambda, \theta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) e^{-i\sigma_{nlm}\tau} \quad (71)$$

$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  は、水平構造関数 (horizontal structure function)、または Hough 関数と呼ばれる。Hough 関数は第  $m$  鉛直モードに相当する水平ノーマルモード、すなわち水平自由振動を意味し、経度  $\lambda$  と緯度  $\theta$  の関数である。添字の  $n$  は東西波数、 $l$  は南北モード番号を示している。

(71) 式を水平構造方程式 (68) に代入して、

$$-i\sigma_{nlm} \mathbf{H}_{nlm} + (\mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m) \mathbf{H}_{nlm} = 0 \quad (72)$$

この固有値問題を解くことで固有関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  と、対応する固有値  $\sigma_{nlm}$  を求めることができる。(68) 式は緯度  $\lambda$  について線形であるから、Hough ベクトル関数  $\Theta_{nlm}(\theta)$  を用いて、 $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  を次のように経度依存成分と緯度依存成分とに変数分離することができる。

$$\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) = \Theta_{nlm}(\theta) e^{in\lambda} \quad (73)$$

ここで、

$$\Theta_{nlm}(\theta) = \begin{pmatrix} U_{nlm}(\theta) \\ -iV_{nlm}(\theta) \\ Z_{nlm}(\theta) \end{pmatrix} \quad (74)$$

南北風成分に関しては位相を  $\pi/2$  だけずらすために  $i = \sqrt{-1}$  がかけられている。南北モードは3種類の異なるモードから構成される。一つは低周波の西進するロスビーモード (Rossby mode)  $l_r$  で、残りの二つは高周波の西進、および東進する重力波 (gravity mode)  $l_{wg}, l_{eg}$  である。

Swarztrauber and Kasahara (1985) によると、水平構造関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  は球面調和関数展開の和として得られる。この方法で求められる水平構造関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  が正規直交性をもつならば、これを基底にして波数展開することができる。

水平構造関数が直交関数であることを示す。経度と緯度に関する内積は以下のように示される。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = & \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (U_{nlm}U_{n'l'm}^* + V_{nlm}V_{n'l'm}^* + Z_{nlm}Z_{n'l'm}^*) \\ & e^{-i(\sigma_{nlm} - \sigma_{n'l'm}^*)\lambda} \cos \theta d\lambda d\theta \end{aligned} \quad (75)$$

変数は実数になっており (\* は複素共役を意味)、 $nlm$  と  $n'l'm$  は東西波数と南北モード番号の異なるモードを示している。(72) 式の線形演算子  $\mathbf{L}_m = \mathbf{Y}_m^{-1} \mathbf{L} \mathbf{X}_m$  は非対称のエルミート行列であるため、次の関係が成立する。

$$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{L}_m \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle + \langle \mathbf{L}_m \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0 \quad (76)$$

(76) に (72) 式を代入して、

$$(\sigma_{nlm} - \sigma_{n'l'm}^*) \langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0 \quad (77)$$

(77) から2つの条件が課せられる。

1.  $n = n'$  かつ  $l = l'$  のとき

$\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle$  は、線形浅水方程式系の全エネルギーに比例する量であり、決して0にはならない。よって (77) 式を満たすためには  $\sigma_{nlm} = \sigma_{n'l'm}^*$  であり、 $\sigma_{nlm}$  は実数でなくてはならない。

2. それ以外のとき

$\sigma_{nlm} \neq \sigma_{n'l'm}^*$  であれば、(77) 式を満たすためには  $\langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm} \rangle = 0$  が成り立つ必要がある。すなわち固有振動数  $\sigma_{nlm}$  に相当する固有関数  $\mathbf{H}_{nlm}$  が  $\sigma_{n'l'm}$  に相当する固有関数  $\mathbf{H}_{n'l'm}$  と直交関係にあることを示している。

以上の二つの条件から、任意のモード  $nlm$  について、下の正規直交関係が成立する。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H}_{nlm}, \mathbf{H}_{n'l'm'} \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_{nlm} \cdot \mathbf{H}_{n'l'm'}^* \cos \theta d\lambda d\theta \\ &= \delta_{nn'} \delta_{ll'} \end{aligned} \quad (78)$$

以上の水平構造関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  の直交性から、次のフーリエ ハフ変換が導かれる。

第  $m$  鉛直モードに相当する物理空間において、 $\lambda, \theta, \tau$  を変数とする任意のベクトル関数を  $\mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau)$  とすると、

$$\mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{nlm}(\tau) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \quad (79)$$

$$a_{nlm}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_m(\lambda, \theta, \tau) \cdot \mathbf{H}_{nlm}^*(\lambda, \theta) \cos \theta d\lambda d\theta \quad (80)$$

#### 2.2.4 3次元ノーマルモード関数展開

鉛直構造関数と水平構造関数から、3-D NMF  $\Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p)$  を構成して、(21) 式を展開する。3-D NMF  $\Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p)$  は、鉛直構造関数  $G_m(p)$  と水平構造関数  $\mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta)$  とのテンソル積であり、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) &= G_m(p) \mathbf{H}_{nlm}(\lambda, \theta) \\ &= G_m(p) \Theta_{nlm}(\theta) e^{in\lambda} \end{aligned} \quad (81)$$

この3-D NMFs も直交性を満たす。

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{nlm}, \Pi_{n'l'm'} \rangle &= \frac{1}{4\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \Pi_{nlm} \Pi_{n'l'm'}^* \cos \theta d\lambda d\theta dp \\ &= \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (82)$$

この関係により、3次元ノーマルモード関数展開が導かれる。(22) 式中の  $\mathbf{U}$  と  $\mathbf{N}$  と  $\mathbf{F}$  は3-D NMFs によって次のように展開される。

$$\mathbf{U} = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^N w_{nlm}(\tau) \mathbf{X}_m \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (83)$$

$$\mathbf{N} = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^N n_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (84)$$

$$\mathbf{F} = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^N f_{nlm}(\tau) \mathbf{Y}_m \Pi_{nlm}(\lambda, \theta, p) \quad (85)$$

ここで  $w_{nlm}(\tau)$ ,  $n_{nlm}(\tau)$ ,  $f_{nlm}(\tau)$  はそれぞれ、従属変数ベクトル  $\mathbf{U}$ 、非線形項ベクトル  $\mathbf{N}$ 、外部強制ベクトル  $\mathbf{F}$  についての展開係数である。各々時間  $\tau$  のみの関数である。

(21) 式と 3-D NMFs との内積をとり、スペクトル表記を導く。

$$\langle \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} + \mathbf{L} \mathbf{U} - \mathbf{N} - \mathbf{F}, \mathbf{Y}_m^{-1} \Pi_{nlm} \rangle = 0 \quad (86)$$

計算過程が複雑な非線形項ベクトルの内積を計算しておく。なお、これ以降は 3 重添字  $nlm, n'l'm', n''l''m''$  をそれぞれ  $i, j, k$  と表記することにし、 $i, j, k$  で表現する波数は、それぞれ  $n_i l_i m_i, n_j l_j m_j, n_k l_k m_k$  と書いて区別することにする。

$$\langle \mathbf{N}, \mathbf{Y}_{m_i}^{-1} \Pi_i \rangle = \frac{1}{4\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} G_{m_i} e^{-in_i \lambda} \left( \begin{array}{c} \frac{1}{2\Omega \sqrt{gh_{m_i}}} U_i \\ \frac{1}{2\Omega \sqrt{gh_{m_i}}} (iV_i) \\ \frac{1}{2\Omega} Z_i \end{array} \right)^T \left( \begin{array}{c} -\mathbf{V} \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\tan \theta}{a} uv \\ -\mathbf{V} \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\tan \theta}{a} uv \\ \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{p^2}{R\gamma} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + \omega p \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{R\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \end{array} \right) \cos \theta d\lambda d\theta dp \quad (87)$$

(83) 式を成分で書くと (88) 式になる。この級数展開 (88) を (87) 式の各変数に代入する。代入の際、添字を  $j, k$  に変えて、添字  $i$  と区別する。

$$u = \sum_{i=0}^K w_i \sqrt{gh_{m_i}} U_i G_{m_i} e^{in_i \lambda}$$

$$v = \sum_{i=0}^K w_i \sqrt{gh_{m_i}} (-iV_i) e^{in_i \lambda} \quad (88)$$

$$\phi = \sum_{i=0}^K w_i gh_{m_i} Z_i G_{m_i} e^{in_i \lambda}$$

また鉛直  $p$ -速度  $\omega$  は発散と関係することから、以下のように  $\sigma_i Z_i$  を用いた級数展開を導くことができる。まず、連続の式 (4) を鉛直積分して (88) 式を代入する。

$$\begin{aligned} \omega &= - \int_0^p \nabla \cdot \mathbf{V} dp \\ &= - \int_0^p \left( \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} \right) dp \end{aligned}$$



$$= - \sum_{i=0}^K w_i \int_0^p G_{m_i} dp \frac{\sqrt{gh_{m_i}}}{a \cos \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} U_i e^{in_i \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (-iV_i \cos \theta) e^{in_i \lambda} \right] \quad (89)$$

ここで水平構造方程式の第3成分(34)より、

$$i\sigma_i \frac{2\Omega}{\sqrt{gh_{m_i}}} Z_i e^{in_i \lambda} = \frac{1}{a \cos \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} U_i e^{in_i \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (-iV_i \cos \theta) e^{in_i \lambda} \right] \quad (90)$$

これを代入して、

$$\omega = \sum_{i=0}^K w_i 2\Omega \int_0^p G_{m_i} dp (-i\sigma_i Z_i) e^{in_i \lambda} \quad (91)$$

(91) 式中  $G_{m_i}$  の不定積分は、鉛直構造方程式(35)を積分することによって  $G_{m_i}$  の1階微分で表現できる。

$$\int_0^p G_{m_i} dp = - \frac{gh_{m_i}}{R\gamma} p^2 \frac{dG_{m_i}}{dp} \quad (92)$$

また(87)式を展開する過程で現れる  $G_{m_i}$  の高次の微分は、次のように鉛直構造方程式(33)を用いて  $G_{m_i}$  の1階微分で表現することができる。

$$-p \frac{d}{dp} \frac{p}{R\gamma} \frac{dG_{m_i}}{dp} = \frac{p}{R\gamma} \frac{dG_{m_i}}{dp} + \frac{G_{m_i}}{gh_{m_i}} \quad (93)$$

(91), (92), (93) を(87)式に代入する。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}, \mathbf{Y}_{m_i}^{-1} \Pi_i \rangle &= -i \sum_{j=0}^K \sum_{k=0}^K w_j w_k \frac{1}{4\pi p_s} \int_0^{p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \\ &\begin{pmatrix} U_i \\ V_i \\ Z_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_1 \left( \frac{n_k U_k}{\cos \theta} + \tan \theta V_k \right) & -P_1 \frac{dU_k}{d\theta} & P_2 U_k \\ P_1 \left( \frac{n_k V_k}{\cos \theta} + \tan \theta U_k \right) & -P_1 \frac{dV_k}{d\theta} & P_2 V_k \\ P_3 \frac{n_k Z_k}{\cos \theta} & -P_3 \frac{dZ_k}{d\theta} & -P_4 Z_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_j \\ V_j \\ \sigma_j Z_j \end{pmatrix} \\ &e^{i(-n_i + n_j + n_k)\lambda} \cos \theta d\lambda d\theta dp \end{aligned} \quad (94)$$

ただし、

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\sqrt{gh_{m_j}} \sqrt{gh_{m_k}}}{2\Omega a \sqrt{gh_{m_i}}} G_{m_i} G_{m_j} G_{m_k} \\ P_2 &= \frac{\sqrt{gh_{m_k}}}{\sqrt{gh_{m_i}}} \frac{gh_{m_j}}{R\gamma} p^2 G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} + \frac{dG_{m_k}}{dp} \\ P_3 &= \frac{\sqrt{gh_{m_j}}}{2\Omega a} G_{m_i} G_{m_j} G_{m_k} - \frac{\sqrt{gh_{m_j}}}{2\Omega a} \frac{gh_{m_k}}{R\gamma} p^2 G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} \frac{dG_{m_k}}{dp} \\ P_4 &= G_{m_i} G_{m_j} G_{m_k} + \frac{gh_{m_k}}{R\gamma} p G_{m_i} G_{m_j} \frac{dG_{m_k}}{dp} + \frac{gh_{m_j}}{R\gamma} p G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} G_{m_k} \end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{gh_{m_k}}{R\gamma} - 1 \right) \frac{gh_{m_j}}{R\gamma} p^2 G_{m_i} \frac{dG_{m_j}}{dp} \frac{dG_{m_k}}{dp} \quad (95)$$

以上より、非線形項ベクトルの内積を3次元ノーマルモードの3重積の定積分にまとめることができた。(94)におけるこの3重積分を非線形相互作用係数  $r_{ijk}$  とおくと、(86)式は次のようにまとめることができる。

$$\frac{dw_i}{d\tau} + i\sigma_i w_i = -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} w_j w_k + f_i \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (96)$$

展開係数のみでプリミティブ方程式を記述できることがわかる。非線形項中の  $r_{ijk}$  は非線形の波-波相互作用 (wave-wave interaction) および、帯状-波相互作用 (zonal-wave interaction) に関する相互作用係数 (interaction coefficients) である。 $K$  は全波数で、 $K = (2N + 1)(L + 1)(M + 1)$  である。 $N$  は東西波数切断、 $L$  は南北波数切断、 $M$  は鉛直波数切断を示す。厳密には  $K \rightarrow \infty$  としなくてはならないが、通常はある波数で切断して方程式系を構成する。

### 2.3 エネルギー関係式

ここではエネルギーに関する方程式を導く。まず (22) 式と  $\frac{p_s}{2g} \mathbf{U}$  で内積をとり、次のエネルギーバランス方程式を得る。

$$\frac{d}{d\tau} E_{nlm} = N_{nlm} + F_{nlm} \quad (97)$$

ここで、

$$\frac{1}{S} \int_S dS = \frac{1}{4\pi p_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\lambda d\theta$$

とすると、各項の内積は、

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{p_s}{2g} \mathbf{U}, \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U} \right\rangle &= \frac{d}{d\tau} \frac{1}{S_g} \int_S \left[ \int_0^{p_s} (K + A) dp + \frac{1}{2} \frac{p_s}{RT_s} \phi_s^2 \right] \\ &\equiv \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \frac{d}{d\tau} E_{nlm} \end{aligned} \quad (98)$$

地表面におけるジオポテンシャルの鉛直フラックスの発散は全球エネルギー解析において無視できるから、

$$\left\langle \frac{p_s}{2g} \mathbf{U}, \mathbf{L} \mathbf{U} \right\rangle = \frac{1}{S_g} \int_S \int_0^{p_s} \nabla \cdot \phi \mathbf{V} dp dS = 0 \quad (99)$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{p_s}{2g} \mathbf{U}, \mathbf{N} \right\rangle &= \frac{1}{Sg} \int_S \int_0^{p_s} \left[ -\nabla \cdot (K + A) \mathbf{V} - \frac{\partial}{\partial p} (K + A) \omega \right] dp dS \\
&\quad + \frac{1}{Sg} \int_S \frac{p_s \phi_s}{\gamma} \left( -\mathbf{V} \cdot \nabla \frac{p}{R} \frac{\partial \phi}{\partial p} - \omega \frac{\partial}{\partial p} \frac{p}{R} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \Big|_{p=p_s} dS \\
&\equiv \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M N_{nlm}
\end{aligned} \tag{100}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{p_s}{2g} \mathbf{U}, \mathbf{F} \right\rangle &= \frac{1}{Sg} \int_S \int_0^{p_s} \left( u F_u + v F_v + \frac{RT}{c_p \gamma} Q dp \right) dS + \frac{1}{Sg} \int_S \frac{p_s \phi_s}{\gamma} Q_s dS \\
&\equiv \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M F_{nlm}
\end{aligned} \tag{101}$$

ここで  $K$  は運動エネルギー、 $A$  は有効位置エネルギー、両方の和を全エネルギー  $E$  とする。

$$\begin{aligned}
E &= K + A \\
K &= \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \\
A &= \frac{1}{2} \frac{p^2}{R\gamma} \left( \frac{\partial \phi}{\partial p} \right)^2
\end{aligned}$$

(98) ~ (101) 式中の  $\frac{p_s}{2g}$  はエネルギーの次元 [ $Jm^{-2}$ ] に直すための係数である。添字の  $s$  は地表面での変数を意味する。(98) ~ (101) 式のそれぞれの最右辺は、(83) ~ (85) に対して (82) の 3 次元ノーマルモード関数の直交性と (64), (65) 式のスケール行列を代入することによって得られる。またここでは静的安定度パラメータ  $\gamma$  の鉛直方向の変化は無視している。

(97) と (99) 式からわかるように基本方程式中の線形項は  $\omega_{nlm}$  の大きさを変化させず波の位相変化のみを表現する項であり、エネルギーの時間変化には寄与していない。ここで (97) 式に対して断熱かつ摩擦なしの条件を仮定し、3 次元ノーマルモード関数で展開することにより、次のエネルギー保存則を導ける (Tanaka, 1985)。

$$\sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \frac{d}{d\tau} E_{nlm} = 0 \tag{102}$$

ここで、

$$E_{0lm} = \frac{1}{4} p_s h_m |w_{0lm}|^2 \quad (103)$$

$$E_{nlm} = \frac{1}{2} p_s h_m |w_{nlm}|^2 \quad (104)$$

という形で、モードごとの全エネルギーは定義される。(104), (105) を時間微分して、前節で導いたプリミティブスペクトル方程式系 (97) を代入することで次のエネルギー変換量が定義される。

$$\begin{aligned} N_{nlm} &= p_s \Omega h_m [w_{nlm}^* n_{nlm} + w_{nlm} n_{nlm}^*] \\ &= -p_s \Omega h_m \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K i r_{ijk} (w_i^* w_j w_k - w_i w_j^* w_k^*) \end{aligned} \quad (105)$$

$$F_{nlm} = p_s \Omega h_m [w_{nlm}^* f_{nlm} + w_{nlm} f_{nlm}^*] \quad (106)$$

(103) ~ (106) の関係を用いることで東西波数  $n$ 、南北モード  $l$ 、鉛直モード  $m$  ごとに、(97) 式における各項のエネルギースペクトルを得ることができる。

## 2.4 エネルギースペクトル

これまで、3次元ノーマルモード展開したプリミティブ方程式、およびそれに伴うエネルギー関係式を説明した。3次元ノーマルモード展開したプリミティブ方程式は (96) 式である。

$$\frac{d\omega_i}{d\tau} + i\sigma_i \omega_i = -i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk} \omega_j \omega_k + f_i \quad i = 1, 2, \dots, K$$

また、大気的全エネルギー、すなわち運動エネルギーと有効位置エネルギーの和は (106) 式で表せる。

$$E_{nlm} = \frac{1}{2} p_s h_m |\omega_{nlm}|^2$$

一方、これらの関係式に出てくるラプラス潮汐方程式の固有振動数  $\sigma_i$  を用いて、ロスビー波の西進位相速度  $c_i$  は、

$$c_i = \frac{\sigma_i}{n} \quad (107)$$

と表せる。ここで  $n$  は東西波数である。(これまでの説明で用いてきた  $m$  とは違う。) これら 3 式を用いることで、大気エネルギースペクトルをロスビー波の西進位相速度  $c_i$  を用いて示すことができる。(Tanaka et al. 2004)

## 2.5 球面 Rhines 比

前節では、ロスビー波の西進位相速度  $c_i$  を用いてエネルギースペクトルを示すことを述べた。この節では、その振る舞いを説明する指標の一つとして球面 Rhines 比を説明する。

(97) 式の左辺第 2 項を右辺に移項すると、

$$\frac{d\omega_i}{d\tau} = -i\sigma_i\omega_i - i \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K r_{ijk}\omega_j\omega_k + f_i \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (108)$$

ここで  $-i\sigma_i\omega_i$  は線形項、 $-i \sum_{jk} r_{ijk}\omega_j\omega_k$  は非線形項である。ロスビー波の西進位相速度は、(108) 式で示されるので  $\sigma_i$  と対応している。 $\sigma_i$  が小さい時、すなわち  $c_i$  が小さい時、(109) 式では非線形項が卓越する。そして、 $\sigma_i$  が大きい時、すなわち  $c_i$  が大きい時、(109) 式では線形項が卓越することがわかる。これを定量的に示すために、以下のような線形項に対する非線形項の比が用いられる。

$$R_i = \frac{|\sum_{jk} r_{ijk}\omega_j\omega_k|}{|\sigma_i\omega_i|} \quad (109)$$

この  $R_i$  は球面 Rhines 比 (The spherical Rhines ratio) と呼ばれる。球面 Rhines 比が 1 となる時は線形項と非線形項が等しい状態を示し、ロスビー波は静止状態となる。この時のロスビー波の西進位相速度を  $c_R$  と書いて、球面 Rhines スピード (the spherical Rhines speed) という。

## 2.6 準地衡風理論

これまで、3次元ノーマルモード展開によるプリミティブ方程式系について説明してきた。この節では、準地衡風理論における、エネルギー関係式を示す。

大気の運動は、渦度  $\zeta$  と発散  $\delta$  で示される。渦度  $\zeta$  と発散  $\delta$  は、流線関数  $\psi$  と速度ポテンシャル  $\chi$  を用いて、以下のように示すことができる。

$$\zeta = \nabla^2\psi \quad (110)$$

$$\delta = \nabla^2\chi \quad (111)$$

準地衡風理論では、渦度  $\zeta$  に対して、発散成分は十分小さいとして無視する。

渦度  $\zeta$  と流線関数  $\psi$  の関係式の両辺に球面調和関数を作用させると、

$$\langle Y_n^m, \nabla^2 \psi \rangle = \langle Y_n^m, \zeta \rangle$$

渦度  $\zeta$  と流線関数  $\psi$  を波数展開すると

$$\begin{aligned} \left\langle Y_n^m, \nabla^2 \sum_{n'm'} \psi_{n'}^{m'} Y_{n'}^{m'} \right\rangle &= \left\langle Y_n^m, \sum_{n'm'} \zeta_{n'}^{m'} Y_{n'}^{m'} \right\rangle \\ \sum_{n'm'} \psi_{n'}^{m'} \langle Y_n^m, -\frac{n(n+1)}{a^2} Y_{n'}^{m'} \rangle &= \sum_{n'm'} \zeta_{n'}^{m'} \langle Y_n^m, Y_{n'}^{m'} \rangle \end{aligned}$$

したがって、この2つについて以下のような関係が得られる。

$$-\frac{n(n+1)}{a^2} \psi_n^m = \zeta_n^m \quad (112)$$

$m$  : 東西波数、 $n$  : 全波数、 $a$  : 地球の半径

また、渦度  $\zeta$  を Legendre 多項式で展開すると、

$$\zeta = \sum_{n,m} \zeta_n^m P_n^m \exp(im\lambda) \quad (113)$$

$P_n^m$  : Legendre 多項式、 $P_n^m \exp(im\lambda)$  : 球面調和関数

一方で渦度  $\zeta$  は、

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

ここで、 $U = u \cos \theta, V = v \cos \theta$  として、球面座標系に拡張すると

$$\zeta = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial V}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial \mu}$$

$a$  : 地球の半径、 $\mu$  :  $\sin \theta$  ( $\cos \theta = \sqrt{1-\mu^2}$ )

$U, V$  についてフーリエ展開すると、

$$U^m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U \exp(im\lambda) d\lambda$$

$$V^m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V \exp(im\lambda) d\lambda$$

これらを用いて、渦度の展開係数を求めると、

$$\zeta_n^m = \frac{1}{\|P_n^m\|^2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{imV^m}{a(1-\mu^2)} P_n^m + \frac{U^m}{a(1-\mu^2)} H_n^m \right] d\mu \quad (114)$$

$$H_n^m : (1 - \mu^2)dP_n^m/d\mu$$

これから、大気のエネルギーは、

$$K(n, m) = \frac{1}{4a^2}n(n+1)|\psi_n^m|^2 = \frac{a^2}{4n(n+1)}|\zeta_n^m|^2 \quad (115)$$

以上の関係式を用いて、計算を行った。しかしながら、発散成分についても同様の式変形を行い、エネルギーを求めることができる。発散成分は不要なものとして目を向けられることの少ないが、本研究では準地衡風理論の枠を越えて、発散成分のエネルギーについても計算を行った。そのためここでは、発散成分についても同様に記しておく。

発散  $\delta$  は、

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ \delta &= \frac{1}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial V}{\partial \mu} \end{aligned}$$

渦度と同様にして、以下の関係式を得る。

$$-\frac{n(n+1)}{a^2}\psi_n^m = \delta_n^m \quad (116)$$

$$\delta = \sum_{n,m} \delta_n^m P_n^m \exp(im\lambda) \quad (117)$$

$$\delta_n^m = \frac{1}{\|P_n^m\|^2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{imV^m}{a(1 - \mu^2)} P_n^m - \frac{U^m}{a(1 - \mu^2)} H_n^m \right] d\mu \quad (118)$$

また、エネルギースペクトルを示す際のロスビー波の西進位相速度  $c_i$  は、以下の式を採用した。(田中, 2003)

$$c_i = \frac{-1}{n(n+1)} \quad (119)$$

ここで、 $n$  は全波数を示す。

波数  $m$ 、 $n$  については、切断波数を 42 として三角切断を行った。

## 3 データ解析

### 3.1 使用データ

用いたデータは主に2つである。

- 日本気象庁の全球数値予報モデル (JMA/GSM)  
格子系：等緯度経度 1.25 度  
用いた期間：2002 年 12 月から 2004 年 11 月まで  
用いた物理量：鉛直 16 層の東西風、南北風、ジオポテンシャル
- JRA-25  
格子系：等緯度経度 2.5 度  
用いた期間：1999 年 12 月から 2000 年 2 月、2000 年 6 月から 8 月まで  
用いた物理量：鉛直 23 層の東西風、南北風

3次元ノーマルモード展開によるプリミティブ方程式系を用いた解析では、JMA/GSM のデータを用いてプリミティブ方程式に基づいて計算した  $\omega_i$  を用いた。準地衡風理論におけるエネルギー解析については、データ処理の方法を学ぶこともかねて、別のデータセットである JRA-25 データを用いた。

また今回用いたデータ解析で計算したものが正しいのか、NCEP/NCAR 再解析データ (2000 年 1 月) から Barotropic Height を作図して比較した。これはプログラムを入手でき、簡単に作図ができたため用いた。

### 3.2 データ解析の手順

これまで示してきた方程式系を用いて、データ解析を行った。

1. プリミティブ方程式系によるスペクトル解析  
スペクトル表示したプリミティブ方程式 (97), 全エネルギーの式 (105), ロスビー波の西進位相速度の式 (108) を用いて 2 年間のエネルギースペクトルを示した。
2. 準地衡風理論によるスペクトル解析  
まず、物理量の順圧成分をとり、そのデータを用いて (115), (116) 式から回転成分のエネルギーを求めた。次に、発散成分についても同様に (118), (119)



式からエネルギーを求めた。これらのエネルギーについて、(120)式で示したロスビー波の西進位相速度を横軸にとって図をプロットした。また、得られたエネルギーについて、従来ある研究と同様に東西波数、全波数に対するエネルギースペクトルも示した。なお、ここでは全球のデータを用いてエネルギーを計算した。

## 4 結果

### 4.1 プリミティブ方程式系によるスペクトル解析

#### 4.1.1 エネルギースペクトル

図1から図8は、大気大循環のエネルギースペクトルを示している。2002年12月から2004年11月までの2年間において、冬(11月から2月)、春(3月から5月)、夏(6月から8月)、秋(9月から11月)の4つの季節に分けて示した。

縦軸に大気的全エネルギー(運動エネルギーと有効位置エネルギーの和。単位は $J/m^2$ )を取り、横軸はロスビー波の西進位相速度を正に取ってある。は、東西波数が1から10までの波を、+は東西波数が11から20までの波のエネルギーを示している。書かれている直線はロスビー波の西進位相速度を $c$ とした時、 $c^2$ に比例する直線であり、得られたエネルギースペクトルの傾きがそれに近い傾きを持っているか、比較しやすいように示してある。また、点線で結ばれているプロットについて言及しておく。同じ東西波数の波で、南北波数を変えるとラプラス潮汐方程式の固有振動数 $\sigma_i$ が変わり、位相速度が変化する。この同じ東西波数の波のエネルギーを点線で結んでいる。

(108)式から、ロスビー波の西進位相速度 $c$ は東西波数が多いほど小さくなることわかる。すなわち、この点線は図の左右に伸びている。どの図についても言えることは、全波数がいくつの場合もエネルギーはロスビー波の西進位相速度が大きくなるにつれて増加し、ある速度に達すると頭打ちとなり降下している。エネルギーが頭打ちとなる時は全球平均の帯状風速度とロスビー波の西進位相速度が等しくなり、ロスビー波が飽和した時である。この大気大循環のエネルギースペクトルを全体的に見てみよう。頭打ちとなる時の各波のエネルギーを結びと、ほぼ直線になっている。しかし、ある位相速度になると直線には従わずに頭打ちと

なっている。全体を見ると、波が飽和し、砕ける様が見て取れる。この、頭打ちとなる時の速度が球面 Rhines 速度である。

2003 年の 4 枚を見ると、それぞれの波の頭打ちとなる前、エネルギー増加の領域をつなげて見ると、どの季節のエネルギースペクトルもエネルギー増加の過程において、多少の局所的な傾きの変化は見られるがエネルギーレベル的にほぼ同じ大きさで増加していることがわかる。その一方で、無視しようとするほどの大きさではあるが増加の傾きが多少違っている。それらから季節の変化をしてみる。冬(図 1)は、ほとんど  $c$  の 2 乗にしたがっていることがわかる。春(図 2)は、位相速度が  $0.003 \sim 0.02$  の領域でエネルギー増加が増え、傾きが急になっているように見える。急にエネルギーが増加する一方で、球面 Rhines 速度の時のエネルギー、すなわち頭打ちとなる時のエネルギーの最大値が冬の時より数千のオーダーで小さくなっていることがわかる。夏(図 3)になると、エネルギー増加が冬とほぼ似たような形になり、傾きは緩やかになるが頭打ちとなる時のエネルギー最大値は春よりさらに小さくなっている。また、それとともに球面 Rhines 速度が小さくなっている。秋(図 4)をみると、再び、傾きが多少大きくなるとともに、頭打ちの時のエネルギーが大きくなっている。また、4 枚の図を通してみると、このスペクトルは全波数を変えてプロットしているが、各波においてエネルギーの下降の仕方が多少違うことがわかる。冬は、全波数が何であれ、ほぼ同じような傾きを持ってエネルギーは降下しているが、春になると位相速度によって下降の割合にばらつきが見られ、夏になるとそのばらつきはより顕著になっている。

次に 2004 年の 4 枚を見てみよう。冬(図 5)のスペクトルは 2003 年の冬のものに比べると一見、スペクトルのばらつきが目立つ。エネルギーピークは 2 つに分かれているし、エネルギー増加領域の傾きは急で増加の割合にばらつきが見られる。他の図と比べて、全体的にエネルギーが小さいということも見て取れる。エネルギーの最大値は年間を通してあまり変わっていないように見えるが、春、秋の 2 つの季節は、全体のエネルギーが下がる位置が位相速度が  $0.020$  付近と  $0.013$  付近の二つに見られるとともに夏は、その頭打ちとなるエネルギーは明らかに低くなっている。2003 年の 4 枚に見られる特徴と同様のものを見ることができる。

#### 4.1.2 球面 Rhines 比

図 9 から図 16 は、縦軸に球面 Rhines 比、横軸にロスビー波の西進位相速度をとったものである。 と+は、エネルギースペクトルの図と同様である。図中の横

線は、球面 Rhines 比が 1 の時、すなわち線形領域と非線形領域の境界を示し、この時が球面 Rhines 速度である。エネルギースペクトルと同様に 4 つの季節に分けて示した。

どの図においても、Rhines 比は位相速度が大きくなるにつれて直線的に小さくなっている。また、全波数が大きい波のほうが同じ位相速度に対して球面 Rhines 比が小さいことがわかる。また、2003 年の冬 (図 9) を見ると非線形領域の傾きより、線形領域の傾きが緩やかになっている。春 (図 10) になると非線形領域のプロットにまとまりがあるり、ほぼ一つの直線にそって下がっている。線形領域ではやはり傾きが緩やかになっている。比のオーダーはさほど変わっていない。夏 (図 11) になると線形領域になっても同じような傾きで直線的に下がっていることがわかる。秋 (図 12) も夏の特徴が残り、線形領域においても傾きがほぼ変わらずに下がっている。非線形領域では、全波数が大きい波について急に比が落ち込んでいるのがわかる。これらの図を見ていると、全波数が小さい波の傾きが線形領域においてもそのまま続いている。

2004 年の図についても同様に見てみる。冬 (図 13) は 2ヶ月平均であり、比較すべきではないかもしれないが、2003 年のものよりもまとまっており、線形領域に入ると急激に減少が遅くなるのがわかる。春 (図 14) になると全波数が大きい波の非線形領域での減少が早くなってくる。また、線形領域の減少が 2003 年と同様に大きくなっている。夏 (図 15) になるとだいぶばらつきが見られ、線形領域においても傾きが一度変わっている。秋の図は、2003 年の秋の図と非常によく似ている。

## 4.2 準地衡風理論によるスペクトル解析

各図の説明をするとともに、その特徴についてみる。

なお、今回作図したものは順圧成分のみである。

図 17 は、計算過程で算出した 2000 年 1 月 1 日の流線関数の北半球の分布である。また、図 18 は 2000 年 1 月 1 日の Barotropic Height。図 19 は、1999 年 12 月から 2 月の 3ヶ月平均の流線関数の分布である。これらの図は、順圧成分のみの流線関数の解析結果である。図 17 と図 18 を見ると、等値線が非常によく似た分布をしていることがわかる。17 と 18 がよく似ているということは、流線関数を正しく計算できたということの意味する。この計算結果を用いて、エネルギーを計算した。

#### 4.2.1 波数に対するエネルギースペクトル

図 20 は、横軸に東西波数、縦軸に回転成分の運動エネルギーをとったエネルギースペクトルの図である。左下には、東西波数の $-3$ 乗と $-4$ 乗の線を示している。波数が 10 のあたりからの傾きはほぼ東西波数の $-3$ 乗にしたがっているが、その後、傾きが急になっている。また、図 21 は、横軸に全波数、縦軸に回転成分の運動エネルギーをとったエネルギースペクトルの図である。これを見ると、図 20 のエネルギーよりも高波数帯でエネルギーが大きくなっていることがわかる。その一方でエネルギーの減少している傾きはさほど変わっていないように見える。全波数が 39 付近ではまた傾きが変わっているように見えるが、それまでの傾きは $-3$ 乗に従っているといえる。回転成分の運動エネルギーについてのエネルギースペクトルを見てきたが、図 22、23 は、発散成分のエネルギーも加えて示したスペクトルである。図の見方は、図 20、21 と同様である。ほとんど図 20、21 との違いは見られないが、図 23 の波数が 39 付近を見てみると多少エネルギーが増え、ここでの傾きの変化が少なくなっているように見える

最後に図 24 をみってみる。これは、横軸に東西波数  $m$ 、縦軸に全波数  $n$  をとって運動エネルギーの等値線を引いたものである。大雑把に見て全波数  $n$  が一定なら、東西波数  $m$  に対してエネルギーは一様である。過去の研究で、全波数が 100 以上になるとさらにこの傾向は強くなることが知られている。この特徴を踏まえたうえで、よく全波数に対するエネルギースペクトルが描かれている。本研究で描いた図 21、23 をこれを踏まえて描いた。

#### 4.2.2 ロスビー波の位相速度に対するエネルギースペクトル

図 25 ~ 27 は、それぞれ 1999 年 12 月 ~ 2000 年 2 月のデータを用いて、横軸にロスビー波の西進位相速度を、縦軸に回転成分の運動エネルギーをプロットしたものである。図の見方はプリミティブ方程式系におけるエネルギースペクトルの図 (図 1 ~ 8) と同様で、直線はロスビー波の西進位相速度を  $c$  とした時、 $c$  の 2 乗に従う線を示している。は、東西波数が 0 から 20、+ は 21 ~ 42 までのエネルギーを示している。また、左下の方でスペクトルが縦に切れているのは三角切断を行ったためである。

このエネルギースペクトルを見るに 3ヶ月においてほぼ同じエネルギーレベルでエネルギーが増加し、エネルギーが、ほぼ  $30000 \sim 40000 J/m^2$  にエネルギーが

達すると頭打ちになっている。球面 Rhines 速度については、大きな差はみられない。また、図 26 では頭打ちのスペクトルが 2 つに分かれている。

図 28 は、1999 年 12 月～2 月のデータを用いて、横軸にロスビー波の西進位相速度を縦軸に発散成分と回転成分のそれぞれについての運動エネルギーをプロットした図、図 29 は、図 27 で別々にしめした発散成分と回転成分のエネルギーを足してプロットしたエネルギースペクトルの図である。図 28 においては、3ヶ月平均を取っていることもあり、位相速度が小さい領域での増加はきれいな線を描いている。頭打ちとなる付近では 2 月の特徴が残り、2 つの山が見える。発散成分については位相速度が小さい領域では十分に小さく、無視できる程度であることがわかる。その一方で、位相速度の増加とともに、発散成分のエネルギーも増加傾向がある。図 29 を見ると、頭打ちとなった後のエネルギーに多少の増加が見られる。

図 30～32 は、2000 年 6 月～8 月の回転成分の運動エネルギーをプロットしたエネルギースペクトルである。 が東西波数が 0 から 20、+ が 21 から 42 の波を示している。エネルギーの増加が、図 25～28 とほぼ同じエネルギーレベルで起きていることがわかる。また、図 31 をみると位相速度が 0.01 の付近で頭打ちとなる波と、0.013 付近で頭打ちとなる波があることがわかる。図 32 ではそれがさらに顕著となっている。また、図 33 は 2000 年 6 月～8 月の 3ヶ月平均したエネルギースペクトルで、回転成分とともに発散成分も記してある。これをみると、頭打ちとなる付近では 8 月の特徴がみられ、位相速度が 0.01 の付近で頭打ちとなる波が見られる。また、発散成分については Rhines 速度に達する前のエネルギーが冬(図 28)に比べて大きくなっていることがわかる。図 34 は、図 33 において別々に示した発散成分と回転成分をたしたものになる。Rhines 速度に達する前は図 33 の回転成分のスペクトルとほとんど差はなく、それ以降は多少の影響がある。発散成分が冬に比べて大きい、回転成分に対して十分小さい。

図 35 は、1999 年 12 月～2 月の 3ヶ月平均をとった東西風速度の順圧成分の図を示している。最大風速が 30m/s の領域もあり、全体として典型的な螺旋を描くジェットが確認できる。図 36 は、2000 年 6 月～8 月の 3ヶ月平均をとった東西風速度の順圧成分の図を示している。冬(図 35)に比べて、ジェットが非常に弱くなっていることがわかる。

図 37 は冬の東西風(1999 年 12 月～2 月の平均)を横軸に、縦軸に緯度をとった図である。赤道を 0 として北半球の緯度を +、南半球の緯度を - で示した。全球平均帯状風速度は 12.98m/s、北半球平均は、7.86m/s となっている。また、図 38 は、夏の東西風(2000 年 6 月～8 月の平均)をプロットした図である。全球平均帯状風

速度は  $10.51m/s$ 、また北半球平均は、 $0.49m/s$  である。これらを見ると、冬に北半球のジェットが強いことがわかる。また、赤道付近では貿易風が吹いており、南半球ではジェットの最大値に季節変化は見られないものの、南緯  $30 \sim 40^\circ$  付近のジェットが夏に強くなっていることがわかる。

## 5 考察

### 5.1 プリミティブ方程式系によるエネルギースペクトル

図のエネルギースペクトルをみると、大気大循環のエネルギースペクトルがロスビー波の西進位相速度  $c$  の 2 乗に比例するということが正しいと考えられる。さらに、これまでの結果を見ると、エネルギースペクトルが季節的に変化することがわかった。冬はエネルギーピークが高く、Rhines 速度が大きい。また、夏はエネルギーが冬ほど大きくなり、Rhines 速度も小さくなっている。

ここで、Rhines 速度について考えてみる。全球平均帯状風速度とロスビー波の西進位相速度が等しくなるとロスビー波は砕波する。すなわち、ジェットの高さと Rhines 速度の大きさには密接な関係がある。冬はジェットが強く、夏はジェットが弱いために冬のエネルギースペクトルは夏に比べて Rhines 速度が大きくなり、それに伴いエネルギーピークも高くなっていると考えられる。

一方、Rhines 速度より位相速度が小さい領域、すなわち乱流領域についてみると一年を通してエネルギーレベルが一致していることがわかる。前節で小さな傾きの変化について言及したが、これはジェットの高さによるエネルギーピークの増加で説明できると考えられる。この小さな変化を考慮したとしても、エネルギーレベルが一致していることがわかる。冬と夏のエネルギーピークの違いは、Rhines 速度の違い、すなわちジェットの高さの違いであろう。

ジェットの高さが違い、エネルギーピークが変化するにもかかわらず、年間を通して乱流領域におけるスペクトルのエネルギーレベルが一致するという事は、エネルギースペクトルがロスビー波が飽和し、砕波することによって形成されることを支持する結果であると考えられる。

球面 Rhines 比については、まず、冬は線形領域での低下が緩やかになることがあげられる。冬は、エネルギーピークが他の季節より高いことから、非線形項のエネルギー励起が大きく、球面 Rhines 比の低下にも影響が出ているものと思われる。また、全波数が大きい波のほうが小さい波に比べて球面 Rhines 比が小さく、落ち込みが早いことから波数が多くなるほど非線形項は小さいと見られる。

## 5.2 準地衡風理論によるエネルギースペクトル

### 5.2.1 波数に対するエネルギースペクトル

まず、波数に対するエネルギースペクトルについて試みる。図 20、22 は、横軸に東西波数をとって、縦軸に全エネルギーをとってエネルギースペクトルを示してある。波数が小さい時、エネルギーはある程度一定の値を持っているが、波数が 10 あたりになると、ほぼ一定の傾きをもってエネルギーは減少している。この減少の傾きは、ほぼこの直線に近いように見られる。さらに波数が増えると、また傾きが急になってエネルギーは減少している。

では、横軸に全波数をとった図 21、23 はどうだろう。波数が 10 前後で一番エネルギーが高いプロットを基準にすると $-3$ 乗に従っているようである。このスペクトルについても、途中から傾きが急になる場所がある。

図 21、23 のエネルギースペクトルをみるに、図 20、22 と比べると明らかにエネルギーが大きい。三角切断を行ったため、従来の研究で示されてきたエネルギースペクトルよりも図 20、22 のエネルギーは小さいと考えられる。東西波数に対するエネルギースペクトルを考える際、波数切断をどのような方法で行ったかを考慮する必要があると考えられる。

図 23 をみると波数が 39 付近よりも小さい領域では $-3$ 乗にしたがっているように見える。全波数が 39 よりも大きい領域では発散成分をたした際、多少の増加があり、傾きの変化がゆるくなっているように見えると前節で言及した。これについて、39 以上の波数の領域も考慮に入れると多少のずれはあるものの $-4$ 乗に従っているようにも見えた。

### 5.2.2 ロスビー波の位相速度に対するエネルギースペクトル

図 25 ~ 27 は、回転成分のエネルギースペクトルである。エネルギーピーク付近では多少の違いはあるが、ほとんど同じ特徴を示している。位相速度が小さい領域では傾圧不安定によるエネルギー注入によって、エネルギーが増加している。その後、頭打ちとなっている。2000 年 2 月の図については、頭打ちとなるピークが 2 つ見られる。この時期には、何らかの変動があったとみられる。このエネルギー増加領域は、ほぼ  $c$  の 2 乗に比例していることがよくわかる。図 28 は、この 3 ヶ月の平均を取っている。エネルギースペクトルの傾きで、ぼこぼことしたところがなくなり、すっきりとしたエネルギースペクトルをみることができる。傾きに



関しては、プリミティブ方程式系で示したエネルギースペクトルより  $c$  の 2 乗に比例する関係がよくあらわれている。また、この図には発散成分も書いてあるわけだが、発散成分はロスビー波の位相速度が大きくなるにつれてわずかではあるが増加の傾向がある。これを考えると、非線形項が卓越する乱流領域では発散成分は非常に小さく、準地衡風理論がよく成り立つがロスビー波の西進速度が大きくなり、線形項が卓越する領域になると発散成分が無視できなくなってくるとみられる。

図 29 は回転成分と発散成分を足したものである。全波数ごとのエネルギースペクトルを見ると、エネルギーが頭打ちした後、エネルギーの落ち方が遅くなっているスペクトルがいくつか見られる。全てではないが、どの波においてもエネルギーが頭打ちになった後は発散することによって回転成分が発散成分に変わっているように見える。

また、図 30 ~ 34 は 2000 年 6 月 ~ 8 月について図 25 ~ 29 の図と同様の解析をした図である。この夏のエネルギースペクトル (図 30 ~ 34) と、冬のエネルギースペクトル (図 25 ~ 29) を比較すると、乱流領域におけるエネルギーレベルは、プリミティブ方程式に基づくエネルギースペクトルと同様にほぼ一致することがわかる。また、一方で、エネルギーピークがほぼ変わっていないように見える。特に、3ヶ月平均を取った図 28 と図 33 をみると変わっていない様に見える。しかし、図 32 をみると、8 月には位相速度が 0.01 付近で連続したエネルギーの増加が途絶え、へこんでいるように見える。また、図 30 ではエネルギーピークがほぼ冬のものと同じとなっている。すなわち、3ヶ月平均を取った図 33 においてエネルギーピークが冬と同じとみられたのは、6 月のエネルギースペクトルの特徴がよく出たものと見られる。また、本研究の解析では全球のエネルギースペクトルを計算しているため、季節的な変化が見えにくいことも確かである。このように考えると、夏には冬よりもエネルギーピークが下がると考えられる。ここで、図 37、38 を見てみよう。これは、それぞれ 1999 年 12 月 ~ 2 月と 2000 年 6 月 ~ 8 月のジェットの強さを示した図である。これをみると、北半球の冬でジェットが強くなっていることがわかる。南半球で夏のジェットが強くなる緯度帯があるが、冬のジェットの強まりに比べると小さく、Rhines 速度が冬に大きくなることを示していると思われる。

## 6 まとめ

大気大循環のエネルギースペクトルを見ることは、大気の様々な流れを見る上で重要な手法として認知されてきた。それを受けて、これまで水平波数に対するエネルギースペクトルが研究されてきた。その中で、水平波数に対するエネルギースペクトルとは別に、ロスビー波の西進位相速度に対するエネルギースペクトルを示すという方法がでてきた。それはロスビー波が飽和に達し、砕波する過程でエネルギースペクトルが形成されるというものであった。このロスビー波の砕波理論から、エネルギースペクトルはロスビー波の西進位相速度  $c$  の 2 乗に比例するという特徴が提示された。

しかし、その理論は準地衡風理論から導かれたにもかかわらず、スペクトル解析の過程ではプリミティブ方程式に基づくというものであった。

そのため、本研究では準地衡風理論に基づいてスペクトル解析を行い、従来いわれてきた理論が正しいのか、ロスビー波の砕波理論が正しいのかの検証を行った。

すると、一見、ロスビー波の西進位相速度  $c$  の 2 乗に比例することが見られた。また、それ以外にも大きく分けて 2 つのことがわかった。1 つは、エネルギースペクトルは季節変化をするということである。冬はジェットが強く、それに伴ってロスビー波の砕波する時の位相速度は速くなり、エネルギーピークは高くなる。夏は、その逆でジェットが弱まり、エネルギーピークが弱まる。しかしながらエネルギースペクトルの乱流領域を見ると、そのエネルギーレベルはほぼ一致しており、同じエネルギーの増加及び、飽和をすることがわかった。これはロスビー波が飽和し、砕波する過程でのエネルギーは、一つのエネルギーレベルに従うことを示している。すなわち、大気大循環のエネルギースペクトルがロスビー波の砕波理論によって形成されているということの裏づけとなる。

また、本研究では準地衡風理論に基づいたエネルギースペクトルを示すとともに、この理論では無視される発散成分についてのエネルギースペクトルも示した。すると、発散成分がロスビー波の砕波後に大きくなり、エネルギースペクトルに影響を与えていると考えられた。

本研究では、この大気大循環のエネルギースペクトルがロスビー波の西進位相速度  $c$  の 2 乗に比例することを検証するのが目的であった。それについては、目的を達せられたように思う。ただ、プリミティブ方程式に基づいたエネルギースペクトルと準地衡風理論に基づいたエネルギースペクトルを示したが、用いたデータセットの違いや用いた期間の違いから相互のエネルギースペクトルの違いにつ

いて言及することができなかつた。これについてはさらなる解析をする必要がある。また、準地衡風理論に基づいたエネルギースペクトルでは、夏のエネルギースペクトルが予想と違い、エネルギーピークが高い領域があつた。これについても、他の年のエネルギースペクトルを解析する必要がある。さらに、夏の発散成分に対するエネルギースペクトルが乱流領域において大きかつた。また、ロスビー波が砕波した後のスペクトルの挙動についても理論があるのだろうか。冬と夏とではエネルギーの落ち方が多少違つていたことも気にかかる。これらについても、さらなる議論が必要である。

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、指導教官である田中博教授には、研究内容に対する問題提起に始まり、終始指導をしていただきました。

また、同研究室の先輩方には研究内容に対する事、発表方法等、いろいろと助言をいただき、順調に卒業研究を進めることができました。さらに発表の場では、同分野の先生方、院生の方々、同じ4年生の皆様には、貴重なご意見をいただきました。

ありがとうございました。

## 参考文献

- [1] Boer, G. J., and T. G. Shepherd, 1983: Large-scale two-dimensional turbulence in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 164–184.
- [2] Nastrom, G.D., and K.S. Gage, 1985: A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 950–960.
- [3] Shepherd, T. G. 1987: A spectral view of nonlinear fluxes and stationary-transient interaction in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 1166–1178.
- [4] Tanaka, H. L., Y. Watarai, and T. Kanda, 2004: Energy spectrum proportional to the squared phase speed of Rossby modes in the general circulation of the atmosphere. *GRL*, **31**, L13109.
- [5] Tanaka, H. L., and A. Kasahara 1992: On the normal modes of Laplace’s tidal equations for zonal wavenumber zero. *Tellus*, **44A**, 18–32.
- [6] Tung, K. K., and W. W. Orlando, 2003: The  $k^{-3}$  and  $k^{-5/3}$  energy spectrum of atmospheric turbulence: Quasigeostrophis two-level model simulation. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 824–935.
- [7] Welch, W. T., and K. K. Tung 1998: On the equilibrium spectrum of transient waves in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 2833–2851.
- [8] 小倉義光, 1978: 気象力学通論. 東京大学出版会.
- [9] 神田貴博, 2004: ロスビー波の増幅と砕波による大規模乱流スペクトルの形成過程. 筑波大学自然科学類卒業論文.
- [10] 田中博, 2003: 順圧大気大循環モデルによる北極振動の数値実験およびその力学的考察. 気象研究ノート.
- [11] 吉野純, 1998: 順圧大気における波と乱流のスペクトル特性に関する研究. 筑波大学自然科学類卒業論文.
- [12] 余田成男, 2002: 筑波大学 2002 年度 気候学・気象学特殊講義ノート.

# Total Energy Spectrum

JMA/GPV (DJF 2002/03)

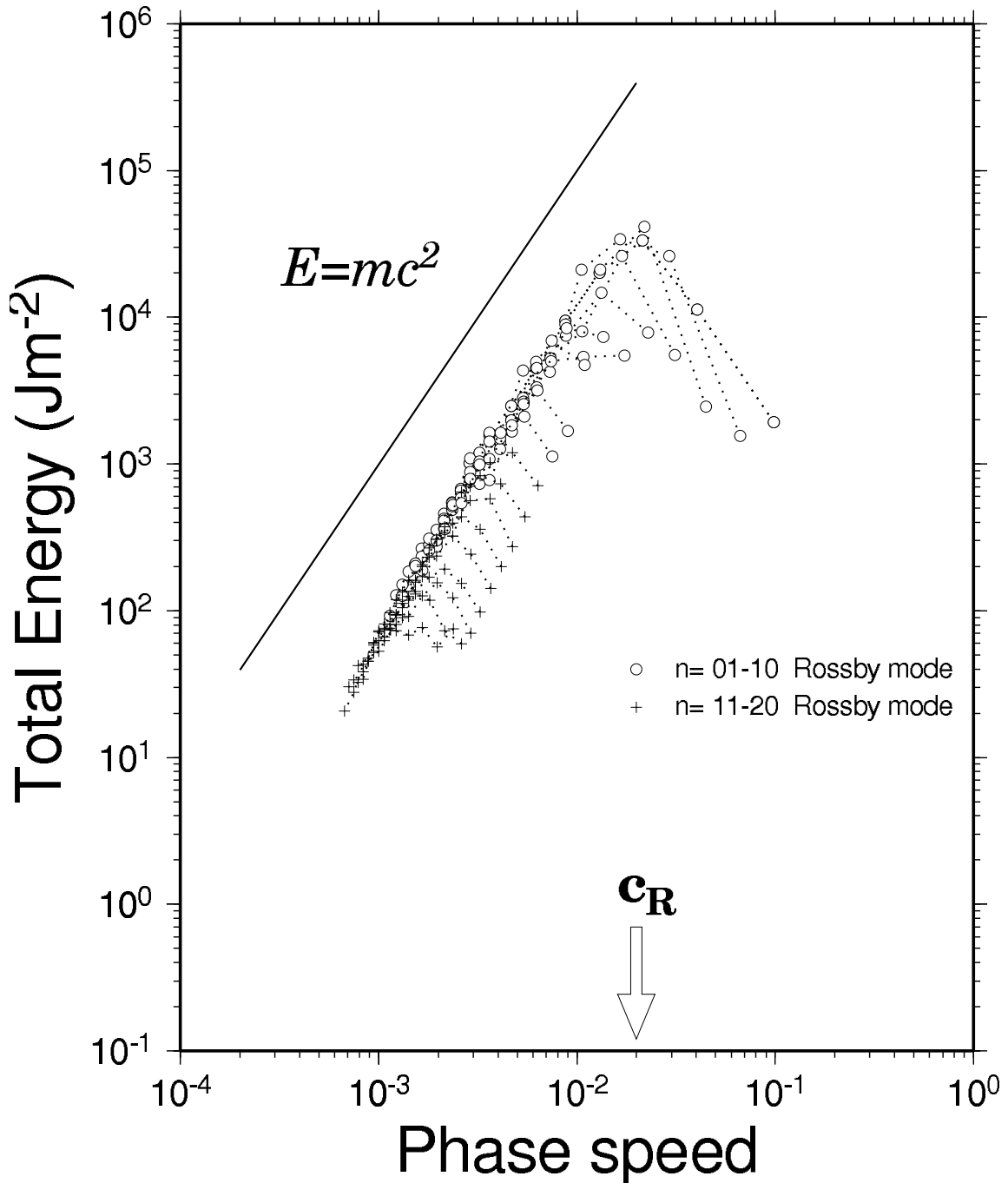


図 1: プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル(2003年、冬)

# Total Energy Spectrum

JMA/GPV (MAM 2003)

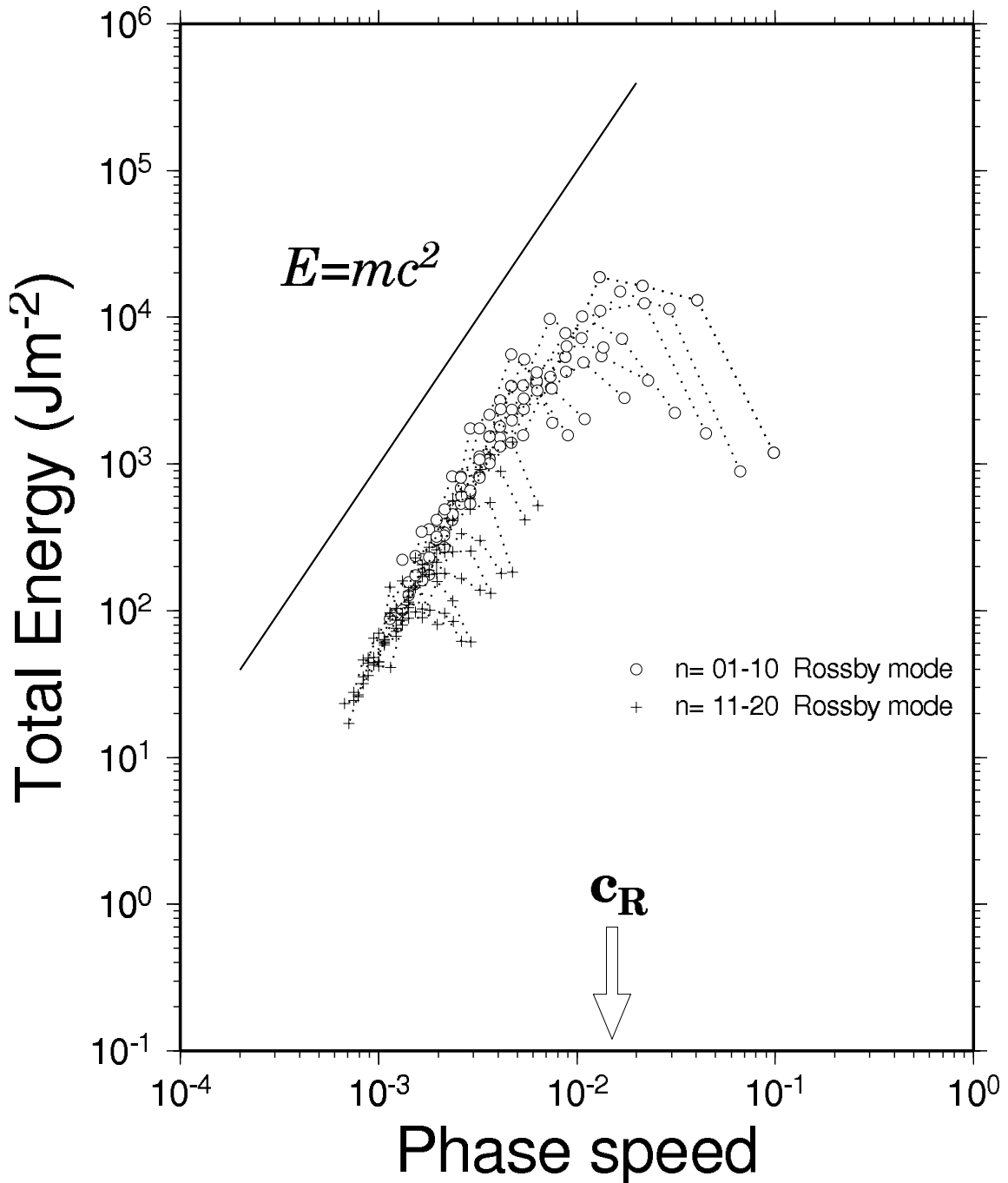


図 2: プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル(2003年、春)

# Total Energy Spectrum

JMA/GPV (JJA 2003)

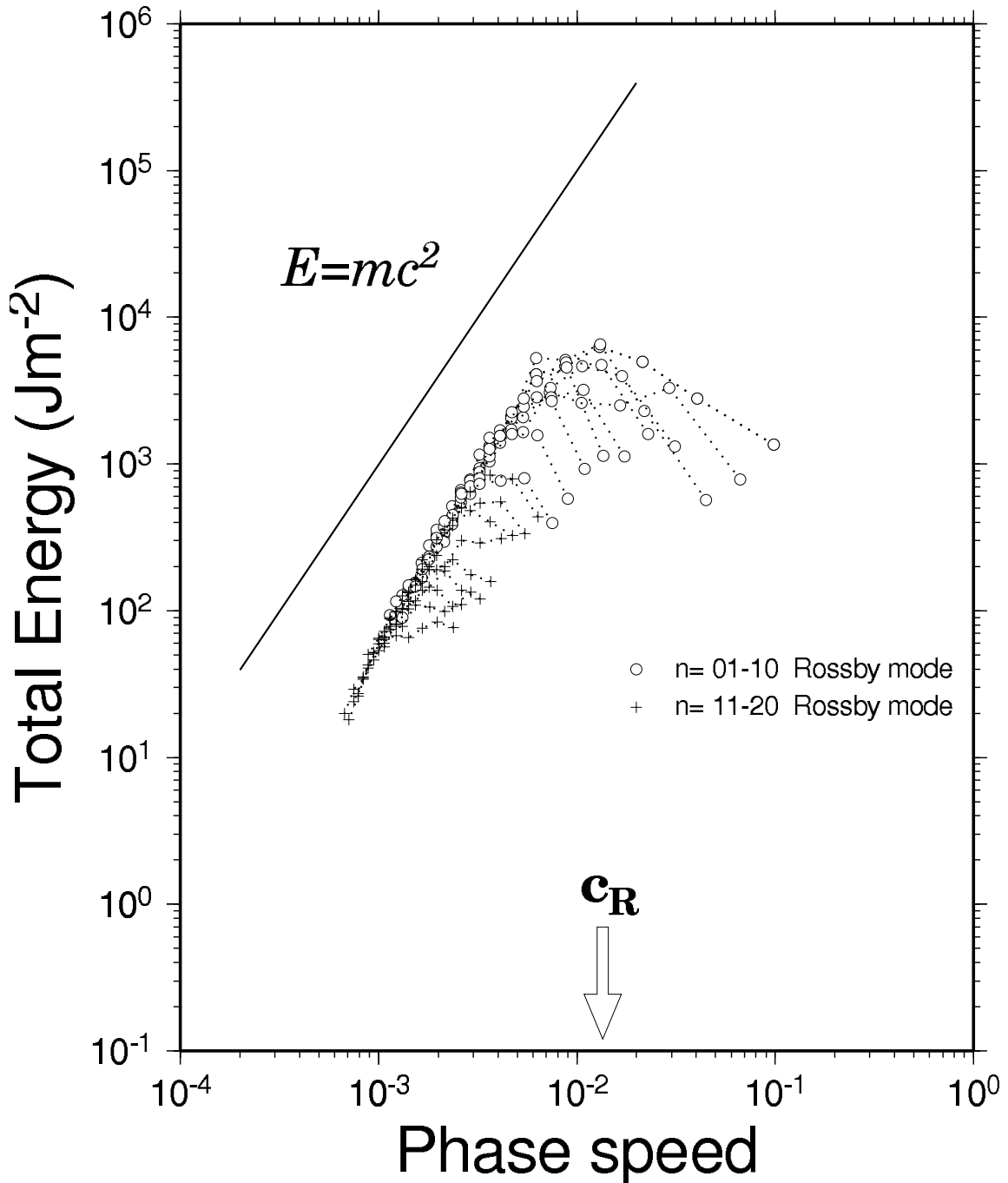


図 3: プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル(2003年、夏)



# Total Energy Spectrum

JMA/GPV (SON 2003)

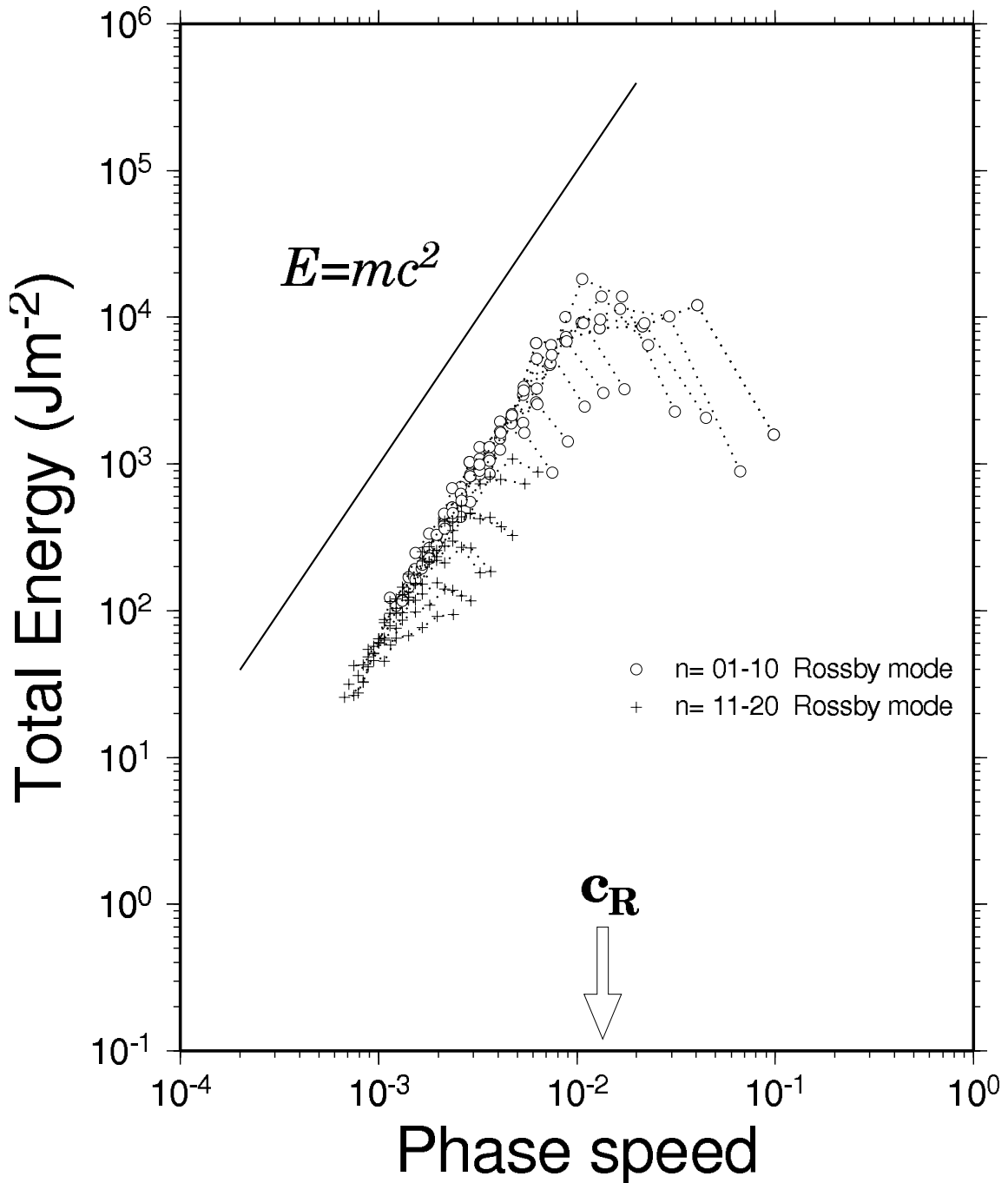


図 4: プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル(2003年、秋)

# Total Energy Spectrum

JMA/GPV (DJF 2003/04)

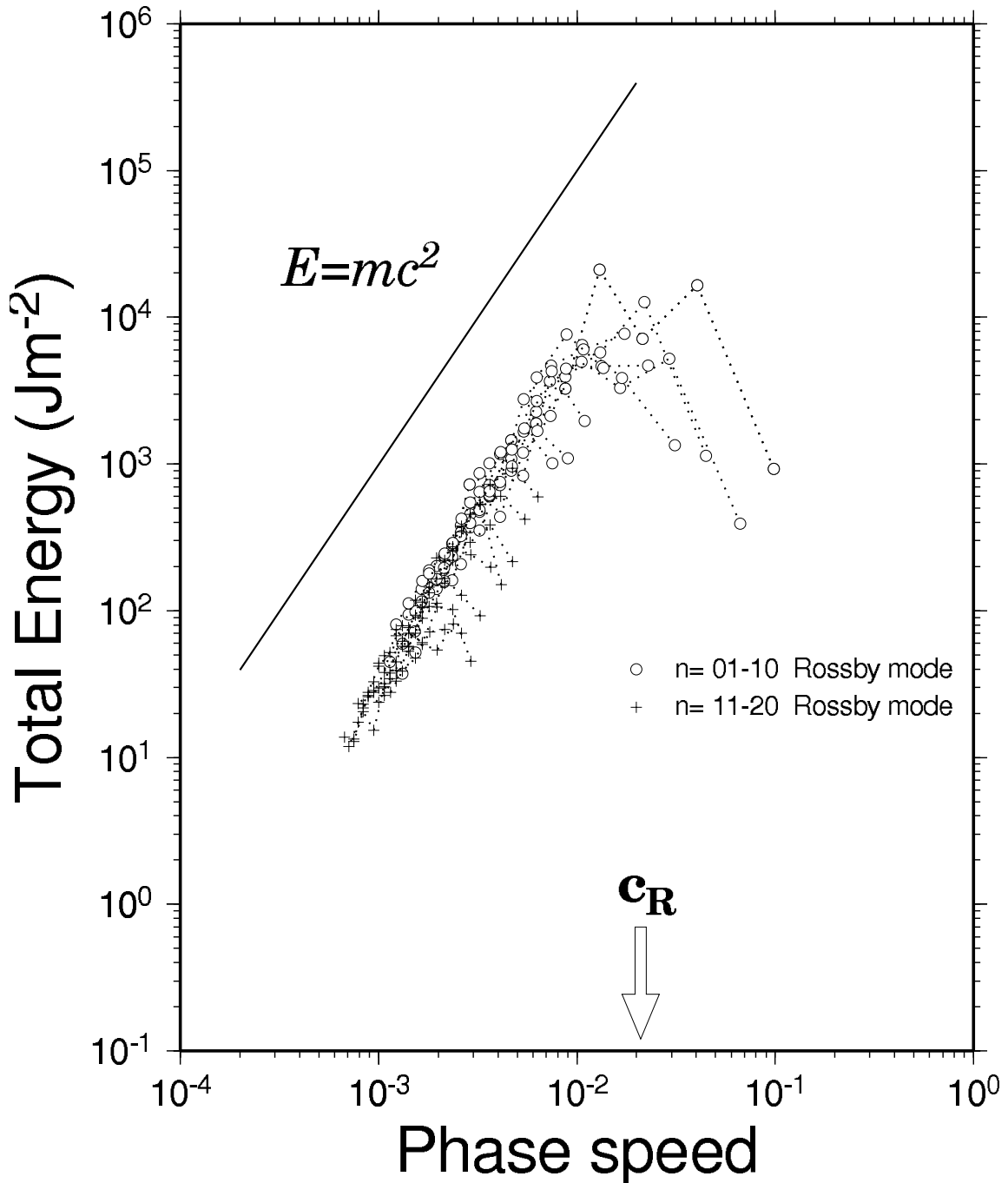


図 5: プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル(2004年、冬)

# Total Energy Spectrum

JMA/GPV (MAM 2004)

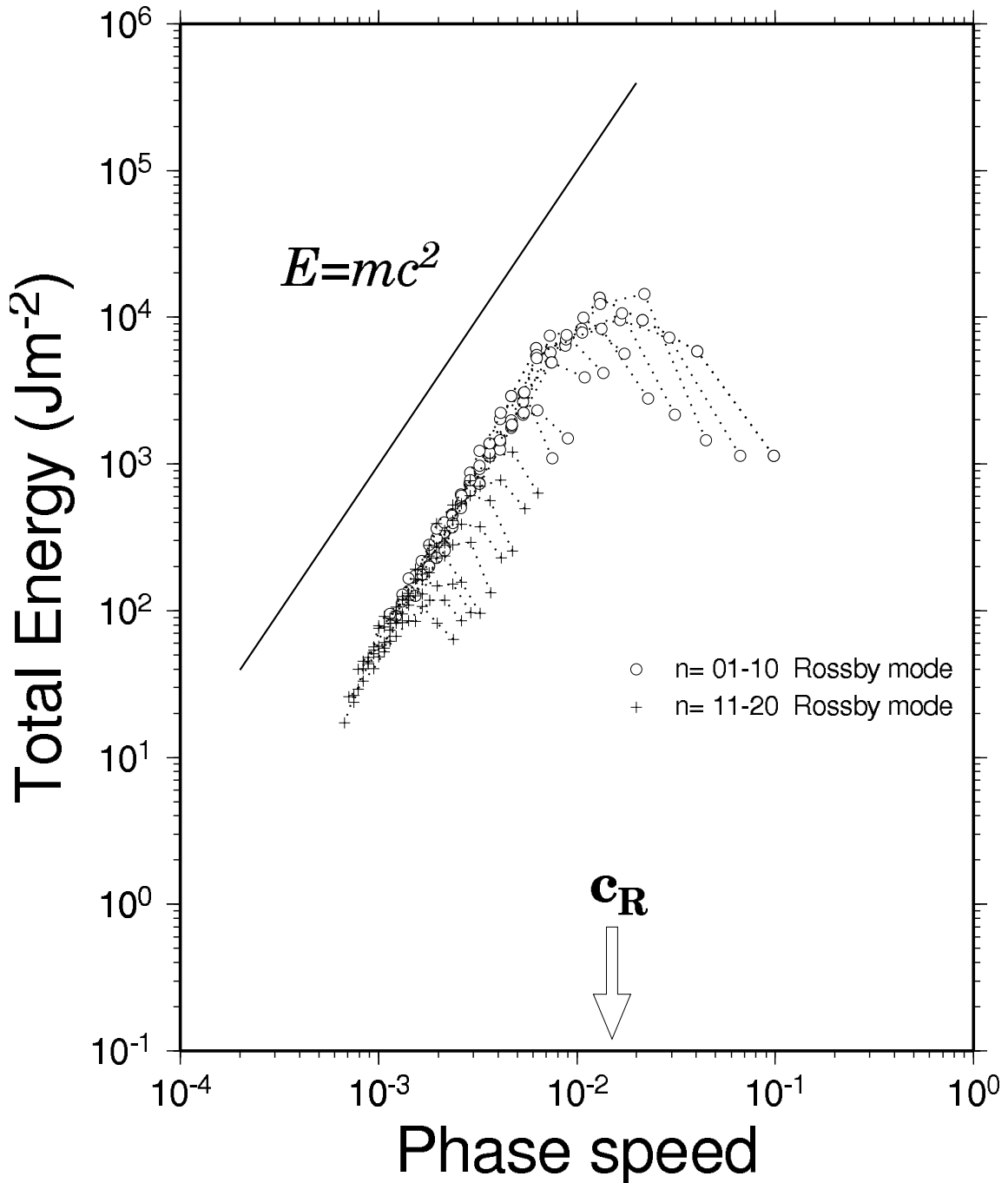


図 6: プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル(2004年、春)

# Total Energy Spectrum

JMA/GPV (JJA 2004)

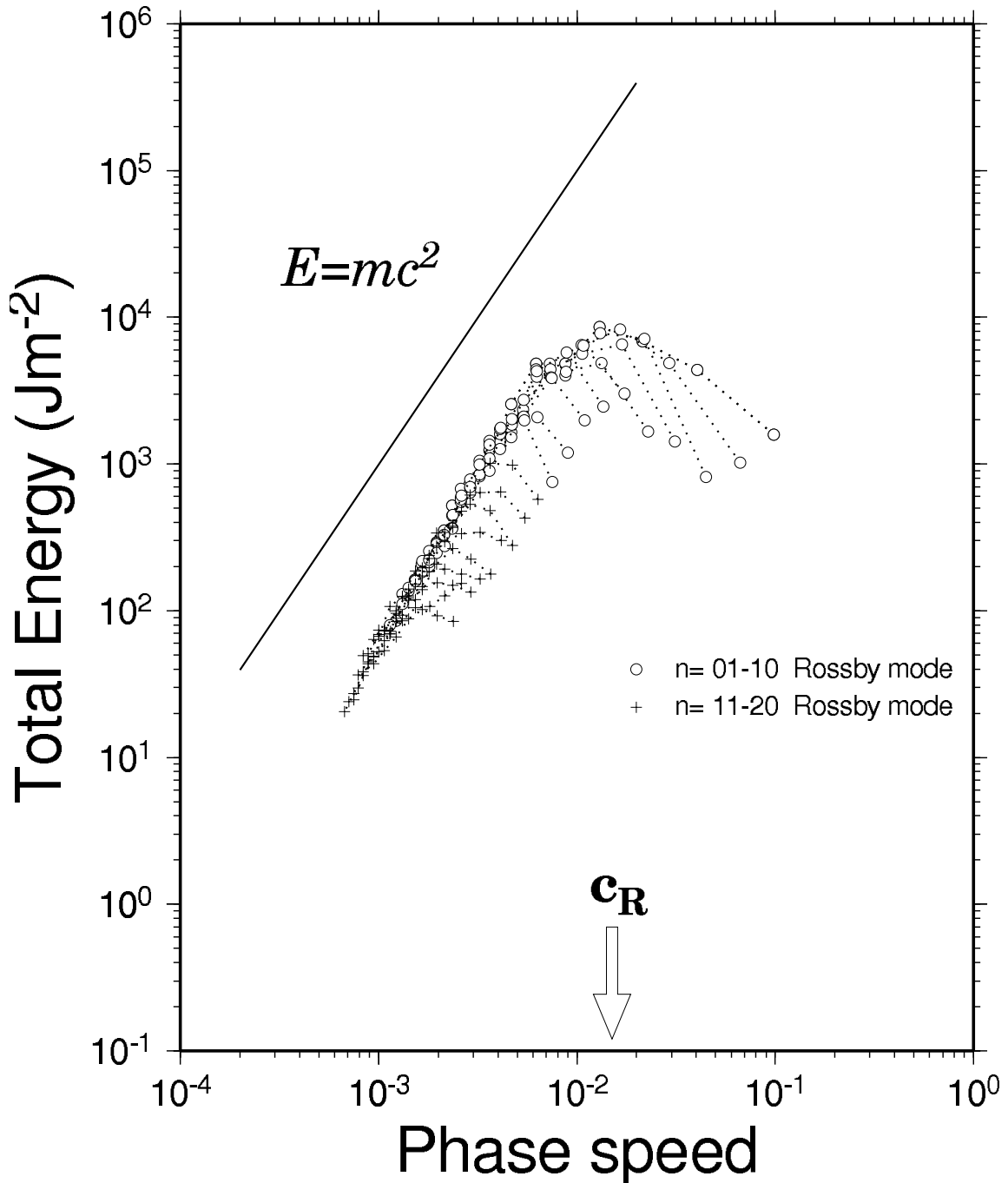


図 7: プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル(2004年、夏)

# Total Energy Spectrum

JMA/GPV (SON 2004)

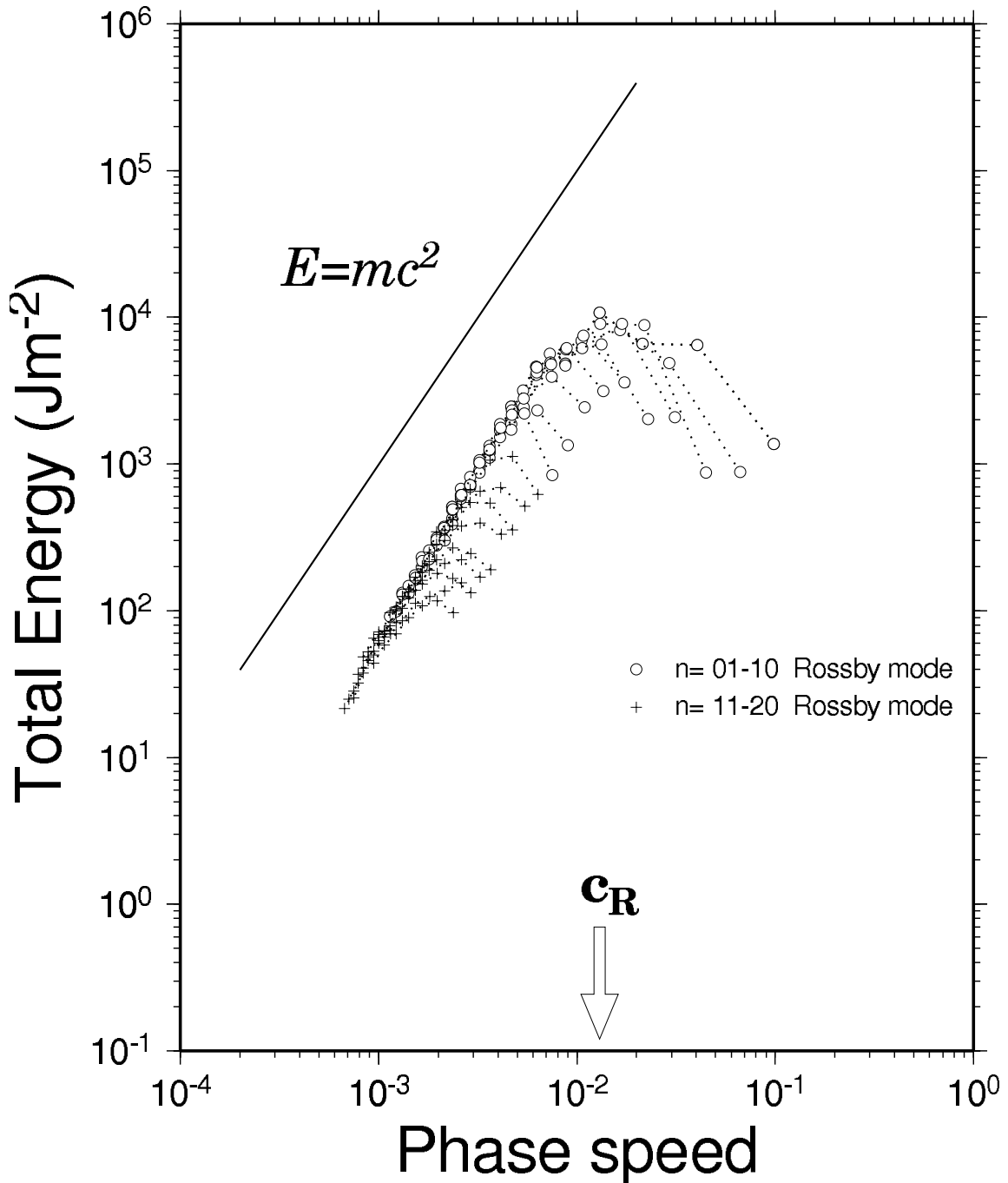


図 8: プリミティブ方程式系による大気大循環のエネルギースペクトル(2004年、秋)

# Spherical Rhines Ratio

JMA/GPV (DJF 2002/03)

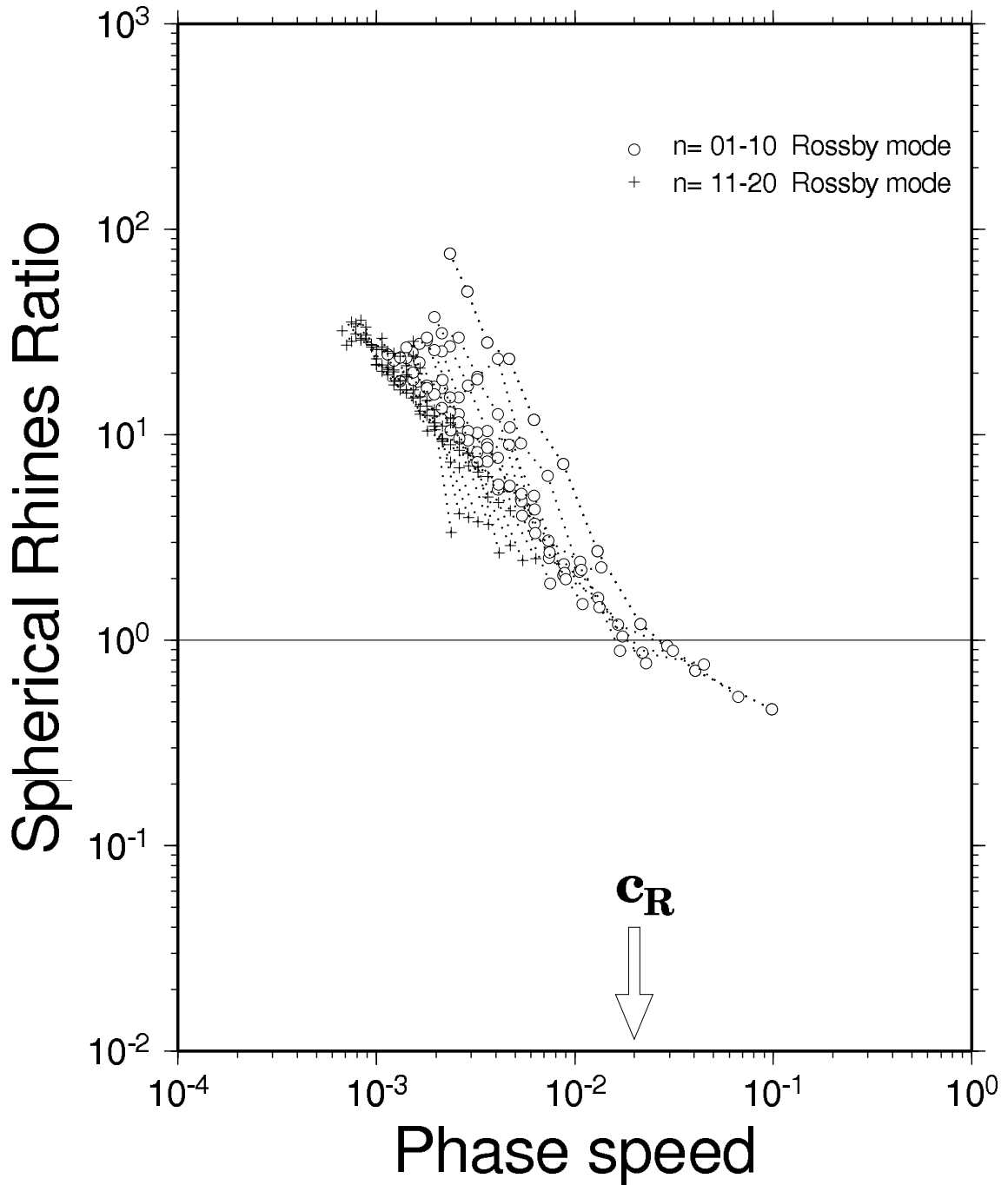


图 9: 球面 Rhines 比 (2003 年、冬)

# Spherical Rhines Ratio

JMA/GPV (MAM 2003)

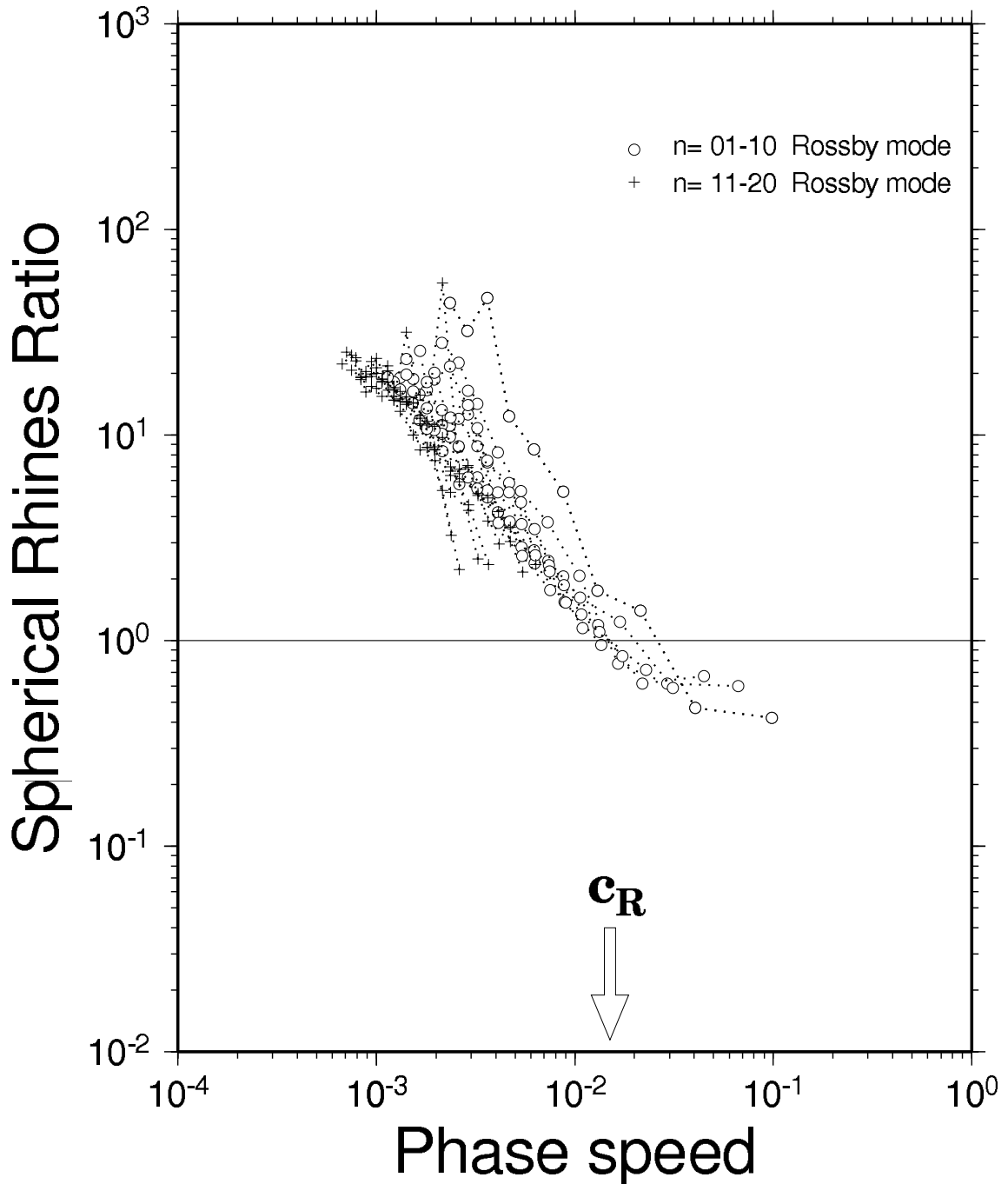


图 10: 球面 Rhines 比 (2003 年、春)

# Spherical Rhines Ratio

JMA/GPV (JJA 2003)

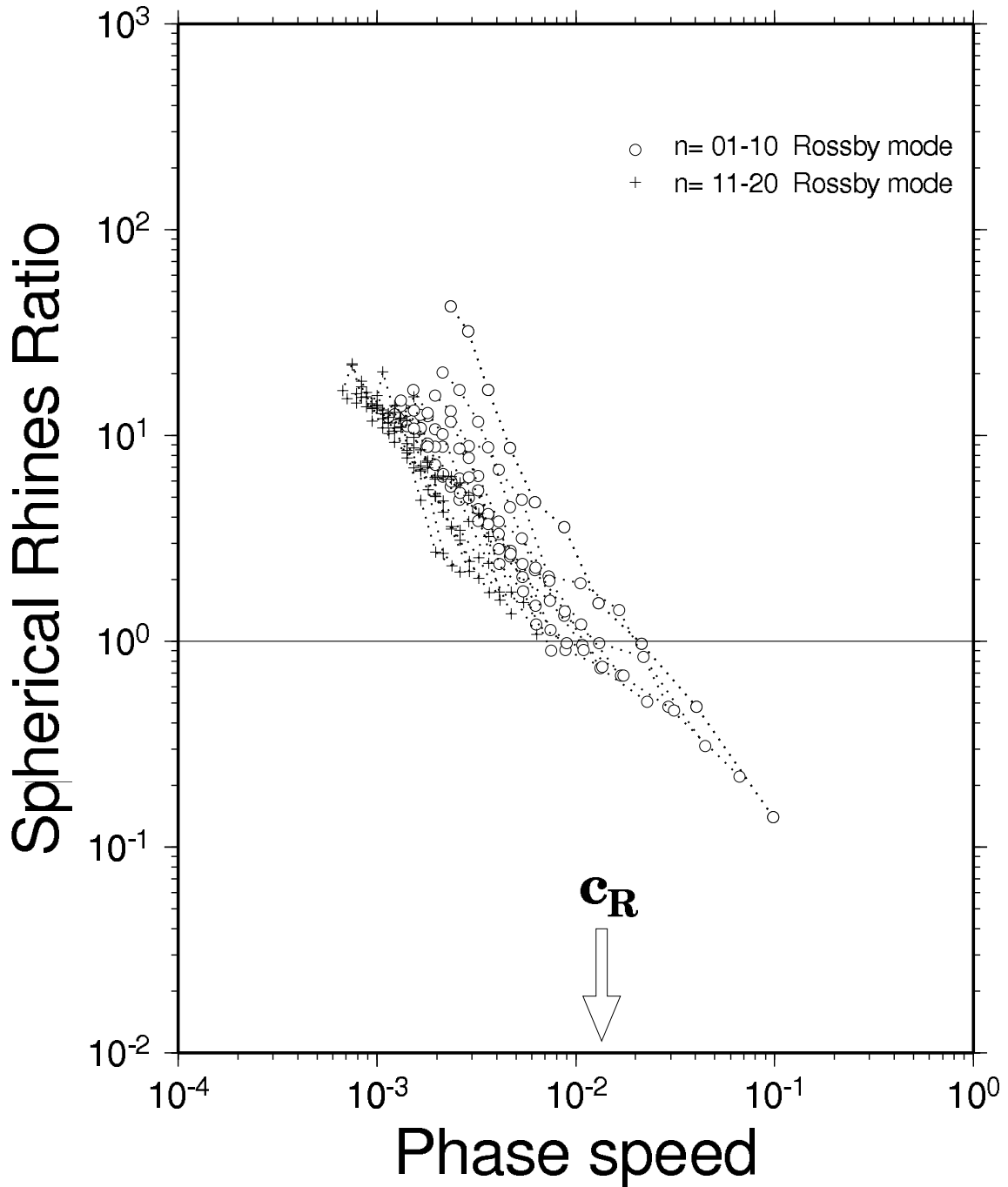


图 11: 球面 Rhines 比 (2003 年、夏)



# Spherical Rhines Ratio

JMA/GPV (SON 2003)

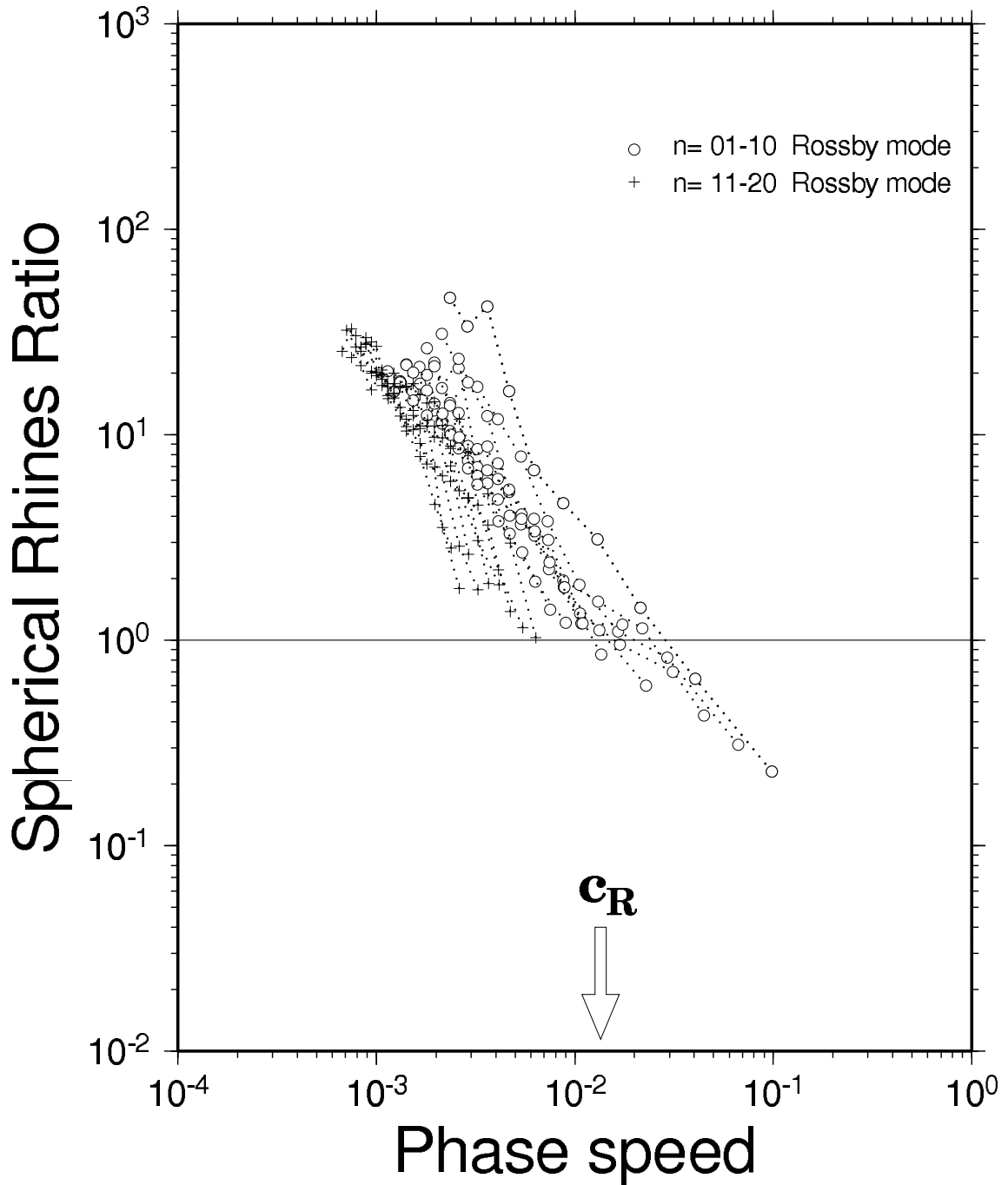


图 12: 球面 Rhines 比 (2003 年、秋)

# Spherical Rhines Ratio

JMA/GPV (JF 2004)

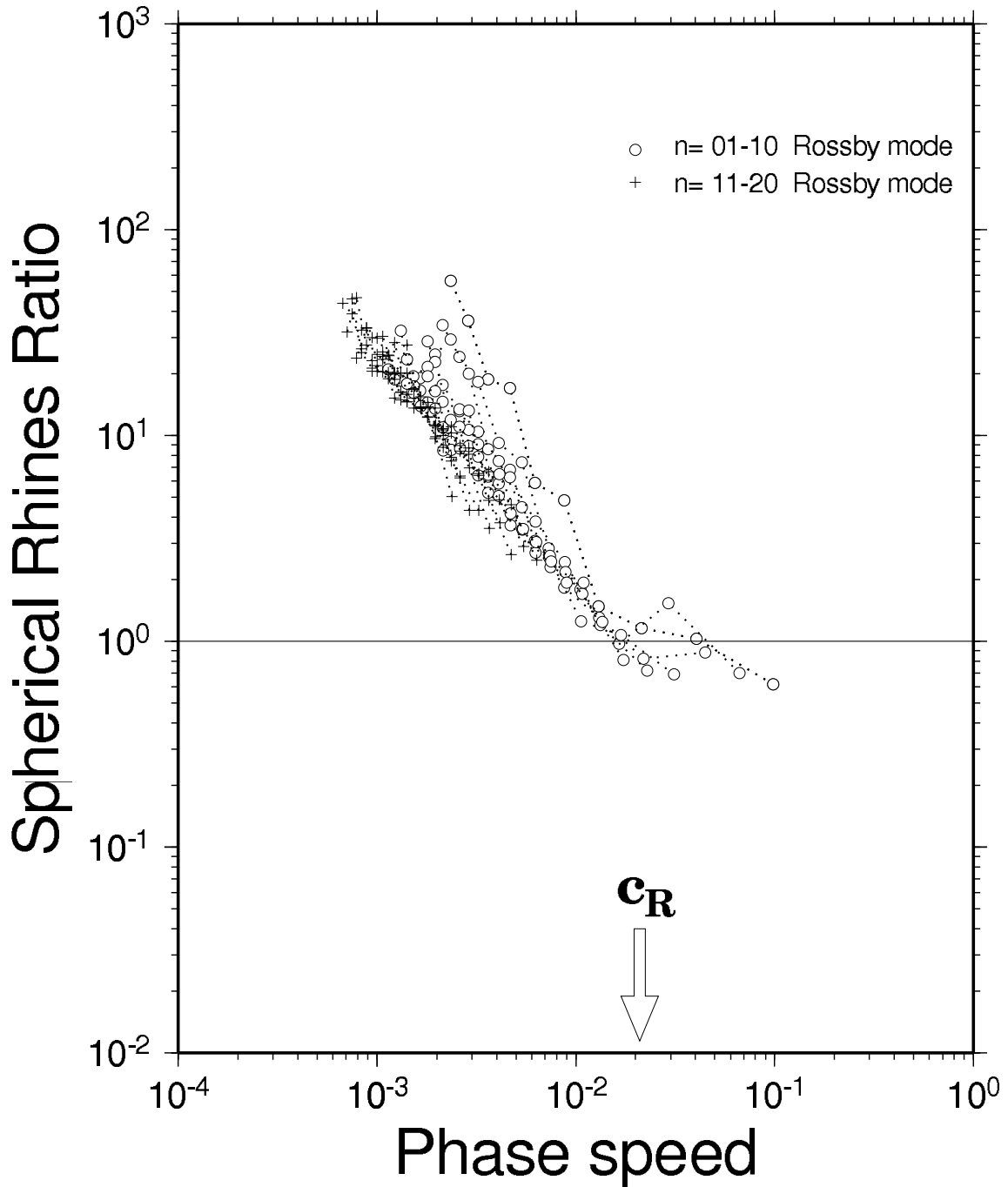


图 13: 球面 Rhines 比 (2004 年、冬)

# Spherical Rhines Ratio

JMA/GPV (MAM 2004)

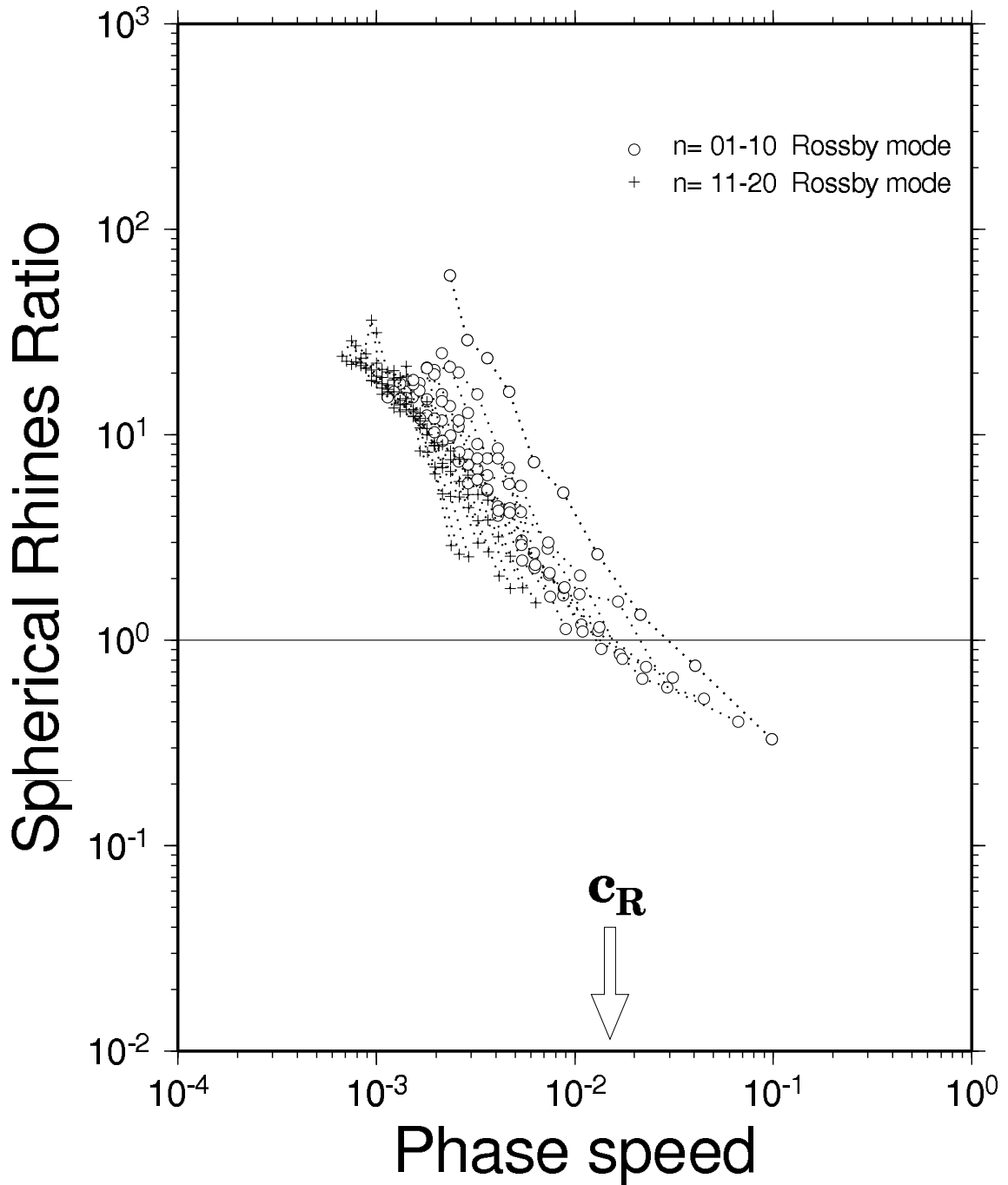


图 14: 球面 Rhines 比 (2004 年、春)

# Spherical Rhines Ratio

JMA/GPV (JJA 2004)

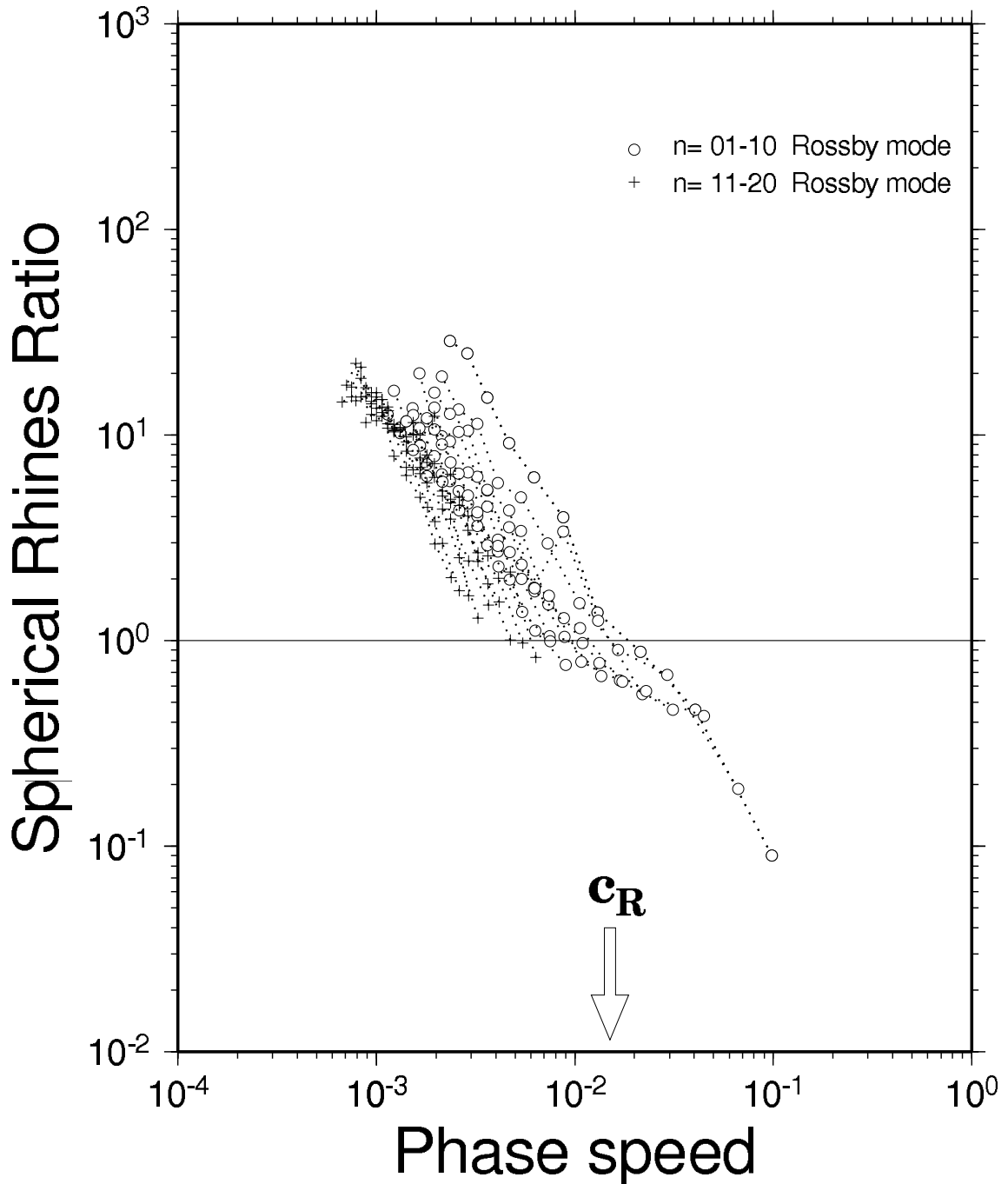


图 15: 球面 Rhines 比 (2004 年、夏)

# Spherical Rhines Ratio

JMA/GPV (SON 2004)

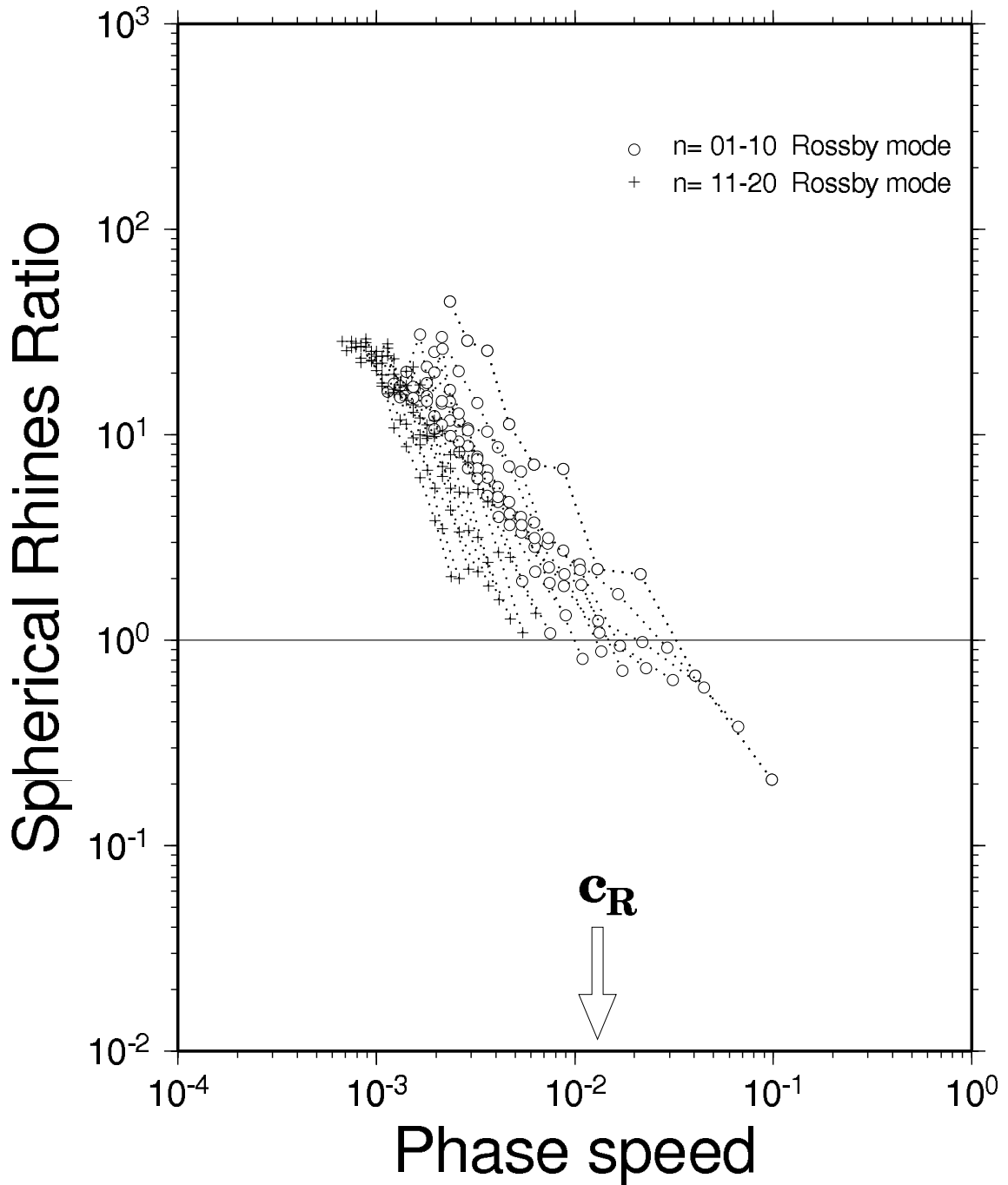


图 16: 球面 Rhines 比 (2004 年、秋)

# Stream Function

2000 01 1 00Z

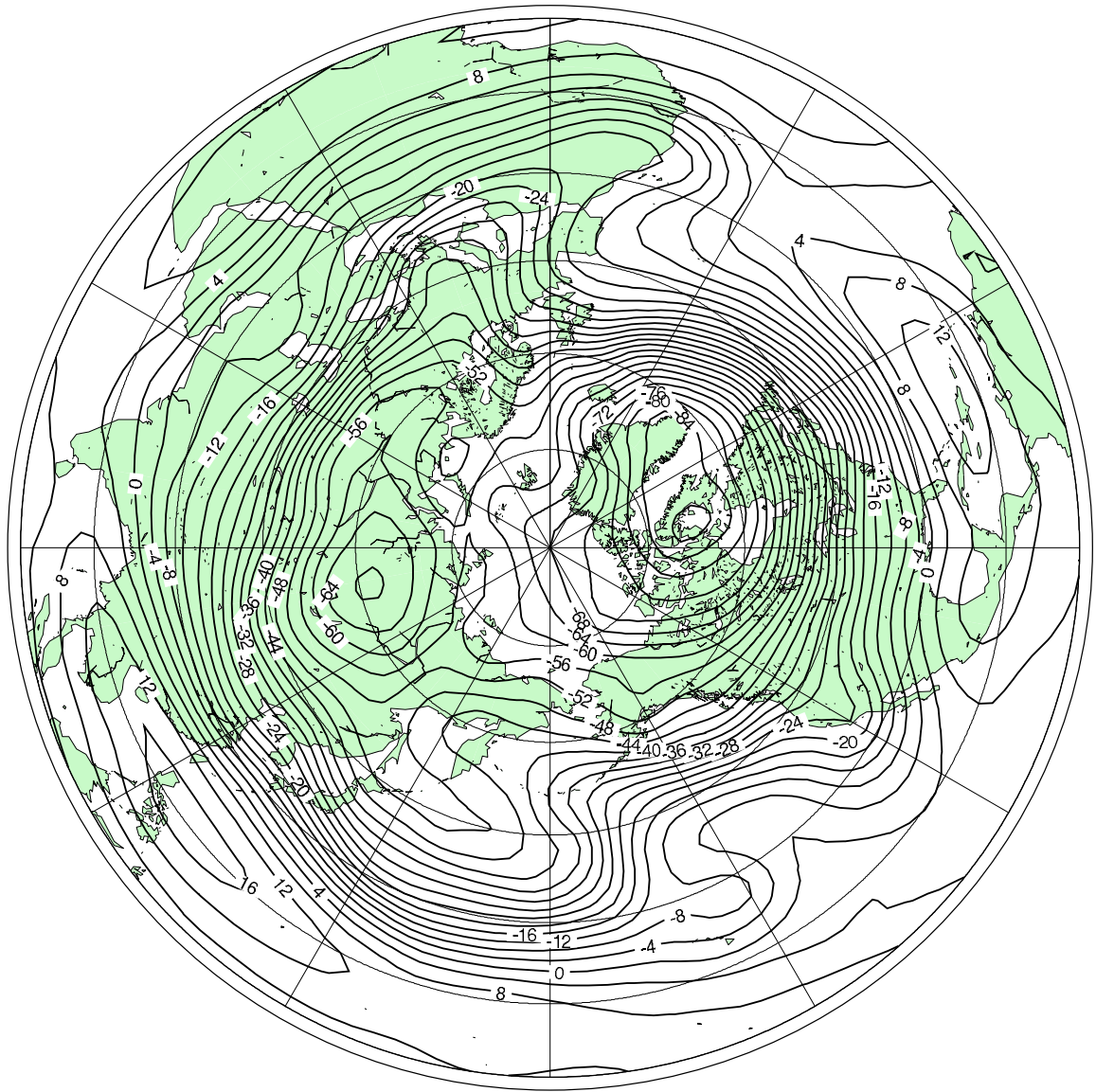
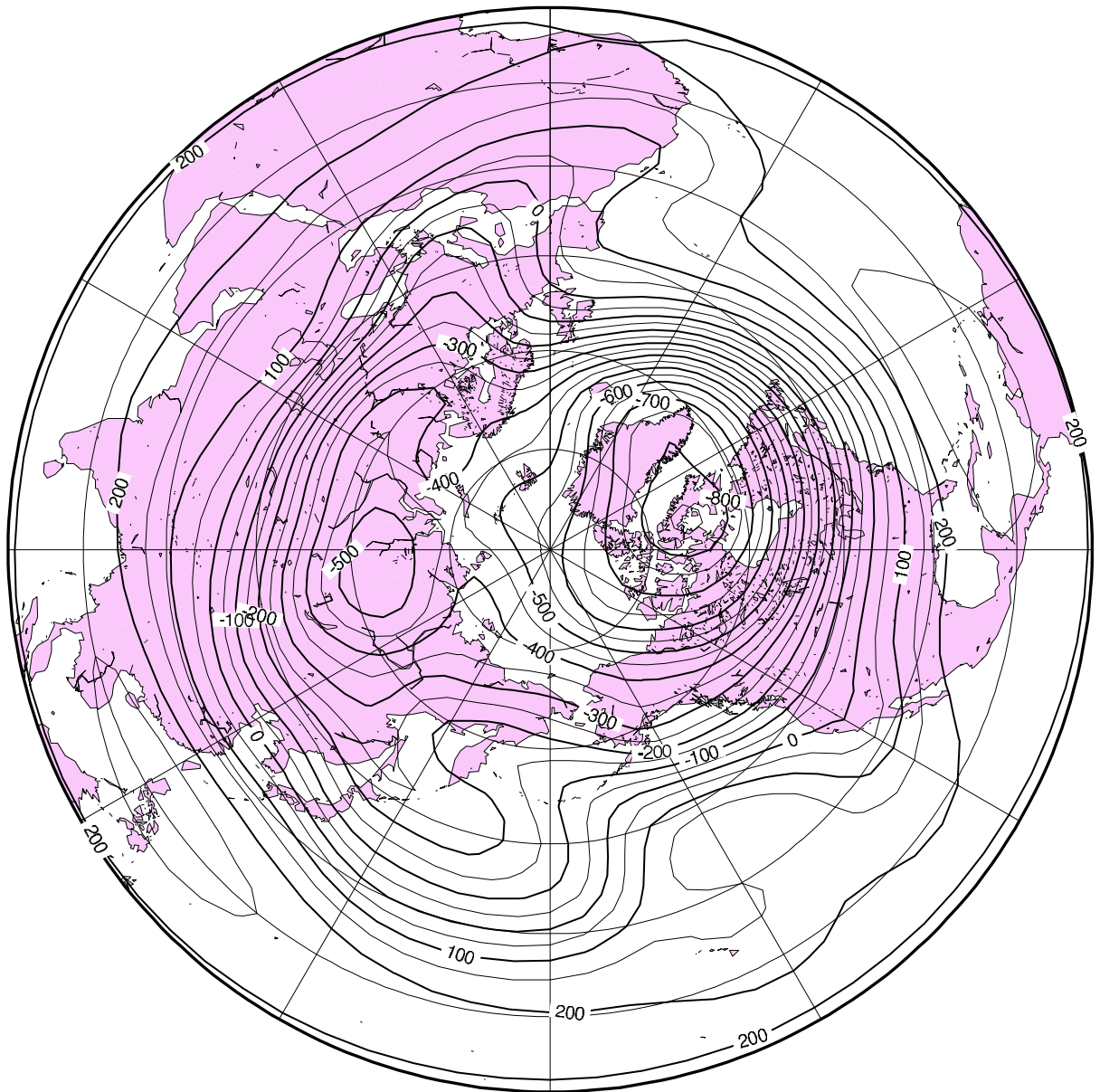


図 17: 流線関数 (2000 年 1 月 1 日)

# Barotropic Height

0000Z 01 January 2000



☒ 18: Barotropic Height(2000年1月1日)

# Stream Function

1999/12-2000/02

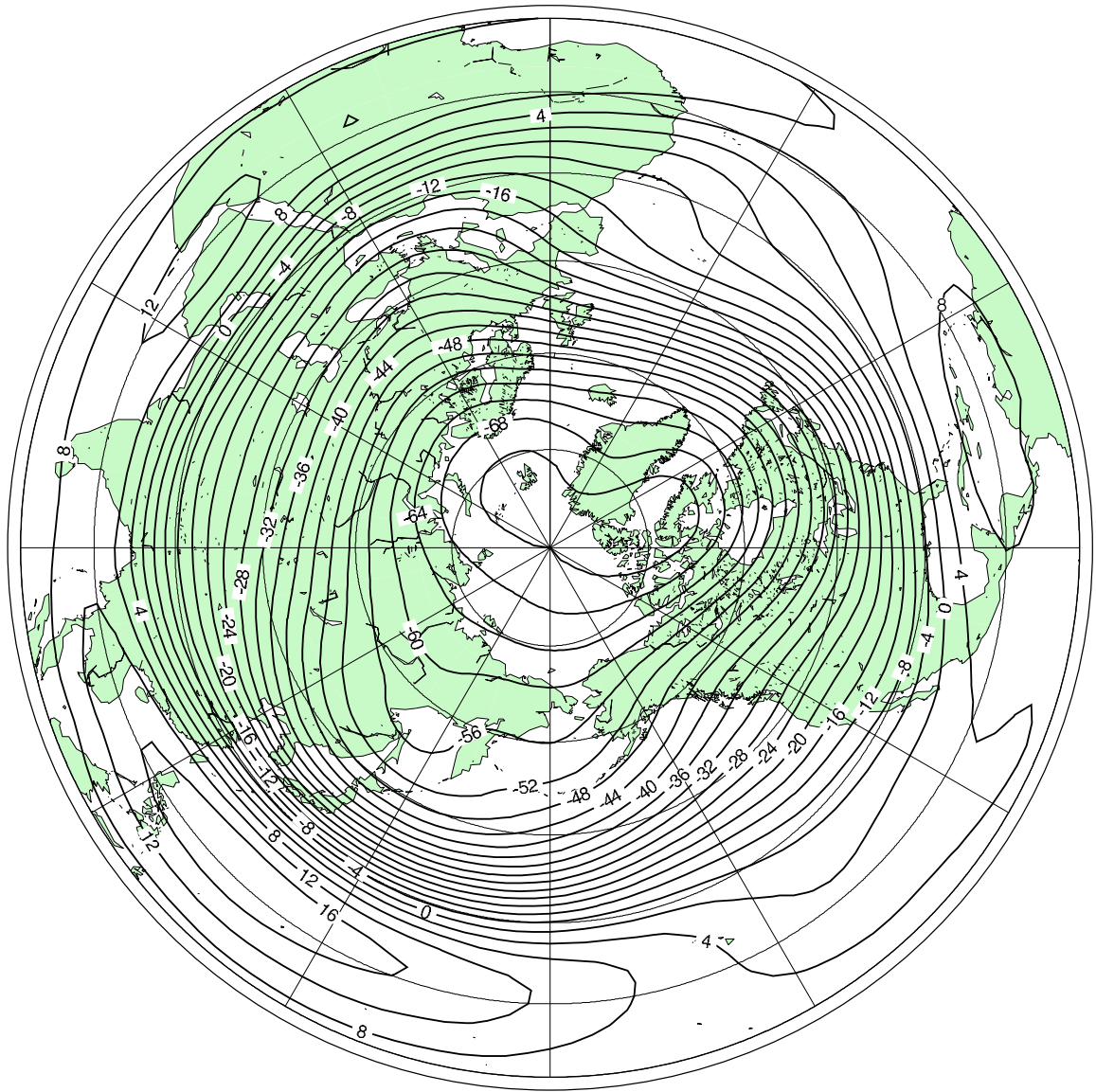


図 19: 流線関数 (1999年12月~2月の3ヶ月平均)



# Energy Spectrum

JRA-25 (DJF 1999-2000)

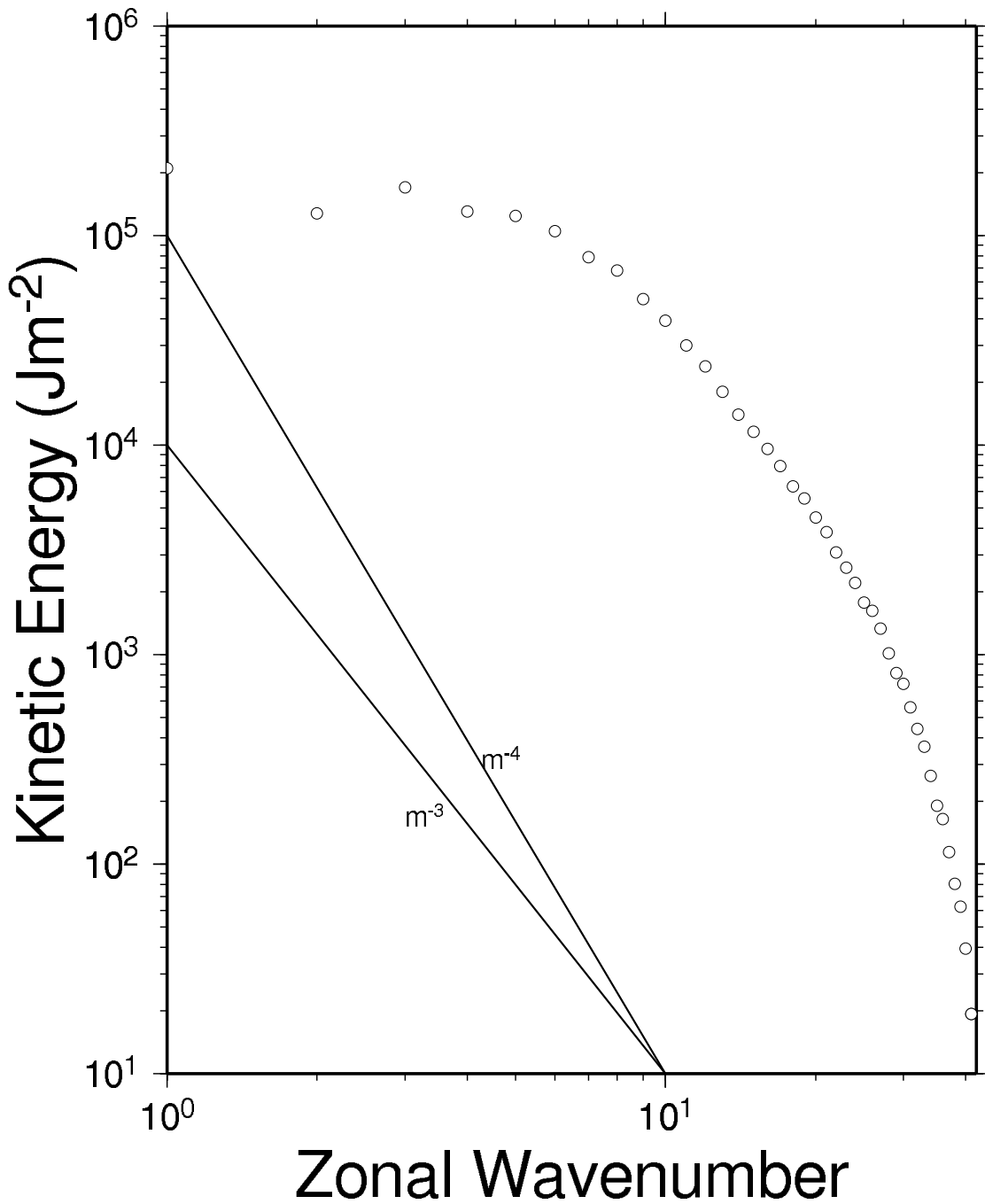


図 20: 準地衡風理論による東西波数に対するエネルギースペクトル (回転成分)

# Energy Spectrum

JRA-25 (DJF 1999-2000)

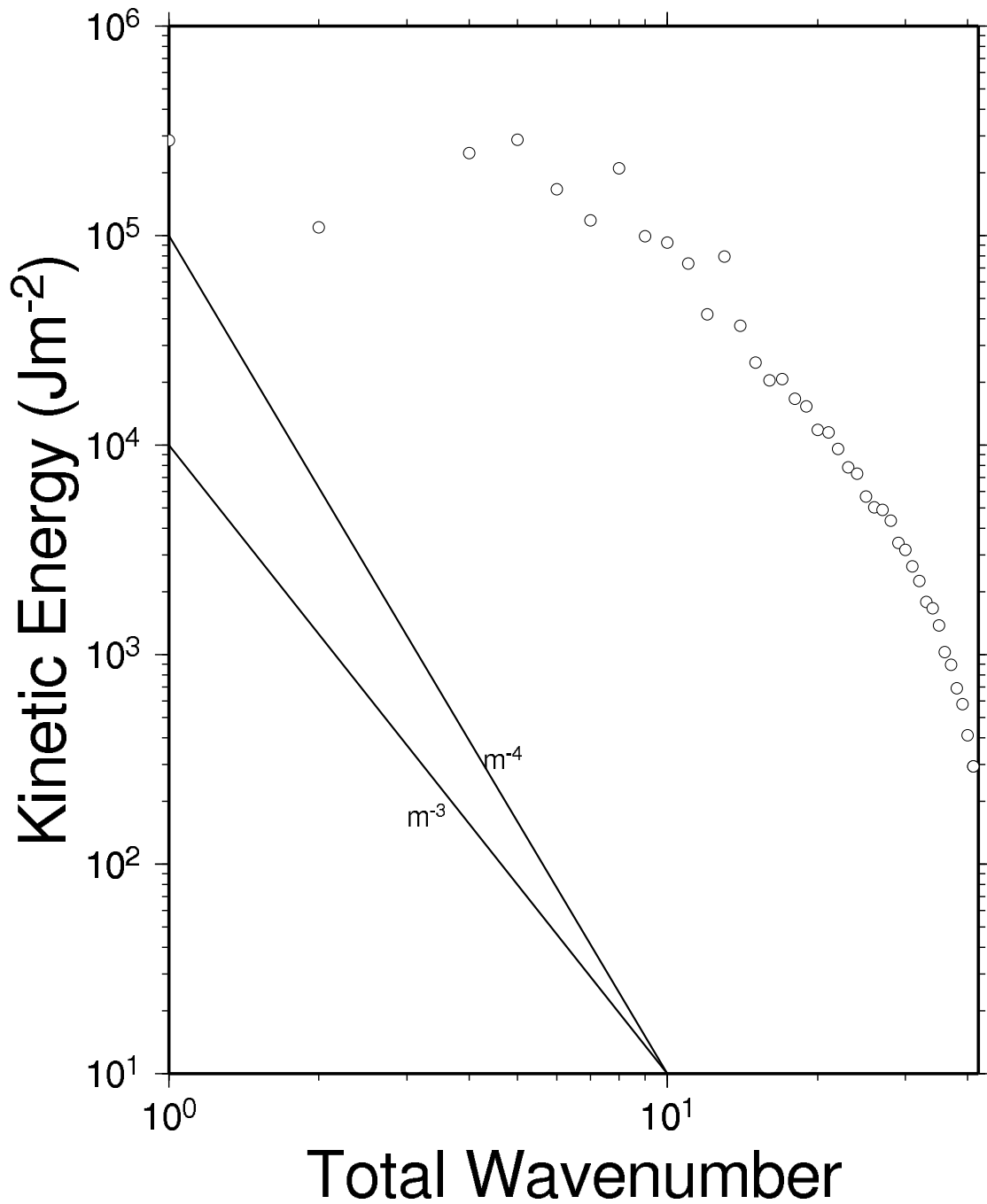


図 21: 準地衡風理論による全波数に対するエネルギースペクトル (回転成分)

# Energy Spectrum

Rotational + Divergent

JRA-25 (DJF 1999-2000)

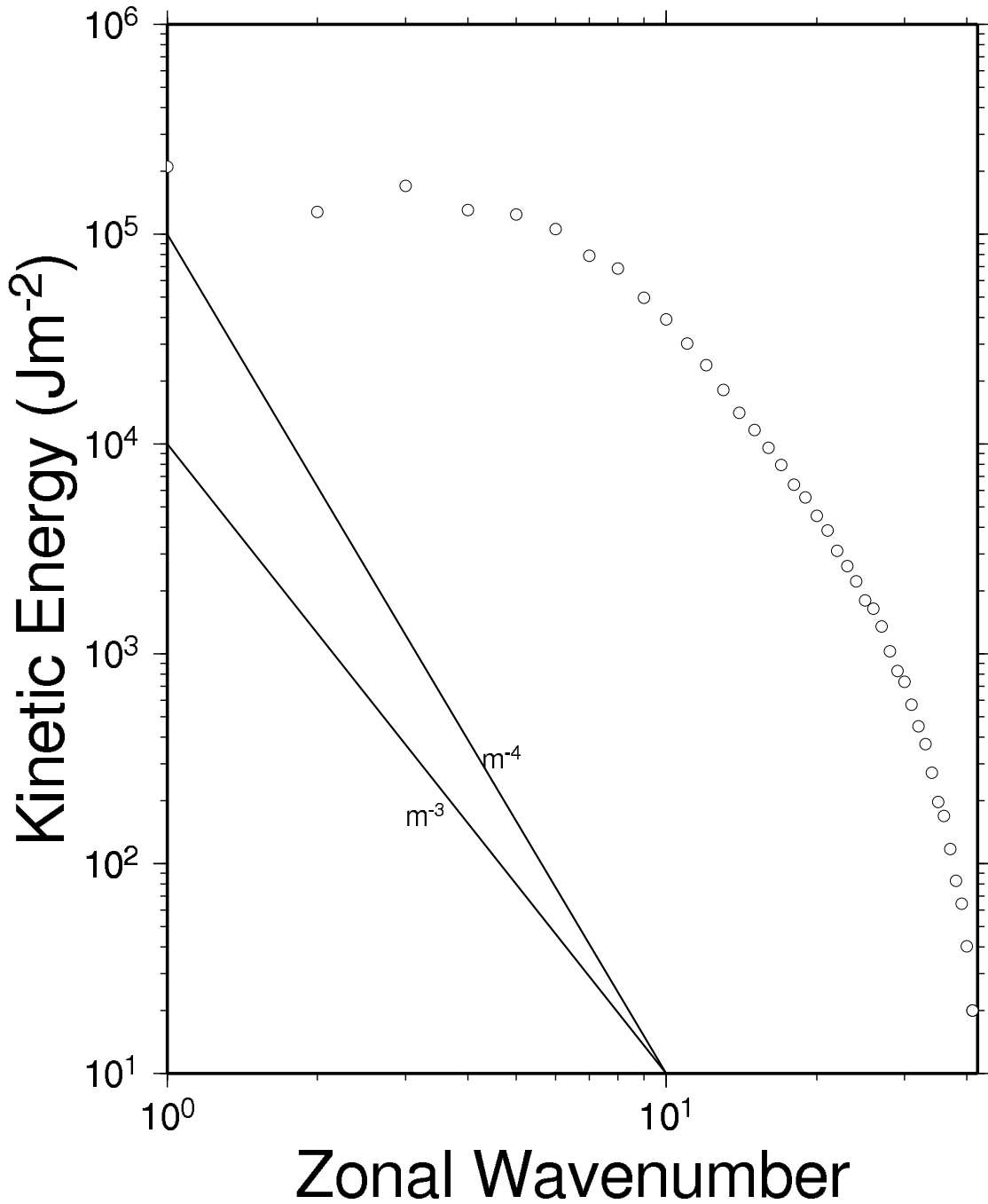


図 22: 準地衡風理論による東西波数に対するエネルギースペクトル(回転成分 + 発散成分)

# Energy Spectrum

Rotational + Divergent

JRA-25 (DJF 1999-2000)

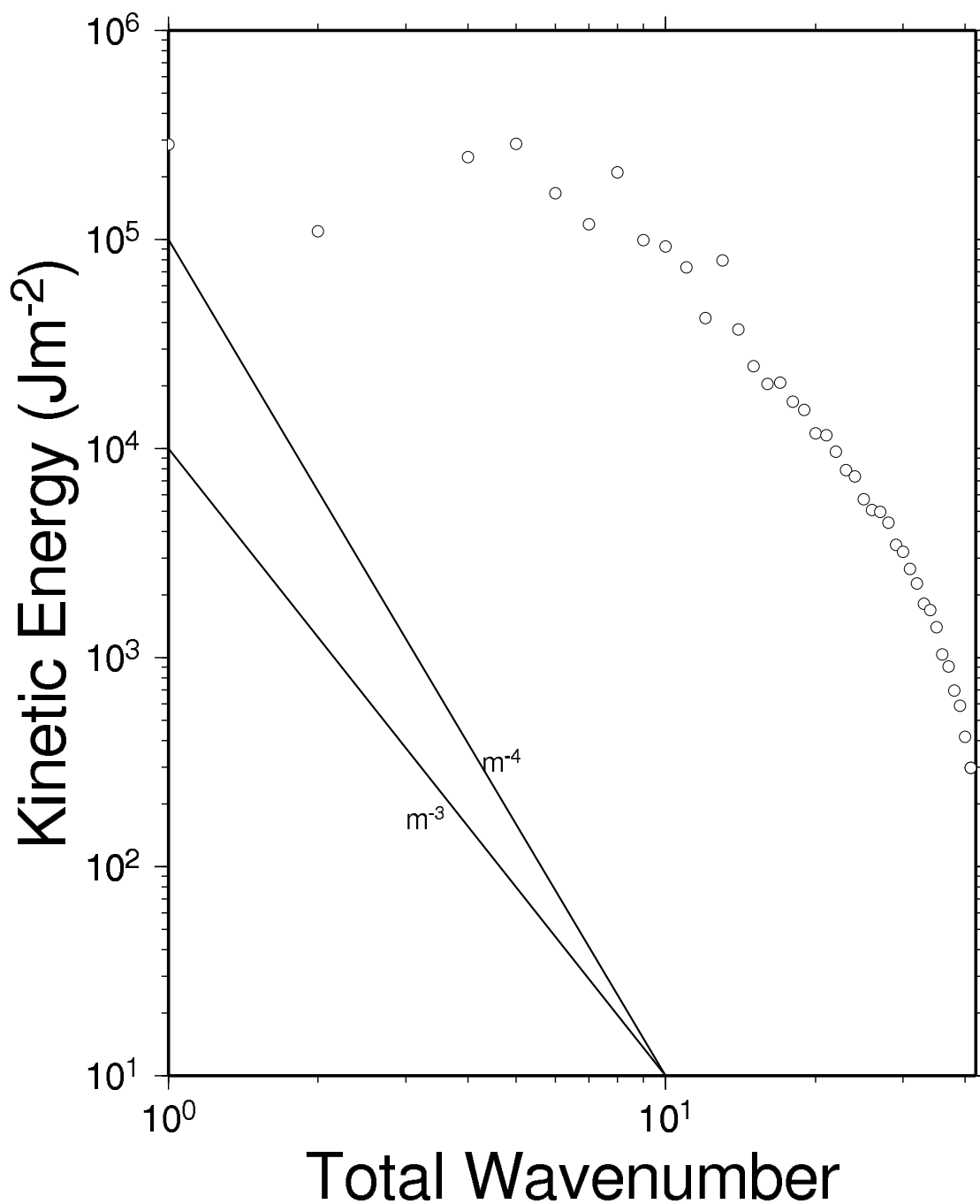


図 23: 準地衡風理論による全波数に対するエネルギースペクトル(回転成分 + 発散成分)

# Energy Spectrum

JRA-25 (January 2000)

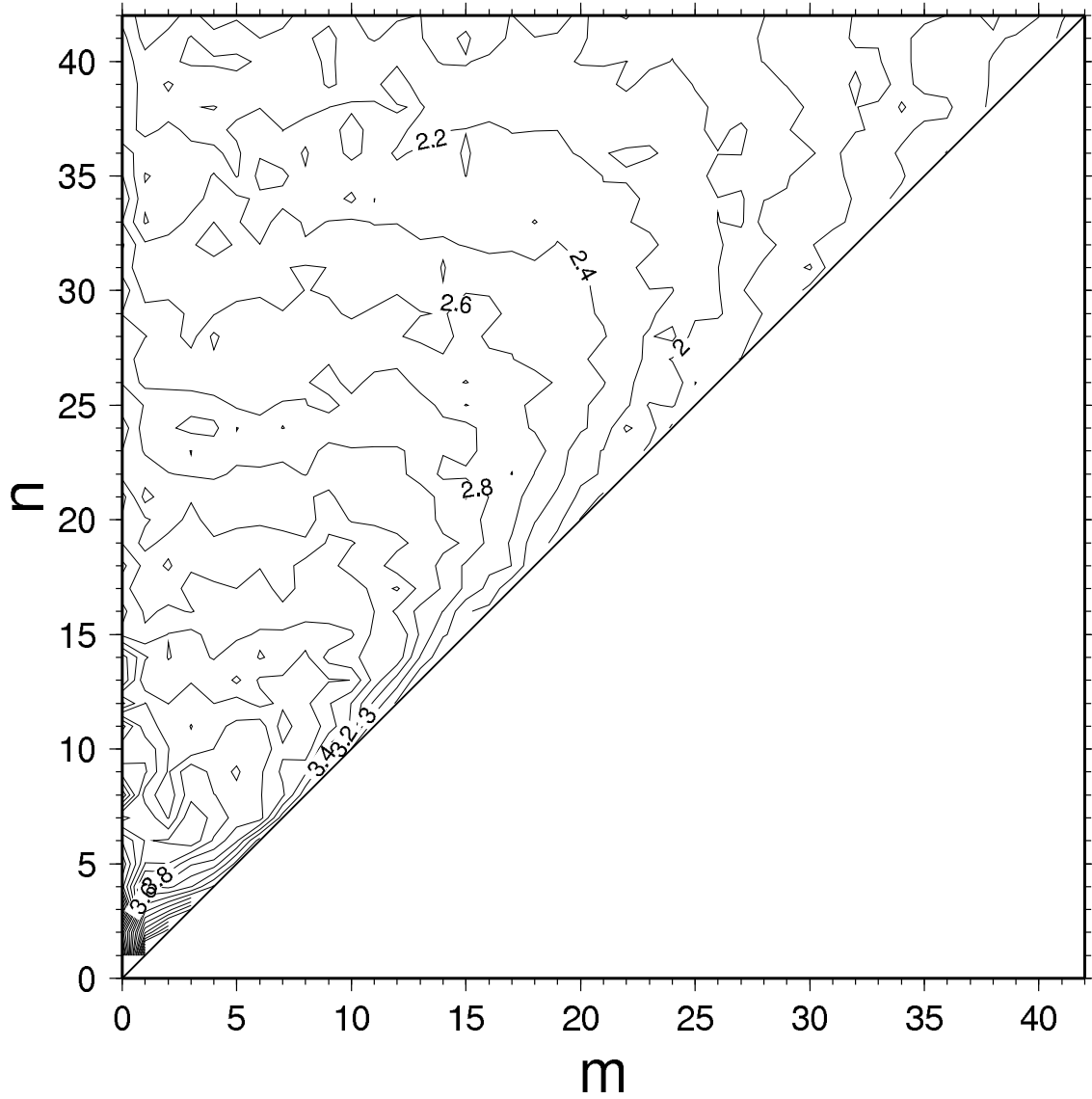


図 24: 準地衡風理論によるエネルギーの分布 (m : 東西波数, n : 全波数)

# Energy Spectrum

Rotation

JRA-25 (December 1999)

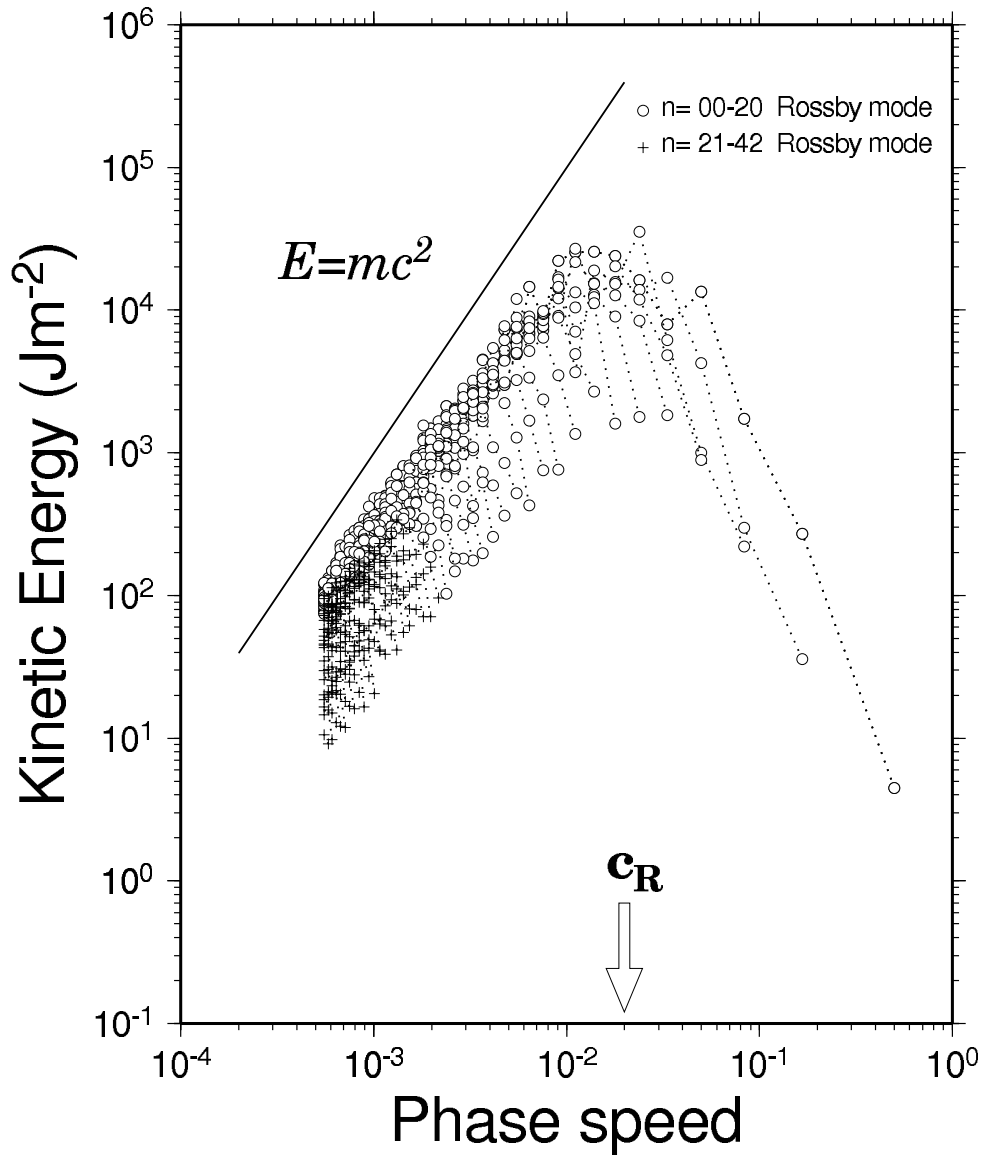


図 25: 準地衡風理論によるエネルギースペクトル (1999 年 12 月、回転成分)

# Energy Spectrum

Rotation

JRA-25 (January 2000)

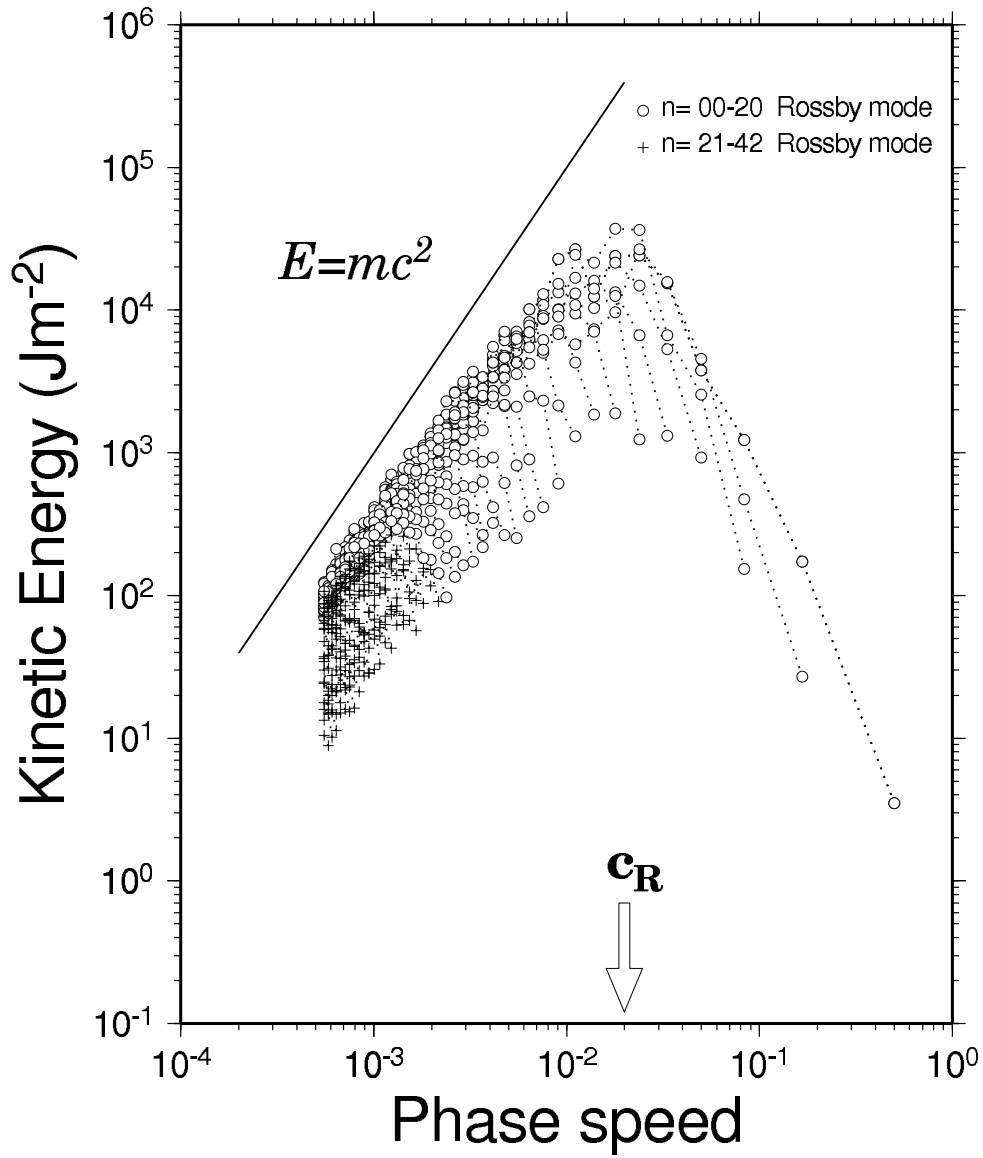


図 26: 準地衡風理論によるエネルギースペクトル (2000 年 1 月、回転成分)

# Energy Spectrum

Rotation

JRA-25 (February 2000)

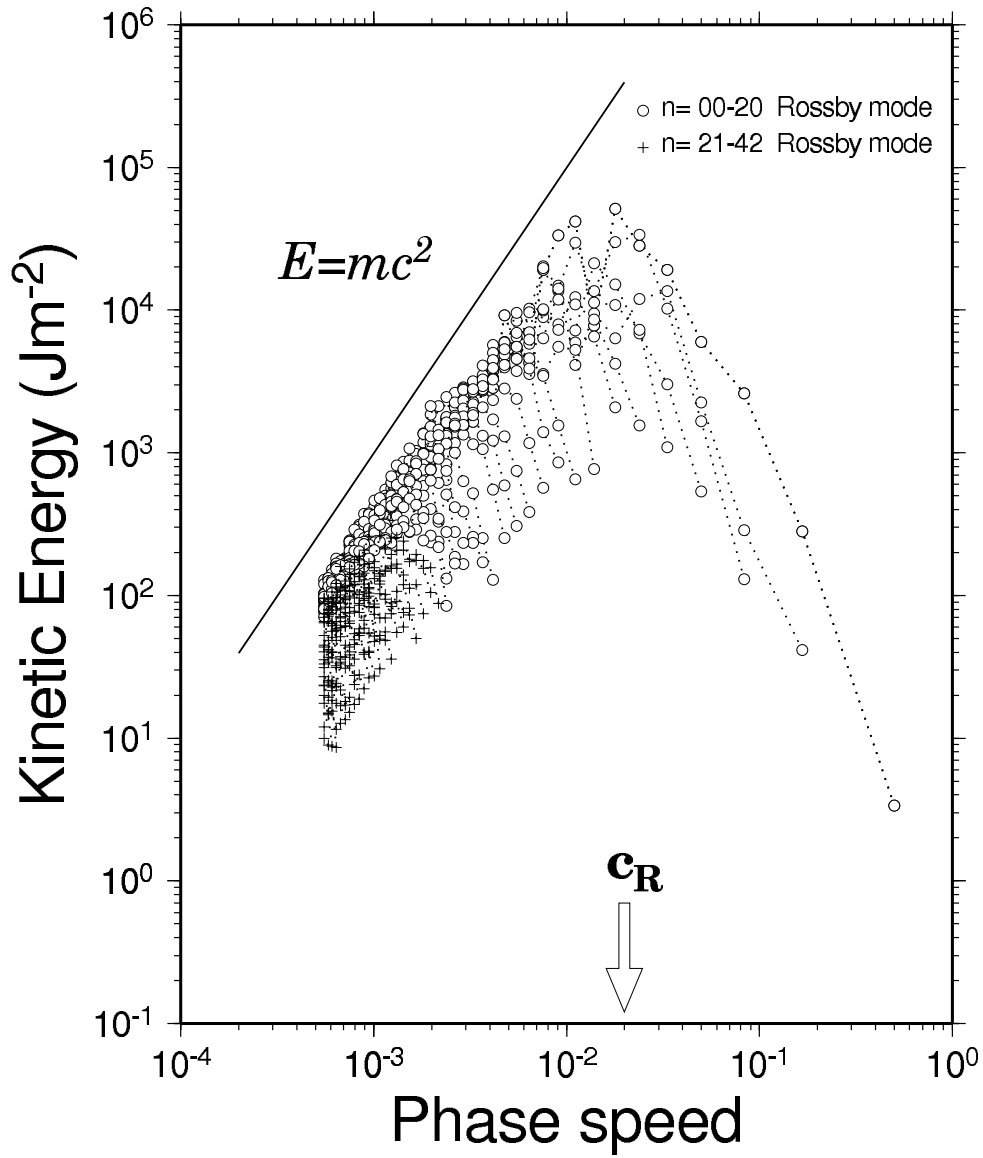


図 27: 準地衡風理論によるエネルギースペクトル (2000 年 2 月、回転成分)



# Energy Spectrum

JRA-25 (DJF 1999-2000)

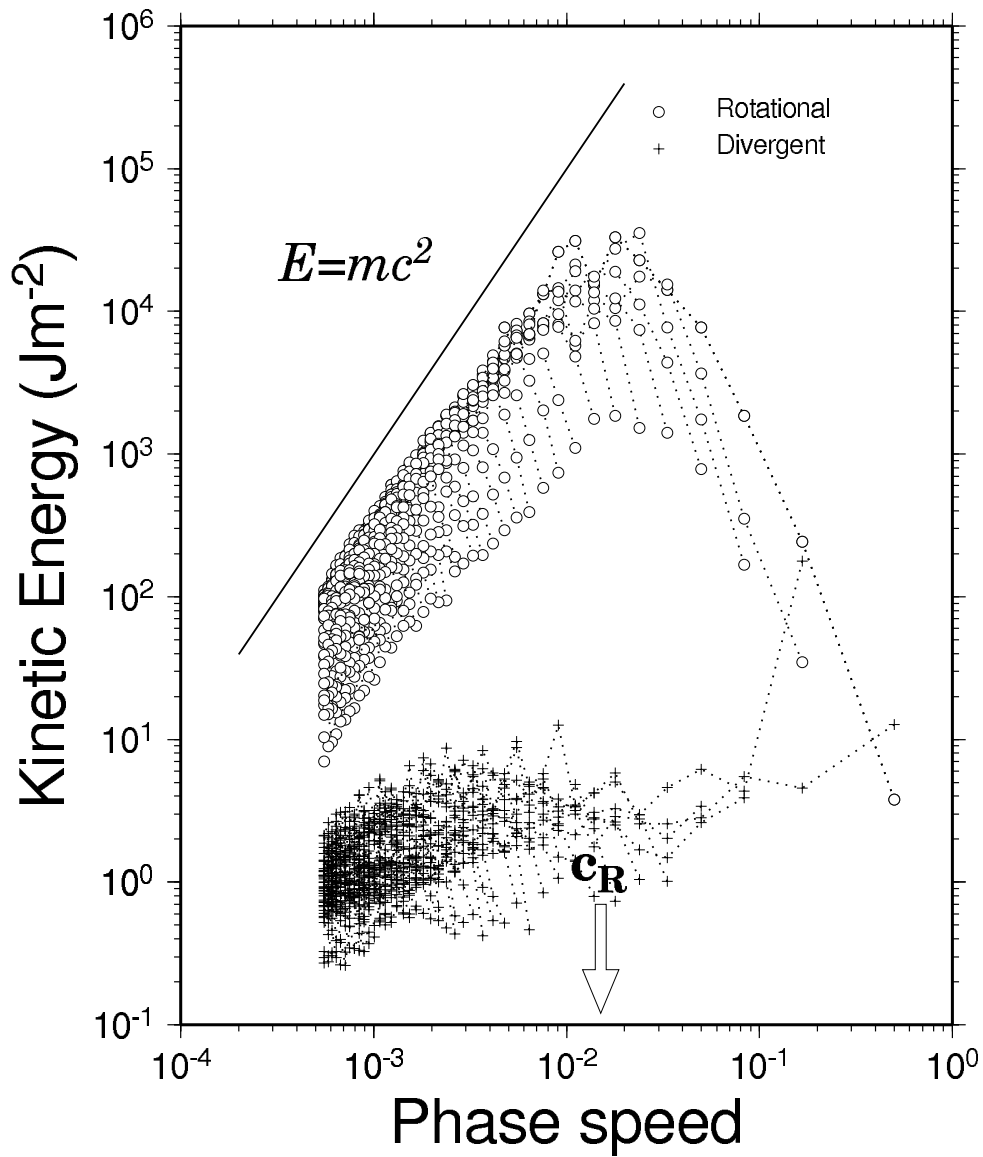


図 28: 準地衡風理論によるエネルギースペクトル (1999 年 12 月 ~ 2000 年 2 月の 3ヶ月平均、回転成分と発散成分)

# Energy Spectrum

Rotational + Divergent

JRA-25 (DJF 1999-2000)

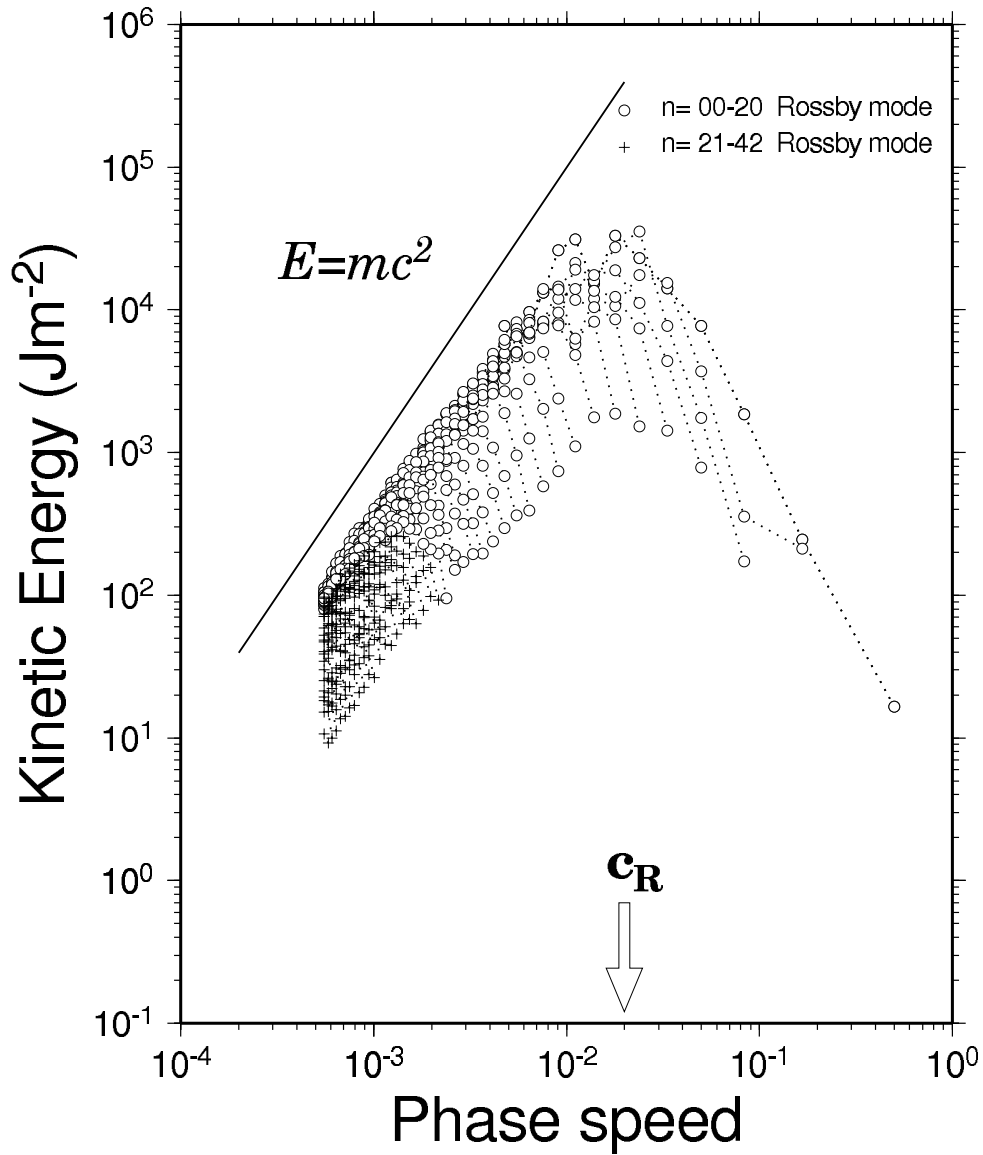


図 29: 準地衡風理論によるエネルギースペクトル (1999年1月～2000年2月の3ヶ月平均、回転成分+発散成分)

# Energy Spectrum

Rotation

JRA-25 (June 2000)

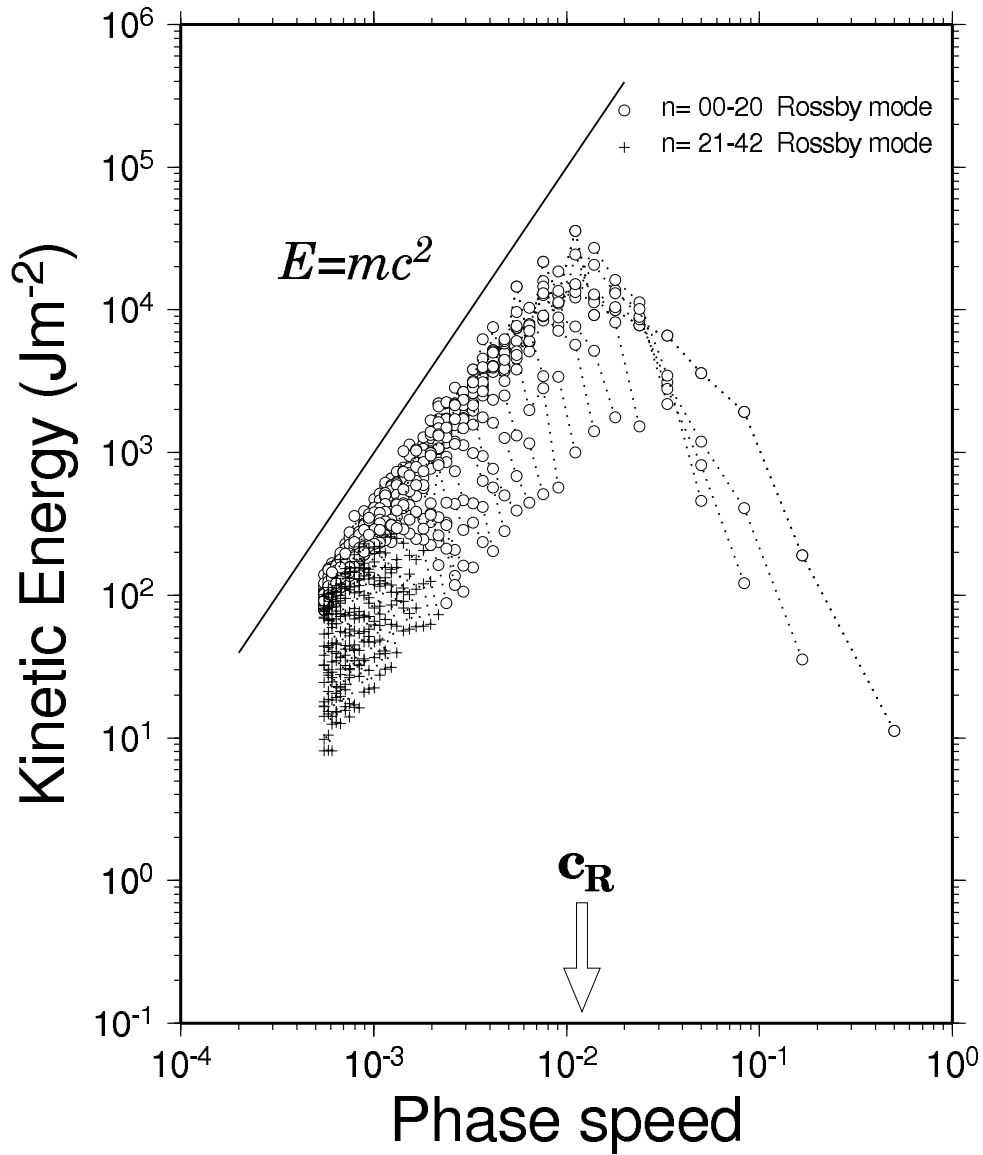


図 30: 準地衡風理論によるエネルギー Spektral (2000 年 6 月、回転成分)

# Energy Spectrum

Rotation

JRA-25 (July 2000)

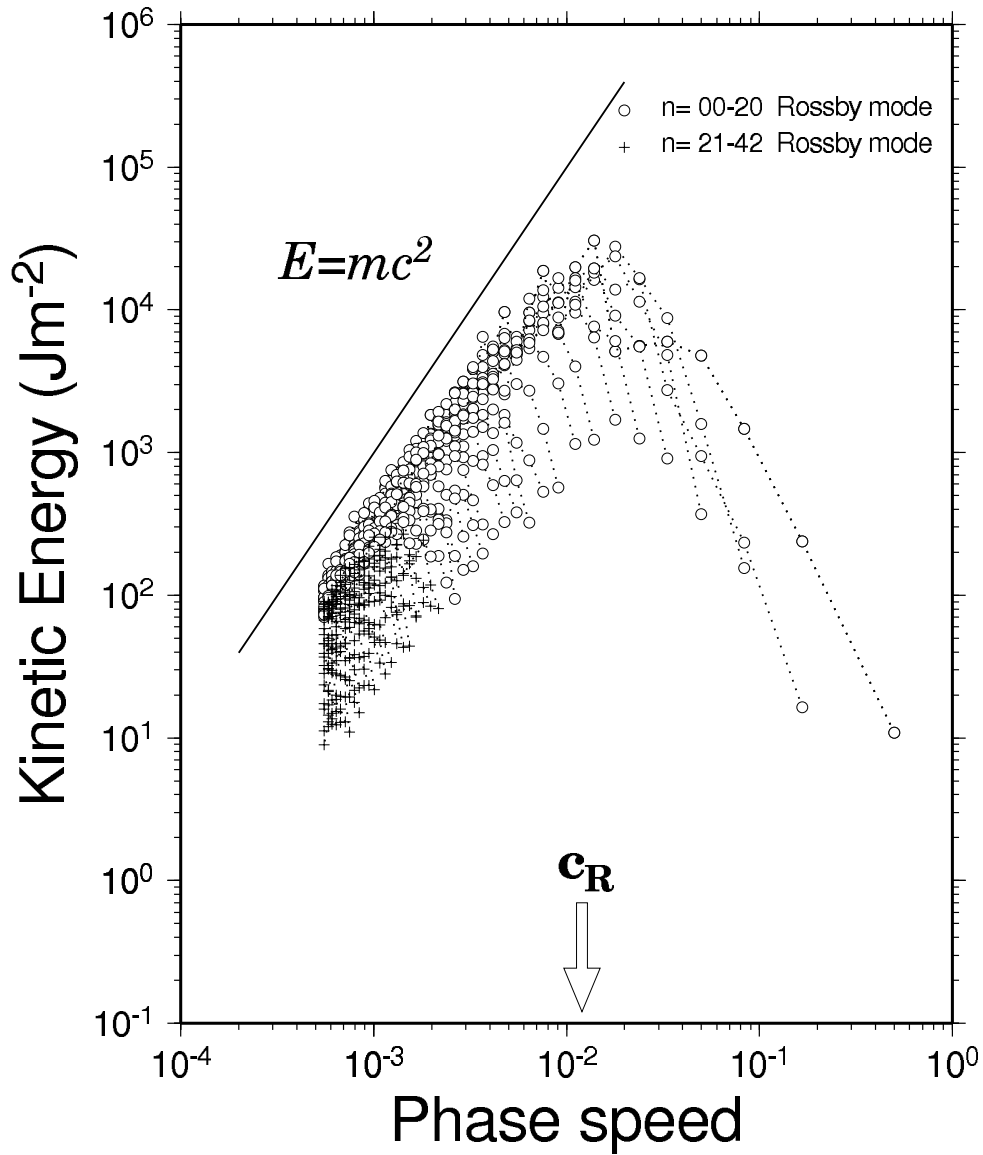


図 31: 準地衡風理論によるエネルギースペクトル (2000年7月、回転成分)

# Energy Spectrum

Rotation

JRA-25 (August 2000)

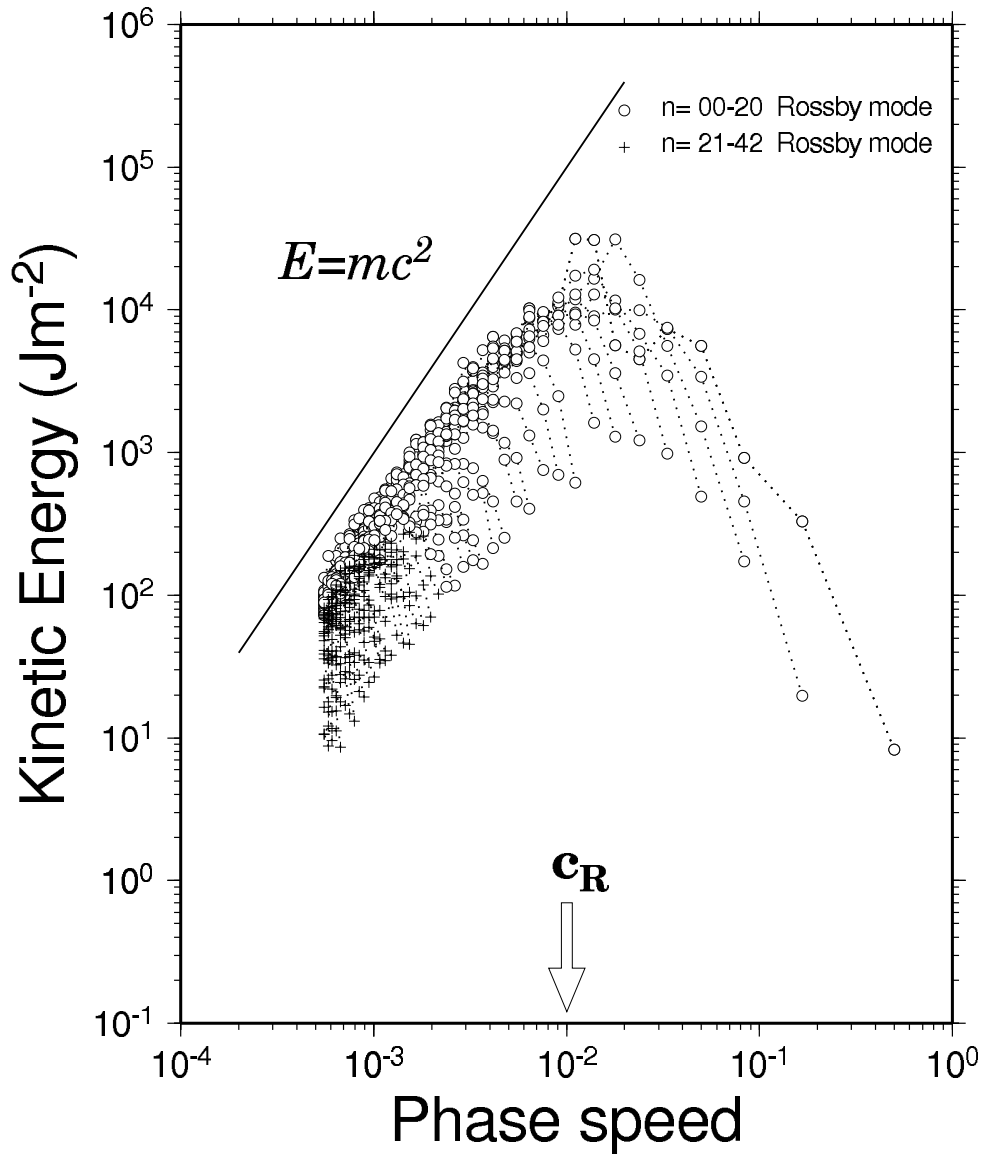


図 32: 準地衡風理論によるエネルギースペクトル (2000年8月、回転成分)

# Energy Spectrum

## JRA-25 (JJA 2000)

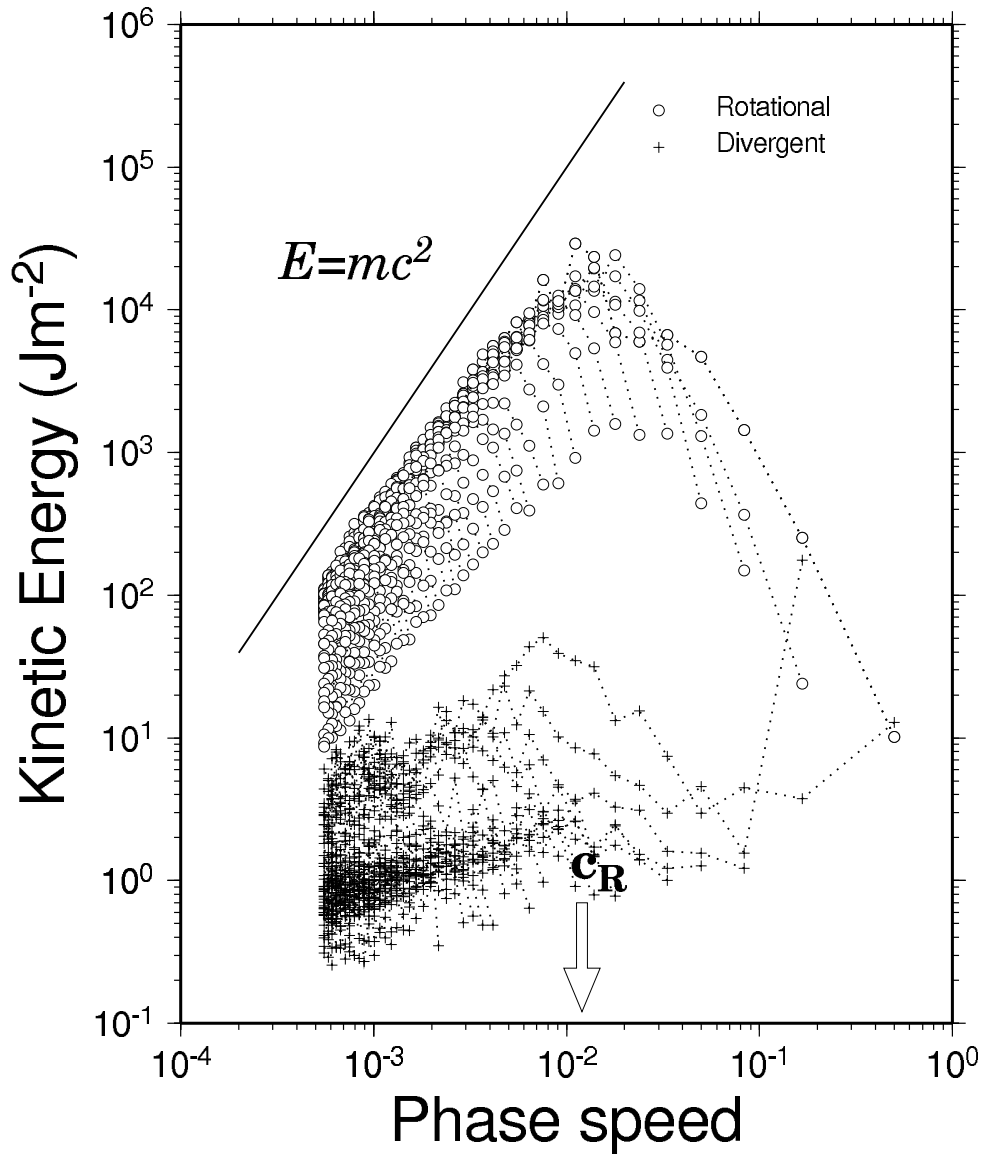


図 33: 準地衡風理論によるエネルギースペクトル (2000年6月~8月の3ヶ月平均、回転成分と発散成分)

# Energy Spectrum

Rotational + Divergent

JRA-25 (JJA 2000)

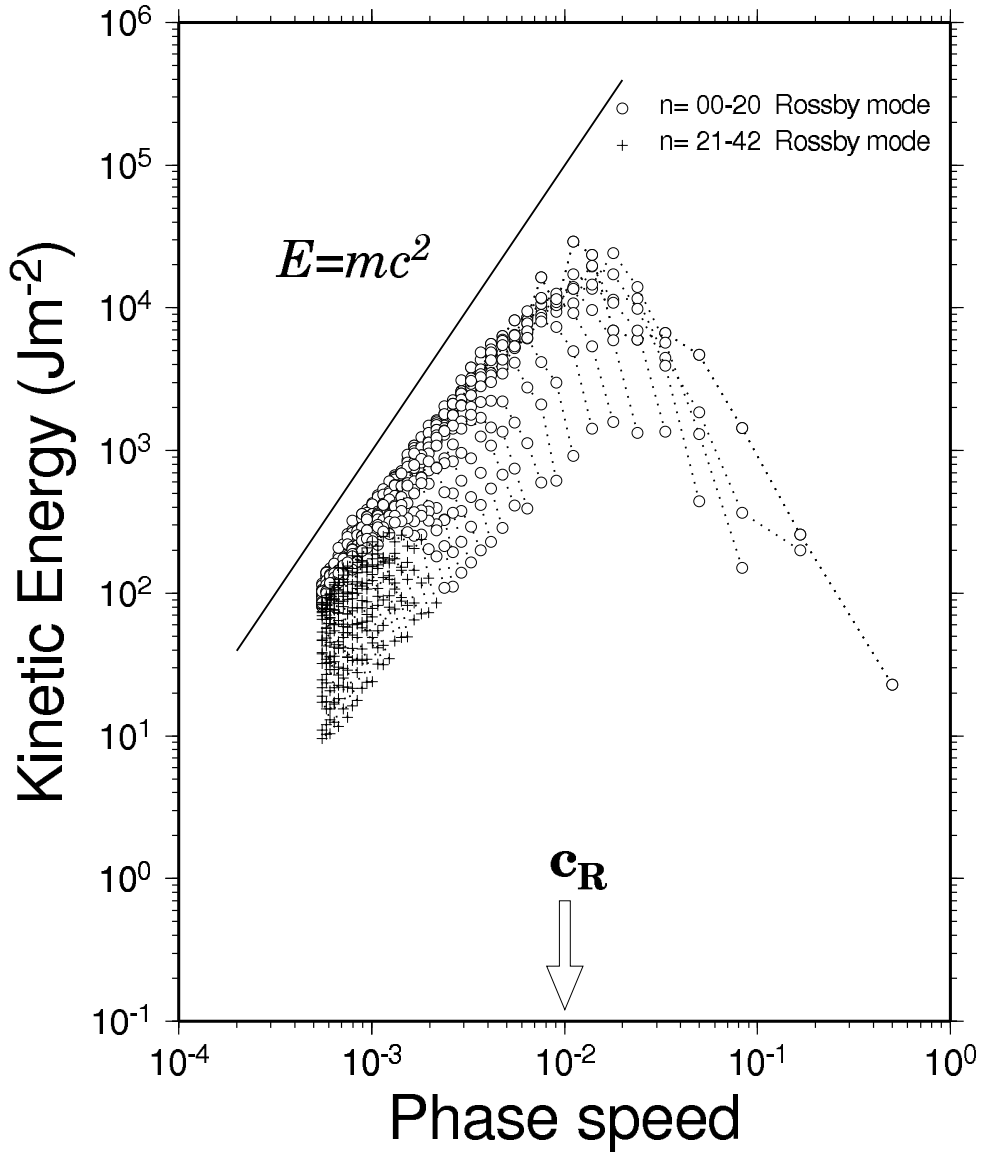


図 34: 準地衡風理論によるエネルギースペクトル (2000年6月~8月の3ヶ月平均、回転成分+発散成分)

# Zonal Wind

1999/12-2000/02

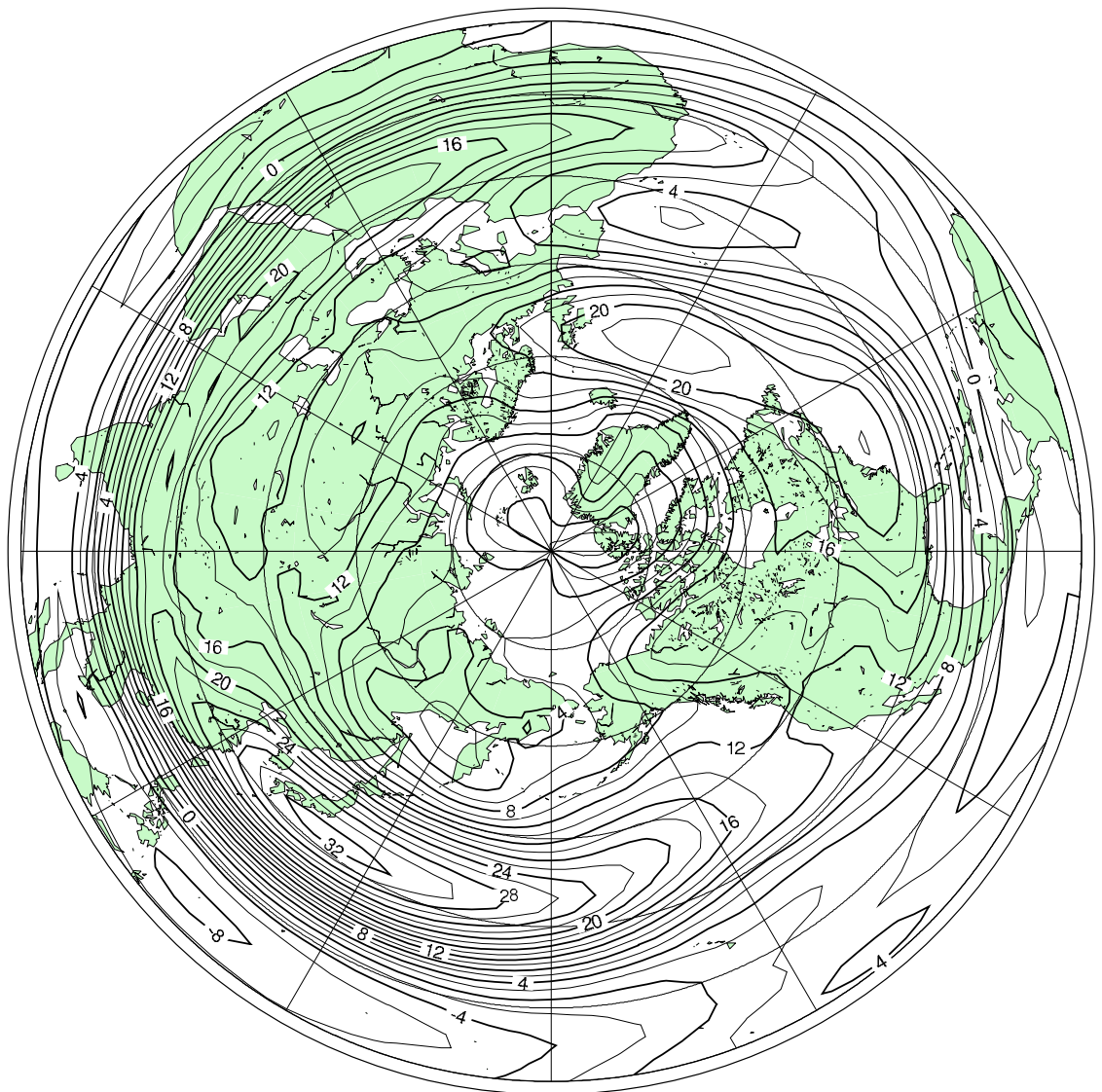


図 35: 東西風速度の分布図 (1999 年 12 月 ~ 2000 年 2 月の 3ヶ月平均)



# Zonal Wind

2000/06-2000/08

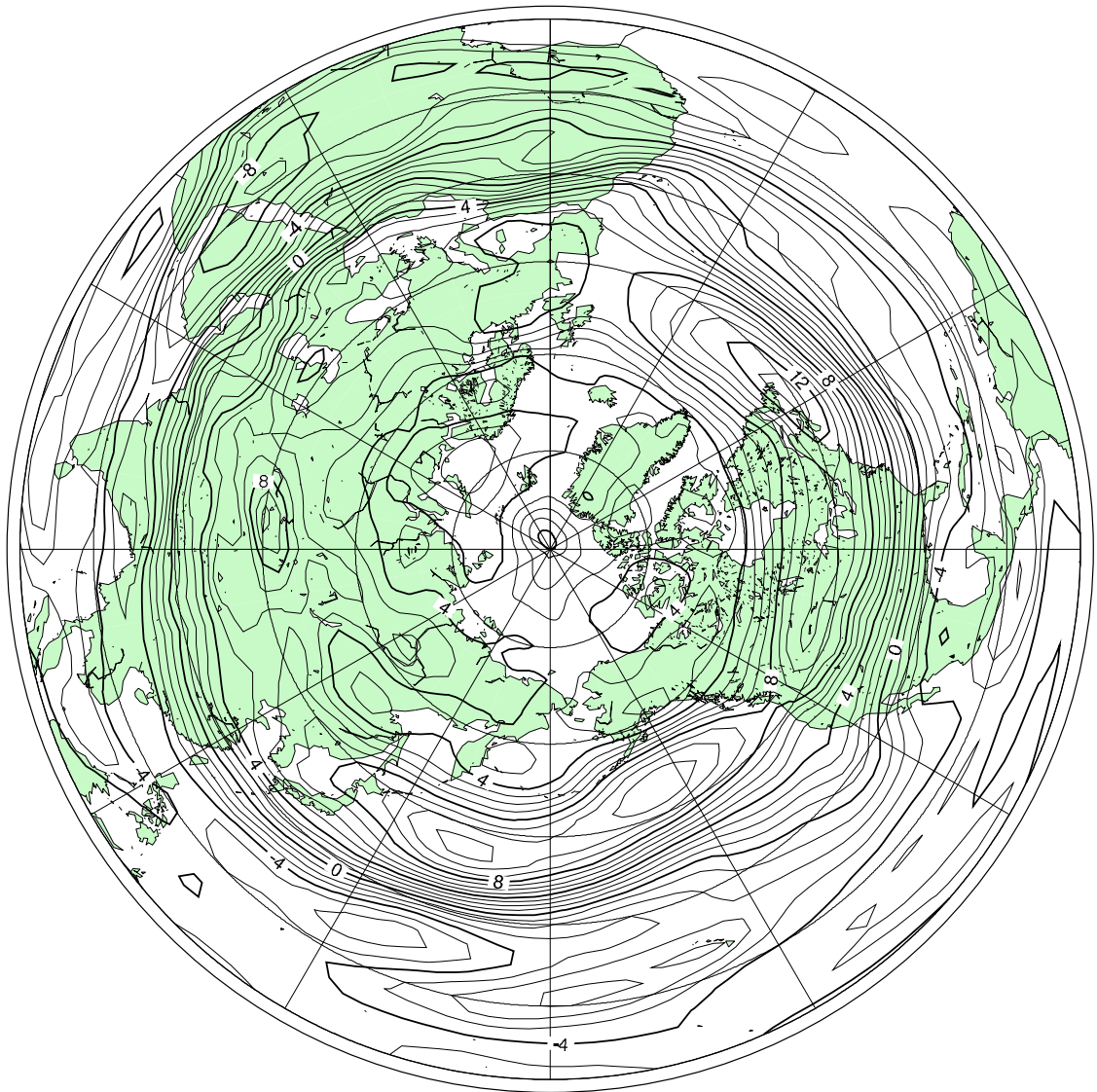


図 36: 東西風速度の分布図 (2000年6月～2000年8月の3ヶ月平均)

# Zonal Mean Wind Speed

JRA-25 (DJF 1999-2000)

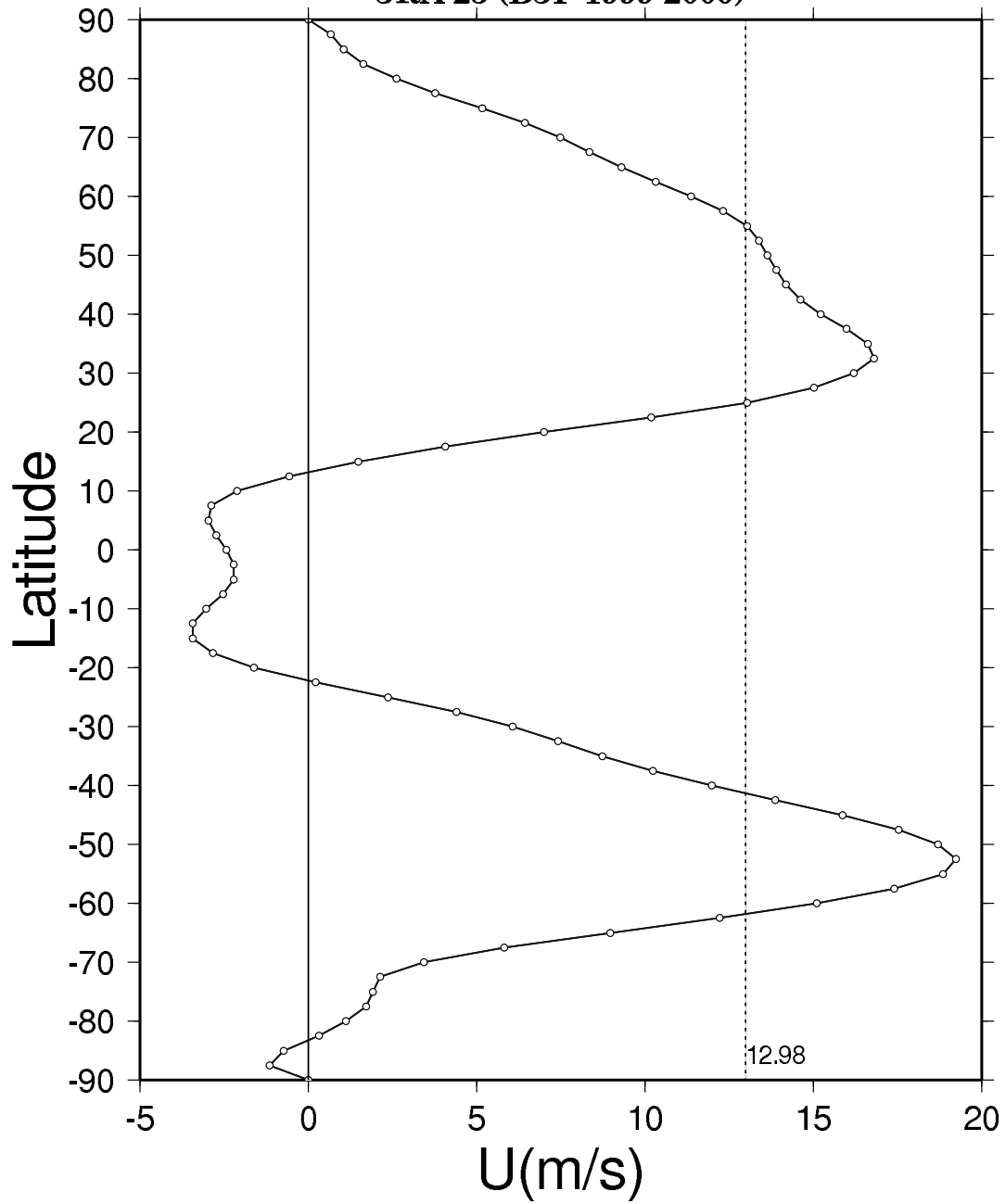


図 37: 1999 年 12 月 ~ 2000 年 2 月の 3 ヶ月平均帯状風速度の緯度分布図。この期間中の全球平均帯状風速度は 7.86m/s の西風である。

# Zonal Mean Wind Speed

JRA-25 (JJA 2000)

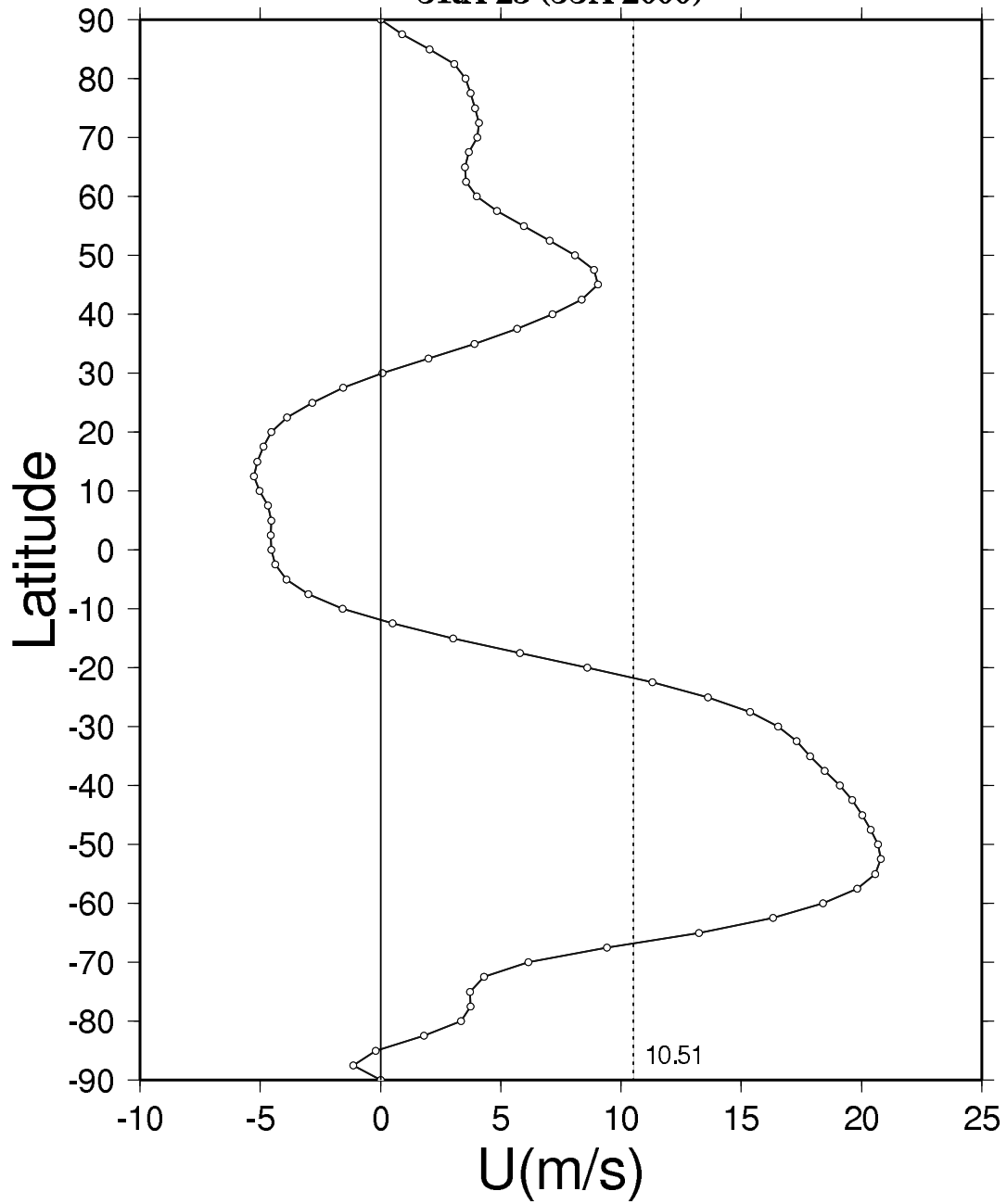


図 38: 2000年6月～2000年8月の3ヶ月平均帯状風速度の緯度分布図。この期間中の全球平均帯状風速度は0.49m/sの西風である。