

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>微分</b>	<b>1</b>
1.1	微分の定義と主な関数の微分 . . . . .	1
1.2	微分に関する公式 . . . . .	2
1.3	1 変数関数のテイラー展開 . . . . .	6
1.4	多変数関数とその微分 (偏微分) . . . . .	12
1.5	2 変数関数のテイラー展開 . . . . .	16
1.6	極大値・極小値と変曲点 . . . . .	17
<b>第 2 章</b>	<b>積分</b>	<b>21</b>
2.1	主な関数の積分と定積分の定義 . . . . .	21
2.2	重積分 . . . . .	23
2.3	三角関数の諸公式 . . . . .	29
<b>第 3 章</b>	<b>線型代数</b>	<b>30</b>
3.1	行列とは? . . . . .	30
3.2	行列の相等 . . . . .	31
3.3	行列の計算 1 ~ 足し算 ~ . . . . .	32
3.4	行列の計算 2 ~ 引き算 ~ . . . . .	33
3.5	行列の計算 3 ~ 実数倍 ~ . . . . .	34
3.6	行列の計算 4 ~ 掛け算 ~ . . . . .	35
3.7	ケーリー・ハミルトンの定理 . . . . .	42
3.8	行列の基本操作 ~ 掃き出し法 ~ . . . . .	45
3.9	特徴的な正方行列の呼び名 . . . . .	49
3.10	逆行列 1 ~ 逆行列とは? ~ . . . . .	50

3.11 逆行列 2 ~ 2 次正方行列の逆行列 ~	53
3.12 逆行列 3 ~ 3 次以上の正方行列の行列式と逆行列 ~	60
3.12.1 行列式	60
3.12.2 逆行列	62
3.13 行列って結局なに? ~ 行列を使って点を移動 ~	67
3.13.1 一次変換	67
3.13.2 回転を表す行列 (回転行列)	71
3.13.3 直交行列	73
3.14 固有値と固有ベクトル	76
3.14.1 固有値のもつ性質	79
3.14.2 固有値と固有ベクトルのもつ性質 (フロベニウスの定理)	81
3.15 行列の対角化	87
3.16 確率行列 ~ マルコフ連鎖 (Markov chain) ~	89
<b>第 4 章 常微分方程式</b>	<b>94</b>
4.1 常微分方程式の基本的な解法	94
4.1.1 常微分方程式の基本事項	94
4.1.2 最も簡単な常微分方程式 ( $\phi(x, t)$ が微分変数 $t$ のみで表される場合)	95
4.1.3 変数分離型の常微分方程式 ( $\phi(x, t) = f(x)g(t)$ と表される場合)	97
4.1.4 特性方程式を用いて解く常微分方程式	102
4.1.5 行列の対角化を使って解く常微分方程式	108
4.2 線型非斉次常微分方程式を解く	112
4.2.1 線型斉次常微分方程式への帰着	112
<b>第 5 章 ベクトル解析</b>	<b>120</b>
5.1 内積と外積	120
5.1.1 内積	120
5.1.2 内積って何のために必要?	121

5.1.3	グラムシュミットの直交化 . . . . .	122
5.1.4	正規直交関数展開 . . . . .	125
5.1.5	外積 . . . . .	127
5.2	場の勾配を表すナブラ . . . . .	129
5.3	移流 - 勾配をもつ物理量が風によって運ばれる効果 - . . . . .	133
5.4	局所微分 (オイラー表示) と実質微分 (ラグランジュ表示) . . . . .	135
5.5	流れの場の収束・発散と渦度 . . . . .	136
5.5.1	収束と発散 . . . . .	136
5.5.2	渦度 . . . . .	140
5.6	質量保存の法則 (連続の式) . . . . .	144
5.7	ラプラシアン . . . . .	146
5.8	流れの場の収束・発散と渦度 (導出編) . . . . .	148
5.9	球面座標系における収束・発散と渦度 . . . . .	151
付録 A 補足 . . . . .		154
A.1	行列式について . . . . .	155
A.1.1	性質 1: 単位行列の行列式は 1 . . . . .	155
A.1.2	性質 2: 行や列を入れ替えると行列式の正負は逆になる (交代性) . . . . .	157
A.1.3	性質 3: ある行 (列) を定数倍すると、行列式も定数倍される (線型性) . . . . .	158

# 第1章 微分

## 1.1 微分の定義と主な関数の微分

### 微分の定義

1 変数関数  $f(x)$  に対する一階の微分  $f'(x)$  (あるいは、 $\frac{df}{dx}$ ,  $\frac{df(x)}{dx}$ ,  $\frac{d}{dx}f(x)$  などとかく) は、

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

というように定義される。 $f'(x)$  に  $x = a$  を代入した微分係数  $f'(a)$  (あるいは  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}$  とかく) は、 $f(x)$  上の  $x = a$  における接線の傾きを表す。

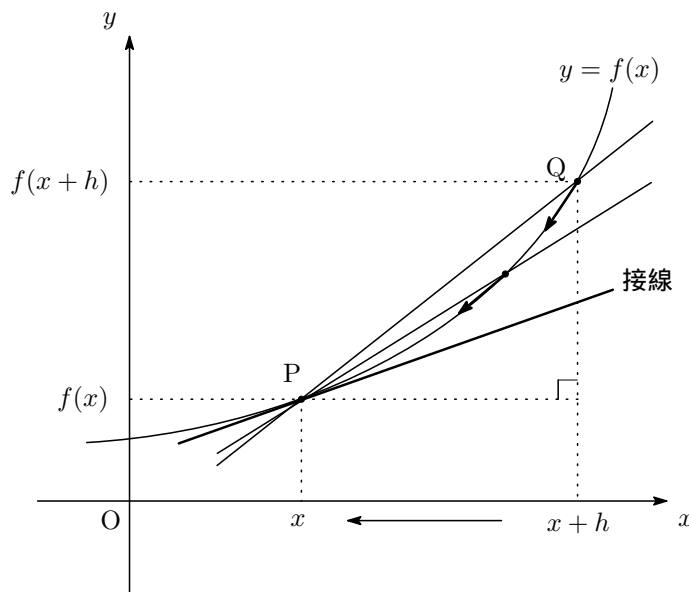


図 1.1  $f(x)$  の平均変化率  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  は、直線 PQ の傾きを表す。平均変化率に対して  $h \rightarrow 0$  とする (つまり、点 Q を点 P に近づける) ことで、点 P における接線の傾きを求める事ができる。

### 主な関数の微分

- |                                     |                                      |   |
|-------------------------------------|--------------------------------------|---|
| (1) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$  | (2) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$        | (3) $\frac{d}{dx}(\log x ) = \frac{1}{x}$       |
| (4) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ | (5) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ | (6) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ |

## 1.2 微分に関する公式

### 積 (商) の微分

関数  $f(x), g(x)$  が微分可能なら、2つの関数の積  $f(x)g(x)$  の微分は以下のように計算できる。

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

また、商の微分については  $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$  となるが、 $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\{g(x)\}^{-1}$  と考えることで、積の微分と合成関数の微分 (後述) を使って求める事ができるので必ずしも覚える必要はない。

【例】  $y = (x^2 + 1)(2x - 1)$  に対する微分  $\frac{dy}{dx}$  は、 $f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 1$  とすることで以下ようになる。

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 2x(2x - 1) + (x^2 + 1) \cdot 2 = 6x^2 - 2x + 2$$

### 合成関数の微分

2つの関数  $t = f(x), y = g(t)$  の合成関数  $y = g(f(x))$  の微分は以下のように計算できる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

【例 1】  $y = \log(x^2 + 1)$  に対する微分  $\frac{dy}{dx}$  は、 $t = x^2 + 1$  とおいて  $y = \log t$  とすることで以下ようになる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot (2x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

(補足)  $\log f(x)$  の微分に関してはよく出てくるので、 $\frac{d}{dx}\{\log |f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$  と覚えてしまっても良い。

【例 2】  $y = \sin^2 x$  に対する微分  $\frac{dy}{dx}$  は、 $t = \sin x$  とおいて  $y = t^2$  とすることで以下ようになる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2t \cdot \cos x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

【例 3】  $y = (2x - 1)^{-1}$  に対する微分  $\frac{dy}{dx}$  は、 $t = 2x - 1$  とおいて  $y = t^{-1}$  とすることで以下ようになる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -t^{-2} \cdot 2 = -2(2x - 1)^{-2}$$

【例 4】  $y = \frac{x + 1}{2x - 1}$  に対する微分  $\frac{dy}{dx}$  は、 $y = (x + 1)(2x - 1)^{-1}$  と考え、積の微分と合成関数の微分を使うことで以下ようになる。

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot (2x - 1)^{-1} + (x + 1) \cdot \underbrace{\{(-1)(2x - 1)^{-2} \cdot 2\}}_{(2x-1)^{-1} \text{の微分}} = -\frac{3}{(2x - 1)^2}$$

## パラメータ表示された関数の微分

パラメータ表示された関数  $x = \psi(t), y = \chi(t)$  に対する微分  $\frac{dy}{dx}$  は、以下のように計算できる (ただし、 $\chi'(t) \neq 0$ )。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\chi'(t)}$$

大抵の場合、 $\frac{dy}{dx} = 0$  となる  $t$  値が分かれば十分なので、最終的に  $\frac{dy}{dx}$  を  $x$  だけの式にする必要はない。

【例】  $x = t^2, y = 2t$  に対する  $\frac{dy}{dx}$  は以下ようになる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

指数が  $x$  の関数である関数の微分 (対数微分)

$f(x) = g(x)^{h(x)}$  というように指数が  $x$  の関数である場合、両辺の対数をとることで、指数  $h(x)$  を”引きずり下ろす”とよい。

【例】  $f(x) = a^x (a > 0)$  に対する  $\frac{df}{dx}$  は、両辺の対数をとったのち、 $x$  で微分する。

$$\begin{aligned} \log f(x) = \log a^x &\iff \log f(x) = x \log a && \leftarrow \log a \text{ は定数} \\ &\iff \frac{f'(x)}{f(x)} = \log a \\ &\iff \frac{df}{dx} = f'(x) = (\log a)a^x \end{aligned}$$

## 逆関数の微分

$y = \sin^{-1} x$  のような逆関数の微分では、逆関数表記でない元の関数(つまり  $x = \sin y$ ) の微分を使うとよい。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

**補足** 関数  $y = f(x)$  ( $x$  と  $y$  は 1 対 1 対応) を  $y = x$  で対称移動したものが逆関数  $y = f^{-1}(x)$  なので、例えば、 $f(x)$  上のある点での接線の傾きが 3 なら、 $f^{-1}(x)$  上の対応する点での接線の傾きは  $\frac{1}{3}$  (逆数) と分かるだろう。

【例】  $y = \sin^{-1} x \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$  に対する  $\frac{dy}{dx}$  は、 $x = \sin y$  の微分を利用する。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \leftarrow \cos^2 y + \sin^2 y = 1, \cos y > 0 \text{ を利用}$$

## 演習 1.1

問 1 つぎの関数を  $x$  で微分せよ。

- (1)  $(x+1)(4x-1)$       (2)  $(2x-3)^2$       (3)  $\frac{1}{(2x+1)^3}$
- (4)  $\frac{x-3}{x+2}$       (5)  $\frac{x^2+1}{x^2-1}$       (6)  $\left(\frac{x}{1+x}\right)^3$
- (7)  $\sqrt{x^2+1}$       (8)  $\sqrt{(a-x)(b-x)}$       (9)  $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
- (10)  $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$       (11)  $\sin 3x$       (12)  $\cos(3x-4)$
- (13)  $\tan(3x+5)$       (14)  $\cos^2 x$       (15)  $x \sin^2 x$
- (16)  $\frac{1}{\cos x}$       (17)  $\frac{\sin x}{x}$       (18)  $\sin 2x \cos 3x$
- (19)  $\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$       (20)  $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$       (21)  $3 \tan x + \tan^3 x$
- (22)  $\sqrt{1+\sin x}$       (23)  $e^{2x+3}$       (24)  $e^{-x^2}$
- (25)  $\log(5x-3)$       (26)  $\log(4x^2+7)$       (27)  $xe^{-2x}$
- (28)  $x^3 \log x$       (29)  $x \log x - x$       (30)  $e^x \log x$
- (31)  $e^x \sin x$       (32)  $\frac{e^x \cos x}{\sin x}$       (33)  $xe^{\frac{1}{x}}$
- (34)  $(e^x - e^{-x})^2$       (35)  $\log \log x$       (36)  $\log |\sin x|$
- (37)  $\log(\sqrt{x^2+1} - x)$       (38)  $\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$       (39)  $x^2 a^x (a > 0)$
- (40)  $2^{\frac{1}{x}}$       (41)  $x^x$       (42)  $x^{\frac{1}{x}}$
- (43)  $x^{\sin x}$       (44)  $(\sin x)^{\tan x}$       (45)  $\cos^{-1} x$
- (46)  $\tan^{-1} x$

問 2 つぎのパラメータ表示した関数に対して、 $\frac{dy}{dx}$  を求めよ。

$$(1) \begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \quad (0 < t < \pi) \quad (3) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 < t < 2\pi)$$

## 【解答】

## 問 1

- (1)  $8x + 3$  (2)  $4(2x - 3)$  (3)  $-\frac{6}{(2x + 1)^4}$
- (4)  $\frac{5}{(x + 2)^2}$  (5)  $-\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}$  (6)  $\frac{3x^2}{(1 + x)^4}$
- (7)  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  (8)  $\frac{2x - (a + b)}{2\sqrt{(a - x)(b - x)}}$  (9)  $\frac{1}{\sqrt{(1 + x)(1 - x)^3}}$
- (10)  $\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$  (11)  $3 \cos 3x$  (12)  $-3 \sin(3x - 4)$
- (13)  $\frac{3}{\cos^2(3x + 5)}$  (14)  $-2 \sin x \cos x (= -\sin 2x)$  (15)  $\sin^2 x + x \sin 2x$
- (16)  $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$  (17)  $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$  (18)  $2 \cos 2x \cos 3x - 3 \sin 2x \sin 3x$
- (19)  $-\frac{(2 + \cos^2 x) \sin x}{(1 + \sin^2 x)^2}$  (20)  $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$  (21)  $\frac{3}{\cos^4 x}$
- (22)  $\frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \sin x}}$  (23)  $2e^{2x+3}$  (24)  $-2xe^{-x^2}$
- (25)  $\frac{5}{5x - 3}$  (26)  $\frac{8x}{4x^2 + 7}$  (27)  $(1 - 2x)e^{-2x}$
- (28)  $(3 \log x + 1)x^2$  (29)  $\log x$  (30)  $\left(\log x + \frac{1}{x}\right)e^x$
- (31)  $(\sin x + \cos x)e^x$  (32)  $\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)e^x$  (33)  $\left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$
- (34)  $2(e^{2x} - e^{-2x})$  (35)  $\frac{1}{x \log x}$  (36)  $\frac{1}{\tan x}$
- (37)  $-\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$  (38)  $\frac{1}{1 - x^2}$  (39)  $(2x + x^2 \log a)a^x$
- (40)  $-\frac{\log 2}{x^2} 2^{\frac{1}{x}}$  (41)  $(\log x + 1)x^x$  (42)  $(1 - \log x)x^{\frac{1}{x}-2}$
- (43)  $\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \log x\right)x^{\sin x}$  (44)  $\left(\frac{\log \sin x}{\cos^2 x} + 1\right)(\sin x)^{\tan x}$  (45)  $-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- (46)  $\frac{1}{1 + x^2}$

## 問 2

$$(1) \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \quad (2) -\frac{1}{\tan t} \quad (3) \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

## 1.3 1 変数関数のテイラー展開

いま、微分の定義式において、 $h$  が十分に小さい時を考える。このとき、微分の定義式にある  $\lim_{h \rightarrow 0}$  を無視することで、

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

とみなせるので、 $x = x_0$  として、この式を変形すると、

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h$$

となる。これは、 $x = x_0 + h$  のときの値  $f(x_0 + h)$  と  $x = x_0$  のときの値  $f(x_0)$  の関係を表したもので、下の図からわかるように、 $f(x_0 + h)$  の値が、 $f(x_0) + f'(x_0)h$  の値と (およそ) 同じであることを表す (図から  $h$  が小さいほど  $\delta$  が小さくなり、この近似式が成り立つのがわかるだろう)。別の言い方をすれば、どんな曲線も  $x = x_0$  の付近をズームすれば、あたかも直線であるかのように見えるということである。

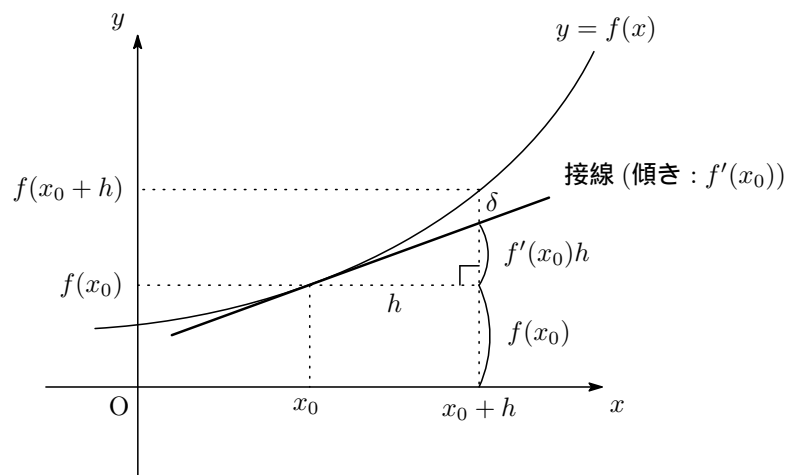


図 1.2 テイラー展開の概念図。

$h$  は、極限をとる際に必要だったものなので、この  $h$  を消去するために  $x = x_0 + h$  とすると、

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \underbrace{(x - x_0)}_{=h}$$

となる。元の式にある  $f(x_0)$  と  $x(x_0 + h)$  も、この式の  $f(x)$  と  $f(x_0)$  も  $h$  だけ離れた場所の  $f$  の値である。つまり、いまいる場所  $x_0$  の情報  $f(x_0)$  と  $f'(x_0)$  から、 $h$  だけ離れた場所  $x$  の情報  $f(x)$  を見積もる式ということになる (例えば、今いる場所の気温  $f(x_0)$  ( $= 20$  [°C]) と北に行くほど寒いという勾配  $f'(x_0)$  ( $= -0.5$  [°C/km]) の情報があれば、北に  $h$  ( $= 10$  [km]) だけ離れた場所の気温が見積もれる)。この近似式は、任意の関数  $f(x)$  を  $x$  の 1 次式で表した (近似した) ものであるが、さらに高次の項を含めることで近似することもできる。これらをテイラー展開 (Taylor series) とよぶ。

## テイラー展開 (Taylor series)

任意の連続関数  $f(x)$  は、以下のように  $x$  の多項式により展開 (近似) することができる。

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4 + \dots$$

これを、「 $x = x_0$ の周りでのテイラー展開」とよぶ。なお、 $y$  軸 ( $x_0 = 0$ ) 付近でのテイラー展開のことを特に、マクローリン展開 (Maclaurin series) とよぶ (より簡単な近似式になる)。

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)x^4 + \dots$$

これらの近似式のうれしいところは、任意の関数  $f(x)$  を  $x$  の多項式 ( $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots$  という形) で表せるところにある。右辺の項が多いほどより  $x = x_0$  付近以外でも精度の高い近似式となる。

テイラー展開の式は、先に出てきた 1 次の近似式を繰り返すことで求めることができる。まず、2 次の項までの近似式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

が成り立つことを示す。

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  は任意の関数について成り立つ近似式なので、 $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  についても成り立つ。いま、 $f$  を  $f'$  に置き換えることで (式を微分したわけではないので注意! )、

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)$$

となる。この式を  $x$  で積分することで ( $f'(x_0)$  や  $f''(x_0)$  は定数であることに注意)、

$$f(x) = f'(x_0)x + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となるので、 $x = x_0$  を代入すると

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + C, \quad C = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

したがって、

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

となる ( $2 = 2!$  も利用した)。

## 演習 1.2

テイラー展開の3次の項までの近似式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

が成り立つことを示せ。

【解答】 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  は任意の関数について成り立つ近似式なので、 $f$  を2回の導関数  $f''$  に置き換えることで、

$$f''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x - x_0)$$

となる。この式の両辺を  $x$  で積分することで ( $f''(x_0)$  や  $f'''(x_0)$  は定数であることに注意)、

$$f'(x) = f''(x_0)x + \frac{1}{2!} f'''(x_0)(x - x_0)^2 + C_1 \quad (C_1 \text{は積分定数})$$

となるので、 $x = x_0$  を代入すると

$$f'(x_0) = f''(x_0)x_0 + C_1, \quad C_1 = f'(x_0) - f''(x_0)x_0.$$

したがって、

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f'''(x_0)(x - x_0)^2$$

となる。さらに、この式の両辺を  $x$  で積分することで ( $f'(x_0)$ ,  $f''(x_0)$ ,  $f'''(x_0)$  は定数であることに注意)、

$$f(x) = f'(x_0)x + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + C_2 \quad (C_2 \text{は積分定数})$$

となるので、 $x = x_0$  を代入すると

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + C_2, \quad C_2 = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

したがって、

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

となる。

## 演習 1.3

問1 以下の関数を  $y$  軸 ( $x_0 = 0$ ) の周りでテイラー展開 (つまり、マクローリン展開) せよ。

$$(1) f(x) = \log(1+x) \quad (2) f(x) = \sin x \quad (3) f(x) = \cos x \quad (4) f(x) = e^x$$

問2 問1 (2), (3), (4) の結果を用いて、 $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ ,  $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ ,  $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$  を確認せよ。

問3 問1(4) で求めた式で  $x = i\theta$  とすることで、オイラーの公式 (Euler's formula):  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  を導け。また、 $e^{i\pi}$  の値を求めよ。

問4  $\cos \theta, \sin \theta$  を  $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$  を用いて表わせ。

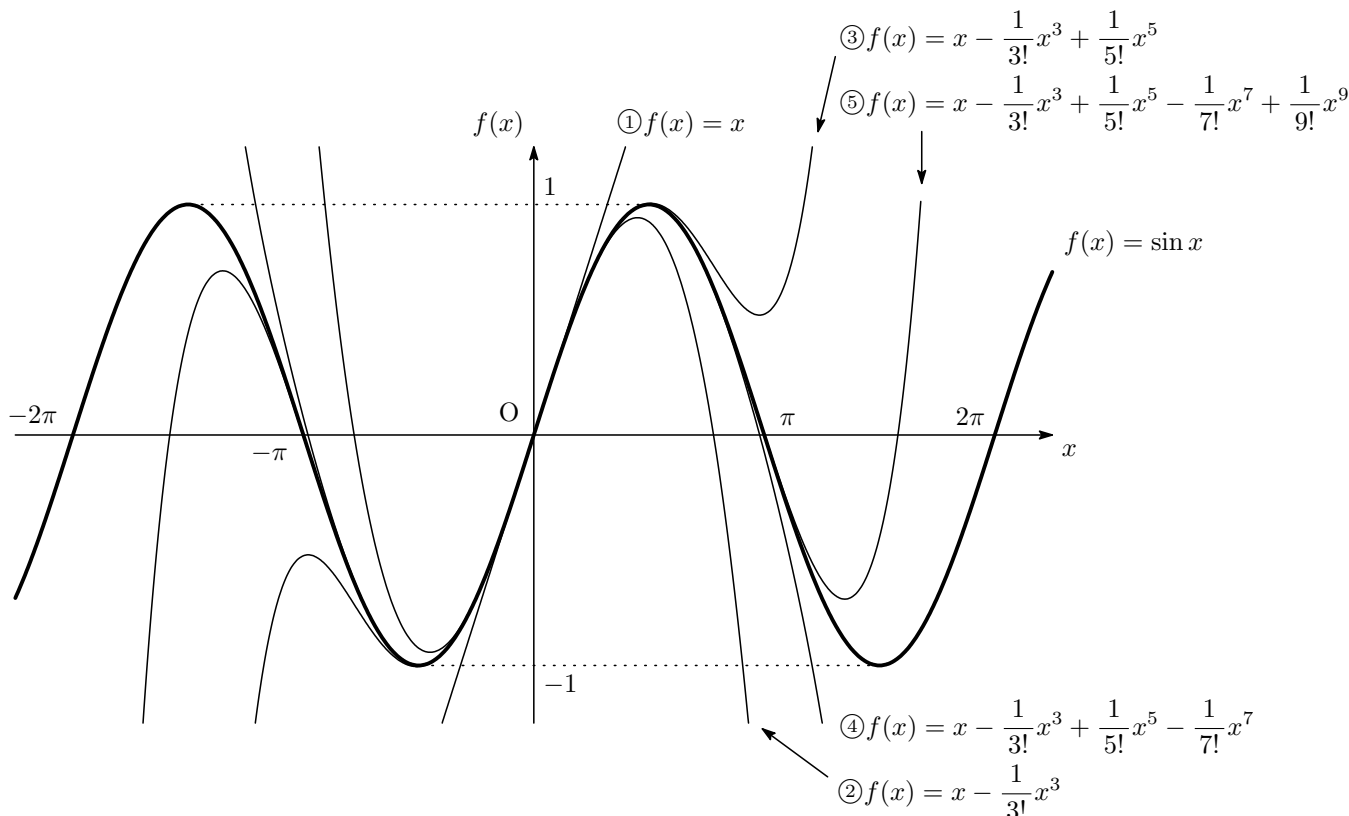
【解答】問1(1)  $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ ,  $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ ,  $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ ,  $f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$ , ... なので、マクローリン展開の式  $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4 + \dots$  より以下のようになる。

$$f(x) = \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

(2)  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\sin x$ ,  $f'''(x) = -\cos x$ ,  $f^{(4)}(x) = \sin x$ , ... より以下のようになる。

$$f(x) = \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

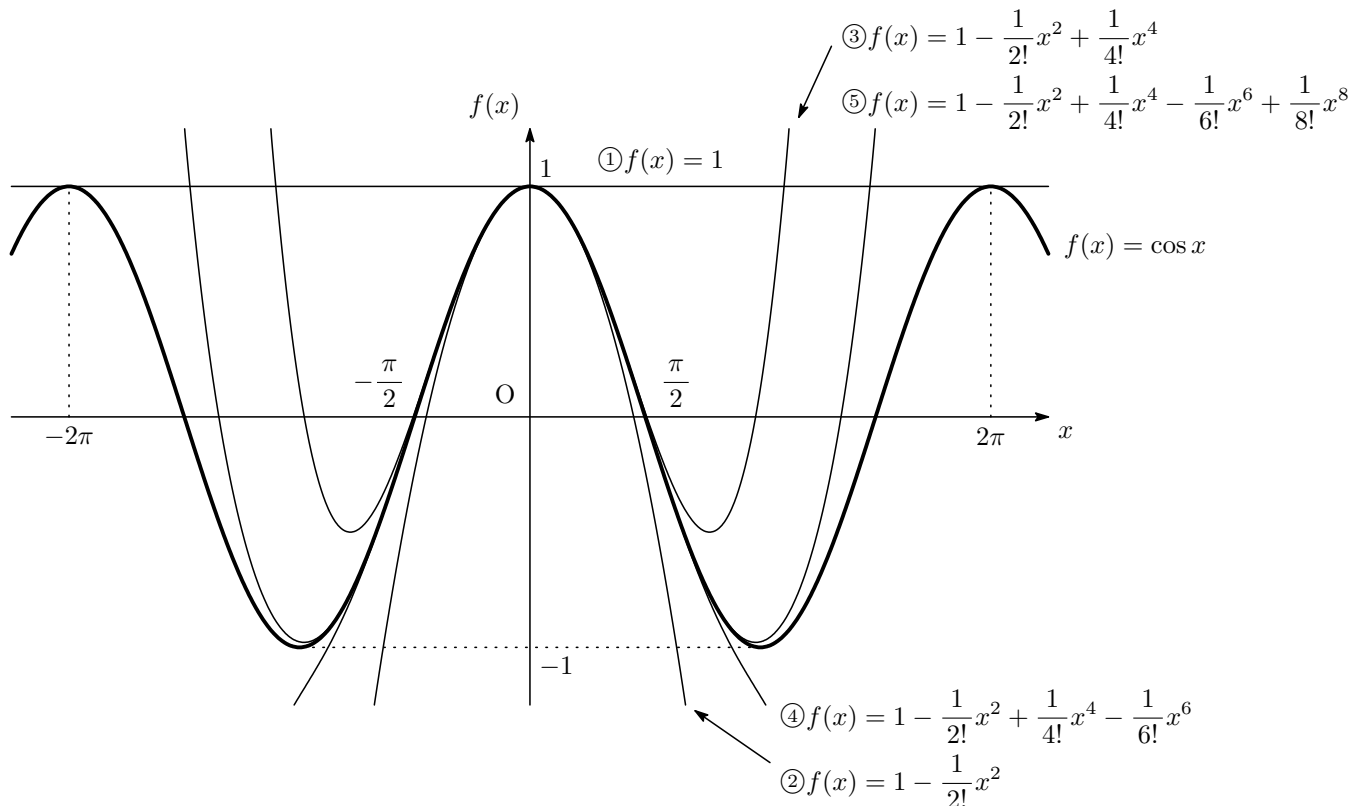
(補足) 下図のように、右辺の  $x$  の項を増やすことで (①→⑤)、 $x=0$  以外でも  $\sin x$  にどんどん近づくことが分かる。



(3)  $f'(x) = -\sin x$ ,  $f''(x) = -\cos x$ ,  $f'''(x) = \sin x$ ,  $f^{(4)}(x) = \cos x, \dots$  より以下ようになる。

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

(補足) 下図のように、右辺の  $x$  の項を増やすことで (①→⑤)、 $x = 0$  以外でも  $\cos x$  にどんどん近づくことが分かる。



(4)  $f'(x) = e^x$ ,  $f''(x) = e^x$ ,  $f'''(x) = e^x$ ,  $f^{(4)}(x) = e^x, \dots$  より以下ようになる。

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

なお、この式で  $x = 1$  とすると  $e$  の近似値が求められる。ただし、この展開式は  $x = 0$  周りでの近似式なので、 $e$  を精度良く求めるなら、(2), (3) のグラフで見たように右辺の項を多く使うか (10 項で 2.7182815...),  $x = 1$  周りでの展開式を作るかなどする必要がある (挑戦問題:  $f(x) = \tan^{-1} x$  をマクローリン展開したのち  $x = 1$  とし、 $\pi$  の近似値を求めよ)。

問 2 問 1(2), (3), (4) の解答の右辺を微分することですぐに成り立つことが確認できる (詳細は省略)。

問 3 問 1(4) で  $x = i\theta$  を代入し、 $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$  に注意して、 $i$  の有無で項を分けるとよい。

$$e^{i\theta} = \underbrace{1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \dots}_{=\cos \theta} + i \underbrace{\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \dots\right)}_{=\sin \theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

また、この式で  $\theta = \pi$  とすることで、 $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$  となる。

問 4 オイラーの公式で  $\theta \rightarrow -\theta$  とすると、 $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$  なので、この式とオイラーの公式の両辺を足し引きするとよい。

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

## 演習 1.4

以下の問いに答えよ。

- (1)  $(1+x)^a$  をマクローリン展開せよ。  
 (2)  $b \ll a$  のとき、以下の式を簡単にせよ。

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^{-c}$$

- (3) 日本上空 (200 hPa) では、冬季平均で 60 [m/s] の西風、5 [m/s] の南風が吹いている。このとき、(2) の結果を利用し、およその風速を手計算により求めよ。

【解答】(1)  $f'(x) = a(1+x)^{a-1}$ ,  $f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}$ ,  $f'''(x) = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}$ , ... より以下のようになる。

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots$$

- (2) (1) はマクローリン展開なので  $x$  は 0 に近い場合を考えている。 $b \ll a$  より  $\frac{b}{a} \ll 1$  なので、(1) が利用できるように与式を変形するとよい ( $x$  は 0 に近いので (1) の  $x^2$  以上の項は無視した)。

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^{-c} = \left(\frac{a+b}{a}\right)^c = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^c \approx \left(1 + c \cdot \frac{b}{a}\right) = 1 + \frac{bc}{a}$$

- (3) 基本的に地球大気上層では東西風 (いわゆる偏西風) のほうが南北風より強い。手計算で計算するので、(2) 解答の下線部分を利用できるようにするとよい。東西風を  $u$  [m/s] (西風が正)、南北風を  $v$  [m/s] (南風が正) とすると、

$$u = 60, v = 5, \frac{v}{u} = \frac{1}{12}, \frac{v^2}{u^2} \ll 1$$

なので、

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{u^2 \left(1 + \frac{v^2}{u^2}\right)} = u \left[ \underbrace{\left(1 + \frac{v^2}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}}}_{\ll 1} \right] \approx u \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{u^2}\right)}_{(2) \text{ を利用}} = u + \frac{1}{2} \frac{v^2}{u} = 60 + \frac{5}{24} \approx 60.2 \text{ [m/s]}$$

となる。

## 1.4 多変数関数とその微分 (偏微分)

$y = f(x)$  のグラフは  $xy$  平面上の直線や曲線を表すが、 $z = f(x, y)$  のグラフは  $xyz$  空間での平面や曲面を表す。例えば、関数  $z = f(x, y) = x^2y$  に対して  $(x, y) = (1, 1)$  を代入すれば  $z$  の値がただ 1 つ  $z = 1$  に決まり、さらに別の  $(x, y) = (1, 2)$  を代入すれば  $z$  の値がまた 1 つ  $z = 2$  に決まる。これを繰り返すことで、任意の関数  $z = f(x, y)$  が平面や曲面を表すことは簡単に想像できると思う。

2 変数関数を描画してくれる便利なサイト (GeoGebra) があり (<https://www.geogebra.org/3d>, スマホアプリもある)、2 変数関数の理解の手助けとなるので、一度は使って見るとよい。 $f(x, y) = x^2y$  で  $y = 1, 2, \dots$  とすると、 $y = 1, 2, 3, \dots$  の断面に  $f(x, y) = x^2, 2x^2, 3x^2, \dots$  が現れるのが分かる。

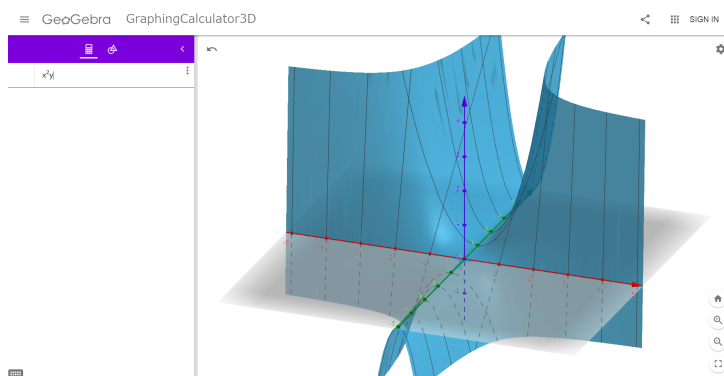


図 1.3: GeoGebra で描いた  $f(x, y) = x^2y$  のグラフ。

1 変数関数  $f(x)$  を  $x$  で微分するとは、曲線上の任意の場所  $x$  での接線の傾き  $f'(x)$  を求めることだったが、2 変数関数  $f(x, y)$  を  $x, y$  で微分 (偏微分) するとは、曲面上の任意の場所  $x, y$  での接平面の傾きを求めることに相当する。2 つの独立した直線 (重ならない直線) があれば (お箸 2 本をイメージするとよい)、ただ 1 つの平面が決まるので、 $x$  方向、 $y$  方向それぞれの接線を求めることで (図 1.4、図 1.5)、曲面に接する平面 (接平面) が求まる (図 1.6)。

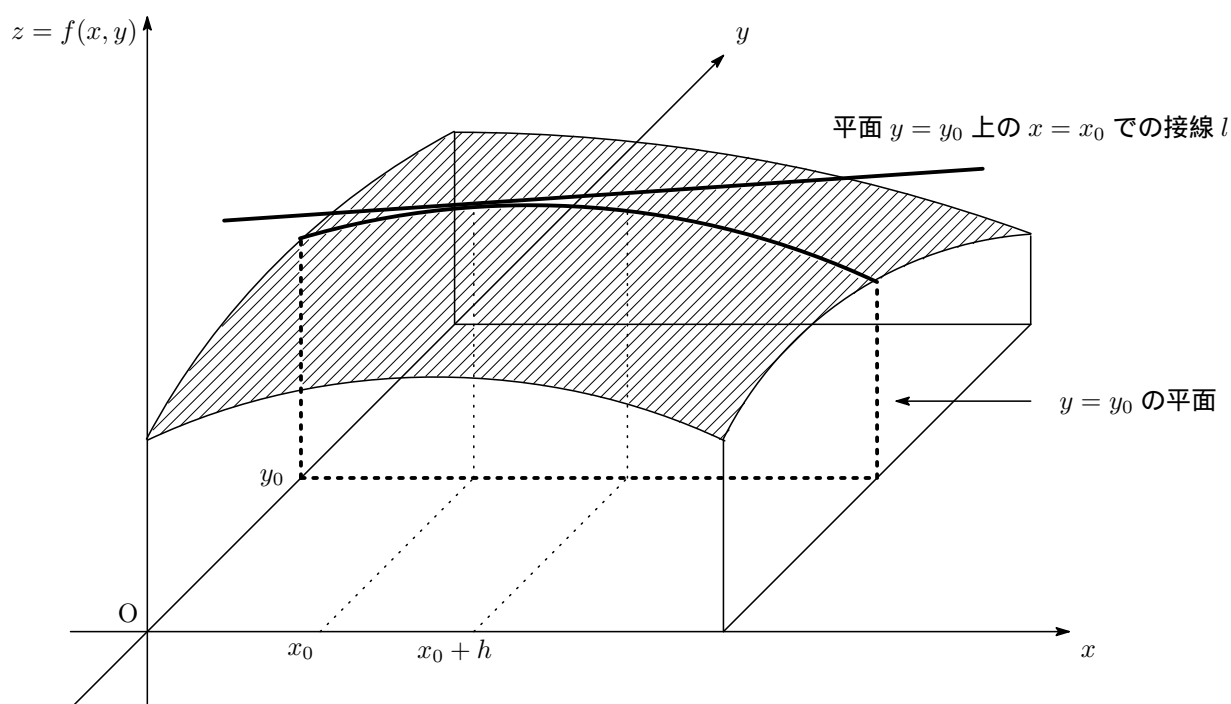


図 1.4 平面  $y = y_0$  により曲面  $f(x, y)$  を切るとその断面は曲線 (太線) となる。 $\frac{\partial f}{\partial x}$  は、接線の傾きを求めている。

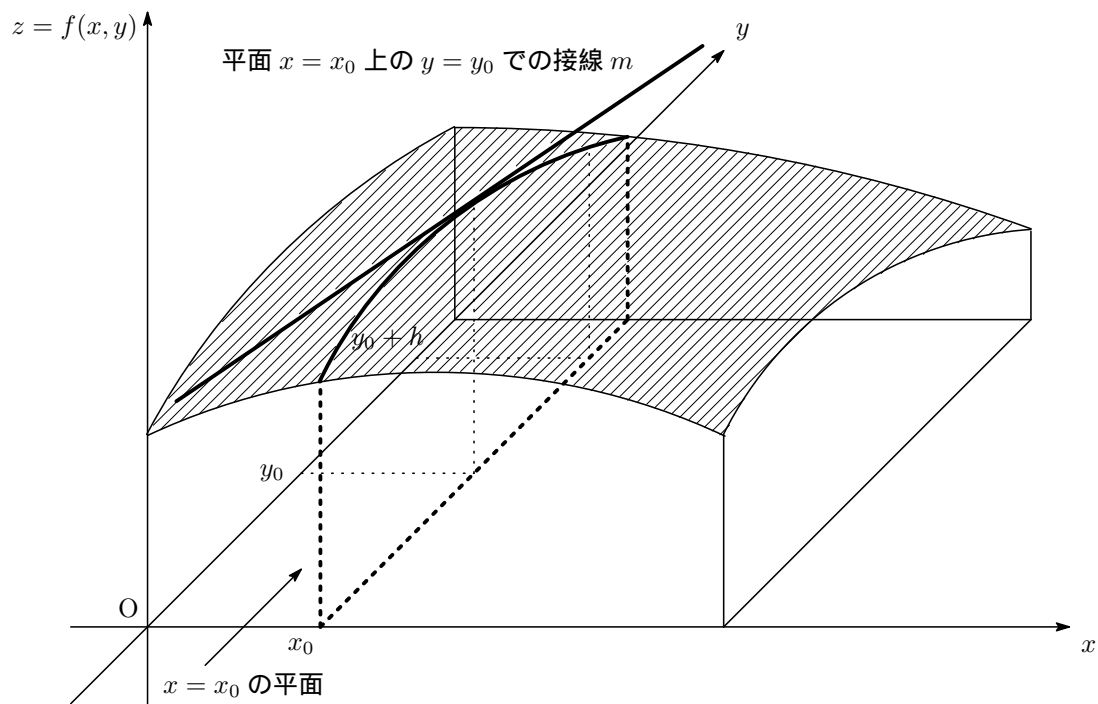


図 1.5 平面  $x = x_0$  により曲面  $f(x, y)$  を切るとその断面は曲線 (太線) となる。 $\frac{\partial f}{\partial y}$  は、接線の傾きを求めている。

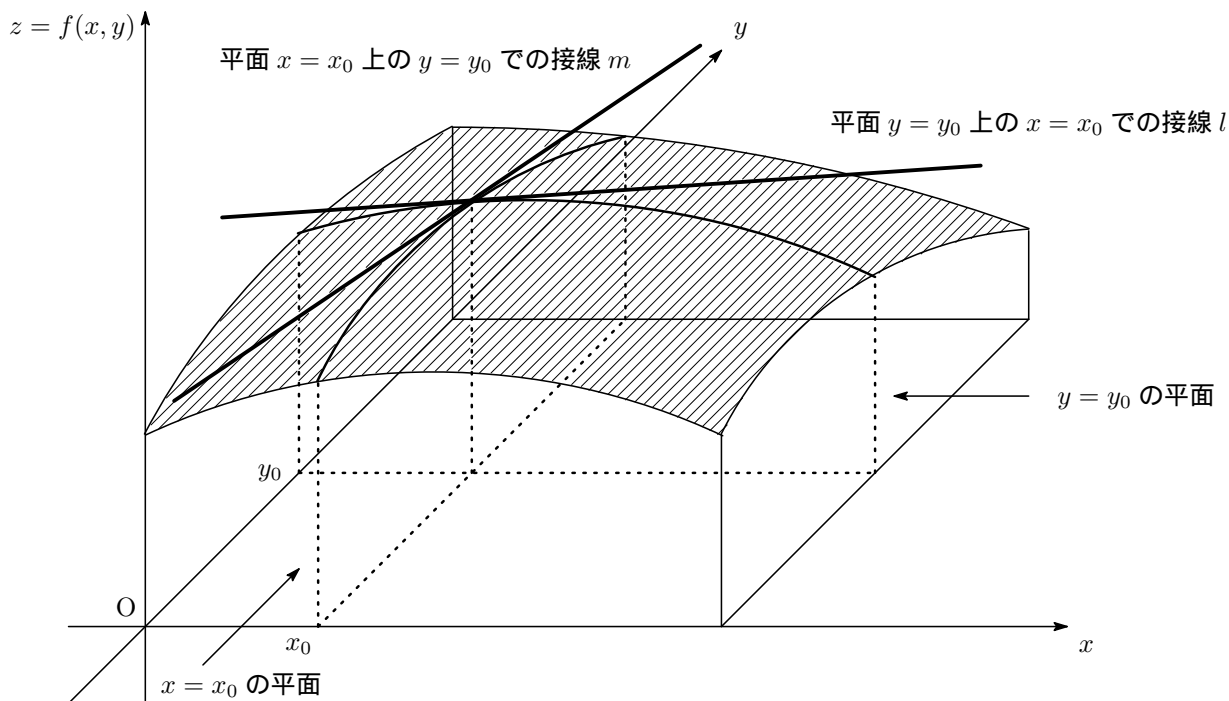


図 1.6 曲面  $f(x, y)$  上の点  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  での接平面は 2 本の接線  $l, m$  によりただ 1 つに定まる。

## 偏微分の定義

2変数関数  $f(x, y)$  に対して、一階の偏微分  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  (あるいは、 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ ,  $f_x$  などと書く) は、1変数関数のときと同様、

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \end{cases}$$

と定義される。実際に偏微分の計算をするときは、1変数関数のとき同様、定義を利用せず微分公式を利用する。

【例】  $f(x, y) = y^2 \sin x$  の1階の偏微分  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  は、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos x \quad \leftarrow x \text{ で偏微分するときは } x \text{ 以外の変数を数字と見なす}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin x \quad \leftarrow y \text{ で偏微分するときは } y \text{ 以外の変数を数字と見なす}$$

となる。また、 $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  をさらに  $x, y$  でそれぞれ偏微分した2階の偏微分は、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (y^2 \cos x) = -y^2 \sin x \quad \leftarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ とも書く}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y^2 \cos x) = 2y \cos x \quad \leftarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ とも書く}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2y \sin x) = 2y \cos x \quad \leftarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ とも書く}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2y \sin x) = 2 \sin x \quad \leftarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ とも書く}$$

となる。この例のように、もし  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  が存在し、連続であれば (場合分けなどなく簡単に計算できるということ)、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \text{つまり} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

が成り立つ。つまり、「 $y \rightarrow x$  の順で微分しても、 $x \rightarrow y$  の順で微分しても結果は同じ」ということで、地球科学で扱う関数ではたいてい成り立つ。

## 演習 1.5

つぎの関数  $f(x, y)$  に対して、 $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  をそれぞれ計算し、 $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  が成り立つことを確認せよ。

$$(1) f(x, y) = \cos(4xy) \qquad (2) f(x, y) = e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

【解答】(1)  $\frac{\partial f}{\partial x} = -4y \sin(4xy)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = -4x \sin(4xy)$  より

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = -16y^2 \cos(4xy) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = -16x^2 \cos(4xy) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= -4 \{ \sin(4xy) + 4xy \cos(4xy) \} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= -4 \{ \sin(4xy) + 4xy \cos(4xy) \} \end{aligned}$$

なので、確かに  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  が成り立つ。

(2)  $\frac{\partial f}{\partial x} = -xe^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = -ye^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$  より

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = - \left( e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} + x \cdot (-x) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} \right) = (x^2 - 1) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = - \left( e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} + y \cdot (-y) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} \right) = (y^2 - 1) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= xye^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= xye^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} \end{aligned}$$

なので、確かに  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  が成り立つ。

## 1.5 2変数関数のテイラー展開

1変数関数  $f(x)$  のときのテイラー展開の導出方法を踏まえると、2変数関数のテイラー展開は

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \underbrace{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}}_{\text{微分して代入}}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 + \dots$$

となる。実用的には右辺の  $x$  が2次以上の項を無視した以下の近似式を使うことがほとんど (図 1.7)。

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

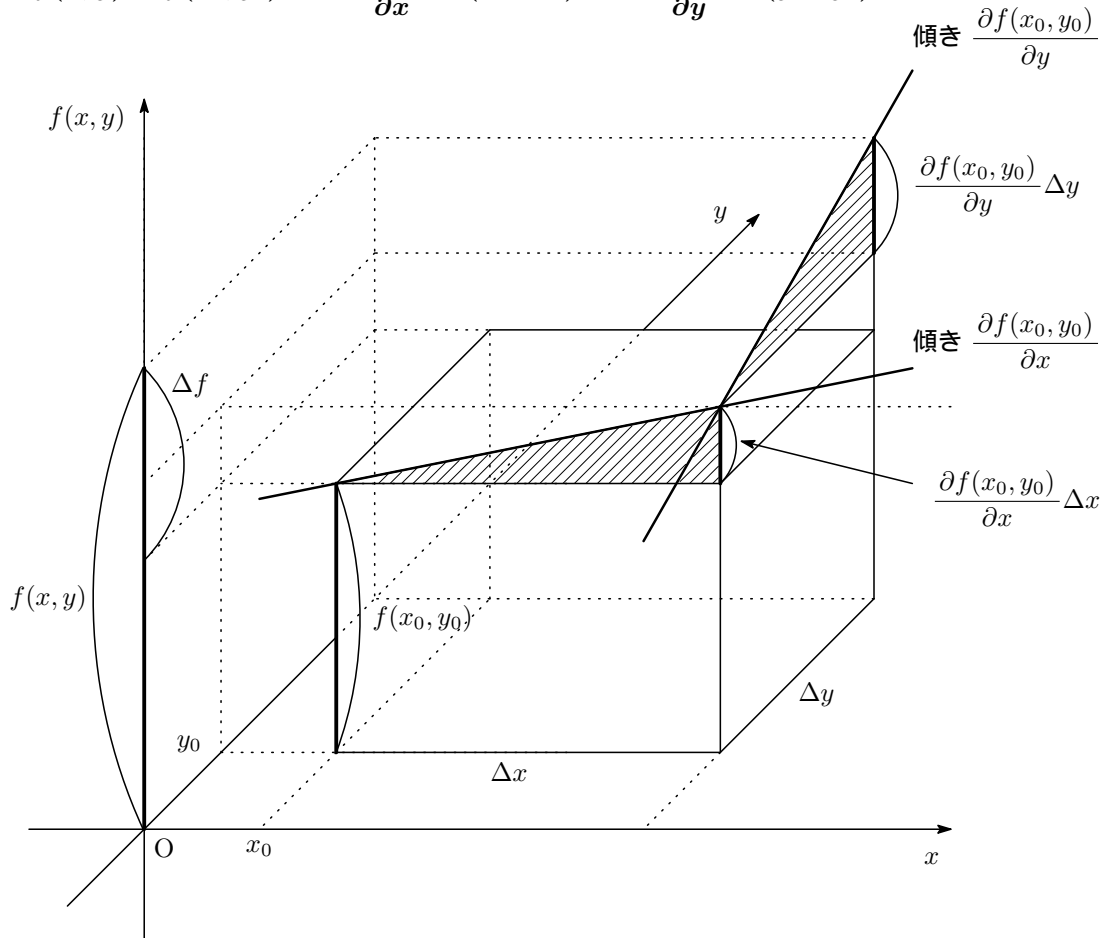


図 1.7 2変数関数に対するテイラー展開の概念図。

また、右辺の  $f(x_0, y_0)$  を左辺に移行し、 $df = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ ,  $dx = x - x_0$ ,  $dy = y - y_0$  とすると (上図で  $\Delta \rightarrow d$ )、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (\text{この形を全微分とよぶ})$$

と書くことができる。この式は「関数  $f$  の値の変化は  $x$  方向の変化と  $y$  方向の変化の和」ということを表している。例えば、「地点 A から東に進むと 100m ごとに気温が 0.5 度上がり、北に進むと 100m ごとに気温が 1.0 度上がる。このとき、地点 A から東へ 300m、北へ 200m の地点 B の気温は地点 A より何度高いか?」という問題を解くのと同じである。

$$\Delta T = 0.5/100 \text{ [K/m]} \times 300 \text{ [m]} + 1.0/100 \text{ [K/m]} \times 200 \text{ [m]} = 3.5 \text{ [K]}$$

## 1.6 極大値・極小値と変曲点

ここでは、1変数関数に戻って要点を確認する。導関数  $f'(x)$  は「 $f(x)$  の接線の傾き」を表すので、 $f'(x)$  の変化の仕方に注目することで関数の特徴を捉えることができる。

グラフの増減

ある区間において

(1)  $f(x)$  が単調増加  $\iff f'(x) > 0$

(2)  $f(x)$  が単調減少  $\iff f'(x) < 0$

}

$\implies f'(x) = 0$  となるところは極大値・極小値をとる候補 (必要条件)

$f(x)$  が単調増加  
 $f'(x) > 0$

$f(x)$  が単調減少  
 $f'(x) < 0$

(3) 接線の傾き  $f'(x)$  が単調減少  $\iff f''(x) > 0$

(4) 接線の傾き  $f'(x)$  が単調増加  $\iff f''(x) < 0$

}

$\implies f''(x) = 0$  となるところは変曲点

$f'(x)$  が単調減少  
 $f''(x) < 0$

$f'(x)$  が単調増加  
 $f''(x) > 0$

高校数学でも習ったように、下のグラフに見られるような「山の頂上」(印)のことを「極大」(その  $y$  座標を極大値) とよび、「谷底」(印)のことを「極小」(その  $y$  座標を極小値) と呼ぶ。また、接線の傾きが減少傾向から増加傾向 (あるいは増加傾向から減少傾向) に変わる場所 (印)のことを「変曲点」( $xy$  平面が地平面だとして、グラフのような道を

車で走った場合、変曲点で車のハンドルをいままでと逆にきる必要がある)と呼ぶ。

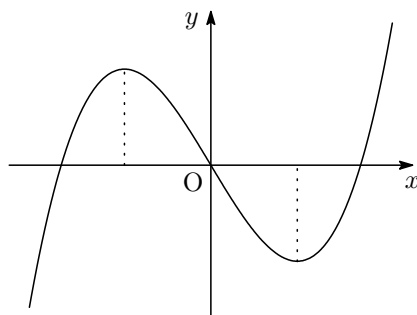
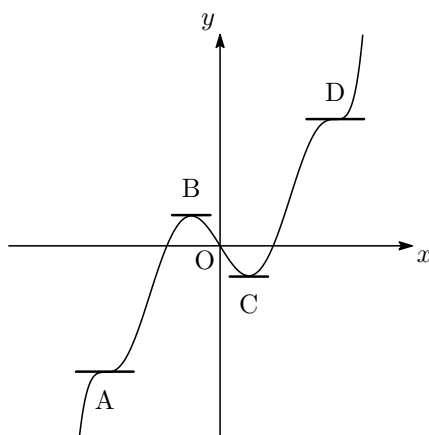


図 1.8 極大・極小と変曲点。

極大値、極小値(あわせて極値という)をとる場所では、接線の傾きが0になるので、

$$x = a \text{ で極大・極小} \implies f'(a) = 0$$

が成り立つ。しかし、この逆( $x = a$ で極大・極小  $\longleftarrow f'(a) = 0$ )は必ずしも成り立ちません。このことは以下のグラフ上の4点A~Dを見れば分かると思う。



4点A~Dのいずれも  $f'(x) = 0$  となっているが、極値となるのは2点B, Cだけである。つまり、極値となる点では、そこを境に  $f'(x)$  の符号(つまり、接線の傾きの符号)が+から-あるいは-から+に変化している。極値(場合によっては最大・最小値)を求める際に、接線の傾きを0( $f'(x) = 0$ )とするが、それはあくまでも、極値(最大・最小値)の候補になり得る場所を探しているに過ぎない。以上をまとめると、次のようになる。

ある点が極値であるかどうかの判別法

- (1) 関数  $f(x)$  が  $x = a$  において極値をとるならば、 $f'(a) = 0$  であるが、これはあくまでも必要条件にすぎず、 $f'(a) = 0$  だからといって、 $x = a$  で極値をとるとは限らない(極値をとるかチェックする必要あり)
- (2) 関数  $f(x)$  が  $x = a$  で極値をとるかを調べたければ、 $f'(x)$  が  $x = a$  の前後で符号(±)を変えているかどうかを調べればよい(必要十分条件)

## 演習 1.6

つぎの各問に答えよ。

(1)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$  の最大値、最小値、及び、変曲点を求めよ。

(2)  $f(x) = \frac{\log x}{x}$  ( $x > 0$ ) の最大値、および、変曲点を求めよ。また  $e^\pi$  と  $\pi^e$  はどちらが大きいか？

【解答】(1)  $f'(x) = -\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$ ,  $f''(x) = \frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$  より、極値をとる  $x$  は  $f'(x) = 0$  より  $x = -1 \pm \sqrt{2}$ 、変曲点をとる  $x$  は  $f''(x) = 0$  より  $x = 1, -2 \pm \sqrt{3}$  である。 $f(x)$  の増減表は以下のようになる。

$x$	...	$-2 - \sqrt{3}$	...	$-1 - \sqrt{2}$	...	$-2 + \sqrt{3}$	...	$-1 + \sqrt{2}$	...	1	
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	変曲点	$\searrow$	極小	$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\searrow$

よって、極大値は  $f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ 、極小値は  $f(-1 - \sqrt{2}) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$ 、変曲点は

$$\left(-2 - \sqrt{3}, f(-2 - \sqrt{3})\right) = \left(-2 - \sqrt{3}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\left(-2 + \sqrt{3}, f(-2 + \sqrt{3})\right) = \left(-2 + \sqrt{3}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right)$$

$$(1, f(1)) = (1, 1)$$

である。

(2)  $f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$ ,  $f''(x) = \frac{2 \log x - 3}{x^3}$  より、極値をとる  $x$  は  $f'(x) = 0$  より  $x = e$ 、変曲点をとる  $x$  は  $f''(x) = 0$

より  $x = e^{\frac{3}{2}}$  である。 $f(x)$  の増減表は以下のようになる。

$x$	...	$e$	...	$e^{\frac{3}{2}}$	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\searrow$

よって、極大値は  $f(e) = e^{-1}$ 、変曲点は  $\left(e^{\frac{3}{2}}, f(e^{\frac{3}{2}})\right) = \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$  である。また、増減表より  $x = e$  で極大値 (かつ最大値) をとることから、 $e < \pi$  より  $f(\pi) = \frac{\log \pi}{\pi} < \frac{\log e}{e} = f(e)$  となる (グラフを書いてみよ)。よって、この式の両辺に  $e\pi$  掛けて、変形すると  $\pi^e < e^\pi$  となる。

## 演習 1.7 - 回帰直線 (サンプルにもっと合う近似式) を求める -

ある月の地点 A の日平均気温  $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$  と地点 B の日平均気温  $y_i (i = 1, 2, \dots, N)$  の散布図を描いたら以下のようなになったという。

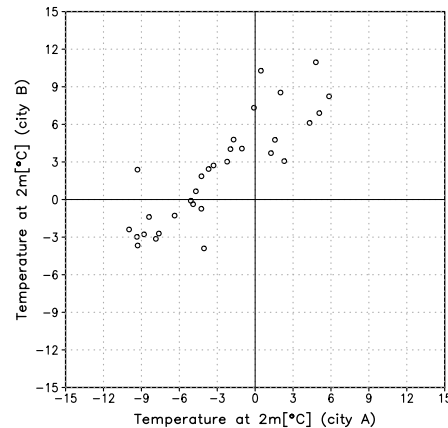


図 地点 A(横軸) と地点 B(縦軸) の気温の関係。

2 地点の気温の関係を 1 次関数の式  $y = a + bx$  で近似することを考える。ある日  $i$  の地点 A の気温  $x_i$  から近似した地点 B の気温は  と表せるが、実際の気温  $y_i$  との差 (誤差) は  $y_i -$   となる。この誤差は日によって、正だったり負だったりする可能性があるので、この誤差を 2 乗したうえで、全ての日の誤差を足すと  $D = \sum_{i=1}^N \{y_i - \text{$ }\}^2 となる。この誤差が最小になるような近似式が一番よさそうである。さて、散布図の上にペンをおき一番散布図にあいそうな直線を探るのは簡単だが、この作業は数学的には「直線の傾き  $b$  と切片  $a$  をいろいろ変える」ということに相当する。これらのことを踏まえると、 $a$  と  $b$  を変化させ最小になる  $D$  を探せばよいということになる。ここで、 $D$  が  $a, b$  それぞれについての下に凸の二次関数 (つまり、 $a^2, b^2$  の係数が正) であることを踏まえれば、接線の傾きがともに 0 となるときに  $D$  が最小値をとるので (補足: この記述が描かれていない教科書がほとんどで、偏微分 = 0 で最小になるという大きな誤解を与えている)、以下の条件だけで十分と分かる。

$$\text{$$

かつ

よって、 $a, b$  を  $N, x_i, y_i, \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$  で表すと以下のようなになる。

$$a = \text{$$

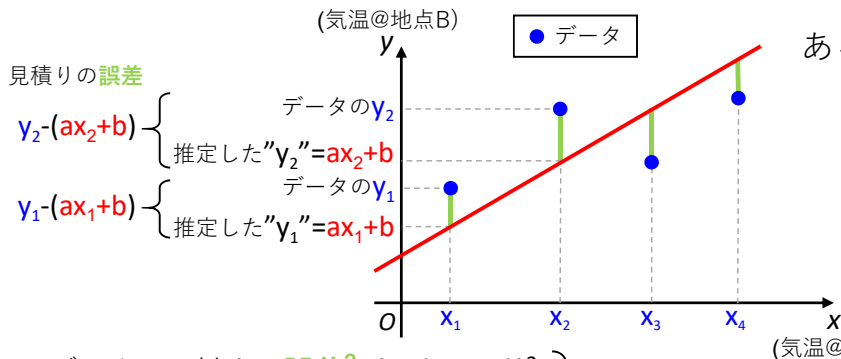
,  $b =$

【解答】  :  $a + bx_i$ ,  :  $\frac{\partial D}{\partial a} = 0$ ,  :  $\frac{\partial D}{\partial b} = 0$ ,  :  $\bar{y} - b\bar{x}$ ,  :  $\frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{x}^2}$

## 演習1.7の補足

## 回帰直線(データに最もあう直線)を求める

限られた数のデータ(x, y)から、xとyの関係式( $x_i$ から $y_i$ を推定する最適な式)を見積もりたい  
→ **回帰(近似)直線**を求める(これによりデータが無い範囲でもyの推定が出来る)。



ある**傾きa**と**y切片b**で描いた**近似(回帰)直線**:  $y=ax+b$

a, bを変えると各データの**誤差**:  $y_i - (ax_i + b)$ も変わる。  
a, bを変えることでデータに**最もあう直線**を見つきたい!  
(誤差が小さい直線)

データ $y_1$ に対する**誤差** $^2 = \{y_1 - (ax_1 + b)\}^2$   
データ $y_2$ に対する**誤差** $^2 = \{y_2 - (ax_2 + b)\}^2$   
:  
データ $y_n$ に対する**誤差** $^2 = \{y_n - (ax_n + b)\}^2$

**すべての**データ $y_i$ に対して $x_i$ からうまく見積りたい!  
(あるデータ(点)だけ**誤差** $^2$ が小さくても駄目 → **総じて**誤差小がいい)  
→ **誤差** $^2$ の**総和** $D (= \sum_{i=1}^n \text{誤差}^2)$ が**最小**になればそれが最適な**近似(回帰)直線**  
※正負の**誤差**があるので2乗する(e.g. 誤差が1, -1, 1, -1だと総和が0(誤差=0!?)となってしまう)

実際には..

データに合いそうな直線を、**傾きa**と**切片b**を変えることでみつける。

$$D(a,b) = \sum_{i=1}^n \{y_i - (ax_i + b)\}^2$$

※a, bは変数、 $x_i, y_i$ は数字

→ Dはa, bの関数( $a^2, b^2$ の係数が正なので下に凸の2次関数)  
→ 極小値となるa, bを求めればよい(いま最小値=極小値)  
→ a, bで偏微分して0( $\partial D / \partial a = 0$ かつ $\partial D / \partial b = 0$ )となればよい

## 第2章 積分

### 2.1 主な関数の積分と定積分の定義

主な関数の (微分と) 積分

$$(1) \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad (7) \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$(2) \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad (8) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(3) \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \quad (9) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(4) \frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (10) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$(5) \frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad (11) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(6) \frac{d}{dx}(\log |x|) = \frac{1}{x} \quad (12) \int \frac{dx}{x} = \log |x| + C$$

定積分の定義

1変数関数  $f(x)$ ,  $x$  軸,  $x = a$ ,  $x = b$  で囲まれた部分の面積は、底辺  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , 高さ  $f(x)$  の長方形の面積の無限和を考えることで求めることができる。

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \underbrace{[f(a + (k-1)\Delta x)]}_{\text{高さ}} \times \underbrace{[\Delta x]}_{\text{底辺}} = \int_a^b f(x) dx$$

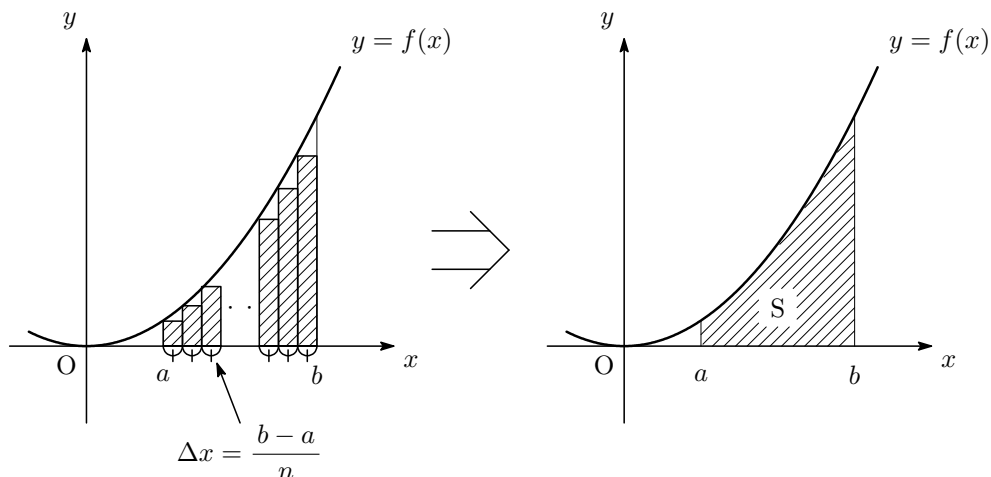


図 2.1 曲線と  $x$  軸で挟まれた領域の面積を小さい長方形の集まりで表す。

## 部分積分法

積の微分公式  $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  の両辺を  $x$  で積分し、式変形をすることで部分積分の式を導くことができる。右辺の  $\int$  の中の  $f(x)g'(x)$  が簡単に積分できる関数になるように  $f(x), g(x)$  を決めるのがポイントである。

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

また、定積分についての部分積分法は以下のようになる。

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

【例1】定積分  $\int_0^1 xe^{-x} dx$  は、 $e^{-x} = (-e^{-x})'$  であることに注意すると、 $f(x) = -e^{-x}, g(x) = x$  なので以下のようになる。

$$\int_0^1 xe^{-x} dx = [x(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot (-e^{-x}) dx = -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$$

【例2】積分  $\int \log x dx$  は、 $\log x = 1 \cdot \log x = (x)' \log x$  であることに注意すると、 $f(x) = x, g(x) = \log x$  なので以下のようになる。

$$\int \log x dx = \int (x)' \log x dx = x \log x - \int x(\log x)' dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

## 演習 2.1

つぎの不定積分、および、定積分の値を求めよ。

$$\begin{array}{lll} (1) \int x(x-1)^5 dx & (2) \int x \cos x dx & (3) \int xe^{2x} dx \\ (4) \int x \log x dx & (5) \int x^2 e^x dx & (6) \int e^x \sin x dx \\ (7) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-4} dx & (8) \int_0^\pi x \sin x dx & (9) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\cos x} dx \end{array}$$

【解答】  $C$  は積分定数とする。

$$\begin{array}{lll} (1) \frac{1}{42}(x-1)^6(6x+1) + C & (2) x \sin x + \cos x + C & (3) \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C \\ (4) \frac{x^2}{4}(2 \log x - 1) + C & (5) (x^2 - 2x + 2)e^x + C & (6) \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C \\ (7) -\frac{1}{2} \log 3 & (8) \pi & (9) \log \frac{3}{2} \end{array}$$

## 2.2 重積分

2変数関数  $f(x, y)$  に対する重積分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  は、積分領域  $D$  内にある底面積  $\Delta x \Delta y$ 、高さ  $f(x, y)$  の四角柱を集めて体積を求めることに相当します (図 2.2)。

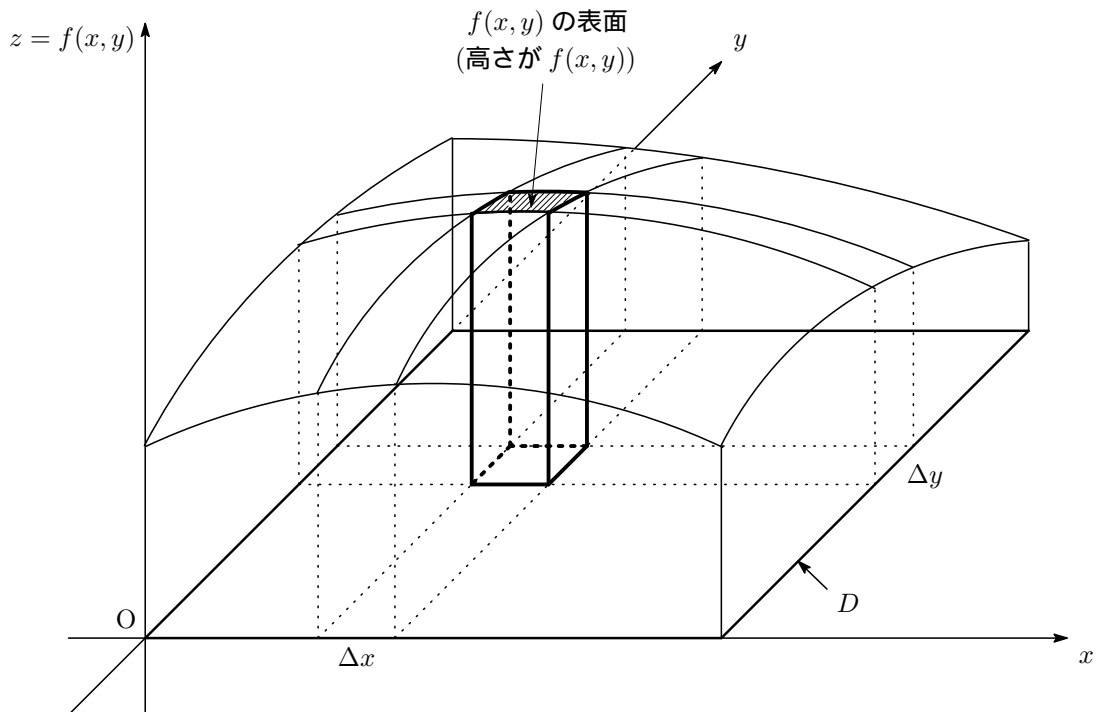


図 2.2 重積分の概念図。積分領域  $D$  内にある四角柱をもとに体積を計算する。

### 【休憩】 Giant's Causeway (Northern Ireland)

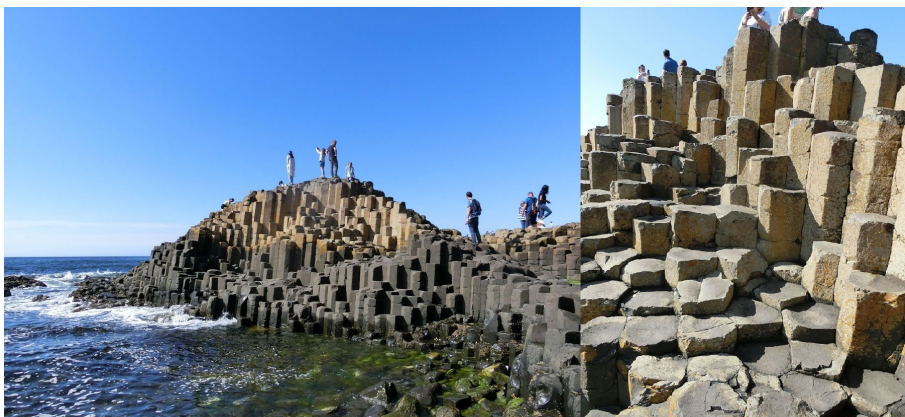


図 2.3 北アイルランド北部の Giant's Causeway。

第三紀 (6 千万年前) に、アントリム一帯は激しい火山活動にさらされ、高い流動性を持つ溶解した玄武岩が、チョーク質の地層に貫入し、広大な溶岩台地を形成した。溶岩は急速に冷却したので収縮作用が起こった。収縮は垂直方向には溶岩流の厚みを減らすだけで割れ目は形成しなかったが、水平方向では、ひび割れを生じた。広範囲にわたった割れ目は地質学で柱状節理と呼ばれ、現在見られる奇観を形成したのである (wikipedia より)。

## 演習 2.2

つぎの各関数  $f(x, y)$  に対して二重積分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  の値を求めよ。

$$(1) \quad f(x, y) = 1, \quad D = \{0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4\}$$

$$(2) \quad f(x, y) = x, \quad D = \{0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4\}$$

$$(3) \quad f(x, y) = x^2 y, \quad D = \{0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4\}$$

$$(4) \quad f(x, y) = 1, \quad D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

$$(5) \quad f(x, y) = x, \quad D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

$$(6) \quad f(x, y) = y, \quad D = \{y = x^2 \text{ と } y = x^3 \text{ で囲まれる領域}\}$$

【解答】(1) 積分区間に変数  $(x, y)$  が含まれていない(つまり定数のみの)場合、以下のように、積分の順番を変えたり、

2つの積分を同時に計算することができる。

$$x \text{ から積分: } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^4 \left( \int_0^3 dx \right) dy = \int_0^4 [x]_0^3 dy = \int_0^4 3 dy = 3[y]_0^4 = 12$$

$$y \text{ から積分: } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^3 \left( \int_0^4 dy \right) dx = \int_0^3 [y]_0^4 dx = \int_0^3 4 dx = 4[x]_0^3 = 12$$

$$x, y \text{ 同時に積分: } \iint_D f(x, y) dx dy = \left( \int_0^3 dx \right) \times \left( \int_0^4 dy \right) = [x]_0^3 \times [y]_0^4 = 3 \times 4 = 12$$

$$(2) \quad x \text{ から積分: } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^4 \left( \int_0^3 x dx \right) dy = \int_0^4 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^3 dy = \int_0^4 \frac{9}{2} dy = \left[ \frac{9}{2} y \right]_0^4 = 18$$

$$y \text{ から積分: } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^3 x \left( \int_0^4 dy \right) dx = \int_0^3 x [y]_0^4 dx = \int_0^3 4x dx = [2x^2]_0^3 = 18$$

$$x, y \text{ 同時に積分: } \iint_D f(x, y) dx dy = \left( \int_0^3 x dx \right) \times \left( \int_0^4 dy \right) = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^3 \times [y]_0^4 = \frac{9}{2} \times 4 = 18$$

$$(3) \quad x \text{ から積分: } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^4 y \left( \int_0^3 x^2 dx \right) dy = \int_0^4 y \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3 dy = \int_0^4 9y dy = \left[ \frac{9}{2} y^2 \right]_0^4 = 72$$

$$y \text{ から積分: } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^3 x^2 \left( \int_0^4 y dy \right) dx = \int_0^3 x^2 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^4 dx = \int_0^3 8x^2 dx = \left[ \frac{8}{3} x^3 \right]_0^3 = 72$$

$$x, y \text{ 同時に積分: } \iint_D f(x, y) dx dy = \left( \int_0^3 x^2 dx \right) \times \left( \int_0^4 y dy \right) = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3 \times \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^4 = 9 \times 4 = 72$$

(4) 積分区間に変数  $(x, y)$  が含まれている場合、積分順序に気をつけて積分する必要がある、(1)~(3)のように3通り

の方法では計算できない(1通りのみ)。いま、 $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$  であることに注意して、先に  $y$  で積分をすると、

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx = \int_0^1 [y]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

となる。ここで、 $x = \sin \theta$  と変換すると(積分に不向きなルートをはずすため  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  を利用)、 $0 \leq x \leq 1$

より  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$  より  $dx = \cos \theta d\theta$ 、 $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 \theta} = \cos \theta$  なので、以下ようになる。

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \right) d\theta = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

(補足) 先に  $x$  で積分をしようとする、次のように計算ができるように見えてしまうが、重積分 (体積を求めるので答えは定数!) なのに答えに  $x$  (変数) が残ってしまう ( $x$  で積分する際に  $\sqrt{1-x^2}$  を外に出してしまったため)。

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left( \int_0^1 dx \right) dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} [x]_0^1 dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = [y]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} \quad (\times)$$

(5) (4) と同様に計算する。

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 x \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx = \int_0^1 [y]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$$

ここで、 $x = \sin \theta$  と変換すると、 $0 \leq x \leq 1$  より  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$  より  $dx = \cos \theta d\theta$ 、 $\sqrt{1-x^2} = \cos \theta$  なので、以下のようなになる (途中  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ 、および、三倍角の公式  $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$  を利用)。

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta + \sin 3\theta) d\theta = \dots = \frac{1}{3}$$

(補足)  $z = \sqrt{1-x^2}$  と置換することでも求めることができる ( $dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dz$ )。

(6)

まず積分領域  $D$  の範囲をより正確に特定する必要があります。  $y = x^2$  と  $y = x^3$  の交点は  $(0, 0)$  と  $(1, 1)$  なので、領域  $D$  の範囲はグラフの斜線部であることが分かります (右図)。いま、 $y$  から積分する場合、 $x$  は定数扱いになるので、 $0 \leq x \leq 1$  を満たすある  $x$  で固定 ( $x = x_0$ ) すると、 $y$  の範囲は  $x_0^3 \leq y \leq x_0^2$  となります。

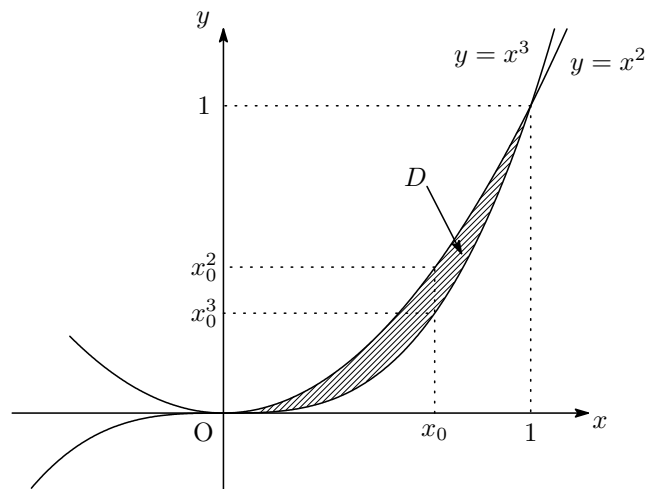


図 2.4: 積分領域  $D$ 。

よって、重積分は以下のようなになる。

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_{x^3}^{x^2} y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [y^2]_{x^3}^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^4 - x^6) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 \right]_0^1 = \frac{1}{35}$$

(補足) もし  $x$  から積分するのであれば、 $y$  は定数扱いになるので、 $0 \leq y \leq 1$  を満たすある  $y$  で固定 ( $y = y_0$ ) すると、 $x$  の範囲は  $y_0^{\frac{1}{2}} \leq x \leq y_0^{\frac{1}{3}}$  となる。よって、重積分は以下のようなになる。

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_{y^{\frac{1}{2}}}^{y^{\frac{1}{3}}} x dx \right) dy = \int_0^1 [yx]_{y^{\frac{1}{2}}}^{y^{\frac{1}{3}}} dy = \int_0^1 (y^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{3}{2}}) dy = \left[ \frac{3}{7} y^{\frac{7}{3}} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{35}$$

## 演習 2.3

つぎの 2 重積分の値を求めよ。

$$(1) \iint_D (1+x+y) dx dy, \quad D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

$$(2) \iint_D xy dx dy, \quad D = \{0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$$

$$(3) \iint_D x^2 y dx dy, \quad D = \{x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$$

$$(4) \iint_D x dx dy, \quad D = \{x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$(5) \iint_D y dx dy, \quad D = \{y^2 \leq x, x-2 \leq y\}$$

$$(6) \iint_D x dx dy, \quad D = \left\{x^2 \leq y \leq \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$$

## 【解答】

$$(1) \frac{1}{2}(b-a)(d-c)(a+b+c+d+2) \quad (2) \frac{1}{8} \quad (3) \frac{1}{15} \quad (4) \frac{1}{6} \quad (5) \frac{9}{4} \quad (6) \frac{1}{192}$$

## 演習 2.4

つぎの 2 重積分の値を極座標に変換して求めよ ( $a > 0$ )。

$$(1) \iint_D dx dy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$(2) \iint_D xy dx dy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$(3) \iint_D x dx dy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

【解答】(1) 積分領域  $D$  が円、あるいはそれに準ずるもの(扇形、半円など)の場合、積分変数を変換することで計算を簡単にすることができる。ここでは  $(x, y)$  を極座標  $(r, \theta)$  ( $r$  は半径、 $\theta$  は偏角) に変換する(つまり、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  とする)ことを考える。下の図を見て分かるように、極座標(右図)を用いた方が、積分領域  $D$  を斜線部のピースで”きれいに”埋め尽くせることが分かるだろう。

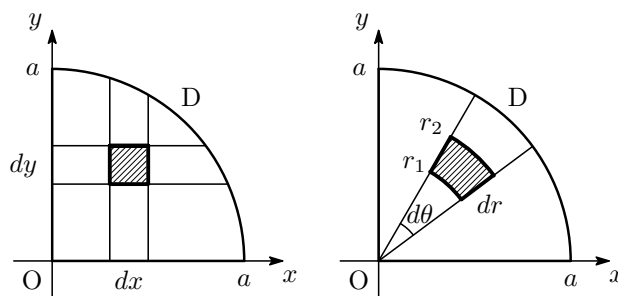


図 2.5 (左) 元の積分変数  $(x, y)$  を基にしたピース(斜線部)と(右)新しい積分変数  $(r, \theta)$  を基にしたピース(斜線部)。

積分変数  $(x, y)$  に対するピース (左図斜線部) の面積は  $dxdy$  であるのに対し、積分変数  $(r, \theta)$  に対するピース (右図斜線部) の面積は、半径  $r_1, r_2$ 、中心角  $d\theta$  の扇形を考えることで、

$$\frac{1}{2}r_2^2d\theta - \frac{1}{2}r_1^2d\theta = \underbrace{\frac{1}{2}(r_2 + r_1)}_{r_1, r_2 \text{の平均}} \underbrace{(r_2 - r_1)}_{dr} d\theta = \bar{r}drd\theta$$

となる。いま、積分変数を  $(r, \theta)$  とした場合、この扇形を底面とした (扇形) 柱を集めることで体積を求めることになるので、積分範囲が  $(r, \theta)$  を用いて  $D = \left\{ 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$  となることに注意すると、

$$\iint_D dxdy = \iint_D r drd\theta = \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} r drd\theta = \left( \int_0^a r dr \right) \times \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) = \frac{\pi a^2}{4}$$

となる。

(補足) 積分座標  $(x, y)$  を極座標  $(r, \theta)$  に変換した場合 (つまり、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ )

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r drd\theta$$

となるが、一般に任意の 2 次元変換  $x = g(r, \theta), y = h(r, \theta)$  に対して、

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_D f(g(r, \theta), h(r, \theta)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| drd\theta$$

と変形することができる。ここで、 $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right|$  は、ヤコビアン  $J$  と呼ばれ

$$J \equiv \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r}$$

で定義される。ヤコビアン  $J$  によって、元の積分変数によるピースの面積  $dxdy$  が、新しい積分変数によるピースの面積  $Jdrd\theta$  に変換されることを表している (実際、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  に対して、ヤコビアン  $J$  を計算すると、先に求めたように  $r$  となる)。

$$(2) x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ とおく。 (与式) } = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2 \sin \theta \cos \theta r drd\theta = \int_0^a r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin \theta \cos \theta}_{\frac{1}{2} \sin 2\theta} d\theta = \dots = \frac{a^4}{8}$$

$$(3) x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ とおく。 (与式) } = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cos \theta r drd\theta = \int_0^1 r^2 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \dots = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

## 演習 2.5

無限積分  $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  の値を  $I_x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ ,  $I_y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$  とし、 $I^2 = I_x \times I_y$  と考えることで求めよ (ヒント: 途中、積分変数を極座標  $(r, \theta)$  に変換せよ)。

## 【解答】

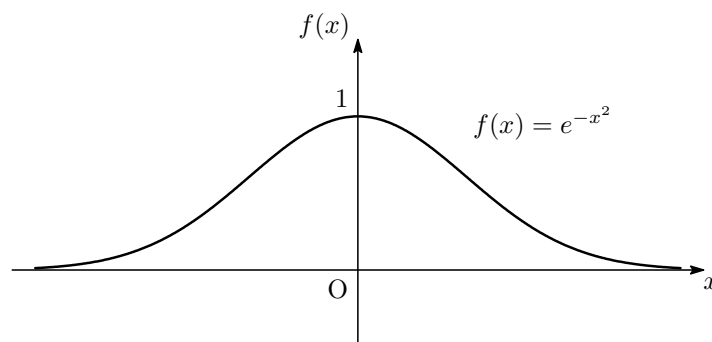
$$I^2 = I_x \times I_y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

ここで、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  とすると、 $x^2 + y^2 = r^2, dx dy = r dr d\theta$  であり、また、 $-\infty \leq x \leq \infty, -\infty \leq y \leq \infty$  (積分領域が  $xy$  平面全域) より、 $0 \leq r \leq R (R \rightarrow \infty), 0 \leq \theta \leq 2\pi$  なので (半径  $r$  は一旦  $R$  としておくことで積分計算をし、最終的に  $R \rightarrow \infty$  とする)、

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^R r e^{-r^2} dr \right] \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \left[ \theta \right]_0^{2\pi} \times \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R \right] \leftarrow \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right)' = r e^{-r^2} \text{ を利用} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ 2\pi \left[ \left( -\frac{1}{2} e^{-R^2} \right) - \left( -\frac{1}{2} e^0 \right) \right] \right] \\ &= 2\pi \times \left( 0 + \frac{1}{2} \right) \leftarrow \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R^2} = 0 \text{ を利用} \\ &= \pi \end{aligned}$$

となる。よって、 $I = \sqrt{\pi}$  である。

**補足**  $f(x) = e^{-x^2}$  のグラフは以下のようになり ( $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ )、 $f(x)$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積が  $\sqrt{\pi}$  となる。



$f(x)$  は、統計学で重要な正規分布 (ガウス分布)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

の基となる関数である ( $\mu$  は平均、 $\sigma$  は標準偏差 ( $\sigma^2$  は分散) を表す)。

## 2.3 三角関数の諸公式

(三角関数の基本関係)

$$(1) \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (2) \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad (3) \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

(加法定理)

$$(4) \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \quad (5) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \beta \sin \alpha$$

(2倍角の公式・3倍角の公式) ← 加法定理で  $\beta = \alpha$ 、または、 $\beta = 2\alpha$  とする

$$\left\{ \begin{array}{l} (6) \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ (7) \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (8) \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ (9) \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{array} \right.$$

(半角の公式) ←  $\cos$  の 2 倍角の公式で  $\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{2}$  として、式変形する

$$(10) \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad (11) \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

(積を和・差になおす公式) ← 加法定理を足し引きする

$$(12) \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$(13) \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$(14) \quad \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

(和・差を積になおす公式) ← 積を和・差になおす公式で  $\alpha + \beta = A$ ,  $\alpha - \beta = B$  とする

$$(15) \quad \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (16) \quad \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$(17) \quad \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad (18) \quad \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

(双曲線関数) 以下の  $e^x, e^{-x}$  を使った  $\sin x, \cos x$  もどきの関数で、 $\sin x, \cos x$  と似た性質が成り立つ。

$$(19) \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (20) \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

例えば、 $\cos 0 = 1, \sin 0 = 0, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$  と似た、 $\cosh 0 = 1, \sinh 0 = 0$  と

$$(21) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

が成り立つことは計算からすぐ分かる。微分に関して、

$$(22) \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \quad (23) \quad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad (24) \quad \frac{d^2}{dx^2} \cosh x = \cosh x \quad (25) \quad \frac{d^2}{dx^2} \sinh x = \sinh x$$

という性質が成り立つ (計算して確認せよ)。 $\sin x, \cos x$  のときのようにマイナスがつかず、1 回微分で他方の関数に、2 回微分で元の関数に戻る。

## 第3章 線型代数

### 3.1 行列とは？

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 7 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, (a \ b \ c), \dots$$

のように、数字や文字を長形状に並べてカッコでくくったものを『行列 (matrix)』といい、行列の中にある1つ1つの数字 (あるいは文字) のことを『行列の成分』という。下図にあるように、行列の横の並びを『行 (row)』といい、上から順に、第1行、第2行、…とよぶ。また、行列の縦の並びを『列 (column)』といい、左から順に、第1列、第2列、…とよぶ。さらに、行列の第*i*行、第*j*列にある成分のことを『(*i, j*) 成分』とよぶ。

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} & \leftarrow & \text{第1行} \\ & \leftarrow & \text{第2行} \\ & \leftarrow & \text{第3行} \end{array}$$
  
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{第} & \text{第} & \text{第} \\ 1 & 2 & 3 \\ \text{列} & \text{列} & \text{列} \end{array}$$

*m* 個の『行』と *n* 個の『列』からなる行列のことを (*m* と *n* は同じでなくてよい)、『*m* 行 *n* 列の行列』または、『*m* × *n* 行列』とよぶ。例えば、上にあげた行列は、3行3列からなるので「3 × 3 行列」である。また、このように行と列の数が同じである「*n* × *n* 行列」のことを特別に『*n* 次の正方行列』とよぶ。

1行 *n* 列からなる「1 × *n* 行列」のことを特別に『*n* 次の行ベクトル』とよび、具体的に以下のようなものがある。

$$(1 \ -3), (2 \ 4 \ 5), (1 \ -1 \ 1 \ -1), \dots$$

また、 $n$  行 1 列からなる「 $n \times 1$  行列」のことを特別に『 $n$  次の列ベクトル』とよび、具体的に以下のようなものがある。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

### 例題 3.1

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ。

- (1) この行列は何行何列の行列か？
- (2) この行列の (1,3) 成分、(2,2) 成分を求めよ。

【解答】(1) 2 行 3 列 (2) (1,3) 成分 : 5、(2,2) 成分 : 4

## 3.2 行列の相等

2つの行列  $A, B$  が、ともに  $m \times n$  行列であるとき、 $A$  と  $B$  は同じ『型』であるといいます。さらに、2つの行列  $A$  と  $B$  の成分が全て等しいとき、2つの行列  $A, B$  は『等しい』といい、 $A = B$  と表す(一つでも成分が異なれば  $A = B$  ではない)。

### 例題 3.2

以下の等式が成り立つとき、 $x, y, z$  の値を求めよ。

$$\begin{pmatrix} z+x & x^2 \\ y+z & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$$

【解答】各成分がすべて等しくなればよい。

$$\begin{cases} z+x=4 \\ x^2=4 \\ y+z=9 \\ xy=-6 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \\ z=6 \end{cases}$$

## 3.3 行列の計算 1 ~ 足し算 ~

$m \times n$  行列  $A, B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

に対して ( $A, B$  の型は等しい)、その和  $A + B$  は次のように考える。

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + a_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

行列  $A, B$  の同じ成分同士を単純に足し算すればよいので、次のような、交換法則、結合法則、

$$\text{交換法則} \quad A + B = B + A$$

$$\text{結合法則} \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

が成り立つのは容易に分かると思う。行列  $A, B$  が異なる型の場合は「行列の和」をそもそも考えないので注意。

## 例題 3.3

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 6 & 0 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -6 \\ -7 & -1 & 3 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

がある。  $A + B, B + C, A + C$  について、和が計算できればそれを求めよ。

【解答】  $A + B$  は計算できるが、  $B + C, A + C$  は型が異なるので計算できない。

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 6 & 0 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 & -6 \\ -7 & -1 & 3 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 8 \\ 15 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

## 3.4 行列の計算 2 ~引き算~

$m \times n$  行列  $A, B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

に対して ( $A, B$  の型は等しい)、その差  $A - B$  は次のように考える。

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

行列の足し算のときと同じように、同じ成分同士について引き算すればよい。

とくに、行列の差  $A - A$  は、全ての成分が 0 になるが、このように全ての成分が 0 である行列のことを『零行列』とよび  $O$  と表す。次にあげる行列はいずれも『零行列』である。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

## 例題 3.4

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

がある。  $A - B, B - C, A - C$  について、差が計算できればそれを求めよ。

【解答】  $A - C$  は計算できるが、  $A - B, B - C$  は型が異なるので計算できない。

$$A - C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$$

## 3.5 行列の計算 3 ~ 実数倍 ~

$m \times n$  行列  $A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

に対して、その実数倍  $kA$  ( $k$  は実数) を次のように考える。

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

これは、行列  $A$  の全成分を一律に  $k$  倍したことに他ならず、一般に次のことが成り立つのは容易に分かると思う。

$$1A = A, \quad 0A = O, \quad kO = O$$

さらには、実数  $k, l$  に対して、次のような計算法則も成り立つ。

$$(k+l)A = kA + lA, \quad k(A+B) = kA + kB$$

## 例題 3.5

行列  $A, B, C$  が、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -7 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

であるとき、 $3A - B + 2C$  を計算せよ。

【解答】

$$3A - B + 2C = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -3 \\ -9 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -7 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -8 & 6 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 0 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

### 3.6 行列の計算 4 ~ 掛け算 ~

2 次の行ベクトルと列ベクトルの積、および、3 次の行ベクトルと列ベクトルの積は次のように定義される。これが行列の掛け算の基本となる (いわゆる、高校数学で習った内積がこれである)。

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

$1 \times 2$  行列と  $2 \times 1$  行列の積、および、 $1 \times 3$  行列と  $3 \times 1$  行列の積はともに  $1 \times 1$  行列 (つまり、スカラー) となる<sup>1</sup>。

2 次の正方行列  $A, B$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

の積  $AB$  については、先のベクトル積の定義を利用するために、以下のように「しきり」を入れて考えると分かりやすい。

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left( \begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline y_1 & y_2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}$$

この場合、 $2 \times 2$  行列と  $2 \times 2$  行列の積が  $2 \times 2$  行列になる。計算により各成分が混ざったが、第 1(2) 行にあった  $a, b (c, d)$  は計算後も第 1(2) 行に、第 1(2) 列にあった  $x_1, y_1 (x_2, y_2)$  は計算後も第 1(2) 列にある (つまり「しきり」を越えない)。

また、3 次の正方行列  $A, B$  の積についても同様に計算でき、 $3 \times 3$  行列と  $3 \times 3$  行列の積が  $3 \times 3$  行列になる。

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \left( \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 + cz_1 & ax_2 + by_2 + cz_2 & ax_3 + by_3 + cz_3 \\ dx_1 + ey_1 + fz_1 & dx_2 + ey_2 + fz_2 & dx_3 + ey_3 + fz_3 \\ gx_1 + hy_1 + iz_1 & gx_2 + hy_2 + iz_2 & gx_3 + hy_3 + iz_3 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{各成分は「しきり」を越えない}$$

<sup>1</sup>これらは、平面ベクトル  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  に対する内積

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

および、空間ベクトル  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  に対する内積

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

を考えていることに相当する。

行列の積に関して注意しなければならない性質がある。数字の掛け算では交換法則  $ab = ba$  がつねに成り立ったが、行列の掛け算では交換法則  $AB = BA$  がつねに成り立つとは限らない。実際に行列の積  $BA$  を計算するとわかる。

$$BA = \left( \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} ax_1 + cx_2 & bx_1 + dx_2 \\ ay_1 + cy_2 & by_1 + dy_2 \end{array} \right)$$

行列  $AB$  と  $BA$  の各成分は明らかに異なる（「しきりを越えない」ことを踏まえれば容易に分かるだろう）。もちろん、4つの成分が偶然一致することはあるが、勘違いしやすいので要注意。積の交換法則が成り立たないため、行列を掛ける際、「行列  $X$  を前から掛ける」、「行列  $X$  を後ろから掛ける」といった表現をする。行列  $B$  に行列  $A$  を前から掛けたものが  $AB$ 、行列  $A$  を後ろから掛けたものが  $BA$  である。積の交換法則  $AB = BA$  が例外的につねに成り立つ例としては、

$$A = \left( \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

というのがある。具体的に計算してみると確かに成り立っているのがわかる。

$$AB = \left( \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right), \quad BA = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right)$$

このように、左上から右下の対角線上の成分（『対角成分』と呼ぶ）が 1 で、それ以外の成分が 0 である正方行列を『単位行列 (Identity matrix)』とよび、 $E$  (あるいは  $I$ ) で表す。

$$E = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \dots$$

直前の  $AB, BA$  の計算からも分かるように、単位行列  $E$  は、

「ある行列  $X$  の前から  $E$  をかけても ( $EX$ )、後ろから  $E$  をかけても ( $XE$ )、

行列 ( $EX$  および  $XE$ ) の成分は  $X$  の成分と変わらない」（つまり、 $EX = XE = X$ ）

という性質がある。数字で言えば、ある数  $x$  に「1」をかけていることに相当する。単位行列の大きさを小さくしていき、1 次の単位行列を考えれば、それが数字の 1 に他ならないことが分かる。

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow 1$$

## 例題 3.6

次の行列の積を求めよ。

(1) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

【解答】(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

## 例題 3.7

行列  $A, B$  の積の交換法則  $AB = BA$  は一般に成り立たないことが知られているが、例外的に次の行列  $A, B$  では交換法則は成り立つ。これを確かめよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(補足) 交換法則が成り立つとき、 $A, B$  は『交換可能である』という。

【解答】以下のように、確かに例外的に交換法則  $AB = BA$  が成り立つ。

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 14 & 3 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 14 & 3 \end{pmatrix}$$

行列の足し算・引き算は行列の型が同じでないと計算できなかったが、行列の掛け算は少し条件が緩くなっており、2つの行列  $A(m \times n$  行列)、 $B(s \times t$  行列) に対して、 $n = s$  が成り立っていればそれらの積  $AB$  が計算できる(積  $BA$  については  $n = s$  ではなく、 $m = t$  が成り立たないと計算できない)。積  $AB$  は、 $m \times t$  行列となる。

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{2 \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x + 4y \\ 5x + 6y \end{pmatrix}}_{2 \times 1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{2 \times 1} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} = \text{(計算不可能)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 + 3z_1 & x_2 + 2y_2 + 3z_2 \\ 4x_1 + 5y_1 + 6z_1 & 4x_2 + 5y_2 + 6z_2 \\ 7x_1 + 8y_1 + 9z_1 & 7x_2 + 8y_2 + 9z_2 \end{pmatrix}}_{3 \times 2}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{3 \times 1} \underbrace{\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}}_{1 \times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{pmatrix}}_{3 \times 3}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} = \text{(計算不可能)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}}_{2 \times 4} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 & x_2 + 2y_2 & x_3 + 2y_3 & x_4 + 2y_4 \\ 3x_1 + 4y_1 & 3x_2 + 4y_2 & 3x_3 + 4y_3 & 3x_4 + 4y_4 \\ 5x_1 + 6y_1 & 5x_2 + 6y_2 & 5x_3 + 6y_3 & 5x_4 + 6y_4 \end{pmatrix}}_{3 \times 4}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}}_{1 \times 4} \underbrace{\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}}_{1 \times 3} = \text{(計算不可能)}$$

## 例題 3.8

行列  $A, B, C$ 

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

がある。これらの行列の 2 つの積 (重複も含む) を考えるとき、計算可能な行列の積を全て計算せよ。

【解答】行列  $A, B, C$  はそれぞれ  $2 \times 2, 2 \times 1, 3 \times 2$  なので、計算可能な行列の積は、 $AA(=A^2), AB, CA, CB$  の 3 つ。

$$AA = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

最後に、行列の掛け算の性質をあげておく。

行列  $A, B, C$  に対して、次の性質が成り立つ (もちろん、積が計算可能な場合に成り立つ)。

$$\text{結合法則} : (AB)C = A(BC) = ABC$$

$$\text{分配法則 1} : (A + B)C = AC + BC$$

$$\text{分配法則 2} : C(A + B) = CA + CB$$

(補足 1) : 結合法則は「積が計算可能なら」行列の積  $ABC$  はどこからかけても良い」ということを表す。

(補足 2) : 分配法則 1 と分配法則 2 は「数字の掛け算の世界」では同じことを表すが、行列の掛け算の世界では必ずしも同じとは言えない。

また、正方行列  $A$  を  $n$  個掛け合わせた積

$$\underbrace{AAA \cdots A}_{n \text{ 個}}$$

を  $A^n$  と表し、『 $A$  の  $n$  乗』という。例えば、単位行列  $E$  は、 $E^n = E$  である。

## 例題 3.9

次の各問に答えよ。

- (1) 零行列でない 2 次の正方行列  $A, B$  に対して、 $AB = O$  が成り立つことはあるか？あればその例をあげよ。
- (2) 型の同じ行列  $A, B$  に対して、一般に、 $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  は成り立つか？
- (3)  $E$  が単位行列のとき、 $(X - E)(X + E) = O$  を変形すると、 $X^2 = E$  となるか？

【解答】(1) ある。例えば、次のようなものがある。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

(2) 成り立たない。「前から掛ける」「後ろから掛ける」の区別が必要なので、 $(A + B)(A + B)$  は下のようになる。

$$(A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

(3) (2) の結果をふまえると、

$$(X - E)(X + E) = X^2 + XE - EX - E^2 = O$$

となる。ここで、 $XE = X, EX = X, E^2 = E$  であることに注意すると、

$$(X - E)(X + E) = X^2 + X - X - E = X^2 - E = O$$

なので、 $E$  が単位行列で、 $(X - E)(X + E) = O$  であれば、 $X^2 = E$  となる。

## 例題 3.10

行列  $A, B, C$  について、 $A^2, A^3$  を求めよ。また  $(AB)C$  と  $A(BC)$  が等しいことを確認せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 【解答】

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^2 & 0 \\ 0 & (-3)^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 4^2 & 0 \\ 0 & (-3)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^3 & 0 \\ 0 & (-3)^3 \end{pmatrix}$$

(補足) 一般に、対角行列  $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \end{pmatrix}$  に対して、 $A^n = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$  となる。

$$\begin{aligned} (AB)C &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 28 \\ 15 & -12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(BC) &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 28 \\ 15 & -12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 3.7 ケーリー・ハミルトンの定理

例題 3.11

任意の 2 次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対して、次の関係式が成り立つことを示せ。

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

これを、『ケーリー・ハミルトンの定理』という。

【解答】

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

であり、さらに、

$$(a + d)A = \begin{pmatrix} a^2 + ad & b(a + d) \\ c(a + d) & ad + d^2 \end{pmatrix}, \quad (ad - bc)E = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

なので、

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

となる。

(別解)  $A^2 - (a + d)A + adE = (A - aE)(A - dE)$  あることに注目すると、

$$\begin{aligned} A^2 - (a + d)A + adE &= (A - aE)(A - dE) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - d & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} = bcE \end{aligned}$$

となるので、右辺の  $bcE$  を左辺に移項することで、 $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$  となる。

## 例題 3.12

行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$  に対して、 $A^{100}$  を求めよ。

【解答】 さすがに  $A$  を 100 回も掛けるのは大変なので、ケーリー・ハミルトンの定理を使い次数を下げる(これがケーリー・ハミルトンの定理を使う利点)。ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^2 - (3 - 2)A + (-6 + 6)E = O \quad A^2 = A$$

となるので、この性質を使うことで、 $A^{100} = (A^2)^{50} = A^{50}$  というように「次数を下げる」ことができる。同様に繰り返すことで以下のようになる。

$$\begin{aligned} A^{100} &= A^{50} \\ &= A^{25} \quad (A^{50} = (A^2)^{25} \text{なので}) \\ &= AA^{24} \\ &= AA^{12} \\ &= AA^6 \\ &= AA^3 \\ &= A^4 \\ &= A^2 \\ &= A \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(別解) この問題の場合、もし、ケーリー・ハミルトンの定理を思い出せなくても、 $A^{100}$  を計算してみようと試しに  $A^2$  を計算したら  $A^2 = A$  に気づけるだろう。

## 例題 3.13

行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  のとき、 $A^2 - 3A + E, A^3, A^4 + A^3 - A^2 - 3E$  を求めよ。

【解答】 前問と違って直接計算することができそうだが、本問でもケーリー・ハミルトンの定理を使うとよい。ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^2 - (1-2)A + (-2+3)E = O \iff A^2 + A + E = O \quad A^2 = -A - E$$

となるので、これを利用して 次数を下げる。

まずは、 $A^2 - 3A + E$  であるが、

$$\underbrace{A^2}_{-A-E} - 3A + E = (-A - E) - 3A + E = -4A = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

というように、あっさり値を求めることができる。

$A^3$  についても、適宜、 $A^2 = -A - E$  を使うとよい。

$$A^3 = AA^2 = A(-A - E) = -A^2 - A = -(-A - E) - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^4 + A^3 - A^2 - 3E$  については、 $A^3 = E$  となることも利用して、同様に考える。

$$\begin{aligned} A^4 + A^3 - A^2 - 3E &= AA^3 + A^3 - A^2 - 3E \\ &= A + E - A^2 - 3E \quad (A^3 = E \text{ を利用}) \\ &= -A^2 + A - 2E \\ &= -(-A - E) + A - 2E \quad (A^2 = -A - E \text{ を利用}) \\ &= 2A - E \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 3.8 行列の基本操作 ~ 掃き出し法 ~

## 例題 3.14

つぎの各問に答えよ。

- (1) 2 次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の前から 2 次の正方行列  $X_b, X_c, X_d$  をそれぞれ掛けたところ、得られた行列  $B(=X_bA), C(=X_cA), D(=X_dA)$  は以下のようになったという。このとき、 $X_b, X_c, X_d$  を求めよ。

$$B = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a & b \\ a-c & b-d \end{pmatrix}$$

- (2) 3 次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  の前から 3 次の正方行列  $X_e, X_f$  を掛けたところ、得られた行列  $E(=X_eA), F(=X_fA)$  は以下のようになったという。このとき、 $X_e, X_f$  を求めよ。

$$E = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \\ 3a-2g & 3b-2h & 3c-2i \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} a+5d & b+5e & c+5f \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \\ 4a-2d+g & 4b-2e+h & 4c-2f+i \end{pmatrix}$$

【解答】 いろいろ試行錯誤するとよい。行列  $X$  を前から掛けることで、元の行列  $A$  の各行を定数倍したり、入れ替えたり、足し引きしたりできることが分かる (これを行列の行基本操作という)。

- (1) 行列  $X_b, X_c, X_d$  は以下になる。

$$X_b = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad X_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (2) 行列  $X_e, X_f$  は以下になる。

$$X_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad X_f = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(補足) 求めた行列  $X$  の第  $n$  列の各成分が、行列  $A$  の第  $n$  行を何倍するかの倍率を表していることにも注目。例えば、 $X_e$  の第 1 列の各成分 1, 2, 3 により、1, 2, 3 倍された  $A$  の第 1 行  $(a \ b \ c)$  が  $E$  の第 1, 2, 3 行目に来ている。

さて、この基本操作を使って2元1次連立方程式 
$$\begin{cases} 3x + y = 5 \cdots \spadesuit \\ -x + 2y = 3 \cdots \clubsuit \end{cases}$$
 を解くこと考える。まずは、中学校で習った

代入法(一方の式を  $x=(y$  の式) という形にして他方に代入する)と消去法のうち消去法を使って解いてみる。 $2 \times \spadesuit - \clubsuit$  より(ステップ1)、 $7x = 7$ なので、両辺を  $\frac{1}{7}$  倍して(ステップ2)、 $x = 1$ 。最後に(消去法なので  $x = 1$  を  $\spadesuit$  に代入するの

ではなく)、 $\spadesuit$  と  $x = 1$  を3倍したものの各辺同士を引き算して(ステップ3)、 $y = 1$ となる。次に、同じ手順を(行)基本

操作(前から行列をかける方法)で行ってみる。連立方程式は行列を使うと 
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdots \diamond$$
 と表

せるが、両辺に前からいろいろな行列を掛けていき、左辺先頭の行列を 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 や 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 にすることが、連

立方程式を解く(つまり、 $x = \quad, y = \quad$  の形にする)ことに相当する。回りくどいが、実際に  $\diamond$  の両辺に前から行列を

掛けていくと以下ようになる。

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{1行目の役目}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{2行目の役目}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{1行目の役目}} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{2行目の役目}} \leftarrow \begin{array}{l} \spadesuit \text{はそのまま、} 2 \times \spadesuit - \clubsuit \text{をした} \\ \text{1行目の役目} \qquad \qquad \qquad \text{2行目の役目} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}}_{\text{1行目の役目}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{2行目の役目}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}}_{\text{1行目の役目}} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\text{2行目の役目}} \leftarrow \begin{array}{l} \spadesuit \text{はそのまま、} 7x = 7 \text{の両辺を} \frac{1}{7} \text{倍} \\ \text{1行目の役目} \qquad \qquad \qquad \text{2行目の役目} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{1行目の役目}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{2行目の役目}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{1行目の役目}} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{2行目の役目}} \leftarrow \begin{array}{l} \spadesuit \text{と } 3x = 9 \text{の各辺引き算、} x = 1 \text{はそのまま} \\ \text{1行目の役目} \qquad \qquad \qquad \text{2行目の役目} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

このままだでも  $y = 2, x = 1$  と解が求まったことになるが、左辺の先頭の行列の1行目と2行目を入れ替えるために、さ

らに両辺に前から 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 をかけることで、 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
 となる。

上のような解き方は単に面倒なだけで現実的ではない。そもそも、各ステップで行いたい操作はすでに分かっている、前から掛ける行列が具体的に何であるかは重要ではなく、掛けられたあとの行列 (式の係数) のみが重要になるので、以下のように簡略化することができる。これを掃き出し法という。

(基本操作)	$x$	$y$	右辺
1st row ( $r_1$ )	3	1	5
2nd row ( $r_2$ )	-1	2	3
$2r_1 - r_2$	7	0	7
$\frac{1}{7} \times r_2$	1	0	1
$r_1 - 3r_2$	0	1	2
$r_1 \longleftrightarrow r_2$	1	0	1
$r_2 \longleftrightarrow r_1$	0	1	2

これは 連立方程式を消去法で解く際の係数のみを抜き出したものと本質的に同じであり、どんな基本操作をして良いか (定数倍、入れ替え、足し引き) が分かっているれば、前からどんな行列を掛けたかを気にせず解を求めることができる。とはいえ、前から行列を掛けて行列の変形をする基本操作が基になっていることは頭の片隅に入れておいてほしい。

なお、上の連立方程式を  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  を用いて行列表記した際の  $A$  を『係数行列』、左辺と右辺に同時に同じ基本操作をするために便宜上  $A$  の右に  $b$  を並べたものを『拡大係数行列』 ( $[A|b]$  や  $[A, b]$  等と書く) とよぶ。連立方程式を掃き出し法で解く際は、上の例のように拡大係数行列 (1st/2nd row とある部分) から始める。

この他、逆行列 (第 3.10 章–第 3.12 章) を求める際にも掃き出し法が利用できる (例題 3.17、例題 3.20 参照)。

## 例題 3.15

次の連立方程式を掃き出し法により解け。

$$(1) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 5y = 6 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y - z = 5 \\ x - 2y + 2z = 2 \\ 2x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

【解答】 途中経過は人により異なるので、最終的な答えが合っていれば良い。

(1)

(基本操作)	$x$	$y$	右辺
$r_1$	2	-1	1
$r_2$	-1	5	6
	2	-1	1
$r_1 + 2r_2$	0	9	13
	2	-1	1
$\frac{1}{9} \times r_2$	0	1	$\frac{13}{9}$
$r_1 + r_2$	2	0	$\frac{22}{9}$
	0	1	$\frac{13}{9}$
$\frac{1}{2} \times r_1$	1	0	$\frac{11}{9}$
	0	1	$\frac{13}{9}$

よって、ただ一つの解、

$$\begin{cases} x = \frac{11}{9} \\ y = \frac{13}{9} \end{cases}$$

をもつ。

(2)

(基本操作)	$x$	$y$	$z$	右辺
$r_1$	1	1	-1	5
$r_2$	1	-2	2	2
$r_3$	2	-1	2	-1
	1	1	-1	5
$r_1 - r_2$	0	3	-3	3
$2r_1 - r_3$	0	3	-4	11
	1	1	-1	5
$\frac{1}{3}r_2$	0	1	-1	1
$r_2 - r_3$	0	0	1	-8
$r_1 - r_2$	1	0	0	4
$r_2 + r_3$	0	1	0	-7
	0	0	1	-8

よって、ただ一つの解、

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -7 \\ z = -8 \end{cases}$$

をもつ。

### 3.9 特徴的な正方行列の呼び名

これまでもいろいろな行列の呼び名が出てきたが、その他の特徴的な正方行列の呼び名をあげておく。

対角行列 (diagonal matrix): 対角成分(左上から右下の対角線上の成分) 以外 (『非対角成分』と呼ぶ) が全て 0 の正方行列を『対角行列』とよぶ。なお、右上から左下の対角線上の成分は、対角成分とは呼ばない。

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \dots$$

三角行列 (triangular matrix): 正方行列の右上と左下にある非対角成分のうちの片方の全ての成分が 0 の行列を『三角行列』とよぶ。特に、対角成分の左「下」の全成分が 0 の場合を『上三角行列』、対角成分の右「上」の全成分が 0 の場合を『下三角行列』とよぶ。三角行列には様々な性質があるため、数値計算をする際に非常に重要となる行列である。

$$\text{上三角行列 (Upper triangular matrix): } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \dots$$

$$\text{下三角行列 (Lower triangular matrix): } \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}, \dots$$

転置行列 (transposed matrix): 正方行列の右上と左下の非対角成分の各要素を対角成分を基準に入れ替えたもの(もとの行(列)が列(行)になる)を『転置行列』とよび、 $A^T$ 、または、 ${}^tA$  と書く。 $(AB)^T = B^T A^T$  が成り立つ。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ のとき、 } A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ のとき、 } A^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

対称行列 (symmetric matrix): 転置行列がもとの行列と同じである(つまり、 $A = A^T$ )ものを『対称行列』とよぶ。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix}, \dots$$

### 3.10 逆行列 1 ~ 逆行列とは? ~

正方行列  $A$  に対して、正方行列  $X$  が、

$$AX = E \quad \text{または} \quad XA = E$$

を満たすとき (後述するようにどちらか一方だけ成り立てば良い)、正方行列  $X$  を  $A$  の『逆行列 (inverse matrix)』といい  $A^{-1}$  で表す (つまり、 $X = A^{-1}$ )。このことから、正方行列  $A$  とその逆行列  $A^{-1}$  の間には、

$$AA^{-1} = E \quad \text{または} \quad A^{-1}A = E$$

という関係式が成り立つことが分かる。今までの「数」の計算で言えば、

$$a \times a^{-1} = 1 \quad \text{または} \quad a^{-1} \times a = 1$$

に相当する。つまり、 $ax = 1$  あるいは  $xa = 1$  をみたす数  $x$  は  $x = a^{-1}$  で、この数  $a^{-1}$  のことを数  $a$  の「逆数」とよぶので、 $AX = E$  あるいは  $XA = E$  をみたす行列  $X (= A^{-1})$  についても同様に、『逆行列』とよぶ。

ただし、 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  のとき、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

となるわけではないので注意 (実際の  $A^{-1}$  は次節で)。実際に  $AA^{-1}$ ,  $A^{-1}A$  を計算してみれば逆行列の条件式を満たさないことはすぐに分かる。

一般に、逆行列の定義としては、 $A^{-1}A = E$  あるいは  $AA^{-1} = E$  のいずれかで十分である。これは、例えば  $A^{-1}A = E$  が成り立つときに、 $AX = E$  となる  $X$  が何かを考えればよく、 $AX = E$  の両辺に前から  $A^{-1}$  を掛けることで  $X = A^{-1}$ 、つまり、 $AA^{-1} = E$  が示せる (逆も同様に、 $AA^{-1} = E$  が成り立つときに  $XA = E$  となる  $X$  が何かを考えればよい)。

2つの行列の積は、掛ける順番に左右される<sup>2</sup>ので、正方行列でない限り逆行列は存在しないことも容易にわかる (つまり、積が計算できないので、そもそも  $AX = XA = E$  が成り立つはずがない)。また、逆行列が存在するとしても、ただ1つしか存在しない。さらに、逆行列が存在する正方行列を『正則行列 (non-singular (regular) matrix)』とよび、逆行列が存在しない正方行列を『特異行列 (singular matrix)』とよぶ。

---

<sup>2</sup> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  であれば、積  $AB$  は計算可能だが、積  $BA$  は計算不可能。

逆行列には一般に次のような性質があり、ちょっとした計算で証明することができる。

同じ型の正方行列  $A, B$  が逆行列をもつならば以下の関係が成り立つ。

- (1)  $(A^{-1})^{-1} = A$  (日本語訳:  $A^{-1}$  の逆行列は  $A$ )
- (2)  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$  (日本語訳:  $kA$  の逆行列は  $\frac{1}{k}A^{-1}$ )
- (3)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  (日本語訳:  $AB$  の逆行列は  $B$  の逆行列と  $A$  の逆行列の積)
- (4)  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$  (日本語訳:  $A$  の転置の逆行列は  $A$  の逆行列の転置)

【証明】(1) 逆行列の定義式  $XX^{-1} = E$  (もちろん  $X^{-1}X = E$  でもよい) で、 $X = A^{-1}$  とすることで示せる。

$$A^{-1}(A^{-1})^{-1} = E$$

$$\underbrace{AA^{-1}}_E (A^{-1})^{-1} = AE \quad \leftarrow \text{両辺に前から } A \text{ を掛けた}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(2) 逆行列の定義式  $XX^{-1} = E$  (もちろん  $X^{-1}X = E$  でもよい) で、 $X = kA$  とすることで示せる。

$$(kA)(kA)^{-1} = E$$

$$A(kA)^{-1} = \frac{1}{k}E \quad \leftarrow k \text{ は行列ではなく定数}$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}E \quad \leftarrow \text{両辺に前から } A^{-1} \text{ を掛けた}$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

(3) 逆行列の定義式  $X^{-1}X = E$  (もちろん  $XX^{-1} = E$  でもよい) で、 $X = AB$  とすることで示せる。

$$(AB)^{-1}(AB) = E$$

$$(AB)^{-1}A = EB^{-1} \quad \leftarrow \text{両辺に後ろから } B^{-1} \text{ を掛けた}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \leftarrow \text{両辺に後ろから } A^{-1} \text{ を掛けた}$$

(4) 逆行列の定義式  $AA^{-1} = E$  の両辺の転置をとると、 $(A^{-1})^T A^T = E$  となる (転置に関する公式  $(AB)^T = B^T A^T$ )。

また、 $A^{-1}A = E$  の両辺の転置をとると、 $A^T (A^{-1})^T = E$  となる。簡単のため、この2式で、 $X = (A^{-1})^T, Y = A^T$  とすると、 $XY = YX = E$  なので、 $X$  と  $Y$  は互いに逆行列の関係にあるとわかる。よって、 $Y (= A^T)$  の逆行列が  $X (= (A^{-1})^T)$  なので、 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$  である。

## 例題 3.16

$A, B, P$  は同じ型の正方行列とし、 $P$  は逆行列をもつとする。 $n$  を自然数とすると、次のことが成り立つことを証明せよ。

- (1)  $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$   
 (2)  $P^{-1}AP = B$  とおくと、 $A^n = PB^nP^{-1}$

【解答】(1) 逆行列の定義  $XX^{-1} = E$  より、

$$(P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = (P^{-1}A \underbrace{PP^{-1}}_E AP) = P^{-1}A^2P$$

となることをふまえて、これを繰り返すことで、

$$(P^{-1}AP)^n = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)}_n = P^{-1}A^nP$$

となる。

(2)  $P^{-1}AP = B$  の両辺に前から  $P$ 、後ろから  $P^{-1}$  を掛けることで

$$\begin{aligned} \underbrace{PP^{-1}}_E A \underbrace{PP^{-1}}_E &= PBP^{-1} \\ A &= PBP^{-1} \end{aligned}$$

となるので、(1) と同様に逆行列の定義  $X^{-1}X = E$  を使うことで、

$$A^n = \underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1}) \cdots (PBP^{-1})(PBP^{-1})}_n = PB^nP^{-1}$$

となる。

(別解) (1) の左辺に  $B = P^{-1}AP$  を代入し、両辺に前から  $P$ 、後ろから  $P^{-1}$  を掛けるとよい。

$$\begin{aligned} B^n &= P^{-1}A^nP \\ PB^nP^{-1} &= \underbrace{PP^{-1}}_E A^n \underbrace{PP^{-1}}_E \\ A^n &= PB^nP^{-1} \end{aligned}$$

### 3.11 逆行列 2 ~ 2 次正方行列の逆行列 ~

気象庁で日々行われている天気予報では、およそ 10 万次 (あるいはそれ以上の回数) の逆行列をスーパーコンピュータで求める必要がある。逆行列は次数が高いほど求めるのが大変になるが、2 次正方行列の逆行列は次のように非常に簡単な形で表される。

2 次正方行列の逆行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ において、}$$

(1)  $ad - bc \neq 0$  ならば (必要十分条件)、 $A^{-1}$  がただ 1 つ存在して

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(2)  $ad - bc = 0$  ならば、 $A^{-1}$  は存在しない。

$A^{-1}$  の式は、実は 2 元 1 次連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = s & \cdots \spadesuit \\ cx + dy = t & \cdots \clubsuit \end{cases}$$

からきている。

まず、行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  および、ベクトル  $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$  を用いて、この連立方程式を  $Ax = b$  と書き直し、「行列的」に解くことを考える。逆行列  $A^{-1}$  が存在する (つまり、 $ad - bc \neq 0$ ) として、この式の両辺に前から  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  をかけ、逆行列の性質の 1 つ  $A^{-1}A = E$  を使うことで

$$Ax = b \iff \underbrace{A^{-1}A}_E x = A^{-1}b \iff x = A^{-1}b$$

というように一瞬で解けたことになる。

一方、行列を使わずにこの 2 元 1 次連立方程式を解くと、 $\spadesuit \times d - \clubsuit \times b$  より

$$\begin{array}{rcl} adx & + & bdy = sd \\ -) & & bcx + bdy = bt \\ \hline (ad - bc)x & & = sd - bt \end{array}$$

となることから、 $ad - bc \neq 0$  であれば、

$$\begin{cases} x = \frac{ds - bt}{ad - bc} \\ y = \frac{-cs + at}{ad - bc} \end{cases}$$

とただ 1 つに求まる。この解を行列で書くと、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \iff \boldsymbol{x} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \boldsymbol{b}$$

となるので、行列的に求めた解  $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$  と比較すると、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

であるとわかる。念のため、この  $A^{-1}$  が逆行列のもう一方の定義式  $AA^{-1} = E$  も満たすか確認するために ( $A^{-1}A = E$  は行列的に解く際にすでに使った)、求めた  $A^{-1}$  に対して、実際に  $AA^{-1}$  を計算すると、

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = E$$

となる。よって、 $AA^{-1} = E$  も満たされており、確かに  $A^{-1}$  が逆行列だとわかる。

(補足) 先に触れたように、逆行列であることを確認するには (逆行列の定義は)、 $A^{-1}A = E$ 、あるいは、 $AA^{-1} = E$  のいずれかで十分であるが、ここではもう一つの定義も満たしていることを一応確認した。

以上のように、 $A^{-1}$  を求めることは連立方程式を解くことに相当しており、2 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の逆行列が存在するなら (つまり、連立方程式が ただ 1 つの解をもつ なら)、

$$\Delta = ad - bc \neq 0$$

でなければならず、逆に  $\Delta = 0$  であれば、( $A^{-1}$  が表せないので) 逆行列をもたない (連立方程式がただ 1 つの解を持たない<sup>3)</sup>) ということになる (必要十分条件)。逆行列 (あるいはただ 1 つの解) を持つかどうかの判断基準となる  $ad - bc$  のことを、行列  $A$  の『行列式』といい、 $\det A, |A|, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  などと表す。行列式は、行列ではなく、スカラー (つまり、ある 1 つの数字) なので注意。行列式は正方行列に対して定義される。3 次以上の正方行列の行列式や行列式の性質については、第 3.12 節や補充プリントでふれる。

<sup>3</sup>解なし (2 直線が平行)、あるいは、無限の解をもつ (2 直線が一致)

また、前出の連立方程式  $Ax = b$  (♠, ♣) の解は、以下のように行列式で表すことができる (分子を計算して確認せよ)。

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}}_b \iff \begin{cases} x = \frac{ds - bt}{ad - bc} \\ y = \frac{-cs + at}{ad - bc} \end{cases} \iff x = \frac{\begin{vmatrix} \underline{s} & b \\ \underline{t} & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & \underline{s} \\ c & \underline{t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

これをクラメルの公式といい、3元以上の1元連立方程式でも成り立つ。 $x, y$  の分母は行列  $A$  の行列式、 $x$  の分子は行列  $A$  の第1列を  $b$  に置き換えた行列の行列式、 $y$  の分子は行列  $A$  の第2列を  $b$  に置き換えた行列の行列式となっている。

< クラメル公式 >

$n$  元連立1次方程式

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_b \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

の解は、 $|A| \neq 0$  のとき、以下のように表される。

$$x_1 = \frac{1}{|A|} \underbrace{\begin{vmatrix} \underline{b_1} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{A \text{ の第 1 列を } b \text{ と入れ替えた行列式}}, x_2 = \frac{1}{|A|} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \underline{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \underline{b_2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \underline{b_n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{A \text{ の第 2 列を } b \text{ と入れ替えた行列式}},$$

$$\cdots, x_n = \frac{1}{|A|} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \underline{b_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \underline{b_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \underline{b_n} \end{vmatrix}}_{A \text{ の第 } n \text{ 列を } b \text{ と入れ替えた行列式}}$$

## 例題 3.17

次の各問に答えよ。

$$(1) \text{ 行列 } A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ の逆行列を求めよ。}$$

$$(2) \begin{pmatrix} x+5 & 3 \\ x+1 & x \end{pmatrix} \text{ が逆行列をもたないように } x \text{ を定めよ。}$$

【解答】(1)  $A$  については、そのまま逆行列の式に当てはめれば良い。 $B$  については、 $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  の逆行列を

求めた後、逆行列についての公式  $(kC)^{-1} = \frac{1}{k}C^{-1}$  を使うと良い。

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \left(\frac{1}{6}C\right)^{-1} = 6C^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

また、逆行列を基本操作による掃き出し法 (第 3.8 章参照) で求めることもできる。 $A$  とその逆行列  $A^{-1}$  は  $AA^{-1} = E$  を満たすので、この式の両辺に前から適切な行列  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を順に何度か掛け (つまり基本操作して)、

$$\underbrace{X_n \cdots X_2 X_1 A}_{\text{ここが } E \text{ になると嬉しい}} A^{-1} = X_n \cdots X_2 X_1 E$$

となったとき、左辺の  $A^{-1}$  より前の行列の積  $X_n \cdots X_2 X_1 A$  が 単位行列  $E$  になれば、 $A^{-1} = X_n \cdots X_2 X_1 E$  となり、 $A^{-1}$  が求まることが分かる。掃き出し法では、以下のように、 $A$  と単位行列  $E$  を並べた拡大係数行列  $[A|E]$  を用意して、それを  $[E|Y]$  というように左側が単位行列  $E$  になるように基本変形すればよい。 $[A|E]$  の右半分の  $E$  が最終的に  $Y$  に変形されるが、これが  $A^{-1}$  に他ならない (3 次以上だと掃き出し法がより効力を発揮するだろう 例題 3.20 参照)。

(基本操作)	A	E	(基本操作つづき)		
[A E]	3   -5	1   0	$r_1 + 5r_2$	3   0	6   15
	-1   2	0   1		0   1	1   3
$r_1 + 3r_2$	3   -5	1   0	$\frac{1}{3}r_1$	1   0	2   5
	0   1	1   3		0   1	1   3

(2) 逆行列を持たない条件は、その行列式  $\Delta$  が 0 になることなので、

$$\Delta = (x+5)x - 3(x+1) = 0 \iff (x+3)(x-1) = 0 \iff x = -3, 1$$

であれば、逆行列をもたない。

## 例題 3.18

$A, B$  を 2 次の正方行列とし、行列式をそれぞれ  $|A|, |B|$  とする。また、 $O$  は零行列である。

- (1)  $|AB| = |A||B|$  であることを示せ。
- (2)  $AB = O, A \neq O, B \neq O$  のとき、 $|A| = 0, |B| = 0$  であることを示せ。
- (3) 以下の関係式、つまり、逆行列  $A^{-1}$  の行列式は、行列  $A$  の行列式の逆数に等しいことを示せ。

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

【解答】(1)  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$  とすると、 $AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$  なので、行列式  $|AB|$  は、

$$\begin{aligned} |AB| &= (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) \\ &= adeh + bcfg - bceh - adfg \\ &= ad(eh - fg) - bc(eh - fg) \quad \leftarrow |A| \text{ と } |B| \text{ を求めておき、それと同じになるように変形} \\ &= \underbrace{(ad - bc)}_{|A|} \underbrace{(eh - fg)}_{|B|} \\ &= |A||B| \end{aligned}$$

となる。

- (2)  $AB = O$  の両辺に対して行列式を考え、(1) の結果を使えばよい (全成分が 0 の零行列  $O$  の行列式は  $|O| = 0$ )。

$$|AB| = |O| \iff |A||B| = 0 \iff |A| = 0, |B| = 0$$

(補足) 例題 3.9 で扱ったように、 $AB = O$  のとき、必ずしも  $A = O, B = O$  とならないが、代わりに  $|A| = 0, |B| = 0$  となる。

- (3) 逆行列の定義式  $AA^{-1} = E$  の両辺に対して行列式を考えればよい (単位行列  $E$  の行列式は  $|E| = 1$ )。

$$|AA^{-1}| = |E| \iff |A||A^{-1}| = 1 \iff |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

## 例題 3.19

次の連立方程式を逆行列、および、クラメルの公式を使って解け。

$$(1) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 5y = 6 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 4x - 5y = 5 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 1 \end{cases}$$

【解答】(1) 2元1次連立方程式は

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 5y = 6 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}}_b$$

と行列で書けるので、 $Ax = b$ の両辺に前から  $A^{-1}$  を掛けると  $x = A^{-1}b$ 。よって、 $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を求めれば良い。

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{9} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

また、クラメルの公式から以下のように同じ答えが得られる。

$$x = \frac{\begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{11}{9}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{13}{9}$$

例題 3.15(1) では、同じ問題を掃き出し法により解いたが、実際にどの方法を使うかは自由。

$$(2) \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ とすると、} Bx = b \text{ と書けるので、(1) と同じように考えればよい。}$$

$$\text{(逆行列を利用):} \quad x = B^{-1}b = \frac{1}{23} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}_{B^{-1}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 20 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{(クラメルの公式):} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{20}{23}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{7}{23}$$

$$(3) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とすると、} |C| = 1 - a^2 \text{ となるので、} \underbrace{|C| \text{ が } 0 \text{ かどうか}}_{\text{逆行列をもつかどうか}} \text{ で場合分けをする。}$$

(i)  $|C| \neq 0$ 、つまり、 $a \neq \pm 1$  のとき:

$$\text{(逆行列を利用)} \quad x = C^{-1}\mathbf{b} = \underbrace{\frac{1}{1-a^2} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}}_{C^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-a^2} \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-a \end{pmatrix} = \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(クラメルの公式)} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1+a}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1+a}$$

(ii)  $a = 1$  のとき: 2 本の方程式 (直線  $x + y = 1$ ) は一致し、交点が無数にあるので、解  $x, y$  は無数に存在する。

(iii)  $a = -1$  のとき: 2 本の方程式 (直線  $x - y = 1, -x + y = 1$ ) は平行で、交点をもたないので、解は存在しない。

## 3.12 逆行列 3 ~ 3 次以上の正方行列の行列式と逆行列 ~

## 3.12.1 行列式

2 次の正方行列の逆行列 (および行列式) を求めることは、2 元 1 次連立方程式 
$$\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases}$$
 を解くことに相当した

が、3 次の正方行列の逆行列と行列式を求めることは、同様に、3 元 1 次連立方程式

$$\begin{cases} ax + by + cz = l & \cdots (1) \\ dx + ey + fz = m & \cdots (2) \\ gx + hy + iz = n & \cdots (3) \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}}_b$$

を解くことに相当する。2 元 1 次連立方程式のときと同様に行列を使わずに解く。(1)  $\times d$  - (2)  $\times a$  より、

$$\begin{array}{r} adx + bdy + cdz = ld \\ -) \quad adx + aey + afz = ma \\ \hline (bd - ae)y + (cd - af)z = ld - ma \quad \cdots (4) \end{array}$$

となり、また、(1)  $\times g$  - (3)  $\times a$  より、

$$\begin{array}{r} agx + bgy + cgz = lg \\ -) \quad agx + ahy + aiz = na \\ \hline (bg - ah)y + (cg - ai)z = lg - na \quad \cdots (5) \end{array}$$

となるので、3 元 1 次連立方程式が解をもつには、(4) と (5) が解  $y, z$  をもてば良く ( $y$  と  $z$  が求まれば  $x$  はすぐ求まる)、

(4) と (5) が 2 元 1 次連立方程式であることから、この行列式

$$\begin{aligned} \Delta &= (bd - ae)(cg - ai) - (cd - af)(bg - ah) \quad \leftarrow \text{第 3.11 節の } \Delta = ad - bc \text{ にあたる} \\ &= a\{a(ei - fh) - d(bi - ch) + g(bf - ce)\} \\ &= a \left[ a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \right] \end{aligned}$$

が 0 になるかどうかを考えれば良いことになる (もし  $\Delta = 0$  なら (4) と (5) の解  $y, z$  は求まらず、 $x$  も求まらない)。  $a = 0$

の場合、(4) と (5) がともに (1) を表すことになり、意味がないので、 $a \neq 0$  とすることができ、その場合、

$$\Delta = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

が 0 になるかどうかで、3 元 1 次連立方程式が解をもつかどうか決まる。つまり、これが 3 次正方行列の行列式であると分かる。この第 1 項は「 $a \times (a$  の含まれる行と列を除いた小行列の行列式)」、第 2 項は「 $-d \times (d$  の含まれる行と列を除いた小行列の行列式)」、第 3 項は「 $g \times (g$  の含まれる行と列を除いた小行列の行列式)」となっており、この方法により行列式を求めることを、第 1 列に対して余因子展開するともいう。この行列式は、このほか第 2, 3 列を基準にした 2 通りの形

$$\begin{aligned}
 |A| = & \underbrace{+a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}}_{\text{第 1 列 に対する余因子展開}} \quad \underbrace{-b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}}_{\text{第 2 列 に対する余因子展開}} \quad \underbrace{+c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}}_{\text{第 3 列 に対する余因子展開}} \\
 & \underbrace{-d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}}_{\text{第 1 列 に対する余因子展開}} \quad \text{or} \quad \underbrace{+e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}}_{\text{第 2 列 に対する余因子展開}} \quad \text{or} \quad \underbrace{-f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}}_{\text{第 3 列 に対する余因子展開}} \\
 & \underbrace{+g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}_{\text{第 1 列 に対する余因子展開}} \quad \underbrace{-h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}_{\text{第 2 列 に対する余因子展開}} \quad \underbrace{+i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}_{\text{第 3 列 に対する余因子展開}}
 \end{aligned}$$

にも式変形できる (つまり、第 2, 3 列に対しても余因子展開することができる)。実際に行列式を求める際には、0 成分がなるべく多く含まれる列を 1 つ選び、その列に対してのみ余因子展開をすると計算が少なくてすむ (0 成分が含まれる列がなければ、任意の列を 1 つ選べばよい)。また、各項にある + と - は、たとえば、 $a$  は成分 (1,1) なので  $(-1)^{1+1}$ 、 $d$  は成分 (2,1) なので  $(-1)^{2+1}$ 、 $\dots$ 、 $h$  は成分 (3,2) なので  $(-1)^{3+2}$  というように、成分  $a_{ij}$  に対して  $(-1)^{i+j}$  となっている。

また、3 次の正方行列の行列式

$$|A| = \underbrace{aei}_{(1)} + \underbrace{bfg}_{(2)} + \underbrace{chd}_{(3)} - \underbrace{ceg}_{(4)} - \underbrace{bdi}_{(5)} - \underbrace{ahf}_{(6)}$$

は、サラスの方法 (下図) により視覚的に覚えることもできる (3 次

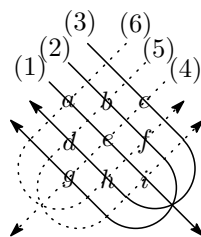


図 3.1 サラスの方法。6 本の各矢印が通過する成分を掛けたものを足し引きすれば行列式になる (点線矢印は - に対応)。

4 次

$$\text{の正方行列 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

については、余因子展開により行列式  $|A|$  を求めることができる。

例えば、第2列を選び、第2列の各成分  $a_{i2}$  とその成分が含まれる第  $i$  行、第2列を除いた小行列を考えることで、

$$\begin{aligned}
 |A| &= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 &\quad + a_{32}(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42}(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

というように行列式を計算できる (5 次以上の行列であっても同じように計算できる)。もちろん、この式を覚える必要はなく、3 次の行列のとき同様、0 になるべく多く含まれる列を 1 つ選ぶのがポイントである。

### 3.12.2 逆行列

3 次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  の逆行列  $A^{-1}$  は、 $A$  の行列式  $|A|$  と  $A$  の余因子行列  $A^\dagger$

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} \underbrace{(-1)^{1+1}}_+ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{2+1}}_- \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{3+1}}_+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \underbrace{(-1)^{1+2}}_- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{2+2}}_+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{3+2}}_- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \underbrace{(-1)^{1+3}}_+ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{2+3}}_- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{3+3}}_+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

を用いて、

$$A^{-1} = \frac{A^\dagger}{|A|}$$

と表わせる。ここで、余因子行列  $A^\dagger$  の成分  $(1, 2)$  が、行列  $A$  の成分  $(2, 1)$  が含まれる行と列を除いた小行列を用いた、

$$(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \leftarrow a_{21}(a_{12} \text{ でない!!}) \text{ が含まれる 2 行目と 1 列目を除いたもの小行列の行列式}$$

となることに注意が必要である (逆行列なので「非対角成分を逆」とでも覚えるとよい)。4 次以上でも同様に計算できる。

## 例題 3.20

次の行列  $A, B$  の行列式と逆行列を求めよ。

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

【解答】(1) サラスの方法より、行列式  $|\mathbf{A}|$  は、

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot 0 \\ - 6 \cdot (-1) \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 3 = -1$$

となる。あるいは、第 1 列に 0 が複数含まれることに注目して、第 1 列に対して余因子展開をすることで行列式を求める。

$$|\mathbf{A}| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

行列  $\mathbf{A}$  の余因子行列  $\mathbf{A}^\dagger$  が、

$$\mathbf{A}^\dagger = \begin{pmatrix} \underbrace{(-1)^{1+1}}_+ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{2+1}}_- \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{3+1}}_- \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \underbrace{(-1)^{1+2}}_- \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{2+2}}_+ \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{3+2}}_- \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \underbrace{(-1)^{1+3}}_+ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{2+3}}_- \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{3+3}}_+ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となることから (余因子行列の非対角成分を「逆」にするのを忘れずに)、逆行列は以下のようになる。

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^\dagger}{|\mathbf{A}|} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(補足) 上三角行列の逆行列もまた上三角行列になるという性質がある。

(2) サラスの方法より、行列式  $|B|$  は、

$$|B| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) \cdot (-3) + (-1) \cdot (-6) \cdot 2 \\ - (-3) \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 0 - (-2) \cdot (-2) \cdot (-6) = 45$$

となる。あるいは、第 3 列に 0 が含まれることに注目して、第 3 列に対して余因子展開をすることで行列式を求める。

$$|B| = (-3) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (-6) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \dots = 45$$

行列  $B$  の余因子行列  $B^\dagger$  が、

$$B^\dagger = \begin{pmatrix} \underbrace{(-1)^{1+1}}_+ \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{2+1}}_- \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{3+1}}_+ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \\ \underbrace{(-1)^{1+2}}_- \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{2+2}}_+ \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{3+2}}_- \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \\ \underbrace{(-1)^{1+3}}_+ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{2+3}}_- \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \underbrace{(-1)^{3+3}}_+ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 & -9 \\ 6 & -3 & -18 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

となることから (余因子行列の非対角成分を「逆」にするのを忘れずに)、逆行列は以下ようになる。

$$B^{-1} = \frac{B^\dagger}{|B|} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(別解) (1) と (2) の逆行列を掃き出し法 (第 3.8 章、および、例題 3.17(1) 参照) により求めると以下ようになる。

(1)

(基本操作)	$A$	$E$
	1 2 6	1 0 0
$[A E]$	0 -1 3	0 1 0
	0 0 1	0 0 1
$r_1 + 2r_2$	1 0 12	1 2 0
$-r_2 + 3r_3$	0 1 0	0 -1 3
	0 0 1	0 0 1
$r_1 - 12r_3$	1 0 0	<b>1 2 -12</b>
	0 1 0	<b>0 -1 3</b>
	0 0 1	<b>0 0 1</b>

(2)

(基本操作)	$B$	$E$
	-2 2 -3	1 0 0
$[B E]$	2 1 -6	0 1 0
	-1 -2 0	0 0 1
$r_1 + r_2$	0 3 -9	1 1 0
$r_2 + 2r_3$	0 -3 -6	0 1 2
$-r_3$	1 2 0	0 0 -1
$r_1 + r_2$	0 0 -15	1 2 2
$-\frac{1}{3}r_2$	0 1 2	0 $-\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{3}$
	1 2 0	0 0 -1
$-\frac{1}{15}r_1 \leftrightarrow r_3$	1 2 0	0 0 -1
	0 1 2	0 $-\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{3}$
$r_3 \leftrightarrow -\frac{1}{15}r_1$	0 0 1	$-\frac{1}{15}$ $-\frac{2}{15}$ $-\frac{2}{15}$
	1 2 0	0 0 -1
$r_2 - 2r_3$	0 1 0	$\frac{2}{15}$ $-\frac{1}{15}$ $-\frac{2}{5}$
	0 0 1	$-\frac{1}{15}$ $-\frac{2}{15}$ $-\frac{2}{15}$
$r_1 - 2r_2$	1 0 0	$-\frac{4}{15}$ $\frac{2}{15}$ $-\frac{1}{5}$
	0 1 0	$\frac{2}{15}$ $-\frac{1}{15}$ $-\frac{2}{5}$
	0 0 1	$-\frac{1}{15}$ $-\frac{2}{15}$ $-\frac{2}{15}$

## 例題 3.21

行列  $A$  の行列式と逆行列を求めよ。また、行列  $B$  の行列式を求めよ。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

【解答】(1) どの列も 0 が 3 つ含まれているので、例えば第 1 列に対して余因子展開する。

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 4 = 24 \quad \leftarrow \text{サラスの方法を使うと簡単}$$

また、対角行列  $A$  の余因子行列  $A^\dagger$  は、対角成分の左上から順に

$$(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

(行列式)= $2 \times 3 \times 4 = 24$       (行列式)= $1 \times 3 \times 4 = 12$       (行列式)= $1 \times 2 \times 4 = 8$       (行列式)= $1 \times 2 \times 3 = 6$

となり、非対角成分がすべて 0 になる (いくつか計算してみよ) ことから、逆行列は以下ようになる。

$$A^{-1} = \frac{A^\dagger}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(補足) 対角行列の行列式は対角成分の積に、逆行列は各対角成分を逆数にしたものになる。

(2) 第 3 列に 0 が複数含まれることに注目して、第 3 列に対して余因子展開をする。

$$|B| = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

第 3 列に 0 があるので、第 3 列で余因子展開

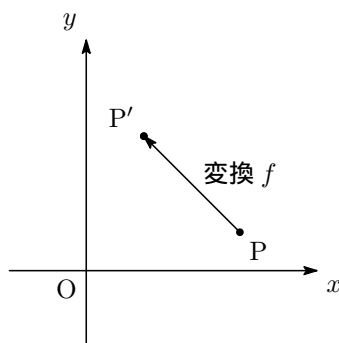
### 3.13 行列って結局なに? ~行列を使って点を移動~

#### 3.13.1 一次変換

これまでさんざん行列を扱ってきたが、列ベクトル  $x$  に前から正方行列  $A$  をかけるという操作は、実は点の移動を表している。以下、 $xy$  平面でのある点  $P$  の移動について考える。点  $P$  の座標  $(x, y)$  を縦に並べた列ベクトル (大学では点を列ベクトル (行でない) で表す)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の 前から任意の 2 次正方行列  $f$  を掛けることで点  $P$  がある点  $P'$  へと移動 (変換) させられる。



たとえば、 $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  であれば、点  $P(x, y)$  は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

となり、点  $P'(x, -y)$ 、つまり、点  $P$  と  $x$  軸対称な位置へ移動させられたと分かる。また、 $f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  であれば、

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

となり、点  $P'(-x, -y)$ 、つまり、点  $P$  と原点对称な位置へ移動させられたと分かる。

ある空間 (含む平面) 上の点  $P$  に対して、同じ空間上の点  $P'$  がただ 1 つ定まるとき、この対応を『変換』といい、点  $P'$  をこの変換による点  $P$  の『像』という。 $xy$  平面での点の移動は 2 次の正方行列により、 $xyz$  空間での点の移動は 3 次の正方行列によりなされる。

一般に、点  $P(x, y)$  に対して変換  $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  をほどこしたことで得られる点  $P'(x', y')$  の座標 (変換後の座標) が

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

というように、変換前の座標  $(x, y)$  の 1 次結合で表されるとき、変換  $f$  を『一次変換  $f$  を表す行列』という。

**例題 3.22**

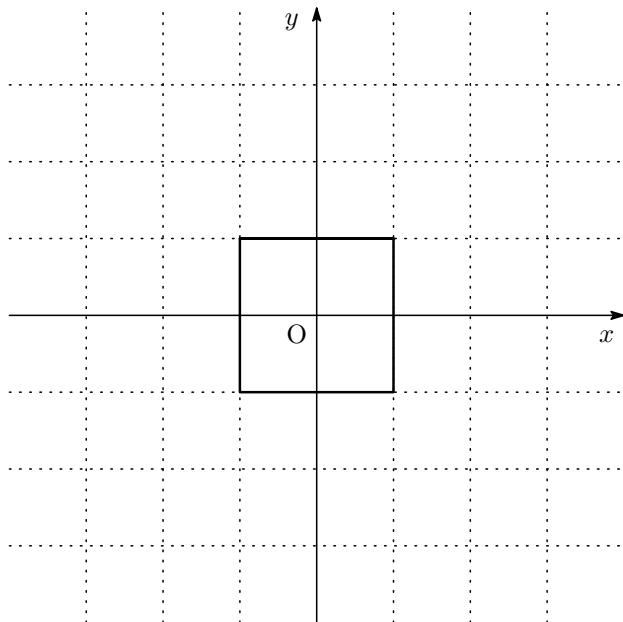
次の行列

(1)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  (2)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (3)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  (4)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  (5)  $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

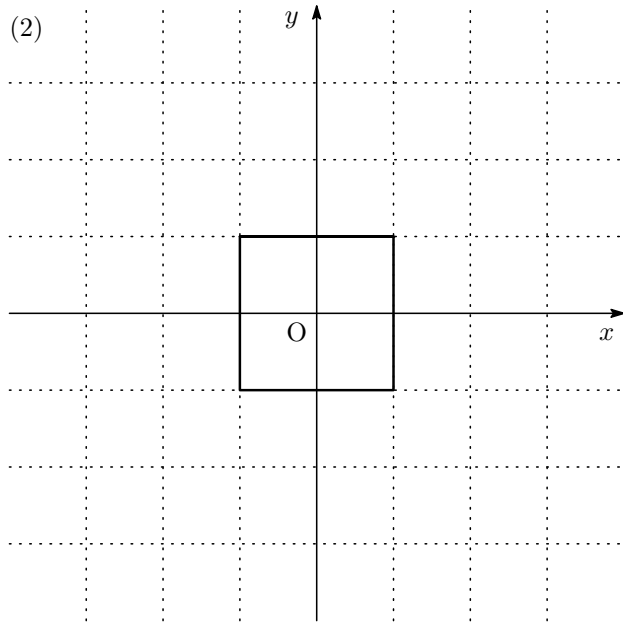
による一次変換 (つまり、前から掛けること) により、次の 8 点 A-H で表される正方形はどのようになるか? また、このとき行列式は何を表すか?

A  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , B  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , C  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , D  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , E  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , F  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , G  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , H  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

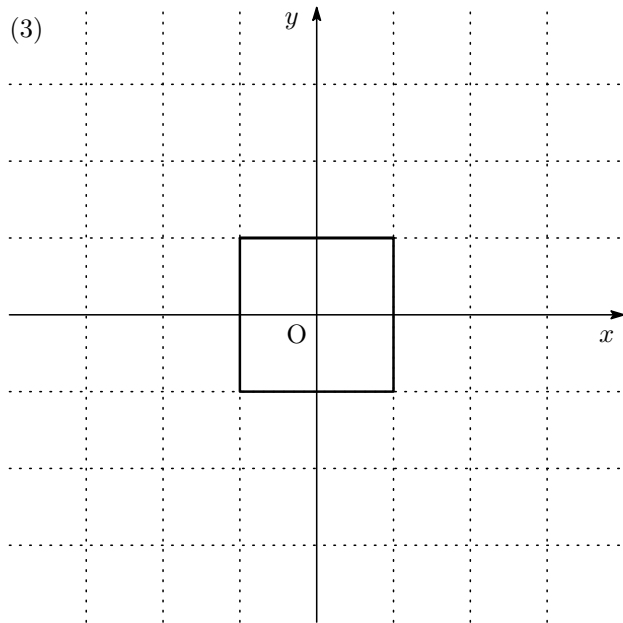
**【解答】** (1)



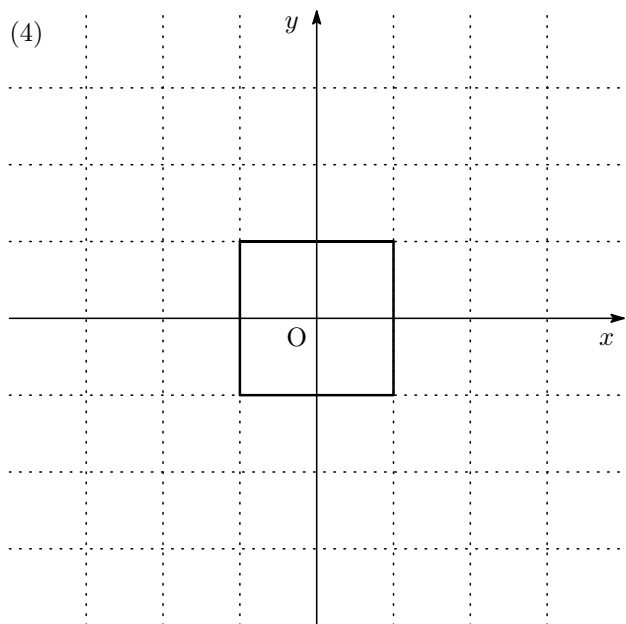
A	B	C	D	E	F	G	H
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



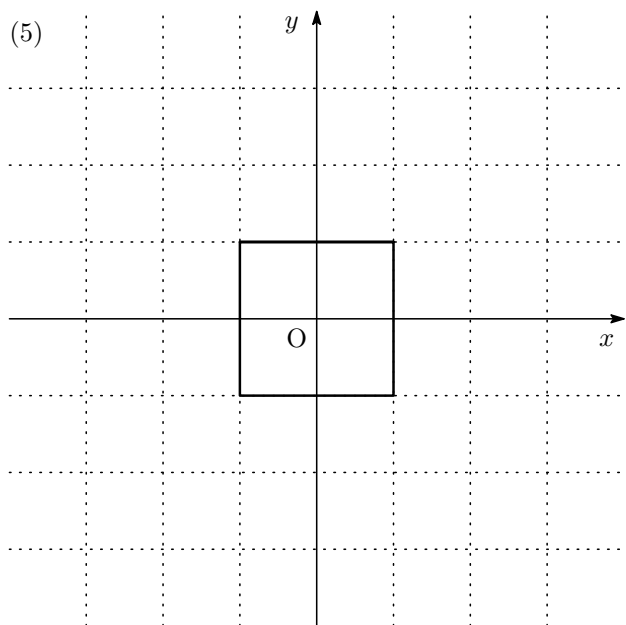
A	B	C	D	E	F	G	H
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



A	B	C	D	E	F	G	H
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



A	B	C	D	E	F	G	H
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



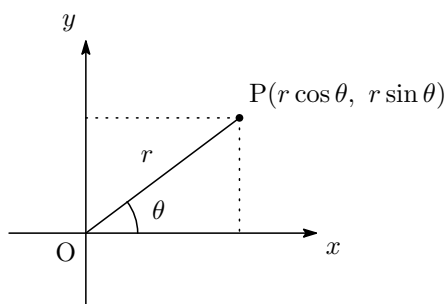
A	B	C	D	E	F	G	H
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

## 3.13.2 回転を表す行列 (回転行列)

## 例題 3.23

$xy$  平面上の点  $P(a, b)$  に行列  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  で表される一次変換  $f$  をほどこすと (つまり、前から掛けると)、点  $P$  はどのように移動するか?

なお、一般に、 $xy$  平面上の任意の点  $P$  は、原点からの距離  $r$ 、および、線分  $OP$  と  $x$  軸の正の部分のなす角  $\theta$  を用いて、 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$  と表されることが知られている。



【解答】 点  $P$  を列ベクトルで表すと  $P = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$  なので、行列  $A$  による一次変換  $f$  ( $A$  を前から  $P$  にかけて)、

$$AP = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \alpha - r \sin \theta \sin \alpha \\ r \cos \theta \sin \alpha + r \sin \theta \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta + \alpha) \\ r \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix}$$

となり、一次変換をほどこしたあとの点は、点  $P$  を原点を中心に  $\alpha$  回転させたものと分かる。行列  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  は、ある点を原点を中心に回転させるので、回転行列とよぶ (あくまで回転させるだけの行列で、原点からの距離の拡大を伴う行列は回転行列と呼ばないので注意)。 $xyz$  空間における回転については、3 次の正方行列で考えることができる。

なお、点の回転は複素数平面 (横軸が  $x$ 、縦軸が  $i$  の平面で、 $xy$  平面の点  $(a, b)$  を  $a + bi$  と表す) でも表すことができる。点  $a + bi$  を原点を中心に  $\alpha$  回転、原点からの距離を  $k$  倍したければ、 $a + bi$  に  $k(\cos \theta + i \sin \theta)$  を掛けるだけでよい。例えば、点  $1+i$  を原点周りに  $\frac{\pi}{4}$  回転、原点からの距離を  $\sqrt{2}$  倍したければ、

$$(1+i) \times \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = (1+i)(1+i) = 0 + 2i (= 2i)$$

とすればよい ( $xy$  平面上の点  $(1, 1)$  が、点  $(0, 2)$  に移動したことに相当する)。また、 $i^2 = -1$  という有名な式は、 $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$  であることをふまえると、点  $(1, 0)$  に  $\frac{\pi}{2}$  回転を 2 回ほどこして、点  $(-1, 0)$  に移動させることを表している &smallfrown; と分かる。

例題 3.24

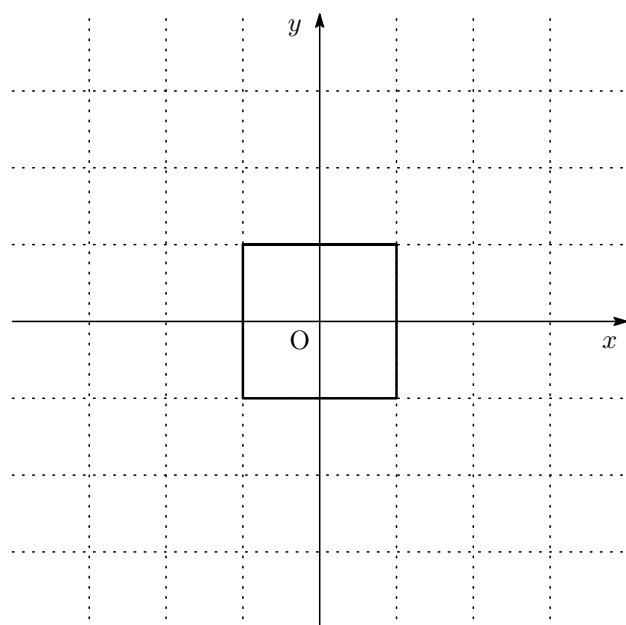
行列

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

による一次変換(つまり、前から掛けること)により、次の8点 A-H で表される正方形はどのように移動するか? また、このとき行列式は何を表すか?

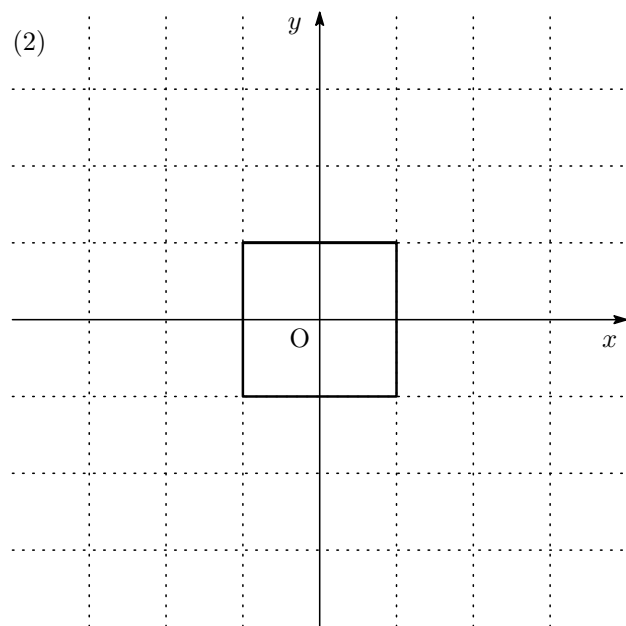
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, D \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, E \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, G \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, H \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

【解答】(1)



$$\begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(2)



$$\begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(補足) 拡大を伴うので厳密には回転行列ではない。

### 3.13.3 直交行列

前節で扱った回転行列は、以下のように定義される直交行列に分類される。

#### 直交行列の定義

互いに直交し (内積が 0)、そのノルム (大きさ) が 1 である (つまり、正規直交系をなす) 列ベクトル  $u_1, u_2, \dots, u_n$  を並べてできる 正方行列  $U$  を直交行列<sup>a</sup>と呼ぶ。

$$U = \begin{pmatrix} \boxed{u_1} & \boxed{u_2} & \cdots & \boxed{u_n} \end{pmatrix}$$

<sup>a</sup>「直交」といえば、「内積 ( $u_i^T u_j$ ) が 0」であれば充分であり、ノルム ( $\|u\|^2 = u^T u$ ) は何でも良いが、直交行列では「列 (行) ベクトルのノルムが 1」(正規性) の条件も課しているので注意。本来なら、「正規直交行列」と呼ぶほうが誤解がないだろう。

列ベクトル  $u_i$  は正規直交系なので、 $\underbrace{u_i^T u_j}_{\text{内積}} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 (i = j) \leftarrow \text{正規性を示す} \\ 0 (i \neq j) \leftarrow \text{直交性を示す} \end{cases}$  が成り立ち<sup>4</sup>、このことからたく

さんの直交行列に関する性質を導くことができる。行列の積  $U^T U$  は、

$$\begin{aligned} U^T U &= \begin{pmatrix} \boxed{u_1} & \boxed{u_2} & \cdots & \boxed{u_n} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boxed{u_1} & \boxed{u_2} & \cdots & \boxed{u_n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boxed{u_1^T} \\ \boxed{u_2^T} \\ \vdots \\ \boxed{u_n^T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{u_1} & \boxed{u_2} & \cdots & \boxed{u_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^T u_1 & u_1^T u_2 & \cdots & u_1^T u_n \\ u_2^T u_1 & u_2^T u_2 & \cdots & u_2^T u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^T u_1 & u_n^T u_2 & \cdots & u_n^T u_n \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

というように単位行列  $E$  となる。 $U^T U = E$  は、 $U$  が逆行列  $U^{-1}$  をもち、それが  $U^T$  であること、つまり、 $U^T = U^{-1}$

を示している。このことからさらに、 $U U^{-1} = U U^T = E$  ということも分かる。これは注目すべき特徴で、 $U$  の列ベクトルに正規直交系をなす  $u_i$  を用意しただけなのに、 $U$  の行ベクトルも互いに正規直交系となることを示す。前節で

扱った回転行列  $U = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  は、確かに  $U^T U = E, U U^T = E$  を満たし、行ベクトルも列ベクトル同

様に正規直交系になっており、 $U^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = U^T$  である。

また、行列式に関しては、 $|U| = |U^T|$  (3 次正方行列でサラスの方法を考えるとすぐ分かる) を踏まえることで、

$$U U^T = E \text{ の行列式を各辺で考え、 } |U U^T| = |E| \iff |U| |U^T| = 1 \iff |U|^2 = 1 \iff |U| = \pm 1$$

<sup>4</sup> $\delta_{ij}$  をクロネッカーのデルタとよぶ。

が成り立つことが分かる(途中、例題 3.18 の  $|AB| = |A||B|$  も使った)。前節で扱ったような拡大を伴わない 回転行列 では  $|U| = 1$  となり、例題 3.14 で扱った  $X_c$  ( $x$  成分と  $y$  成分を入れ替える、つまり、 $y = x$  に関して対称移動させる行列) や第 3.13.1 章の初めで扱った  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  ( $x$  軸に関して対称移動させる行列) のような 対称移動を行う鏡映行列 (交換行列) では  $|U| = -1$  となる (つまり、 $|U|$  の正負で回転か鏡映かを判別できる)。

さらに、前節で扱った回転行列の性質からも分かるように、ベクトル(点)  $x, y$  に直交行列  $U$  を前から掛ける変換(移動)により、ベクトルのノルムは変化せず(拡大を伴わないため)、ベクトルの内積  $x^\top y$  (つまり角度) も変化しない(どの方向のベクトルも同じように変換されるため)。これは、以下のように簡単に示せる(途中、 $(AB)^\top = B^\top A^\top$  を利用する)。

$$\begin{aligned} \|Ux\|^2 &= (Ux)^\top (Ux) = x^\top \underbrace{U^\top U}_{=E} x = x^\top x = \|x\|^2 \\ (Ux)^\top (Uy) &= x^\top \underbrace{U^\top U}_{=E} y = x^\top y \end{aligned}$$

これらの性質は、例えば 2 次元 ( $xy$  平面) であれば、 $x$  軸方向、 $y$  軸方向をそれぞれ向き、互いに直交する単位列ベクトル  $e_x = (1\ 0)^\top, e_y = (0\ 1)^\top$  の前から直交行列  $U = \begin{pmatrix} \boxed{u_1} & \boxed{u_2} \end{pmatrix}$  を掛けることで容易に分かるだろう。

$$Ue_x = \begin{pmatrix} \boxed{u_1} & \boxed{u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{u_1}, \quad Ue_y = \begin{pmatrix} \boxed{u_1} & \boxed{u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{u_2}$$

$e_x, e_y$  の変換後も確かに単位ベクトルのまま ( $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$ ) で、内積も 0 のまま ( $u_1^\top u_2 = 0$ ) である。これらの性質は、 $e_x, e_y$  のノルムや方向によらず、また、3 次以上の直交行列に対しても成り立つ。

(正規) 直交行列  $U$  のもつ性質をまとめると以下ようになる。

$$(1) \quad U^\top U = E \quad (2) \quad UU^\top = E \quad (3) \quad U^\top = U^{-1}$$

また、任意の列ベクトル  $x, y$  に対して、

$$(4) \quad |U| = \pm 1 \quad \leftarrow U \text{ が回転行列なら } |U| = 1, \text{ 鏡映 (交換) 行列なら } |U| = -1$$

$$(5) \quad \|Ux\| = \|x\| \quad \leftarrow \text{変換により } x \text{ の長さが変わらない}$$

$$(6) \quad (Ux)^\top Uy = x^\top y \quad \leftarrow \text{変換により } x, y \text{ の内積 (角度) が変わらない}$$

が成り立つ。

## 例題 3.25

次の行列が直交行列になるように、第3列を求めよ。また、行ベクトルも正規直交となることを確認せよ。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$$

【解答】 第1, 2, 3列 ( $u_1, u_2, u_3$  とする) が正規直交系をなすので (確かに、 $\|u_1\| = \|u_2\| = 1, u_1^\top u_2 = 0$  である)、 $u_3$  のノルムが1で、 $u_1, u_2$  と直交する必要がある。よって、以下のように求めることができる。

$$\begin{cases} \|u_3\|^2 = u_3^\top u_3 = a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ u_1^\top u_3 = \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{c}{\sqrt{3}} = 0 \\ u_2^\top u_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \iff u_3 = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

また、この行列の第1, 2, 3行を  $v_1, v_2, v_3$  とすると、以下のように確かに  $v_1, v_2, v_3$  も正規直交であると分かる。

$$\begin{cases} \|v_1\|^2 = v_1^\top v_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1 \\ \|v_2\|^2 = v_2^\top v_2 = \frac{1}{3} + 0 + \frac{4}{6} = 1 \\ \|v_3\|^2 = v_3^\top v_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1 \end{cases}, \begin{cases} v_1^\top v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \left(\pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \left(\mp \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = 0 \\ v_1^\top v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \left(\pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 0 \\ v_2^\top v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\mp \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \left(\pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 0 \end{cases}$$

## 例題 3.26

$U_1, U_2$  が直交行列ならば、これらの積  $U_1 U_2$  もまた直交行列であることを示せ。また、例題 3.23 と例題

3.24(1) の直交行列  $U_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  に対して、これが成り立つことを確認せよ。

【解答】  $U_1, U_2$  はともに直交行列なので、それぞれ、 $U_1^\top U_1 = E, U_2^\top U_2 = E$  を満たす。 $U_1 U_2$  も直交行列であるなら、 $(U_1 U_2)^\top (U_1 U_2) = E$  が成り立てば良い。よって、この式の左辺を実際に計算することで以下のように示せる。

$$\underbrace{(U_1 U_2)^\top}_{=U_2^\top U_1^\top} (U_1 U_2) = U_2^\top \underbrace{U_1^\top U_1}_{=E} U_2 = U_2^\top U_2 = E$$

また、 $U_1 U_2 = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix}$  なので、第1, 2列をそれぞれ  $u_1, u_2$  とすると、確かに正規直交となる。

$$\begin{cases} \|u_1\|^2 = u_1^\top u_1 = (-\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \\ \|u_2\|^2 = u_2^\top u_2 = (-\cos \alpha)^2 + (-\sin \alpha)^2 = 1 \\ u_1^\top u_2 = (-\sin \alpha)(-\cos \alpha) + (\cos \alpha)(-\sin \alpha) = 0 \end{cases}$$

### 3.14 固有値と固有ベクトル

$n$  次正方行列  $A$  と  $n \times 1$  の列ベクトル  $x$  に対して方程式  $Ax = \lambda x$  を考える。  $A$  について、

$$Ax = \lambda x \quad \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} = \lambda \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array}$$

を満たすスカラー  $\lambda$  とベクトル  $x (\neq 0)$  があるとき、  $\lambda$  を  $A$  の『固有値 (eigen value)』、  $x$  を 行列  $A$  の固有値  $\lambda$  の固有ベクトル (eigen vector)』とよぶ ( $\lambda, x$  を求めることを『固有値問題を解く』という)。一見すると何がしたいのかよく分からないが、各辺の意味を考えてみるとよい。列ベクトル  $x$  は成分で考えると「点」であることに注意し、ベクトル  $x$  の終点を点  $X$  とすると (図 3.2)、各辺は

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax : \text{前から掛けた } A \text{ により点 } X \text{ が移動 (ベクトル } x \text{ の始点 (原点 } O) \text{ はそのまま終点が変わる)} \\ \lambda x : \text{ベクトル } x \text{ を } \lambda \text{ 倍伸び縮み } (\lambda > 0 : \text{同方向}, \lambda < 0 : \text{逆方向}) \leftarrow \text{直線 } OX \text{ を表す} \end{array} \right.$$

と言い換えることができる。この両辺が等しくなるということは、図 3.2 にあるように、「 $x_i$  を用意し、その前から行列  $A$  を掛けることで、ベクトル  $Ax_i$  がいろいろな方向を向くことになるが、 $A$  を掛けたあとも変わらず同じ (または逆) 方向を向くような (単純に伸び縮するだけの) ベクトルがある (図 3.2 の  $x_0$ )」ということである。そのような 特殊な ベクトル  $x_0$  とその伸縮倍率  $\lambda$  が、それぞれ、固有ベクトルと固有値であり、これらを求めることが固有値問題を解くことである。固有ベクトル  $x_0$  の長さが任意 (方向だけが重要で  $kx_0 (k \neq 0)$  でも成り立つ) であることは、 $Ax_0 = \lambda x_0$  の両辺を  $k$  倍した式  $A(kx_0) = \lambda(kx_0)$  から分かる。

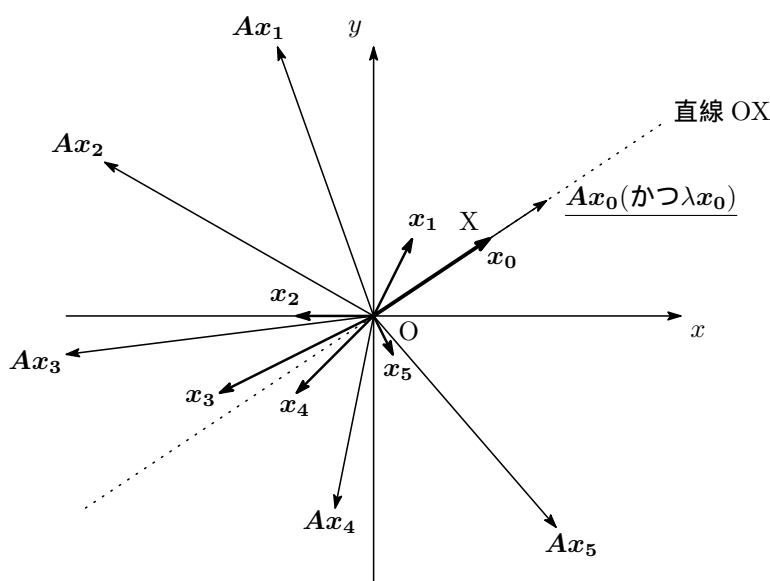


図 3.2  $x_i (i = 0, 1, \dots, 5)$  の前から  $A$  を掛けることでいろいろな方向を向くようになるが、 $x_i$  によっては方向が変化しない (単純に伸び縮みした) ものがあ (直線  $OX$  上の  $x_0$ )。それが固有ベクトル (その伸縮率が固有値) である。また、 $x_0$  の長さを定数倍 (例えば、 $2x_0, -x_0$  など) したものに、 $A$  を掛けても同じように直線  $OX$  上にくる。

このような特殊なベクトル (固有ベクトル) と固有値を方程式  $Ax = \lambda x$  を解くことで求めてみる。  $Ax = \lambda x$  より、  $(A - \lambda E)x = 0$  となるが<sup>5</sup>、この1次連立方程式が自明な解  $x = 0$  をもつ ( $A$  が2次の正方行列であれば、  $y$  切片が0の2直線の交点が  $(0, 0)$  のただ1つであることに相当する) ことはすぐに分かるだろう。しかし、  $x = 0$  は全成分が0 (つまり、原点) なので、  $A$  による点の移動を考える際に 意味をもたない (面白くない) 唯一の解 であることも図 3.2 から容易に想像がつく (原点を動かそうとどんな  $A$  を掛けても原点のまま移動しない)。この方程式が  $x = 0$  以外の意味のある解をもつには、連立方程式  $(A - \lambda E)x = 0$  の左辺の係数に対して  $|A - \lambda E| = 0$  (固有方程式とよぶ) とするしかない。例題 3.19(3) で出てきた  $Cx = b$  という連立方程式の場合は、左辺の係数 (行列  $C$ ) に対して、  $|C| \neq 0$  という逆の条件を課すことで、方程式がただ1つの解  $x = C^{-1}b$  をもつようにした。だが、ここでは  $b = 0$  なので、  $x = 0$  が解として得られても嬉しくない。そこで、例題 3.19(3) の  $a = 1$  のときのように (2直線を一致させて) 無数の解をもたせるため、あえて左辺の係数に対して、  $|A - \lambda E| = 0$  とする訳である。無数の解  $x$  をもたせる理由は、図 3.2 から分かるように、直線  $OX$  上に方向は同じだが長さの異なる  $x_0$  を任意 (無数) に描くことができるからである ( $x_0$  は方向だけが重要)。

いま、行列  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  に対して、固有値と固有ベクトルを具体的に計算してみる。  $Ax = \lambda x$  が自明な解  $x = 0$  以外の解 ( $x \neq 0$ ) をもつためには、  $|A - \lambda E| = 0$  であれば良いので、

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 \cdot 3 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$$

より、行列  $A$  の固有値は  $\lambda = 5, 2$  である。  $\lambda = 5$  に対する固有ベクトル  $v_1$  は、

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \longleftarrow \text{確かに 2 直線が重なる (= 解は無数)}$$

より、

$$v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \text{ は定数})$$

となる (解である固有ベクトルは無数にあるので、これを満たす適当な解  $(2 \ 1)^T$  を挙げ (先に  $y = 1$  とした)、あとは定数  $c_1$  に任せているが、適当な解  $x, y$  はともに整数にしておくとうい)。また、  $\lambda = 2$  に対する固有ベクトル  $v_2$  は、

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \longleftarrow \text{確かに 2 直線が重なる (= 解は無数)}$$

---


$${}^5 A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ とすると、} \begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} (a - \lambda)x + by = 0 \\ cx + (d - \lambda)y = 0 \end{cases} \text{ つまり、} (A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ となる。}$$


---

より,

$$v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \text{は定数})$$

となる。得られた固有値は異なるので、得られた固有ベクトル  $v_1, v_2$  は一次独立 ( $v_1$  を  $v_2$  の定数倍で表せない) である。

得られた固有ベクトル  $v_1, v_2$  と固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  を図形的に確認しておく。たとえば、図 3.3 にある次のベクトル (点)

$$\underline{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{C} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{D} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{E} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{F} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \underline{G} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{H} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

に前から行列  $A$  を掛けると、

$$\underline{A'} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{B'} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{C'} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{D'} \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{E'} \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix}, \underline{F'} \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix}, \underline{G'} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{H'} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

となるので、 $\underline{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{G} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  とそれらを定数倍したもの ( $\overrightarrow{OA}$  を  $-1$  倍した  $\overrightarrow{OE}$  と  $\overrightarrow{OG}$  を  $2$  倍した  $\overrightarrow{OH}$ )、つまり、固有ベクトル  $v_1, v_2$  だけが、行列  $A$  を前から掛けても方向が変わらず長さが  $\lambda_1, \lambda_2$  倍されていることが分かる。一

般に、 $n$  次の正方行列は  $n$  個の固有値、固有ベクトルをもつ (特定の  $n$  方向のベクトルを伸縮することができる)。

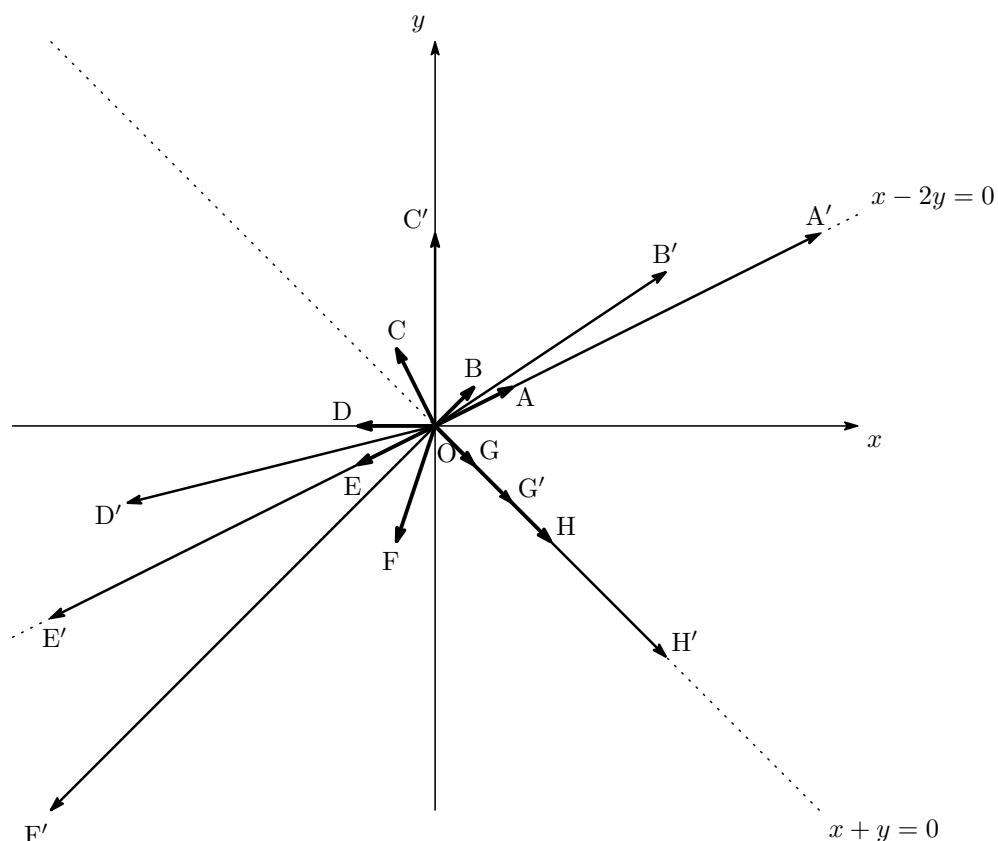


図 3.3 行列  $A$  を前から掛けることによる点の移動。固有ベクトル (ここでは、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}$ ) のみが行列  $A$  を掛けても方向が変わらない。固有ベクトルの伸縮率は行列  $A$  の固有値。

## 3.14.1 固有値のもつ性質

簡単のため 2 次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の固有値を考える。この行列の固有値は固有方程式  $|A - \lambda E| = 0$  より、

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

となる。いま、方程式が解けたとして  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$  とすると、

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$$

となるはずなので、 $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$  に注意して、係数 ( $\lambda$  の項と定数項) を比較することで、

$$\begin{cases} a + d = \lambda_1 + \lambda_2 \\ ad - bc = \lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

という関係式が導ける。1 つ目の式の左辺は行列  $A$  の対角成分の和 (トレースとよび、 $tr(A)$  と表す) になっているので、『トレースは固有値の和に等しい』という性質を表す。また、2 つ目の式の左辺は行列式なので、『行列式は固有値の積に等しい』という性質を表す。見方を変えれば、固有値に 0 が一つでもあれば行列式が 0 になる (つまり、逆行列をもたない) ということも意味する。3 次以上の正方行列でも、同じような関係式が成り立つ (同様に、固有方程式が  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  と解けたことにして、 $\lambda^{n-1}$  の項、および、定数項を比較すればよい)。

$n$  次の正方行列  $A$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  は、そのトレース  $tr(A)$  や行列式  $|A|$  と以下の関係にある。

(1)  $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$

(2)  $|A| = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$       ← 固有値に 1 つでも 0 があると  $|A| = 0$  (逆行列をもたない)  
固有値に 0 がなければ逆行列をもつ

トレースにはこの他にも、以下のような性質がある。

$n$  次の正方行列  $A$  のトレースは、以下のような性質をもつ。

$$(1) \quad \text{tr}(kA) = k \text{tr}(A)$$

$$(2) \quad \text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$(3) \quad \text{tr}(A^\top) = \text{tr}(A)$$

$$(4) \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

【証明】 トレースが対角成分の和であることを踏まえれば、(1) と (2) はすぐに理解できると思う。

(3) 転置行列  $A^\top$  はもとの行列  $A$  と対角成分が同じなので、対角成分の和であるトレースは変わらず、 $\text{tr}(A^\top) = \text{tr}(A)$  が成り立つ。

(4) 2 次の正方行列に対して証明しておく。 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$  とすると、

$$AB = \begin{pmatrix} \underline{ae + bg} & \underline{af + bh} \\ \underline{ce + dg} & \underline{cf + dh} \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} \underline{ae + cf} & \underline{be + df} \\ \underline{ag + ch} & \underline{bg + dh} \end{pmatrix}$$

なので、たしかに、 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  となる (そして、非対角成分はどうにもこうにも同じにならない)。

## 3.14.2 固有値と固有ベクトルのもつ性質 (フロベニウスの定理)

ここで扱う性質の多くは、ベクトル (点) の前から正方行列を掛けると点が移動すること、固有ベクトルの前から正方行列を掛けても方向が変わらずノルム (大きさ) が  $\lambda$  倍されるだけということを踏まえると容易に理解することができる。

行列  $A$  の固有値を  $\lambda$ 、固有ベクトルを  $v$  とすると、 $Av = \lambda v$  が成り立つ。 $Av = \lambda v$  の両辺に前から  $A$  をかけると、 $A^2v = \lambda \underbrace{Av}_{\lambda v} = \lambda^2v$  となる。さらに、両辺に前から  $A$  をかけることで、 $A^3v = \lambda^2 \underbrace{Av}_{\lambda v} = \lambda^3v$  となる。つまり、 $A$  を掛けるたびに  $v$  のノルムが  $\lambda$  倍される ということ、これを繰り返すことで、 $A^n v = \lambda^n v$  となる。この式は、

$$\text{『 } A^n \text{ は、固有ベクトルが } A \text{ の固有ベクトルと同じで、固有値が } \lambda^n \text{ 』}$$

ということを表している。また、 $Av = \lambda v$  の両辺に定数  $k$  をかけることで  $(kA)v = (k\lambda)v$  となることから、

$$\text{『 } kA \text{ は、固有ベクトルが } A \text{ の固有ベクトルと同じで、固有値が } k\lambda \text{ 』}$$

とわかる。さらに、同じ固有ベクトル  $v$  をもつ行列  $A, B$  の固有値をそれぞれ、 $\lambda_1, \lambda_2$  とすると ( $A, B$  は伸縮方向が同じで伸縮率が違う)、 $Av = \lambda_1 v, Bv = \lambda_2 v$  が成り立つので、各辺を足し合わせることで、 $(A+B)v = (\lambda_1 + \lambda_2)v$  となり、

$$\text{『 } A+B \text{ は、固有ベクトルが } A, B \text{ と同じで、固有値が } \lambda_1 + \lambda_2 \text{ 』}$$

となることもわかる。行列式  $A$  の各対角成分から定数  $k$  を引いた (あるいは足した) 行列  $A' = A - kE$  について、

$$Av = \lambda v \iff Av = \underbrace{(\lambda' + k)}_{\lambda = \lambda' + k} v \iff (A - kE)v = \lambda' v \text{ と変形できることから、}$$

$$\text{『 } A - kE \text{ は、固有ベクトルが } A \text{ と同じで、固有値が } (\lambda' =) \lambda - k \text{ 』} \quad (\text{固有値のシフト})$$

となることが分かる。例題 3.22(1) で扱ったように、単位行列を定数 ( $k$ ) 倍した  $kE$  は、前から掛けることで (例外的に) 固有ベクトルも含めたあらゆる方向のベクトルを  $k$  倍する。行列  $A$  から この成分を取り除く ( $-kE$ ) ということは、 $A$  による伸縮率  $\lambda$  を  $k$  だけ小さくするということである。以上をまとめると以下の定理が成り立つ。

固有値と固有ベクトルのもつ性質 (フロベニウスの定理)

$n$  次の正方行列  $A$  の固有値を  $\lambda$  とすると、多項式行列

$$k_m A^m + k_{m-1} A^{m-1} + \cdots + k_2 A^2 + k_1 A + k_0 E$$

の固有値は、

$$k_m \lambda^m + k_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + k_2 \lambda^2 + k_1 \lambda + k_0$$

となる。また、その固有ベクトルは  $A$  の固有ベクトルに等しい。

## 例題 3.27

行列  $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  の固有値と固有ベクトルを求めよ。また、 $A^2 - 6A$  を計算し、その固有値と固有ベクトルを求めよ。さらに、フロベニウスの定理が成り立っていることを確認せよ。

【解答】 固有方程式  $|A - \lambda E| = \dots = (\lambda - 7)(\lambda - 2) = 0$  より、固有値は  $\lambda = 7, 2$  となり、それぞれの固有値に対応する固有ベクトル  $v_1, v_2$  は以下の通り。

$$v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \text{は定数}), \quad v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (c_2 \text{は定数})$$

いま、 $B = A^2 - 6A$  とすると、

$$B = A^2 - 6A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 36 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

なので、固有方程式  $|B - \lambda E| = \dots = (\lambda - 7)(\lambda + 8) = 0$  より、 $B$  の固有値は  $\lambda = 7, -8$  となり、これらは以下のように  $A$  の固有値  $\lambda = 7, 2$  を  $\lambda^2 - 6\lambda$  に代入したものに確かに一致する。

$$7^2 - 6 \times 7 = 7$$

$$2^2 - 6 \times 2 = -8$$

また、 $B$  の固有値  $\lambda = 7, -8$  に対応する固有ベクトル  $v_1, v_2$  は、それぞれ以下のようになり、たしかに  $A$  の固有ベクトルと一致する。

$$v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \text{は定数}), \quad v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (c_2 \text{は定数})$$

## 例題 3.28

例題 3.22(3)–(5) および例題 3.24 で扱った以下の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。また、固有値の和がトレースに、積が行列式に一致することを確認せよ。さらに、これらの行列による点の移動 (例題 3.22 と例題 3.24 の図) において、固有値 ((4), (5) については固有値の絶対値) と固有ベクトルが何を表すか考察せよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

【解答】 (1) 与えられた行列を  $A$  として (以下同様)、固有方程式  $|A - \lambda E| = 0$  を解けば、固有値が求まる。

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

行列  $A$  の固有値は  $\lambda = 3, 1$  であり、固有値の和は  $\text{tr}(A) = 2 + 2 = 4$  に、積は  $|A| = 4 - 1 = 3$  に確かに一致する。

$\lambda = 3, 1$  にそれぞれ対する固有ベクトル  $v_1, v_2$  は以下の通り。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{より、} \quad v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \text{ は定数}).$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{より、} \quad v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \text{ は定数}).$$

となる ( $v_2$  については  $(-1 \ 1)^\top$  など  $(1 \ -1)^\top$  の定数倍であれば何でもよい)。よって、この行列による点の移動において、固有ベクトル  $v_1, v_2$  と固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  の役割は、例題 3.22 の図から

$$\begin{cases} v_1 \text{ と同方向 (あるいは逆方向) にある } \overrightarrow{OB} \text{ および } \overrightarrow{OF} \text{ は、そのノルムが } \lambda_1 (= 3) \text{ 倍される} \\ v_2 \text{ と同方向 (あるいは逆方向) にある } \overrightarrow{OH} \text{ および } \overrightarrow{OD} \text{ は、そのノルムが } \lambda_2 (= 1) \text{ 倍される} \end{cases}$$

である。と終わらせたくなくなってしまうが、もう少し詳しく観察する。実は、 $B, F, H, D$  以外の点の移動についてもきちんと固有ベクトルの方向に伸縮されている。例えば、 $\overrightarrow{OA}$  は、 $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$  と表されるが、これが一次変換により  $v_1$  方向に 3 倍、 $v_2$  方向に 1 倍されると、 $\overrightarrow{OA'} = 3 \times \left(\frac{1}{2}v_1\right) + 1 \times \left(\frac{1}{2}v_2\right) = \frac{3}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 = (2 \ 1)^\top$  というように、たしかに例題 3.22 で求めた点  $A$  の移動先と一致する。その他のすべての点 (原点は除く) も同様に、 $v_1, v_2$  の線型結合 ( $av_1 + bv_2$  という形) で表すことができ ( $x, y$  軸の代わりに新しい軸  $v_1, v_2$  を用意したことになる)、各固有ベクトルの方向に対応する固有値倍される。つまり、 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OD}$  は、その方向が たまたま固有ベクトルに一致していた (線型結合の  $a, b$  の一方が 0 である) ため、拡大方向がわかりやすかったに過ぎない。よって、固有ベクトルと固有値の役割

としては、原点以外のすべての点の成分が、 $v_1$ 方向に $\lambda_1(=3)$ 倍、 $v_2$ 方向に $\lambda_2(=1)$ 倍される、と答えると良い。

また、行列式 $|A|$ は正方形の面積の拡大率を表していたが(例題3.22)、いま正方形が $v_1$ 方向に3倍、 $v_2$ 方向に1倍されたことから $|A| = \lambda_1 \lambda_2 = (v_1\text{方向の拡大率}) \times (v_2\text{方向の拡大率})$ であることが理解できる。

(補足) 対称行列は、固有値は実数で、異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する、という性質をもつ。

(2) 固有方程式 $|A - \lambda E| = \dots = \lambda(\lambda - 2) = 0$ より、固有値は $\lambda = 2, 0$ であり、固有値の和は $\text{tr}(A) = 1 + 1 = 2$ に、積は $|A| = 1 - 1 = 0$ に確かに一致する。各固有値に対応する固有ベクトル $v_1, v_2$ は以下の通り。

$$v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \text{は定数}), \quad v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \text{は定数})$$

よって、原点以外のすべての点の成分が、 $v_1$ 方向に $\lambda_1(=2)$ 倍、 $v_2$ 方向に $\lambda_2(=0)$ 倍される。

(3) 固有方程式 $|A - \lambda E| = \dots = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$ より、固有値は $\lambda = 4, -2$ であり、固有値の和は $\text{tr}(A) = 1 + 1 = 2$ に、積は $|A| = 1 - 9 = -8$ に確かに一致する。各固有値に対応する固有ベクトル $v_1, v_2$ は以下の通り。

$$v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \text{は定数}), \quad v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \text{は定数})$$

よって、原点以外のすべての点の成分が、 $v_1$ 方向に $\lambda_1(=4)$ 倍、 $v_2$ 方向に $\lambda_2(=-2)$ 倍( $-v_2$ 方向に2倍)される。

(4) 固有方程式 $|A - \lambda E| = \lambda^2 + 1 = 0$ より、固有値は $\lambda = i, -i$ ( $= \cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2}$ )であり、固有値の和は $\text{tr}(A) = 0 + 0 = 0$ に、積は $|A| = 0 - (-1) = 1$ に確かに一致する。各固有値に対応する固有ベクトル $v_1, v_2$ は以下の通り。

$$v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (c_1 \text{は定数}), \quad v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (c_2 \text{は定数})$$

固有値に $i$ が含まれる場合、回転あるいはランダムな移動<sup>6</sup>を意味する(固有ベクトルも $i$ を含む(つまり描けない)ので、もはや特定の方向の伸縮ではないということ)。今回のような回転の場合、固有値の絶対値は回転時の原点からの距離の伸縮率( $|\lambda|(=1)$ 倍)を表す。なお、 $\lambda$ から回転角と回転方向も分かりそうであるが、非対角成分を入れ替えた行列(時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転させる)も同じ固有値をもつ(固有方程式が同じになる)ので、固有値からは回転角 $\frac{\pi}{2}$ のみが分かる。

(5) 固有方程式 $|A - \lambda E| = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ より、固有値は $\lambda = 1 + i, 1 - i$ ( $= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ )であり、固有値の和は $\text{tr}(A) = 1 + 1 = 2$ に、積は $|A| = 1 - (-1) = 2$ に確かに一致する。各固有値に対応する固有ベクトル $v_1, v_2$ は以下の通りで、固有値の絶対値( $|\lambda| = \sqrt{2}$ )から回転時に原点からの距離が $\sqrt{2}$ 倍されると分かる。

$$v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (c_1 \text{は定数}), \quad v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (c_2 \text{は定数})$$

<sup>6</sup>固有値に $i$ が含まれると分かった後に回転行列かを判断するには、まず正規直交性を調べ、直交行列かどうかを調べる必要がある。

## 例題 3.29

次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。また、固有値の和がトレースに一致することを確認せよ。

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

【解答】(1)  $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$  であれば良いので、

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = + (4-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda) \{(4-\lambda)^2 - 2\} + 2\{-(4-\lambda) - 0\} = (4-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-6) = 0 \end{aligned}$$

0 を含む第 1 列で余因子展開

より、行列の固有値は  $\lambda = 2, 4, 6$  である。 $\lambda = 2$  に対する固有ベクトル  $v_1$  は、

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \iff v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c_1 \text{ は定数})$$

となる (解が無数にあるので、代表的な解  $(1 \ 2 \ 2)^T$  を挙げ、あとは定数  $c_1$  に任せる)。また、同様に、 $\lambda = 4, 6$  に対する固有ベクトル  $v_2, v_3$  は、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y = 0 \\ -2x - z = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (c_2 \text{ は定数})$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x - y = 0 \\ -2x - 2y - z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases} \iff v_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c_3 \text{ は定数})$$

(補足) 対角成分がすべて4なので  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - 4\mathbf{E}$  の固有値を求め、それに4を足すと早い (固有ベクトルは変わらない)。

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = +(-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \dots = -\lambda(\lambda^2 - 4) = 0$$

0 を含む第 1 列で余因子展開

より、行列  $A'$  の固有値は  $\lambda = -2, 0, 2$  なので、これらに 4 を足した  $\lambda = 2, 4, 6$  は確かに  $A$  の固有値となっている。

(2)  $\lambda = -4, 3, 12$  となり、それぞれの固有値に対応する固有ベクトル  $v_1, v_2, v_3$  は以下の通り。

$$v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \text{は定数}), \quad v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \text{は定数}), \quad v_3 = c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_3 \text{は定数})$$

(3)  $|C - \lambda E| = 0$  であれば良いので、

$$\begin{aligned} |C - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1 - \lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{+(-2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -6 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 - \lambda & -6 \end{vmatrix}}_{\text{第 1 列に対する余因子展開}} \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = -(\lambda - 5)(\lambda + 3)^2 = 0 \end{aligned}$$

より、行列の固有値は  $\lambda = 5, -3$  (重複度 2) である。 $\lambda = 5$  に対する固有ベクトル  $v_1$  は、

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -7x + 2y - 3z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ -x - 2y - 5z = 0 \end{cases} \iff v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \text{は定数})$$

また、 $\lambda = -3$  に対する固有ベクトル  $v_2, v_3$  は、

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

というように、3 の平面の式が一致したので (つまり、解はこの平面上のすべての点)、その平面を表す適当なベクトル<sup>7</sup>を用意すればよい ( $v_2$  を適当に決めたのち、 $v_2$  の定数倍でなく、かつ、 $x + 2y - 3z = 0$  を満たす  $(x, y, z)$  を  $v_3$  にするとよい)。

$$v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_2, c_3 \text{は定数})$$

<sup>7</sup>平面上にある、2 つの 1 次独立なベクトル (片方を定数倍してもう一方にならないということ) を用意すると平面が 1 つに決まる。

### 3.15 行列の対角化

ここでは3次の正方行列に対して、対角化することを考える。固有値や固有ベクトルを求める理由の1つがこの対角化である。3次の正方行列は3つの固有値(重複してもよい)、および、これらに対応する固有ベクトルをもつので、

$$\boxed{A} \boxed{v_1} = \lambda_1 \boxed{v_1}, \quad \boxed{A} \boxed{v_2} = \lambda_2 \boxed{v_2}, \quad \boxed{A} \boxed{v_3} = \lambda_3 \boxed{v_3}$$

が成り立つ。同じような式が3つあるので、これらは

$$\boxed{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{v_1} & \boxed{v_2} & \boxed{v_3} \end{pmatrix}}_{3 \times 3 \text{ の行列}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{v_1} & \boxed{v_2} & \boxed{v_3} \end{pmatrix}}_{3 \times 3 \text{ の行列}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

というように一まとめにすることができる<sup>8</sup>。ここで、

$$V = \begin{pmatrix} \boxed{v_1} & \boxed{v_2} & \boxed{v_3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

とすることで、 $AV = V\Lambda$  とさらに簡略化できるので、行列  $V$  が逆行列をもつならば ( $V^{-1}$  が存在すれば)、 $AV = V\Lambda$  の両辺に前から  $V^{-1}$  をかけることで (両辺に後ろから  $V^{-1}$  をかけた  $A = V\Lambda V^{-1}$  も重要 (例題 3.30 参照))、

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

というように、固有ベクトルを横に並べた行列  $V$  により行列  $A$  が対角化される (対角成分には固有値が並ぶ)。

話が少しそれるが、もし行列  $A$  が例題 3.28(1) のような対称行列の場合、固有ベクトル (ノルムは任意) は互いに直交する ので、これらを 正規化 (ノルムを1にすること) したものを横に並べた  $V$  は (正規) 直交行列 となる。この場合、 $V^{-1} = V^T$  が成り立つので、対角化の式は

$$V^T AV = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

となる (逆行列の計算が不要 になる)。対称行列はよく出てくるので、この性質も覚えておくと良い。

<sup>8</sup>この式が成り立つことは分かりにくいかもしれないが、右辺の第1列を計算しようとすると、それは  $Av_1 = \lambda_1 v_1$  の右辺と同じ行列計算だと分かる。右辺の第2列と第3列の計算についても同様で、それぞれ、 $v_2, v_3$  しか関与できないことが分かる。行列は縦で見ることが重要な例の1つである。

例題 3.29 の行列で対角化を確認してみる。例題 3.29 (1) で得られた固有ベクトルで  $c_1 = c_2 = c_3 = 1$  としたもの (固有ベクトルは方向だけが重要なので  $c_1, c_2, c_3$  は何でもよい<sup>9</sup>) を列ベクトルとして横に並べた行列  $V$  とその行列式は、

$$V = \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline -2 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline -2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \\ \hline v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -0 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}_{0 \text{ の含まれる第 2 列で余因子展開}} = -4$$

となることから、行列  $V$  は逆行列をもつとわかる。よって、行列  $A$  は、固有ベクトルを列ベクトルにもつ行列  $V$  とその逆行列  $V^{-1}$  によって次のように対角化できる (実際に  $V^{-1}$  を計算する必要がないことが多く、 $V$  の各列に並べた固有ベクトルに対応する固有値を対角成分に左上から順に書くだけ)。

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \underbrace{2}_{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \underbrace{4}_{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{6}_{\lambda_1} \end{pmatrix}$$

例題 3.29 (2) についても同様に、得られた固有ベクトル ( $c_1 = c_2 = c_3 = 1$  としたもの) を横に並べた行列  $V$  は、その行列式  $|V| = -6$  から逆行列をもつと分かるので、 $A$  は以下のように対角化することができる。

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

例題 3.29 (3) については、固有値が重複しているが、 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -3$  として同じように考えれば良い。得られた固有ベクトル ( $c_1 = c_2 = c_3 = 1$  としたもの) を横に並べた行列  $V$  は、その行列式  $|V| = -8$  から逆行列をもつと分かるので、 $A$  は以下のように対角化することができる。

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V^{-1}AV = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

<sup>9</sup>異なる  $c_1, c_2, c_3$  にはもちろん異なる  $V, V^{-1}$  となるが、対角化された行列は変わらず対角成分に固有値が並ぶ。

## 3.16 確率行列 ~ マルコフ連鎖 (Markov chain) ~

これまでいろいろな行列を扱ってきたが、現実の世界では特徴的な行列を扱うことが多い。その一つに確率行列 (遷移行列) がある。これは、ある状態から別の状態への遷移確率を成分にもつ行列で、各列の成分の和が 1 になるという性質がある。例えば、A と B の 2 つの状態 のみ がある場合を考える。ある時刻に状態 A にあり、次の時刻もそのまま状態 A にとどまる確率が  $p$  ならば、状態 A から状態 B に遷移する確率は  $1-p$  となる。また、状態 B にとどまる確率を  $q$  とすれば、状態 B から状態 A へ遷移する確率は  $1-q$  となる。これらの確率を行列表記すると以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$$

第 1(2) 列が状態 A(B) からの遷移確率を表す。確率行列は様々な性質をもっているので、次の問題でそれらに触れてみる。

## 例題 3.30

都市 A (人口:  $r_A$  人) と都市 B (人口:  $r_B$  人) の人口の移動について考える。各都市における 1 年間の人口変化は、都市 A にとどまる人が 9 割、都市 A から都市 B へ移動する人が 1 割、都市 B にとどまる人が 8 割、都市 B から都市 A へ移動する人が 2 割であるという。今後も人口は同じ割合で変化するとし、十分に時間が経ったときの都市 A と都市 B の人口の割合はどのようになっているか? ただし、都市 A と都市 B 以外の都市への人の移動はなく、都市 A と都市 B の総人口 ( $R = r_A + r_B$ ) は変化しないものとする。

【解答】 ある年  $k$  における都市 A、都市 B の人口をそれぞれ  $r_A(k), r_B(k)$  とすると、題意からその前年  $k-1$  における人口  $r_A(k-1), r_B(k-1)$  を用いて、

$$\begin{cases} r_A(k) = 0.9r_A(k-1) + 0.2r_B(k-1) \\ r_B(k) = 0.1r_A(k-1) + 0.8r_B(k-1) \end{cases}$$

となるが、これを行列表記すると

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_A(k) \\ r_B(k) \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}_k} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} r_A(k-1) \\ r_B(k-1) \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}_{k-1}}$$

と簡単に表すことができる。これを繰り返すことで、

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{T} \underbrace{\mathbf{R}_{k-1}}_{=\mathbf{T}\mathbf{R}_{k-2}} = \mathbf{T}^2 \underbrace{\mathbf{R}_{k-2}}_{=\mathbf{T}\mathbf{R}_{k-3}} = \cdots = \mathbf{T}^k \mathbf{R}_0$$

というように、ある年  $k$  における人口  $\mathbf{R}_k$  を、遷移行列  $\mathbf{T}$  の指数乗と初期状態 ( $t=0$ ) における人口  $\mathbf{R}_0$  の積で表すことができる (このように表せるとき、マルコフ連鎖とよぶ)。

ここで、 $T^k$  を計算するために、遷移行列  $T$  の対角化を考える。 $T$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2$ 、これらに対応する固有ベクトルを  $v_1, v_2$  とし、固有ベクトルを列とする行列  $V$  と固有値を対角成分に並べた行列  $\Lambda$

$$V = \left( \begin{array}{|c|} \hline v_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline v_2 \\ \hline \end{array} \right), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

により行列  $T$  を対角化すると  $V^{-1}TV = \Lambda$  となる。この両辺に前から  $V$ 、後ろから  $V^{-1}$  を掛けると、 $T = V\Lambda V^{-1}$  となるので、これに対して  $T^k$  を考えると、

$$T^k = \underbrace{(V\Lambda V^{-1})(V\Lambda V^{-1})(V\Lambda V^{-1}) \dots (V\Lambda V^{-1})(V\Lambda V^{-1})}_k = V\Lambda^k V^{-1} = V \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} V^{-1}$$

となる (途中、 $V^{-1}V = E$ 、および、「対角行列の指数乗は対角成分を指数乗したものの(例題 3.10)」という性質を使った)。

実際に  $T$  の固有値と固有ベクトルを求めると  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.7, v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  なので、 $c_1 = c_2 = 1$

とすると、 $V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \underbrace{1}_{v_1} & \underbrace{-1}_{v_2} \end{pmatrix}, V^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  となる。よって、 $R_k$  の式は、

$$\begin{aligned} R_k = T^k R_0 &= V \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} V^{-1} R_0 \\ &= \frac{1}{3} \left( \begin{array}{|c|} \hline v_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline v_2 \\ \hline \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} 1^k & 0 \\ \hline 0 & 0.7^k \end{array} \right) \underbrace{\left( \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} r_A(0) \\ r_B(0) \end{pmatrix}}_{(V \text{ はあえて } v_1, v_2 \text{ 表記のまま})} \\ &= \frac{1}{3} \left( \begin{array}{|c|} \hline 1^k v_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0.7^k v_2 \\ \hline \end{array} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{r_A(0) + r_B(0)}_{=R} \\ r_A(0) - 2r_B(0) \end{pmatrix}} \\ &= \frac{1}{3} (Rv_1 + \{r_A(0) - 2r_B(0)\}0.7^k v_2) \end{aligned}$$

というように、固有ベクトル  $v_1, v_2$  の足し合わせにより表すことができる。時間とともに  $0.7^k$  のある第 2 項が小さくなり、充分時間がたった状態 (つまり、 $k \rightarrow \infty$ ) では  $0.7^k \rightarrow 0$  ( $\lambda_2^k \rightarrow 0$ ) であることから、このときの各都市の人口は、

$$R_\infty = \frac{v_1}{3} R = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} R \\ \frac{1}{3} R \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{初期状態 } r_A(0), r_B(0) \text{ によらない}$$

となる。このように、定常状態  $R_\infty$  は  $\lambda = 1$  に対する固有ベクトル  $v_1$  のみに依存する (後述するが 3 は  $v_1$  の成分の和)。

(補足) 実際は、高層マンション建設や鉄道敷設などの都市化により、遷移行列  $T$  は時刻々と変化する。

確率 (遷移) 行列の性質について、より一般的にまとめておく。簡単のため 2 次の遷移行列  $T = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$

について考える (ただし、 $p, q$  は確率なので  $0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$ )。遷移行列  $T$  の固有方程式は

$$|T - \lambda E| = \begin{vmatrix} p - \lambda & 1 - q \\ 1 - p & q - \lambda \end{vmatrix} = (p - \lambda)(q - \lambda) - (1 - q)(1 - p) = \dots = (\lambda - 1)\{\lambda - (p + q - 1)\} = 0$$

なので、固有値は  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = p + q - 1 (\leq 1)$  となる。これが 1 つ目の重要な性質で、固有値に必ず 1 が含まれ、残りの固有値が 1 以下になる。例題で扱ったように、固有値の  $\infty$  乗を考えるとときに重要 ( $\lambda_1^\infty = 1, \lambda_2^\infty \rightarrow 0$ ) となる。

次に、各固有値に対する固有ベクトルを求める。 $\lambda = 1$  に対する固有ベクトル  $v_1$  は、 $c_1$  を定数とすると

$$\begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (p-1)x + (1-q)y = 0 \\ (1-p)x + (q-1)y = 0 \end{cases} \text{ より、 } v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1-q \\ 1-p \end{pmatrix}$$

となり、 $\lambda = p + q - 1$  に対する固有ベクトル  $v_2$  は、 $c_2$  を定数とすると

$$\begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (p + q - 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (1-q)x + (1-q)y = 0 \\ (1-p)x + (1-p)y = 0 \end{cases} \text{ より、 } v_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。 $c_1 = c_2 = 1$  とすると、これらの固有ベクトルを列とする行列  $V$  とその逆行列  $V^{-1}$  は以下ようになる。

$$V = \begin{pmatrix} 1-q & -1 \\ 1-p & 1 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \frac{1}{2-p-q} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+p & 1-q \end{pmatrix}$$

2 つ目の重要な性質は、 $V^{-1}$  の第 1 列が  $\frac{1}{2-p-q} (1 \ 1)$  となることである。 $2-p-q (> 0)$  は行列式  $|V|$  であり、 $v_1$  の成分の和に等しいが、これは  $v_2$  のおかげである ( $|V|$  を計算しようとすればすぐ分かる)。この 2 つ目の性質は、

定常状態が初期状態に依存しない (つまり  $R(0)$  が消える) ことに繋がり ( $\frac{1}{2-p-q} (1 \ 1)$  の役割に注目)、マルコフ連鎖

$R_k = T R_{k-1}$  における定常状態  $R_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k R_0$  は、次のように  $v_1$  のみに依存する  $\frac{v_1}{2-p-q}$  となる。  
成分の和は 1

$$\begin{aligned} R_\infty &= \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{V \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} V^{-1} R_0}_{T^k} \\ &= \frac{1}{2-p-q} \left( \begin{array}{|c|} \hline v_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline v_2 \\ \hline \end{array} \right) \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline -1+p & 1-q \end{array} \right) \begin{pmatrix} r_A(0) \\ r_B(0) \end{pmatrix} \quad (\lambda_1^\infty = 1, \lambda_2^\infty \rightarrow 0) \\ &= \frac{1}{2-p-q} \left( \begin{array}{|c|} \hline v_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline v_1 \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} r_A(0) \\ r_B(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{2-p-q} \underbrace{\{r_A(0)v_1 + r_B(0)v_1\}}_{=\{r_A(0)+r_B(0)\}v_1 = Rv_1} = \frac{v_1}{2-p-q} R \end{aligned}$$

例題 3.31

天気は「晴れ」、「雨」、「曇り」が毎日ランダムに起こるのではなく、物理法則に基づいて起こっている。いま、以下のような遷移確率で大気の状態（「晴れ」、「雨」、「曇り」）が変化するという。例えば、今日の天気が「晴れ」のときに（第 1 行）、明日の天気が「晴れ」、「雨」、「曇り」になる確率は、それぞれ、0.5, 0.3, 0.2 である。

$$A^T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 & 0.0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{今日が「晴れ」のとき、明日「晴れ」、「雨」、「曇り」になる確率} \\ \leftarrow \text{今日が「雨」のとき、明日「晴れ」、「雨」、「曇り」になる確率} \\ \leftarrow \text{今日が「曇り」のとき、明日「晴れ」、「雨」、「曇り」になる確率} \end{array}$$

ある季節の中では、天候が同じように変化することをふまえ、この季節における平均的な「晴れ」、「雨」、「曇り」の出現頻度を求めよ。

ヒント: 時間を  $t$  [日] とすると、1 季節は通常 90 日程度 ( $t = 90$ ) であるが、簡単のため  $t \rightarrow \infty$  とするとよい。

上の行列  $A^T$  は便宜上 (感覚的に理解しやすくするため)、転置をとっているので計算する際は  $A$  を用いよ。

【解答】  $t$  日の天気を  $R_t$  とすると、 $R_t = A \underbrace{R_{t-1}}_{AR_{t-2}} = A^2 \underbrace{R_{t-2}}_{AR_{t-3}} = \dots = A^t R_0$  となる。 $A$  をその固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  とそれぞれの固有値に対する固有ベクトル  $v_1, v_2, v_3$  で対角化し、 $A^t$  を計算すると、

$$A = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} V^{-1} \implies A^t = V \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^t \end{pmatrix} V^{-1}$$

となる ( $V$  は  $v_1, v_2, v_3$  を左から順に並べたもので、確率行列の性質 より  $\lambda_1 = 1, |\lambda_2| < 1, |\lambda_3| < 1$ )。  $t \rightarrow \infty$  のとき、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} R_t &= \left( \begin{array}{|c|} \hline v_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline v_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline v_3 \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{|V|} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hline \hline \hline \end{pmatrix}}_{V^{-1} \text{ (ただし, } |V| > 0 \text{ とする)}} R_0 \quad (\lambda_2^\infty \rightarrow 0, \lambda_3^\infty \rightarrow 0) \\ &= \frac{1}{|V|} \left( \begin{array}{|c|} \hline v_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hline \hline \hline \end{pmatrix} R_0 = \frac{1}{|V|} \left( \begin{array}{|c|} \hline v_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline v_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline v_1 \\ \hline \end{array} \right) R_0 = \frac{v_1}{|V|} \end{aligned}$$

となるので (今日の天気が「晴れ」(つまり  $R_0 = (1 \ 0 \ 0)^T$ )、「雨」(つまり  $R_0 = (0 \ 1 \ 0)^T$ )、「曇り」(つまり  $R_0 = (0 \ 0 \ 1)^T$ ) のどれであっても  $\frac{v_1}{|V|}$  となる)、行列  $V$  の行列式と行列  $A$  の固有値  $\lambda_1 = 1$  に対する固有ベクトル  $v_1$  を求めれば良い。

計算を簡単にするため、行列  $A$  を 10 倍した行列  $A' (= 10A)$  の固有値  $\lambda'$  と固有ベクトルを求める ( $A'$  の固有値は  $A$  の固有値の 10 倍、 $A'$  と  $A$  の固有ベクトルは同じ)。  $|A' - \lambda'E| = 0$  となればよいので、

$$\begin{aligned}
 |A' - \lambda'E| &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 7 & 1 \\ 3 & 3 - \lambda & 4 \\ 2 & 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} + (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 32\lambda + 20 = -(\lambda - 10)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0
 \end{aligned}$$

0 を含む第 2 列で余因子展開

より、行列  $A'$  の固有値は  $\lambda' = 10, 2, 1$  であり、行列  $A$  の固有値  $\lambda$  はこれらを  $\frac{1}{10}$  倍した  $\lambda = 1, 0.2, 0.1$  である。行列  $A'$  の固有値  $\lambda' = 10, 2, 1$  それぞれに対する固有ベクトル  $v_1, v_2, v_3$  は以下ようになる (ここでは  $v_1$  の成分が整数になるようにした)。

$$v_1 = \begin{pmatrix} 35 \\ 23 \\ 14 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{固有ベクトルの係数は } c_1 = c_2 = c_3 = 1 \text{ とした}$$

よって、行列  $V$  とその逆行列  $V^{-1}$  は、

$$V = \begin{pmatrix} 35 & -3 & -2 \\ 23 & 1 & 1 \\ 14 & 2 & 1 \end{pmatrix}, V^{-1} = \frac{1}{\underbrace{-72}_{|V|}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -9 & 63 & -81 \\ 32 & -112 & 104 \end{pmatrix} = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -63 & 81 \\ -32 & 112 & -104 \end{pmatrix}$$

となり<sup>10</sup>、

$$R_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} R_t = \frac{v_1}{72} = \begin{pmatrix} \frac{35}{72} \\ \frac{23}{72} \\ \frac{14}{72} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.486 \\ 0.319 \\ 0.194 \end{pmatrix}$$

である。

(補足) 実際の問題を考える際は、「確率行列は  $1 (= \lambda_1)$  と 1 より小さい固有値をもつため、最終的な状態が  $\lambda_1 = 1$  に対応する固有ベクトル  $v_1$  を行列式  $|V|$  で割ったものとなる」ことは既知として良いので、固有値と固有ベクトル、および、 $|V|$  だけを求めれば良い (つまり単なる固有値問題を解く問題で、 $V^{-1}$  を求める必要はない)。

<sup>10</sup> 今回のように  $|V| = -72 < 0$  の場合、 $V^{-1}$  の第 1 行の成分が全て負 (-1) になるので、その場合、 $|V|$  の - を行列のなかに入れば、第一行の成分がすべて 1 になる。また、72 は確かに  $v_1$  の成分の和に一致する。定常状態は  $v_1$  にのみ依存するので  $V^{-1}$  を必ずしも求める必要はない。

# 第4章 常微分方程式

## 4.1 常微分方程式の基本的な解法

### 4.1.1 常微分方程式の基本事項

常微分方程式とは、関数  $x(t)$ 、その微分  $\frac{dx}{dt}$ 、および、その2回微分  $\frac{d^2x}{dt^2}$  などを含む式であり、関数  $x(t)$  が満たすべき条件式である。常微分方程式を解くとは、関数  $x(t)$  そのものを求めることを意味する。

常微分方程式は、関数  $x(t)$  の時間変化 (つまり、 $t$  の一回微分  $\frac{dx}{dt}$ ) の項を含むことが多いが、これは単に関数  $x$  の変化傾向を教えてくれるだけであり、任意の初期条件を与えない限り、解  $x$  は一通りに (一意に) は決まらない。例えば、気温が1時間に5度ずつ上昇する状況 (つまり、 $\frac{dT}{dt} = 5$  [ $^{\circ}\text{C}/\text{hr}$ ]) を考えてみる。温度の上昇率が分かっていたとしても、今 ( $t = 0$ ) の気温が何  $^{\circ}\text{C}$  が分からなければ、3時間後の気温が何  $^{\circ}\text{C}$  になるか分からない (暑くなることしか分からない)。もし、今の気温 (初期条件) が分かれば (例えば、 $T(0) = 10$  [ $^{\circ}\text{C}$ ])、3時間後の気温を、

$$T(3) = \underbrace{T(0)}_{10\text{ }[^{\circ}\text{C}]} + \underbrace{\frac{dT}{dt}}_{5\text{ }[^{\circ}\text{C}/\text{hr}]} \times \underbrace{\Delta t}_{3\text{ }[\text{hr}]} = 25\text{ }[^{\circ}\text{C}] \quad (4.1)$$

というように (一意に) 求めることができる。より一般的に、任意の時間における気温を知りたいのであれば、次のように微分方程式を解けばよい。 $\frac{dT}{dt} = 5$  [ $^{\circ}\text{C}/\text{hr}$ ] の両辺を  $t$  で積分することで

$$\int \frac{dT}{dt} dt = 5 \int dt \quad (4.2)$$

$$T(t) = 5t + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (4.3)$$

というように一般解  $T(t)$  (一般解は「今の気温はさておき時間と共に5度上がる」と一般的なことを言っているだけ) を求め、その後、初期条件 ( $T(0) = 10$ ) を考えることで、積分定数  $C$  を求め、 $T(t) = 5t + 10$  というように解を一意に決定する (特定の初期条件に対する解なので、『特解を求める』ともいう)。このように、微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \phi(x, t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

に初期条件を与えることで、解を一意に求めることを『初期値問題を解く』という。

4.1.2 最も簡単な常微分方程式 ( $\phi(x, t)$  が微分変数  $t$  のみで表される場合)

## 例題 4.1

関数  $x(t)$  に関する次の常微分方程式の初期値問題を解け。ただし、定数  $a, \omega, \lambda$  は、 $a \neq 0, \omega \neq 0, \lambda \neq 0$  とする。

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = at \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \cos \omega t \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^{\lambda t} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

【解答】(1)  $\frac{dx}{dt} = at$  の両辺を  $t$  で積分すると (左辺にある  $x$  は  $t$  の式なので、それを  $t$  で微分した  $\frac{dx}{dt}$  も  $t$  の式であり、右辺も同然  $t$  の式なので両辺を  $t$  で積分する)、

$$\int \frac{dx}{dt} dt = a \int t dt \quad (4.5)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} at^2 + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (4.6)$$

初期条件が、 $x(0) = 0$  なので、 $C = 0$  となり、求める解は  $x(t) = \frac{1}{2} at^2$  となる。

(補足) このように簡単な問題の場合は「 $x$  を  $t$  で微分すると  $at$  になるから、もとの関数  $x$  は  $x = \frac{1}{2} at^2 + C$ 」と瞬殺しても良い。

(2)  $\frac{dx}{dt} = \cos \omega t$  の両辺を  $t$  で積分すると、

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int \cos \omega t dt \quad (4.7)$$

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (4.8)$$

初期条件が、 $x(0) = 0$  なので、 $C = 0$  となり、求める解は  $x(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t$  となる。

(3)  $\frac{dx}{dt} = e^{\lambda t}$  の両辺を  $t$  で積分すると、

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int e^{\lambda t} dt \quad (4.9)$$

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (4.10)$$

初期条件が、 $x(0) = 0$  なので、 $C = -\frac{1}{\lambda}$  となり、求める解は  $x(t) = \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1)$  となる。

## 演習 4.1

物体の落下に関する次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = g & (g: \text{定数}) \\ x(0) = h \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \end{cases}$$

【解答】

$$(\text{答}) \quad x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h$$

4.1.3 変数分離型の常微分方程式 ( $\phi(x, t) = f(x)g(t)$  と表される場合)

## 例題 4.2

関数  $x(t)$  に関する以下の常微分方程式の初期値問題を変数分離法により解け。

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = xt \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

【解答】(1) 与えられた微分方程式を変形して、左辺を  $x$  のみ、右辺を  $t$  のみにする (変数を右辺と左辺に分離する)。両辺を  $x$  で割ることで、右辺の  $x$  を左辺にもってきたいが、0 で割ることはできないので、 $x(t) = 0$  がこの方程式の解かどうかをまず確認する。 $x(t) = 0$  は、1 つ目の微分方程式を満たすが、明らかに 2 つ目の初期条件を満たさないので  $x(t) \neq 0$  と分かる。1 つ目の微分方程式の両辺を  $x$  で割り、 $dt$  をかけることで変数を分離すると、

$$\frac{dx}{x} = t dt \quad (4.11)$$

となるので、この両辺を積分する (左辺を  $x$  で、右辺を  $t$  で積分する) と、

$$\int \frac{dx}{x} = \int t dt \quad (4.12)$$

$$\log|x| = \frac{1}{2}t^2 + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (\text{補: } \log|x| \text{ を } x \text{ で微分すると } \frac{1}{x}) \quad (4.13)$$

$$x(t) = \pm e^{\frac{1}{2}t^2 + C} = \pm e^C e^{\frac{1}{2}t^2} \quad (4.14)$$

というように 2 通りの解の候補が得られる。初期条件  $x(0) = 1$  より、 $x(0) = \pm e^C = 1$  となるので、解は  $x(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$  となる (厳密には  $-e^C = 1$  となることはないが ( $e^C > 0$  なので)、係数  $\pm e^C$  が 1 になるのが分かったのでこれで十分。微分方程式の左辺に解を代入し、確かに右辺と等しくなることを確かめよ。 )。

(2) 右辺は  $x$  しか含まれていないが、(1) 同様に変数分離法により解くことができる (また、例題 4.1 のように右辺が  $t$  のみの場合も変数分離法で解くことができる (確かめよ))。 (1) と同様に  $x(t) = 0$  は、1 つ目の微分方程式の解にはなるが、2 つ目の初期条件を満たさないので  $x(t) \neq 0$ 。微分方程式の両辺を  $x$  で割り、 $dt$  をかけることで変数分離すると (左辺は  $x$  のみ、右辺は  $t$  のみの関数)、 $\frac{dx}{x} = a dt$  となるので、この両辺を積分する (左辺を  $x$  で、右辺を  $t$  で積分する) と、

$$\int \frac{dx}{x} = \int a dt \iff \log|x| = at + C \quad (C \text{ は積分定数}) \iff x(t) = \pm e^{at+C} = \pm e^C e^{at} \quad (4.15)$$

というように 2 通りの解の候補が得られる。初期条件  $x(0) = 1$  より、 $x(0) = \pm e^C = 1$  となるので、解は  $x(t) = e^{at}$  となる (微分方程式の左辺に解を代入し、確かに右辺と等しくなることを確かめよ)。

## 演習 4.2

次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 \sin t \\ x(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) \\ x(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dt} = xy \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$$

【解答】

$$(答) \quad (1) x = \frac{1}{\cos t + 2} \quad (2) x = \frac{1}{1 + e^{-t}} \left( = \frac{e^t}{e^t + 1} \right) \quad (3) \begin{cases} x = \frac{2}{1 + e^{-2t}} \left( = \frac{2e^{2t}}{e^{2t} + 1} \right) \\ y = \frac{2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} \left( = \frac{2}{e^{2t} + 1} \right) \end{cases}$$

## 演習 4.3

質量  $m$  の落下物体が受ける力は、重力による  $mg$  と落下速度  $v$  に依存する空気抵抗である。次のそれぞれの空気抵抗に対して、落下方向（つまり下方）を正とした  $v(t)$  に関する運動方程式をたて、 $v(0) = 0$  という初期条件のもとでこの方程式を解け。また、十分に高いところから物体を落下させると、その落下速度はある速度（終端速度）以上は速くならない。終端速度を求めよ。

- (1) 落下速度  $v$  に比例する空気抵抗  $kv$  ( $k$  は定数で  $k > 0$ ) を受けるとき（途中、 $a = \frac{mg}{k}$  とせよ）。
- (2) 落下速度  $v$  の 2 乗に比例する空気抵抗  $kv^2$  ( $k$  は定数で  $k > 0$ ) を受けるとき（途中、 $a = \sqrt{\frac{mg}{k}}$  とせよ）。

【解答】

$$(答) \quad (1) \quad v = a \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right), \quad v_{\infty} = \frac{mg}{k} (= a) \quad (2) \quad v = a \left( \frac{1 - e^{-2a\frac{k}{m}t}}{1 + e^{-2a\frac{k}{m}t}} \right), \quad v_{\infty} = \sqrt{\frac{mg}{k}} (= a)$$

## 演習 4.4

地球大気の鉛直方向 (地上が  $z = 0$  で上空が正の方向) の運動方程式は、 $\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F(z)$  と表される。ここで、 $w$  は大気の鉛直風速 [m/s]、 $\rho$  は大気の密度 [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]、 $p$  は気圧 [Pa]、 $g$  は重力加速度 [ $\text{m}/\text{s}^2$ ]、 $F(z)$  は摩擦力 [N] である。台風、低気圧、積乱雲のような鉛直方向の大気の運動が活発な場所を除けば、大気の鉛直方向の運動は水平方向に比べて穏やかであり、 $\frac{dw}{dt} = 0, F(z) = 0$  とみなすことができる。このときの運動方程式  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g$  を静力学平衡の式とよぶ。いま、 $p$  が  $xy$  方向に変化せず、 $z$  方向にのみ変化する場合、 $p$  は  $z$  の 1 変数関数になるので  $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz}$ 、つまり、 $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -g$  となる。次のそれぞれの条件のもと、静力学平衡の式と気体の状態方程式  $p = \rho RT$  を用いて、 $p$  の鉛直変化について求めよ。地上における気圧を ( $p_s$ ) とする。

- (1) 気温が鉛直方向に一定の場合。
- (2) 気温が上空に向かって  $T(z) = T_s - \Gamma z$  で変化する場合 ( $T_s$  は地上気温、 $\Gamma$  は鉛直方向の気温減率 [K/m])。

## 【解答】

$$(答) \quad (1) p(z) = p_s e^{-\frac{g}{RT} z} \quad (2) p(z) = p_s \left( \frac{T_s - \Gamma z}{T_s} \right)^{\frac{g}{R\Gamma}}$$

## 演習 4.5

浴槽 (断面積  $D$ 、深さ  $H$  の直方体) に満たされた水を、断面積  $d$  の栓 (浴槽の底面にある) を開けて抜くことを考える。トリチェリの定理から、浴槽の底から高さ  $h$  に水面があるとき、水の流れる速度は  $\sqrt{2gh}$  ( $g$  は重力加速度) で与えられる。浴槽内の水が減った量と、浴槽から外へ水が抜けた量のバランスを考えることで、水面の高さ  $h(t)$  に関する微分方程式をたて、その初期値問題を解け。また、 $h(t)$  のグラフを書くことで、 $h(t)$  の変化の仕方について説明せよ。

【解答】

$$(答) \quad h(t) = \left( \sqrt{H} - \frac{d\sqrt{2g}}{2D}t \right)^2, \text{下に凸の } t \text{ の二次関数 (} x \text{ 軸と } t = \frac{D}{d} \sqrt{\frac{2H}{g}}, y \text{ 軸と } y = H \text{ で交わる)}$$

## 4.1.4 特性方程式を用いて解く常微分方程式

前節までは、変数  $x(t)$  に対する 1 階の微分 (つまり  $\frac{dx}{dt}$ ) のみが含まれる微分方程式を解いたが、ここではもう少し複雑な微分方程式について扱う。関数  $x(t)$  に関する常微分方程式が

$$\underbrace{\frac{d^n x}{dt^n}}_{n \text{ 回微分}} + \underbrace{a_1(t)}_{t \text{ の関数}} \underbrace{\frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}}_{n-1 \text{ 回微分}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = \underbrace{f(t)}_{\text{非斉次 (せいじ) 項}} \quad (4.16)$$

と表されるとき、 $x(t)$  に関して「線型である」という。線型とは、次数が「1 次」ということである。一見すると、左辺には  $x(t)$  の 2 次以上の高次の項があるように見えるが、たとえば、 $\frac{d^n x}{dt^n}$  は  $x(t)$  を  $t$  で  $n$  回微分する ( $n$  階の微分) という事であって、 $\frac{dx}{dt}$  を  $n$  回かけた  $\left(\frac{dx}{dt}\right)^n$  ( $x$  に関して“ $n$  次(乗)”とは別のものである (つまり、 $\frac{d^n x}{dt^n}$  は  $x$  に関して“1 次”とみなせる)。もし、 $x^2, x \frac{dx}{dt}, x \frac{d^2 x}{dt^2}, \left(\frac{dx}{dt}\right)^n$  など、 $x$  の 2 次以上の項が含まれていれば、それは  $x(t)$  の非線型常微分方程式となり、解析的に解 (解析解) を求めるのが非常に困難 (あるいは不可能) である (計算機などを使って数値的に解 (数値解) を求めることは (その精度はさておき) どんな非線型方程式でも可能 (例: 天気予報))。微分方程式に含まれる最高次の微分の回数が  $n$  であれば、 $n$  階微分方程式 とよぶ。また、右辺の非斉次項とは、たとえば、時間と共に変化する物体に働く力 (外部強制力) などを表す項である ( $f(t) = 0$  の場合、斉次という)。以上を踏まえると、例えば

$$\frac{d^3 x}{dt^3} + x^5 \frac{d^2 x}{dt^2} + t^4 \frac{dx}{dt} + t^5 x = 1 + t + t^2 \quad (4.17)$$

は、 $x(t)$  の 3 階非線型非斉次常微分方程式となる。実際に自然現象を定式化する際、これほど複雑な方程式が出てくることはなく、より簡単な常微分方程式として表せる。ここでは、中でも特に簡単な「関数  $x$ 、あるいは、その微分が含まれる項の係数が定数 (つまり、 $a_i(t)$  が  $t$  の関数ではなく定数) の場合」について扱う。

一般に、 $n$  階線型常微分方程式には以下のような性質がある:

1.  $n$  個の線型独立な解  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  をもつ (これらを『基本解』とよぶ)。
2. 『一般解』 $x(t)$  (初期条件を適用する前の一般的な解) は、基本解の線型結合

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \quad (c_1, c_2, \dots, c_n \text{ は定数}) \quad (4.18)$$

で表せる (個々の基本解  $x_i(t)$  は線型常微分方程式をみだが、そこには  $x$  についての 2 次以上の項がない (線型) ため、 $x_i(t)$  の線型和もその方程式をみだす 例えば  $\frac{dx_1}{dt} = ax_1, \frac{dx_2}{dt} = ax_2$  なら  $\frac{d(x_1 + x_2)}{dt} = a(x_1 + x_2)$  となる)。

関数  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  が「線型独立」かどうかを判断したければ、「すべての  $t$  に対して、

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) = 0 \quad (4.19)$$

が成り立つのは、 $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  のときしかありえない」ことを示せばよい。要するに、線型独立な解とは、互いに影響されず好き勝手に (独立に) 時間変化する関数の組  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  のことで、それぞれがあまりに好き勝手に変化するもんだから、各関数の係数を  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  とでもしない限り、それらの動き (つまり関数の線型結合)  $c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t)$  を 0 にすることができないということである。例えば、 $x_1(t) = t$  と  $x_2(t) = \sin t$  は線型独立であるが (2 つの関数の変化が全く異なるので、全ての  $t$  に対して  $c_1t + c_2 \sin t = 0$  とするには、 $c_1 = c_2 = 0$  しかない)、 $x_1(t) = t^2$  と  $x_2(t) = -t^2$  (常にお互いのことを気にして、逆の符号をとって変化する) は線型独立ではなく、たとえば、 $c_1 = c_2 = 0$  以外にも  $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$  を 0 にするような  $c_1, c_2$  の組が無限に存在する ( $c_1 = c_2$  であればよい)。

とにかく、基本解を見つけることが一般解を求める第一歩 となるが、簡単のため、2 階斉次常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2x = 0 \quad (4.20)$$

の解の候補をより具体的に考えてみる (3 階以上であっても同じように考えることができる)。左辺には関数  $x(t)$  とその 1 階微分、2 回微分が含まれており、それらを定数倍して足しあわせるとゼロ (右辺) になることを表している。複数回微分するにもかかわらず、それらを足しあわせることでもとの関数  $x(t)$  と相殺することが可能な関数といえば、 $e^t, \sin t, \cos t$  くらいしか思いつかない (だれでも思いつきそうな  $t^n$  や  $\log t$  は微分すると、次数が小さくなったり、 $\log$  が無くなる ( $\frac{d(\log x)}{dt} = \frac{1}{t}$ ) ため、これらを解として微分方程式に代入しても、もとの関数  $x(t)$  と相殺できないのは明らかである)。さらに、オイラーの公式  $e^{it} = \cos t + i \sin t$  を思い出せば、 $e^{it}$  の右辺には  $\cos t$  や  $\sin t$  が登場する (つまり、 $e^{it}$  は  $\sin t$  や  $\cos t$  に化けることができる) ので、 $e^{\lambda t}$  を基本解の候補としてみるのが良さそうだと分かる ( $t$  の係数に  $\lambda$  ( $i$  の入った複素数でもよい) をつけておくことで、より一般化し、オイラーの公式から  $\sin t$  や  $\cos t$  にも繋がるようにしている)。これをもとに、以下の例題を考えてみる。

#### 例題 4.3

関数  $x(t)$  に関する以下の 2 階斉次常微分方程式の初期値問題を解け。

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} - 5x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 10x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -1 \end{cases}$$

【解答】(1) 解を  $x(t) = e^{\lambda t}$  と仮定して、方程式に代入すると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} - 5x = 0 \iff \lambda^2 e^{\lambda t} - 4\lambda e^{\lambda t} - 5e^{\lambda t} = 0 \quad (4.21)$$

$$\iff \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \quad (e^{\lambda t} \neq 0) \quad (4.22)$$

$$\iff (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0 \quad (4.23)$$

$$\iff \lambda = 5, -1 \quad (4.24)$$

となる ( $\lambda$  に関する 2 次方程式を特性方程式という)。よって、方程式の一般解は、未定定数  $c_1, c_2$  に対して、

$$x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} \quad (4.25)$$

と表すことができる。 $\frac{dx}{dt} = 5c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t}$  を踏まえ、2 つの初期条件を適用すると、

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 5c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \frac{1}{6} \\ c_2 = \frac{5}{6} \end{cases} \quad (4.26)$$

なので、初期値問題の解は  $x(t) = \frac{1}{6} e^{5t} + \frac{5}{6} e^{-t}$  となる (微分方程式の左辺に解を代入し、確かに右辺と等しくなることを確かめよ)。

(2) 解を  $x(t) = e^{\lambda t}$  と仮定して、方程式に代入すると、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 10x = 0 \iff \lambda^2 e^{\lambda t} + 2\lambda e^{\lambda t} + 10e^{\lambda t} = 0 \quad (4.27)$$

$$\iff \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \quad (e^{\lambda t} \neq 0) \quad (4.28)$$

$$\iff \lambda = -1 \pm 3i \quad (4.29)$$

となる ( $\lambda$  に関する 2 次方程式を特性方程式という)。よって、方程式の一般解は、未定定数  $c_1, c_2$  に対して、

$$x(t) = c_1 e^{(-1+3i)t} + c_2 e^{(-1-3i)t} \quad (4.30)$$

と表すことができる。 $\frac{dx}{dt} = (-1+3i)c_1 e^{(-1+3i)t} + (-1-3i)c_2 e^{(-1-3i)t}$  を踏まえ、2 つの初期条件を適用すると、

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = (-1+3i)c_1 + (-1-3i)c_2 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.31)$$

なので、初期値問題の解は  $x(t) = \frac{1}{2} e^{(-1+3i)t} + \frac{1}{2} e^{(-1-3i)t} = \frac{1}{2} e^{-t} (e^{3ti} + e^{-3ti}) = e^{-t} \cos 3t$  となる (最後にオイラーの公式を用いた)。解を  $x(t) = e^{\lambda t}$  と仮定しただけで、最終的に  $\cos 3t$  が出てきたので、もっともな仮定であったと分かる (微分方程式の左辺に解を代入し、確かに右辺と等しくなることを確かめよ)。

【別解】式 (4.30) を  $x(t) = \{(c_1 + c_2) \cos 3t + i(c_1 - c_2) \sin 3t\} e^{-t}$  まで変形し、式 (4.31) で  $c_1, c_2$  そのものの値ではなく、 $c_1 + c_2$  と  $c_1 - c_2$  の値を求め方法もある (例題 4.5 と例題 4.6 でも同様の方法を使っている)。

## 演習 4.6

次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$(1) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

【解答】

(答) (1)  $x = -e^t + e^{2t}$  (2)  $x = e^{-t} \sin t$  (補足:  $e^{it}, e^{-it}$  など指数に  $i$  が含まれたままにしないように)

## 演習 4.7

(1) 2階線型斉次常微分方程式に対する特性方程式が  $\lambda = 0, 4$  を解に持つ場合、定数係数の2階線型斉次常微分方程式はどのように表されるか? ただし、最高次の係数は1とせよ。また、初期条件  $x(0) = 0, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 1$  のもとで、初期値問題を解け。

(2) 2階線型斉次常微分方程式に対する特性方程式が重解 ( $\lambda = a (\neq 0)$ ) を持つ場合、常微分方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + a^2x = 0 \quad (4.32)$$

と表される。 $x(t) = e^{at}$  は、特性方程式から導かれる唯一の基本解であるが、 $x(t) = te^{at}$  がもう一つの基本解となることが知られている (理由は後述するが、重解を持つ場合このように解く)。 $x(t) = te^{at}$  が基本解となることを方程式に代入することで確認し、初期条件  $x(0) = 1, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$  のもとで、初期値問題を解け。

## 【解答】

$$(答) \quad (1) \frac{dx^2}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} = 0, \quad x = \frac{1}{4}(e^{4t} - 1) \quad (2) \quad x = (1 - at)e^{at}$$

## 演習 4.8

地球大気には地球の自転に伴う見かけの力、コリオリ効果が働く。いま、北半球にある空気塊の東西風を  $u$ 、南北風を  $v$  とし、空気塊にはコリオリ効果のみ働くとする。このとき、空気塊の運動方程式 (慣性振動の式) は

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = fv \\ \frac{dv}{dt} = -fu \end{cases} \quad (4.33)$$

と表すことができる (ただし、コリオリパラメタ  $f$  は北半球なので  $f > 0$ )。初期条件が  $u(0) = 0, v(0) = v_0 (> 0)$  のとき、 $u(t), v(t)$  を求めよ。また、得られた解をもとに空気塊の運動について説明せよ。

【解答】

$$(答) \quad \begin{cases} u(t) = v_0 \sin ft \\ v(t) = v_0 \cos ft \end{cases}, \text{ 周期 } \frac{2\pi}{f} \text{ で半径 } v_0 \text{ の円運動をする}$$

## 4.1.5 行列の対角化を使って解く常微分方程式

線型代数の章で、正方行列をその固有値と固有ベクトルで対角化できることに触れたが、演習4.8のような連立微分方程式は行列の対角化を利用して解くこともできる。いま、2元1次連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (4.34)$$

を考える。  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とすると、連立微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (4.35)$$

と書くことができる。感覚的には  $x = e^{At}$  としたいところだがそれは早合点で、「式(4.34)に  $by$  や  $cx$  が含まれていなければ、 $x = a_1 e^{at}$ ,  $y = a_2 e^{dt}$  というように簡単に解けるので、 $by$  や  $cx$  を消すように行列を対角化してみよう」というのが基本的なコンセプトである。行列  $A$  が固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  と固有ベクトル  $v_1, v_2$  を列とする行列  $V$  を用いて、

$$A = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} V^{-1} \quad (4.36)$$

のように対角化できるとすると<sup>1</sup>、微分方程式は、

$$\frac{dx}{dt} = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} V^{-1}x \quad (4.37)$$

のように表されるので、この式の両辺に前から  $V^{-1}$  をかけることで ( $V^{-1}V = E$  を利用)、

$$\frac{d}{dt}(V^{-1}x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} V^{-1}x \quad (4.38)$$

となる ( $V$  は明らかに  $t$  の関数ではないので  $\frac{d}{dt}$  の中に入れることができる)。あとは、 $x' = V^{-1}x$  とすることで、

$$\frac{dx'}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x' \iff x' = \begin{pmatrix} a_1 e^{\lambda_1 t} \\ a_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

のように  $x'$  について簡単に解くことができ、さらに  $x' = V^{-1}x$  の両辺に前から  $V$  をかけることで ( $VV^{-1} = E$  を利用)、

$$\boxed{x} = Vx' = \left( \begin{array}{|c|} \hline \boxed{v_1} \\ \hline \boxed{v_2} \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_1 e^{\lambda_1 t} \\ a_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = a_1 \boxed{v_1} e^{\lambda_1 t} + a_2 \boxed{v_2} e^{\lambda_2 t} \quad (4.40)$$

というように  $x$  についても解くことができる。つまり、行列  $A$  の固有値問題を解くことで、微分方程式が解けたことになる。

<sup>1</sup>例えば、すべての固有値が異なっていれば、無条件で対角化することができる(十分条件)。

3元以上の連立微分方程式に対しても同様に

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 e^{\lambda_1 t} \\ a_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ a_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = a_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + a_n \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \quad (4.41)$$

となる。行列  $A$  の固有値  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  が  $e$  の指数になっているので、 $\lambda_i$  の値により各項 (各固有ベクトル) の振る舞いを分類することができる。 $\lambda$  は実数だけでなく複素数になることもあるので (例題3.28(4), (5))、例えば、 $\lambda = a + bi$  と書くと (実数のときは  $b = 0$ )、

$$e^{\lambda t} = e^{(a+bi)t} = e^{at} e^{ibt} = e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$$

となるので、各固有ベクトル  $\mathbf{v}_i$  と掛けられている  $e^{\lambda t}$  が、増幅・減衰を表す  $e^{at}$  と振動を表す  $\cos bt + i \sin bt$  との積になることが分かる<sup>2</sup>。このことから、式 (4.41) の各項 (固有ベクトル) の振る舞いは、固有値  $\lambda_i = a_i + ib_i$  の実部  $a_i$  と虚部  $b_i$  により次のように分類される：

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \text{ が実数 } (b_i = 0) \\ \lambda_i \text{ が複素数 } (b_i \neq 0) \end{array} \right. : \left\{ \begin{array}{l} a_i > 0 : \text{増幅} \\ a_i = 0 : \text{一定} \\ a_i < 0 : \text{減衰} \\ a_i > 0 : \text{増幅振動} \\ a_i = 0 : \text{一定振動} \\ a_i < 0 : \text{減衰振動} \end{array} \right. \quad (4.42)$$

<sup>2</sup>振動を表す  $\cos bt + i \sin bt$  には  $i$  が含まれているが、式 (4.41) の各項を足し引きする際に相殺され、 $\cos bt$  あるいは  $\sin bt$  が残るようになる。いずれにしても振動になる。

## 例題 4.4

次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y \\ (x_0, y_0) = (2, -3) \end{cases}$$

【解答】  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とすると、連立微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (4.43)$$

と書くことができるので、行列  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めれば良い。  $|A - \lambda E| = 0$  より、

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0 \iff \lambda = 2, -3$$

なので、行列  $A$  の固有値は  $\lambda = 2, -3$  となり、それぞれに対する固有ベクトル  $v_1, v_2$  は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \iff v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \text{ は定数}) \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 4x + y = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases} \iff v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (c_2 \text{ は定数}) \end{aligned}$$

となる。通常の固有値問題では、固有ベクトルのノルム(長さ)が任意なので係数  $c_1, c_2$  が必要となるが、ここでは以降

の計算が簡単になるように  $c_1 = c_2 = 1$  とする。すると、式(4.40)より、連立微分方程式の解は、

$$x = a_1 \begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + a_2 \begin{bmatrix} v_2 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad (4.44)$$

と書くことができる。初期条件  $(x_0, y_0) = (2, -3)$  を満たすような  $a_1, a_2$  を求めるため、 $t = 0$  とすると、

$$x(t=0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^0 + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^0 \iff \begin{cases} 2 = a_1 + a_2 \\ -3 = a_1 - 4a_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases} \quad (4.45)$$

となるので、求める解は

$$x = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} e^{2t} + e^{-3t} \\ e^{2t} - 4e^{-3t} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

である。

## 演習 4.9

演習 4.8 の  $u(t), v(t)$  についての微分方程式

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = fv \\ \frac{dv}{dt} = -fu \\ (u(0), v(0)) = (0, v_0) \end{cases}$$

を行列を使って解け。

【解答】

$$(答) \quad \begin{cases} u(t) = v_0 \sin ft \\ v(t) = v_0 \cos ft \end{cases}, \text{ 周期 } \frac{2\pi}{f} \text{ で半径 } v_0 \text{ の円運動をする}$$

## 4.2 線型非斉次常微分方程式を解く

前節では、非斉次項がない ( $f(t) = 0$ 、つまり、外部強制力がない) 場合の斉次常微分方程式を扱ったが、ここでは非斉次常微分方程式を考える。ここでのポイントは、非斉次常微分方程式を満たす解 (『特解』、あるいは、『特殊解』という) をなんとかして1つ発見することにある。これにより、問題を斉次方程式に帰着することができる。

### 4.2.1 線型斉次常微分方程式への帰着

定数係数の  $n$  階線型非斉次方程式 ( $a_1, a_2, \dots, a_n$  は定数)

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \quad (4.47)$$

を解く際にやっかいな問題は、右辺にある外部強制力  $f(t)$  が時間  $t$  の関数になっていることである。もし、運よくこの一つの特解  $x_p(t)$  を発見できたとする。すると、その解  $x_p(t)$  はもちろん

$$\frac{d^n x_p}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_p}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx_p}{dt} + a_n x_p = f(t) \quad (4.48)$$

を満たす。嬉しいことに、右辺の  $f(t)$  が両式で変わっていないので、上の式 (4.47) から下の式 (4.48) を引くことで、

$$\frac{d^n (x - x_p)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} (x - x_p)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d(x - x_p)}{dt} + a_n (x - x_p) = 0 \quad (4.49)$$

というように、やっかいだった右辺の  $f(t)$  を消すことができる。  $x_h = x - x_p$  とすると、 $x_h(t)$  の斉次常微分方程式

$$\frac{d^n x_h}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_h}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx_h}{dt} + a_n x_h = 0 \quad (4.50)$$

に帰着できたことがすぐに分かる<sup>3</sup>。あとは、前節と同様にして一般解  $x_h(t)$  を求めることで、非斉次方程式の解を  $x = x_p(t) + x_h(t)$  というように特解  $x_p(t)$  と斉次方程式の一般解  $x_h(t)$  の和で求めることができる。実際にどうやって特解を探すかであるが、一般解は、式 (4.47) で  $f(t) = 0$  (外部強制力なし) としたときに現れる解であることから、その微分方程式 (システム) に内在する、外部強制力と関係のない固有の解とすることができる。一方、特解は、外部強制力が働いたとき (式 (4.47) で  $f(t) \neq 0$ ) に現れる解 であり、システムに内在する固有の変動 (一般解) とは独立な、外部強制力により引き起こされるシステムの変動 (解) を表しているため、特解も外部強制力と同じような形をしていると期待できる。まとめると、非斉次常微分方程式の解  $x = x_p(t) + x_h(t)$  は、外部強制力による外的な変動 (特解) とシステムに元々備わっているシステム自身の内的な変動 (一般解) を足したものといえる。以下、 $f(t)$  の形ごとにかくつかの非斉次常微分方程式を解くことにする。

<sup>3</sup>上の方法は、線型方程式であるが故の利点であり、 $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$  のような微分の2次以上項が含まれている場合はこの方法は使えない。

## 例題 4.5 (非斉次項が多項式の場合)

関数  $x(t)$  に関する以下の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + x = t^2 \\ x(0) = 1 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

【解答】 非斉次項が  $t^2$  なので、特解も同様に  $t$  の 2 次式

$$x_p(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (4.51)$$

で表せると仮定し、方程式に代入すると

$$2a_2 + (a_2 t^2 + a_1 t + a_0) = t^2 \quad (4.52)$$

$$a_2 t^2 + a_1 t + (a_0 + 2a_2) = t^2 \quad (4.53)$$

となる。 $x_p$  は解なので、 $t$  に関係なくこの式が成り立つには、 $t$  のべき乗の各係数が両辺で等しくなる必要があるので、

$$a_2 = 1, a_1 = 0, a_0 + 2a_2 = 0 \iff a_0 = -2, a_1 = 0, a_2 = 1 \quad (4.54)$$

となる。よって、特解は  $x_p(t) = t^2 - 2$  である。一方、方程式で右辺の非斉次項を 0 とした斉次方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \quad (4.55)$$

であり、特性方程式  $\lambda^2 + 1 = 0$  の解  $\lambda = \pm i$  より、一般解は、未定定数  $c_1, c_2$  に対して、

$$x_h(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} = \underbrace{(c_1 + c_2)}_{\cos t} + \underbrace{i(c_1 - c_2)}_{\sin t} \quad (4.56)$$

と表せる。非斉次方程式の解は、特解  $x_p(t)$  と斉次方程式の一般解  $x_h(t)$  の和なので

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = t^2 - 2 + \underbrace{(c_1 + c_2)}_{\cos t} + \underbrace{i(c_1 - c_2)}_{\sin t} \quad (4.57)$$

となる。 $\frac{dx}{dt} = 2t - (c_1 + c_2) \sin t + i(c_1 - c_2) \cos t$  を踏まえ、2 つの初期条件を適用すると、

$$\begin{cases} x(0) = -2 + (c_1 + c_2) = 1 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = i(c_1 - c_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \underbrace{c_1 + c_2}_{\cos t} = 3 \\ \underbrace{i(c_1 - c_2)}_{\sin t} = 0 \end{cases} \quad (4.58)$$

なので  $(c_1, c_2)$  を求めなくても和と差が分かれば十分)、初期値問題の解は  $x(t) = t^2 - 2 + 3 \cos t$  となる (微分方程式の左辺に解を代入し、確かに右辺と等しくなることを確かめよ)。

## 例題 4.6 (非斉次項が指数関数の場合)

関数  $x(t)$  に関する以下の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + x = e^t \\ x(0) = 1 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

【解答】 非斉次項が  $e^t$  なので、特解も同様な形をした

$$x_p(t) = ae^t \quad (4.59)$$

で表せると仮定し、方程式に代入すると

$$ae^t + ae^t = e^t \quad (4.60)$$

となる。 $x_p$  は解なので、 $t$  に関係なくこの式が成り立つには、 $a = \frac{1}{2}$  でなければならない ( $e^t \neq 0$ )。よって、特解は  $x_p(t) = \frac{1}{2}e^t$  となる。一方、方程式で右辺の非斉次項を 0 とした斉次方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \quad (4.61)$$

であり、特性方程式  $\lambda^2 + 1 = 0$  の解  $\lambda = \pm i$  より、一般解は、未定定数  $c_1, c_2$  に対して、

$$x_h(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} = \underbrace{(c_1 + c_2)}_{\cos t} + \underbrace{i(c_1 - c_2)}_{\sin t} \quad (4.62)$$

と表せる。非斉次方程式の解は、特解  $x_p(t)$  と斉次方程式の一般解  $x_h(t)$  の和なので

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \frac{1}{2}e^t + \underbrace{(c_1 + c_2)}_{\cos t} + \underbrace{i(c_1 - c_2)}_{\sin t} \quad (4.63)$$

となる。 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}e^t - (c_1 + c_2) \sin t + i(c_1 - c_2) \cos t$  を踏まえ、2 つの初期条件を適用すると、

$$\begin{cases} x(0) = \frac{1}{2} + (c_1 + c_2) = 1 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{2} + i(c_1 - c_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \underbrace{c_1 + c_2}_{\cos t} = \frac{1}{2} \\ \underbrace{i(c_1 - c_2)}_{\sin t} = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.64)$$

なので ( $c_1, c_2$  を求めなくても和と差が分かれば十分)、初期値問題の解は  $x(t) = \frac{1}{2}(e^t + \cos t - \sin t)$  となる (微分方程式の左辺に解を代入し、確かに右辺と等しくなることを確かめよ)。

(補足) 例題 4.5 の式 (4.56), (4.58) と例題 4.6 の式 (4.62), (4.64) は、つまり、特性方程式の解が純虚数 (例えば、 $\lambda = \pm i\omega$ 、つまり、 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ ) ならば、その解  $x(t)$  を  $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$  と表しても良いことを示している。

例題 4.7 (非斉次項が三角関数の場合)

関数  $x(t)$  に関する以下の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - x = \cos t \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

【解答】 非斉次項が  $\cos t$  なので、特解は  $\sin t$  も含め同様な形をした

$$x_p(t) = a \cos t + b \sin t \quad (4.65)$$

で表せると仮定し<sup>4</sup>、方程式に代入すると

$$-a \sin t + b \cos t - (a \cos t + b \sin t) = \cos t \quad (4.66)$$

$$(b - a) \cos t - (a + b) \sin t = \cos t \quad (4.67)$$

となる。 $x_p$  は解なので、 $t$  に関係なくこの式が成り立つには、 $\cos t, \sin t$  の係数が両辺で等しくなる必要があるので、

$$b - a = 1, \quad a + b = 0 \quad \iff \quad a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2} \quad (4.68)$$

となる。よって、特解は  $x_p(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$  である。一方、方程式で右辺の非斉次項を 0 とした斉次方程式は

$$\frac{dx}{dt} - x = 0 \quad (4.69)$$

であり、一般解は、未定定数  $c$  に対して、

$$x_h(t) = ce^t \quad (4.70)$$

と表せる。非斉次方程式の解は、特解  $x_p(t)$  と斉次方程式の一般解  $x_h(t)$  の和なので

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) + ce^t \quad (4.71)$$

となる。初期条件を適用すると、

$$x(0) = -\frac{1}{2} + c = 1 \quad \iff \quad c = \frac{3}{2} \quad (4.72)$$

なので、初期値問題の解は  $x(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + 3e^t)$  となる (微分方程式の左辺に解を代入し、確かに右辺と等しくなることを確かめよ)。

<sup>4</sup>特解に  $\cos t$  だけでなく、わざわざ  $\sin t$  も含めた理由は、外部強制力 (右辺) の影響がシステムに時間差で伝わることを考慮するためである。  
 $a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \alpha)$  と変形できることから、時間差  $\alpha$  で伝わる外部強制力の影響を想定しているのが分かるだろう。

【別解】定数変化法という方法によっても解くことができる。ただし、途中で計算がやや複雑になることが多いので、特定の場合を除きあまりお勧めしない。先程は特解を求めてから一般解を求めたが、定数変化法ではまず一般解を求める。

与えられた非斉次方程式で右辺の非斉次項を 0 とした斉次方程式  $\frac{dx}{dt} - x = 0$  の一般解は、 $x_h(t) = ce^t$  と表せる ( $c$  は定数)。ここで、右辺を 0 にする前の非斉次方程式の解  $x(t)$  は、一般解  $x_h(t)$  と似た形をしているだろうと期待して、定数  $c$  を  $t$  の関数、つまり、 $c(t)$  に書き換えた  $x(t) = c(t)e^t$  を求める解としてみる (少々都合が良い気もするがこれが意外とうまくいくことがあとで分かる)。一旦、 $c$  を定数から  $t$  の関数  $c(t)$  に拡張してみるが、もし不都合なことが起これば、 $c(t)$  の式は  $t$  の項を含まない定数項のみの式に戻るだろう、という発想である。とにかく、 $x(t) = c(t)e^t$  を非斉次方程式  $\frac{dx}{dt} - x = \cos t$  に代入して、成り立つような  $c(t)$  が見つければよいということなので、試しに代入してみる。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - x &= \cos t && \leftarrow x(t) = c(t)e^t \text{ を代入} \\ \frac{c(t)(e^t)'}{e^t} - \frac{c(t)e^t}{e^t} &= \cos t && \leftarrow c \text{ が定数のときと同じ項で (もちろん) 相殺される} \\ \frac{c'(t)e^t}{e^t} & && \leftarrow c \text{ を変数にした "ツケ" で現れた項 (} c'(t) \text{ は } c(t) \text{ の } t \text{ 微分)} \end{aligned} \quad (4.73)$$

ここで、左辺をよく観察してみる。2 段目の  $\frac{c(t)(e^t)'}{e^t} - \frac{c(t)e^t}{e^t}$  は、 $c$  が定数の場合と全く同じ計算式なので、もちろん各項は相殺され、0 になる ( $c$  が定数である  $x = ce^t$  は、斉次方程式の解なので当然といえば当然である)。また、3 段目の  $c'(t)e^t$  は定数  $c$  を都合よく変数  $c(t)$  にしたことによって現れた項 ( $c(t)$  が定数ではないので微分しても消えない項) であるが、もしこれが右辺の  $\cos t$  と同じになるのであれば、 $x(t) = c(t)e^t$  が方程式を満たす求める解ということになる。定数  $c$  を変数  $c(t)$  に拡張することで、 $c'(t)e^t$  の項に右辺が 0 でない (つまり  $\cos t$  になる) ことのツケを払わせようとするのが、定数変化法のエッセンスである。実際に  $c(t)$  を求めてみる。 $c'(t)e^t = \cos t$  より、 $c'(t) = e^{-t} \cos t$  なので、この式の両辺を  $t$  で積分すると、 $c(t) = \int e^{-t} \cos t dt$  となる。あとは、右辺を演習 2.1(6) のように部分積分法により計算すればよい (この計算が面倒なのがお勧めしない理由である)。 $e^{-t} = (-e^{-t})'$  として部分積分法を使うことで、 $c(t) = \frac{e^{-t}(\sin t - \cos t)}{2} + d$  ( $d$  は定数) となるので、 $x(t) = c(t)e^t = \frac{\sin t - \cos t}{2} + de^t$  に初期条件  $x(0) = 1$  を適用することで、 $d = \frac{3}{2}$  となり、最終的な答え  $x(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + 3e^t)$  が求まる。ここでは 1 階の非斉次常微分方程式について見たが、原理上は 2 階の非斉次常微分方程式でも定数変化法が利用できる。しかし、この例から想像できるように、2 階の場合は、 $c''(t)$  と  $c'(t)$  が入った方程式に "ツケ" を払わせることになるので計算が更に面倒になる (ので絶対にお勧めしない)。定数変化法を使って (ある意味) "力任せ" に解を求めるのもいいが、微分方程式の右辺の外力の時間変化に対して、システムがどう変動 (呼応) するか思いを馳せながら特解を求める方が、方程式を見る力、現象を理解する力につながるだろう (次ページ後半がその良い例だろう)。

なお、演習 4.7(2) で扱ったような 特性方程式が重解をもつ場合には、定数変化法は威力を発揮する (計算も面倒でない)。唯一得られる基本解  $x(t) = ce^{at}$  の定数  $c$  を変数  $c(t)$  にすることで、隠れていたもう一つの基本解  $x(t) = te^{at}$  を見つけることができる。 $x(t) = c(t)e^{at}$  から、 $\frac{dx}{dt} = c'(t)e^{at} + ac(t)e^{at}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2} = c''(t)e^{at} + 2ac'(t)e^{at} + a^2c(t)e^{at}$  なので、

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + a^2x = 0 \quad (4.74)$$

$$[c''(t)e^{at} + \underline{2ac'(t)e^{at}} + \underline{a^2c(t)e^{at}}] - \underline{2ac'(t)e^{at}} - \underline{2a^2c(t)e^{at}} + \underline{a^2c(t)e^{at}} = 0 \quad (4.75)$$

$$c''(t)e^{at} = 0 \quad (4.76)$$

$$c''(t) = 0 \quad (e^{at} \neq 0) \quad (4.77)$$

となる。これより、 $c'(t) = m$  ( $m$  は定数) であり、 $c(t) = mt + n$  ( $n$  は定数) と分かる。よって、一般解  $x(t)$  は、

$$x(t) = c(t)e^{at} = (mt + n)e^{at} = mte^{at} + ne^{at} \quad (4.78)$$

となる。式 (4.74) から (4.77) の左辺の変形を見ると分かるように、特性方程式が重解をもつ場合、 $c(t)$  や  $c'(t)$  の項が相殺され  $c''(t)$  の項のみとなるので、このように容易に解を求めることができる。しかも、式 (4.78) の最右辺第 1 項には 隠れていた基本解  $te^{at}$ 、第 2 項には 唯一得られていた基本解  $e^{at}$  が含まれており、得られていた唯一の基本解  $x(t) = ce^{at}$  の定数  $c$  を変数  $c(t)$  に変化 (拡張) させただけで、これら基本解の線型結合が自然に一般解として求まったことになる。

あとは、一般解  $x(t) = (mt + n)e^{at}$  に初期条件  $x(0) = 1$ ,  $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0$  を適用することで特解を求めればよく、

$$\begin{cases} x(0) = ne^0 = n = 1 \\ \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = [me^{at} + (mt + n)ae^{at}]_{t=0} = m + an = 0 \end{cases} \quad (4.79)$$

となることから、 $m = -a, n = 1$ 、つまり、 $x(t) = (-at + 1)e^{at}$  となる。

別解として、 $\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + a^2x = \frac{d^2x}{dt^2} - a\frac{dx}{dt} - a\frac{dx}{dt} + a^2x = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} - ax \right) - a \left( \frac{dx}{dt} - ax \right) = 0$  と変形できる

(特性方程式が重解をもてば必ずこうなる) ことを利用してもよい (一階の微分方程式を 2 回解くだけなので少し簡単だろう)。

$X = \frac{dx}{dt} - ax$  とおくと、 $\frac{dX}{dt} - aX = 0$ 、つまり、 $X = ce^{at}$  ( $c \neq 0$ ) なので ( $c = 0$  は意味がない解)、

$\frac{dx}{dt} - ax = ce^{at}$  ( $= X$ ) を解けばよい。しかし、一般的な解法である  $x = e^{at}$  の代入をすると、 $0 = ce^{at}$  ( $c \neq 0$ ) となり解

が求まらない。これは  $e^{at}$  が右辺の外力であると共に、右辺 = 0 としたときのシステムの解 (固有の解) だからである。シ

ステムの固有の解と同じ周期の力を外から加えると、相乗効果 (例えば共鳴) によりシステムの振る舞い (振幅) が時間と

共に複雑に変化しそうなことは想像しやすい (例えば、大きな鐘も”うまく”力を加えると動く)。そこで、相乗効果を考慮

するため、振幅  $f(t)$  を時間変化させる解  $x = f(t)e^{at}$  を考え、これを代入する。すると、 $f'(t) = c$  となり (確認せよ)、

これを積分することで、時間と共に振幅  $f(t)$  が変化する解  $f(t) = ct + d$  が得られる。あとは式 (4.79) と同様である。

## 演習 4.10

次の常微分方程式の初期値問題を解け。ただし、 $\omega > 0, \omega_0 > 0, \omega \neq \omega_0$  とする。

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} - x = t^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x = e^{2t} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x = e^{-2t} \sin 3t \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 9x = e^{-4t} \cos 5t \\ x(0) = 0 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = t^2 \\ x(0) = 1 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = \cos \omega_0t \\ x(0) = 0 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

【解答】

(答) (1)  $x = -t^2 - 2t - 2 + 3e^t$     (2)  $x = \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t}$     (3)  $x = -\frac{1}{3}e^{-2t} \cos 3t + \frac{1}{3}e^{-2t}$

(4)  $x = -\frac{1}{40}e^{-4t} \sin 5t + \frac{1}{24} \sin 3t$     (5)  $x = t^2 - 4t + 6 - 5e^{-t} - te^{-t}$

(6)  $x = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega_0 t - \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t$

# 第5章 ベクトル解析

## 5.1 内積と外積

### 5.1.1 内積

2つの3次元ベクトル  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  の内積  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  は、ベクトルのなす角  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ , 始点をそろえた上でのなす角(図 5.1)) とベクトルの大きさ(ノルム)  $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$  を用いて、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (5.1)$$

と定義される。特に、ベクトルが直交するとき、内積は0 ( $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ) になる。

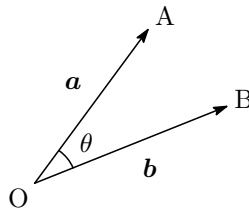


図 5.1 ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  とそれらのなす角  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ )。

また、内積は  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の成分を使って表すこともできる。 $\triangle OAB$ (図 5.1) で余弦定理を考え、 $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, |\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$  を利用すると、

$$\begin{aligned} \underbrace{|\underbrace{\mathbf{b} - \mathbf{a}}_{\overline{AB}}|^2}_{= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2 \underbrace{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta}_{\text{内積の定義式}} \quad \leftarrow \text{辺 AB に対する余弦定理} \\ \underbrace{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta}_{= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} &= \frac{1}{2} \left[ \underbrace{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - \{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2\}}_{= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} \right] \end{aligned}$$

となるので、内積は以下のように表される。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (5.2)$$

この式の中辺と右辺を使うことで、余弦定理よりも簡単にベクトルのなす角  $\theta$  を求めることができる。例えば、 $\mathbf{a} = (2, -1, 2), \mathbf{b} = (-1, 1, 0)$  のなす角  $\theta$  は、 $|\mathbf{a}| = \sqrt{4+1+4} = 3, |\mathbf{b}| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}, a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = -2 - 1 + 0 = -3$  から  $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 、つまり、 $\theta = \frac{3}{4}\pi$  となる。

3つのベクトル  $a, b, c$  の内積には以下のような性質が成り立つ。

- (1)  $a \cdot b = b \cdot a$  (対称性)
- (2)  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- (3)  $a \cdot a = |a|^2 \geq 0$  (内積の定義で  $\theta = 0$ )
- (4)  $a = 0 \iff a \cdot a = 0$  (内積の定義で  $|a| = 0$ )
- (5)  $|a \cdot b| \leq |a| |b|$  シュワルツの不等式 (内積の定義と  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  から)
- (6)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  三角不等式 (三角形の3辺についての関係式)

### 5.1.2 内積って何のために必要?

内積を定義しておくことで、ベクトルのなす角度を求める他に便利なことがある。いま、立方体のある面  $S$  を斜めに貫く流れ(ベクトル)  $F$  がある場合(図5.2)、面  $S$  に垂直な  $F$  の成分(大きさ)は、面  $S$  に垂直な外向きの単位ベクトル  $n$  (法線ベクトル) と  $F$  の内積  $F \cdot n$  の値そのものである ( $F \cdot n = |F| \cos \theta$  を  $F$  の  $n$  方向への正射影成分とよぶ)。これは成分で考えると当たり前のことだとすぐ分かる。例えば、 $xyz$  空間に  $F = (3, 0, 2)$  という  $yz$  平面を斜めに通過する流れ場があったとき(図5.2の  $F$  の始点が原点、斜線のかかった面が  $yz$  平面と思うと良い)、 $yz$  平面を垂直に通過する成分(この場合、明らかに  $F$  の  $x$  成分)は3であるが、これは、 $x$  軸方向の単位ベクトル  $n = (1, 0, 0)$  と  $F$  との内積を考えると、 $F \cdot n = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 3$  と求めることができる(角度  $\theta$  の情報を一切使わずに正射影成分を求められた)。

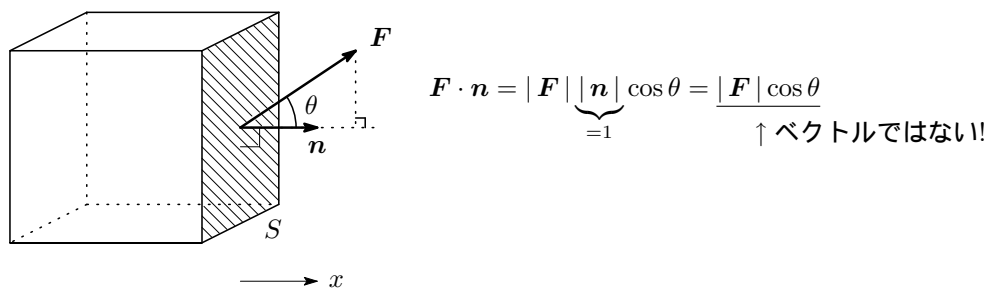


図5.2 面  $S$  を斜めに貫く  $F$  と面  $S$  の単位法線ベクトル  $n$ 。  $F$  のうち面  $S$  を貫くベクトルは  $(F \cdot n)n$  となる。

この単位ベクトルとの内積の性質は、ある面を貫く流れのみならず、「あるベクトル  $x$  の任意の方向の成分(大きさ)を求めたい」という場合にも使うことができ、分解したい方向の単位ベクトルを用意し、 $x$  との内積を計算するだけで、内積の値が求めたい成分(大きさ)そのものになる。たとえば、 $x = (6, 8)$  を  $y = x$  に射影したときの成分は、 $y = x$  の方向を表す単位ベクトル  $n = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  との内積を考えることで、 $x \cdot n = \frac{6+8}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$  となる。内積は、大きさであり、ベクトルではないので、もしベクトルが必要なら単位ベクトル  $n$  を添えた  $7\sqrt{2}n = (7, 7)$  とすればよい。

## 5.1.3 グラムシュミットの直交化

ここでは、1次独立な(ともに0でなく、同じ方向を指していない)2つのベクトルを直交化することを考える。2つのベクトル  $a, b$  (図 5.3 中央) を「直交化する」と聞くと、2つのベクトルの始点を固定したまま共に回転させ、なす角度を90度にしたくなるかもしれないが(図 5.3 左)、内積を使うためには、片方のベクトルを固定し、他方のベクトルを回転させるほうが実は都合が良い(図 5.3 右)。

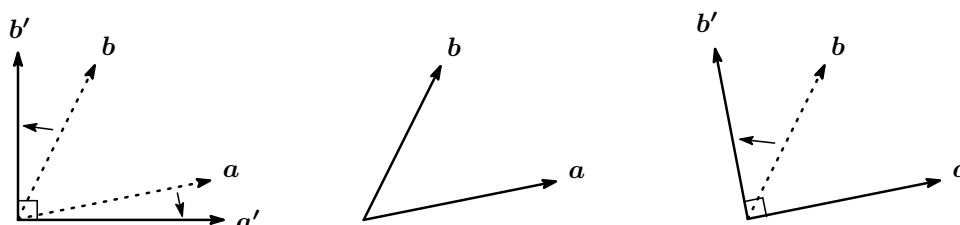


図 5.3  $a, b$  (中央) の直交化は、 $a, b$  を共に回転させるのではなく(左)、 $a$  を固定して  $b$  のみ回転させる(右)。

いま、 $a$  を固定し、 $b$  を回転させることで、 $a$  と直交する  $b'$  を求めてみる。 $b'$  は図 5.4 の  $\overline{HB}$  と平行なので( $H$  は  $b$  の終点  $B$  から  $a$  におろした垂線の足)、 $\overline{HB}$  を  $a, b$  を含んだ式で表せば、 $a$  に直交するベクトルが得られたことになる。

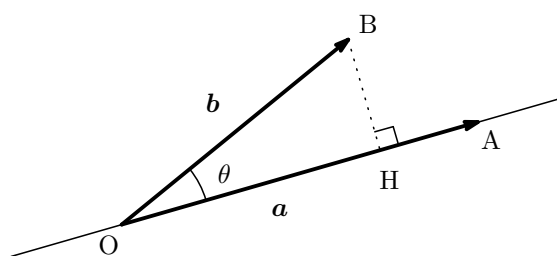


図 5.4  $B$  から  $a$  におろした垂線の足を  $H$  とすると、 $a$  に直交する  $\overline{HB}$  を求めれば良い。 $\theta$  は、 $a$  と  $b$  のなす角。

いま、 $\overline{OH} + \overline{HB} = \overline{OB}$ 、つまり、 $\overline{HB} = \overline{OB} - \overline{OH}$  なので、 $\overline{HB}$  を求めるためには、 $\overline{OH}$  が分かればよい。 $OH = |b| \cos \theta$ 、 $a$  の単位ベクトルが  $\frac{a}{|a|}$  と表わせることから、 $\overline{OH} = (|b| \cos \theta) \frac{a}{|a|}$  となる。ここで、 $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$  であることに注意すると、

$$\overline{OH} = (|b| \cos \theta) \frac{a}{|a|} = \underbrace{|a| |b| \cos \theta}_{=a \cdot b} \frac{a}{|a|^2} = \frac{a \cdot b}{|a|^2} a \quad (5.3)$$

とかけるので(前ページを踏まえ、 $\overline{OA}$  方向の単位ベクトル  $n = \frac{a}{|a|}$  により、 $\overline{OH} = (b \cdot n)n$  と求めてもよい)、 $\overline{HB}$  は、

$$\overline{HB} = \overline{OB} - \overline{OH} = b - \frac{a \cdot b}{|a|^2} a \quad (5.4)$$

となる。直交化したあとのベクトルを  $e_1, e_2$  と書くことにすると、

$$\begin{cases} e_1 = a \\ e_2 = b - \frac{e_1 \cdot b}{|e_1|^2} e_1 \end{cases} \quad (5.5)$$

となる。直交化して得られた  $e_1, e_2$  は、当然  $e_1 \cdot e_2 = 0$  を満たすが、必ずしもノルムが 1 になっているわけでは無いので、単位ベクトルが必要であれば、 $e_1, e_2$  の各ノルムで割る (正規化する) とよい。2 つの単位ベクトル  $e_i, e_j$  が直交しているとき、「正規直交性をもつ」といい、クロネッカーのデルタ  $\delta_{ij}$  を用いて次のように書く。

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad (5.6)$$

ある平面をベクトルで表したいとき、平面上の 1 次独立な 2 つのベクトルを適当に用意すれば十分だったが、もしグラムシュミットの直交化とノルムによる正規化によって正規直交性をもつ 2 つのベクトルを用意できれば、のちの計算でいろいろと都合が良くなる。また、物理学では、観測データを直交関数<sup>1</sup>で展開 (直交関数展開) することをしばしば行なう。例えば、時刻  $t$  における地表面全地点  $(x, y)$  での気温  $T(x, y, t)$  を、

$$T(x, y, t) = \bar{T}(x, y) + \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(x, y)$$

というように分解 (展開) することがある。その際、場の関数  $\Phi(x, y)$  に「できるだけ意味のある正規直交したもの」を用意できれば、各モード  $i$  の時間変化する振幅  $a_i(t)$  の大小に注目することで、どのモード  $i$  がいつ卓越していたか、といったと問いに簡単に答えることができるようになる (右辺第 2 項が同じ大きさ (ノルム) の  $\Phi_i(x, y)$  の足し合わせなので、時間変化するその係数  $a_i(t)$  が大きいほど左辺への寄与が大きくなるということ)。第 4.1.5 章「行列の対角化を使って解く微分方程式」で、方程式の解  $x$  が固有ベクトル  $v$  の線形結合によって、 $x = a_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + a_n v_n e^{\lambda_n t}$  (式 4.41) と表せることを扱ったが、もし固有ベクトルが互いに直交していれば (例えば、行列  $A$  が対称行列であれば、固有ベクトルは互いに直交する)、これも直交関数展開とよぶことができる。

<sup>1</sup>球面調和関数、ルジャンドル関数、三角関数、経験的直交関数など様々な関数がある。

## 演習 5.1

(1) 互いに直交していない3つの独立した3次元ベクトル  $a, b, c$  (いずれも単位ベクトルでない) に対して、グラムシュミットの直交化を施したものを  $e_1, e_2, e_3$  とする。 $e_1, e_2, e_3$  は、

$$\begin{cases} e_1 = a \\ e_2 = b - \frac{e_1 \cdot b}{|e_1|^2} e_1 \\ e_3 = c - \frac{e_1 \cdot c}{|e_1|^2} e_1 - \frac{e_2 \cdot c}{|e_2|^2} e_2 \end{cases}$$

と表せる。 $e_3$  についての式を導け。

(2) 3つのベクトル  $a = (1, 1, 1), b = (1, 2, 0), c = (1, -2, -2)$  を互いに直交する単位ベクトルにせよ。

【解答】(1) いま、 $e_1$  と  $e_2$  はすでに直交化 ( $e_1 \cdot e_2 = 0$ ) されている ( $x$  軸と  $y$  軸をイメージすると良い)。  $c$  を  $e_1, e_2$  と順に直交化させるとよい (もちろん逆順でもよい)。  $c$  を  $e_1$  と直交化した  $c'$  は、問題文の  $e_2$  の式を踏まえれば ( $b \rightarrow c$ )、

$$c' = c - \frac{e_1 \cdot c}{|e_1|^2} e_1$$

となる。 $c'$  をさらに  $e_2$  と直交化したものが  $e_3$  なので、同様に踏まえるとよい。

$$\begin{aligned} e_3 &= c' - \frac{e_2 \cdot c'}{|e_2|^2} e_2 \\ &= \underbrace{\left( c - \frac{e_1 \cdot c}{|e_1|^2} e_1 \right)}_{=c'} - e_2 \cdot \underbrace{\left( c - \frac{e_1 \cdot c}{|e_1|^2} e_1 \right)}_{=c'} \frac{e_2}{|e_2|^2} \\ &= c - \frac{e_1 \cdot c}{|e_1|^2} e_1 - \left( e_2 \cdot c - \frac{e_1 \cdot c}{|e_1|^2} \underbrace{e_2 \cdot e_1}_{=0} \right) \frac{e_2}{|e_2|^2} = c - \frac{e_1 \cdot c}{|e_1|^2} e_1 - \frac{e_2 \cdot c}{|e_2|^2} e_2 \end{aligned}$$

(2) (1) の式にあてはめることで規格化されていない  $e'_1, e'_2, e'_3$  を求めてから、各ベクトルのノルム  $|e'_i|$  で割り (規格化し)、 $e_1, e_2, e_3$  を求めるとよい。

$$\begin{cases} e'_1 = (1, 1, 1) \\ e'_2 = (1, 2, 0) - \frac{(1, 1, 1) \cdot (1, 2, 0)}{(\sqrt{1+1+1})^2} (1, 1, 1) = (0, 1, -1) \\ e'_3 = (1, -2, -2) - \frac{(1, 1, 1) \cdot (1, -2, -2)}{(\sqrt{1+1+1})^2} (1, 1, 1) - \frac{(0, 1, -1) \cdot (1, -2, -2)}{(\sqrt{0+1+1})^2} (0, 1, -1) = (2, -1, -1) \end{cases}$$

となるので、各ベクトルのノルムで規格化すると以下ようになる。

$$e_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), e_2 = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), e_3 = \left( \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

(補足)  $a$  を  $e_1$  (動かさないベクトル) としたが、 $b$  や  $c$  を  $e_1$  とすると答えは当然異なる (が、もちろん直交する)。

## 5.1.4 正規直交関数展開

一般に、 $n$ 次元ベクトル  $p_i$  が正規直交性  $p_i \cdot p_j = \delta_{ij}$  を満たしているとき、任意の  $n$ 次元ベクトル  $x$  は、

$$x = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n \quad (5.7)$$

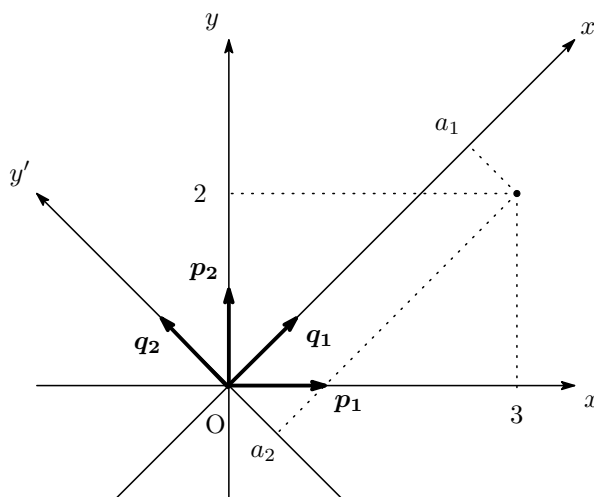
と展開することができ、このときの  $p_i$  のことを正規直交基底と呼ぶ。展開係数  $a_i$  が決まらないことには展開したことにならないが、正規直交性  $p_i \cdot p_j = \delta_{ij}$  をふまえれば、上式の各辺と  $p_i$  の内積を考える (両辺に「 $p_i \cdot$ 」を施す) ことで、

$$p_i \cdot x = a_1 \underbrace{p_i \cdot p_1}_{=0} + a_2 \underbrace{p_i \cdot p_2}_{=0} + \cdots + a_i \underbrace{p_i \cdot p_i}_{=1} + \cdots + a_n \underbrace{p_i \cdot p_n}_{=0} \iff a_i = p_i \cdot x \quad (5.8)$$

のように  $a_i$  以外の項を消すことができる。2次元ベクトル  $x = (3, 2)$  で具体的な例を考えてみる。このベクトルの場合、暗黙のうちに  $p_1 = (1, 0), p_2 = (0, 1)$  という正規直交基底 (つまり、 $p_1$  が  $x$  軸方向、 $p_2$  が  $y$  軸方向) を想定しているので、 $x = 3p_1 + 2p_2$  と展開されるのは容易に分かる (当然、 $p_1$  の係数 3 は  $x$  座標を、 $p_2$  の係数 2 は  $y$  座標を表す)。しかし、正規直交基底を  $p_1 = (1, 0), p_2 = (0, 1)$  にとっても何の面白みもないので、いま、2つのベクトル

$$q_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad q_2 = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (5.9)$$

を正規直交基底に選んで ( $x'$  軸が  $q_1$  方向、 $y'$  軸が  $q_2$  方向)、 $x = a_1 q_1 + a_2 q_2$  と正規直交展開することを考える (下図)。



展開係数  $a_1, a_2$  (つまり、 $x'y'$  平面での座標  $(a_1, a_2)$ ) を図から求めるのは大変だが、式 (5.8) のように  $x = a_1 q_1 + a_2 q_2$  と  $q_1, q_2$  の内積 (例えば、 $a_1$  を求めるなら  $q_1$  との内積) を考えることで、展開係数を簡単 (形式的) に求めることができる。

$$a_1 = q_1 \cdot x = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}, \quad a_2 = q_2 \cdot x = \frac{-3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.10)$$

このように、選んだベクトル (関数) が正規直交性さえもてば、任意のベクトル (関数) を簡単に正規直交展開できる<sup>2</sup>。

<sup>2</sup>実は、正規 (ノルムが 1) であることと直交であることは必要なく、用意するベクトルが一次独立でありさえすれば (その展開に意味があるかどうかは別として) 展開することは可能 (例: 高校数学『 $a = (7, -3), b = (2, -3), c = (1, 1)$  のとき、 $a = mb + nc$  を満たす  $m, n$  を求めよ。』)

## フーリエ解析も直交展開の1例

フーリエ級数展開とは、任意の連続関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (5.11)$$

というように 様々な周期  $\frac{2\pi}{k}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) の三角関数の和で表す というもので、そこでは

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \pi \delta_{mn}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \pi \delta_{mn} \quad (5.12)$$

という三角関数の直交性が用いられている。例えば、周期  $\frac{2\pi}{k}$  の波の係数 (振幅) である  $a_k$  であれば、式 (5.11)

の両辺に  $\cos kx$  をかけて  $-\pi$  から  $\pi$  まで積分することで、以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx}_{=0} + a_1 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos kx \, dx}_{=0} + b_1 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos kx \, dx}_{=0} \\ &\quad + a_2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos kx \, dx}_{=0} + b_2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos kx \, dx}_{=0} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + a_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos kx \, dx}_{=\pi} + b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx \, dx}_{=0} \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (5.14)$$

一見すると、先ほどのベクトルによる直交展開と別物のようだが、 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$  という定積分は、「2つの関数  $f(x)$  と  $\cos kx$  の積を  $x = -\pi$  から  $x = \pi$  まで足している」ので、これも広義の内積と考えることができる (ベクトルの内積は離散的に定義され、関数の内積は連続的に定義される)。式 (5.12) のそのほかの定積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$$

についても「2関数についての内積」と捉えることができ、「三角関数同士の内積が0または $\pi$ になる (三角関数の直交性)」ということを表している。

例えば、つくば市の気温データ (6時間ごと) をグラフで描くと、冬寒くて夏暑いという大きな年変動や、朝夕は寒くて昼は温かいという日変動がもっとも目立つ変化として現れるだろう。グラフを描かなくても、この気温データにフーリエ展開を施し、振幅 (展開係数)  $a_k, b_k$  の大きさに注目 (スペクトル解析という) することで、様々な時間スケールの変動 (右辺各項) のうちのどの時間スケールの変動が元の気温場 (左辺) に大きな影響を及ぼすかを知ることができる (つくばの気温の場合、年変動の振幅  $a_k, b_k$  が一番大きいと簡単に想像がつかだろう)。

## 5.1.5 外積

2つのベクトル  $a, b$  の内積  $a \cdot b$  はスカラーであったが、ベクトルの積もまたベクトルとなる『外積』というものを定義する。外積  $a \times b$  を、図 5.5 にあるような  $a$  と  $b$  に垂直なベクトル ( $a, b$  のつくる平面の法線ベクトル) で、その大きさ  $|a \times b|$  は  $a, b$  を 2 辺とする平行四辺形 (斜線部) の面積に等しい (つまり、 $|a \times b| = \underbrace{|a|}_{\text{底辺}} \underbrace{|b| \sin \theta}_{\text{高さ}}$ ) と定義する ( $\theta$  は  $a$  と  $b$  のなす角で  $0 \leq \theta \leq \pi$ )。

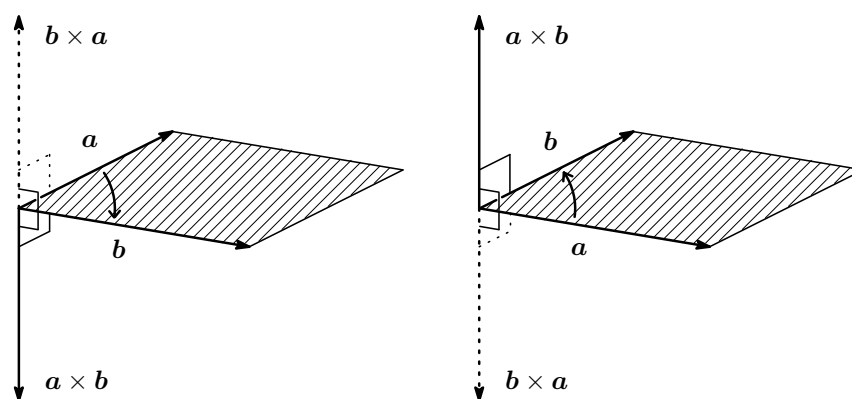


図 5.5 外積  $a \times b, b \times a$  と  $a, b$  の関係。この図から、 $a \times b = -b \times a$  であることも分かる。

外積  $a \times b$  の向きは、注意が必要である。いま、 $a$  と  $b$  が机の上にあり、 $a$  を時計回りに回転させ  $b$  に重ねることを考える。この際、 $a$  を 180 度以上回転させてはいけないというルールを決めておく (つまり、なす角  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) だけ回転)。もし、 $a$  を時計回りに 180 度以上回転しなくてはならないと思うなら (図 5.5 右の状況)、机の下から  $a, b$  を見上げることで、 $a$  を時計回りに 180 度以下回して  $b$  と重ねることができると気づくだろう (この場合、机の上からは反時計回りの回転)。いずれにしても、机の上 (図 5.5 左)、あるいは、机の下 (図 5.5 右) から見ることで、 $a$  を時計回りに 180 度以下回して  $b$  に重ねることができ。いま、机の上と下、それぞれその状況で、 $a, b$  の原点に「右ネジ」を打ち付ける<sup>3</sup> (ネジの尖った方を原点にあて、ネジを時計回りに回す) ことを考える。この時の ネジの進む方向が  $a \times b$  の方向である<sup>4</sup>。

2つのベクトル  $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$  の外積  $a \times b$  (ベクトル) も、内積同様にベクトルの成分により

$$a \times b \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k \quad (5.15)$$

と書くことができる。第 1 列がベクトル  $i, j, k$  になっているが、通常の行列式と同じように、サラスの方法、あるいは、余因子展開 ( $i, j, k$  を基準に、それらの入ってる行と列を除いた小行列の行列式を考えよ) を用いて計算をすればよい。

<sup>3</sup>日本では、ほとんどのネジは時計回りに回すとネジが閉まる (ネジ穴に進む) ようにできているが、このようなネジを右ねじという。

<sup>4</sup>別の言い方もあげておく。 $xyz$  座標系で  $a, b$  を  $xy$  平面上に置く場合、 $a$  を  $x$  軸に重ねたとき、 $b$  が第 1-2 象限 ( $y > 0$ ) にくれば、 $z$  軸の方向が  $a \times b$  の方向で、逆に  $b$  が第 3-4 象限 ( $y < 0$ ) にくれば、 $z$  軸と逆向きが  $a \times b$  の向きである。

3つのベクトル  $a, b, c$  に対して、外積に関する以下のような性質が成り立つ。

$$(1) \quad a \times b = -(b \times a)$$

$$(2) \quad a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c), \quad (a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

$$(3) \quad a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$$

$$(4) \quad a \cdot (a \times b) = 0, \quad b \cdot (a \times b) = 0 \quad (\text{外積の定義より、} a \times b \text{ は元のベクトル } a, b \text{ に直交})$$

$$(5) \quad a \times a = 0 \quad (\text{外積の定義で } \theta = 0)$$

$$(6) \quad (a \neq 0, b \neq 0 \text{ のとき}) \quad a \times b = 0 \iff a // b \quad (\text{外積の定義で } \theta = 0)$$

### 演習 5.2

つぎの各  $a, b$  に対して、 $a \times b$  を求めよ。また、 $a \times b$  が  $a, b$  と直交していることを確認せよ。

$$(1) \quad a = (2, -3, 2), b = (-1, 0, 1) \quad (2) \quad a = (-3, 2, 1), b = (1, 2, -1)$$

$$(3) \quad a = (1, 1, -2), b = (-2, -2, 4) \quad (4) \quad a = (-1, -1, 3), b = (0, 2, 0)$$

【解答】

(答) (1)  $a \times b = (-3, -4, -3)$  (2)  $a \times b = (-4, -2, -8)$  (3)  $a \times b = (0, 0, 0)$  (4)  $a \times b = (-6, 0, -2)$

## 5.2 場の勾配を表すナブラ

1 階の偏微分  $\frac{\partial}{\partial x}$  や  $\frac{\partial}{\partial y}$  が傾きを表すことは微分の章 (第 1 章) でふれたが、ここではこれらの偏微分演算子をベクトルの成分として書いた  $\nabla$  (ナブラ) について扱う。2 次元の  $xy$  平面の場合、

$$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (5.16)$$

と表され、3 次元の  $xyz$  空間の場合、

$$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (5.17)$$

と表される。いま、2 次元の場合を考える。 $\nabla$  はベクトルのように見えるが、偏微分演算子なので、 $x = (2, 3)$  のようにベクトルとして描くことができない。しかし、気温のような スカラー場  $T(x, y)$  と合わせた

$$\nabla T \equiv \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (5.18)$$

を考えることで、はじめてベクトルとなる (勾配 (gradient) の頭文字をとって、 $\nabla T$  を grad  $T$  と書くこともある)。偏微分が傾きを表すことから、これを「勾配ベクトル」とも呼ぶ。 $T(x, y)$  が  $xyz$  空間の平面や曲面を表していることを踏まえれば、勾配ベクトルがこの面の何らかの傾きを表していると想像できるだろう。

では、具体的に勾配ベクトルがどのようなものか見てみる。例えば、図 5.6 のように北に向かって気温が上がる場 (平面)  $T(x, y) = 20y + 300$  [K] があつたとする。このとき、気温の勾配ベクトルは、 $\nabla T = \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right) = (0, 20)$  となり、 $y$  軸に平行とわかる。一方、ある気温  $T_0$  (例えば  $T_0 = 320$  [K]) を表す等値線は、 $T_0 = 20y + 300$  より、 $y = \frac{1}{20}(T_0 - 300) = 1$  ( $x$  軸に平行な直線) である。これらのことから、勾配ベクトル  $\nabla T$  は、等温線に直交し、気温の低い方から高い方に向かっていることが分かる (また、今の場合、 $\nabla T$  の各成分に  $x, y$  が含まれないので、 $\nabla T$  が場所によらないことも分かる)。

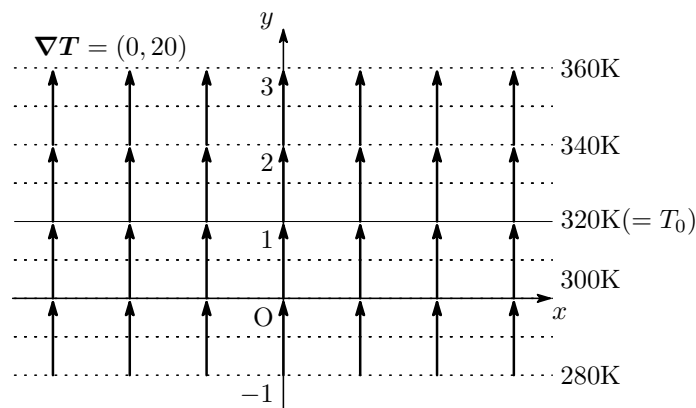


図 5.6 北に向かって気温が上がる場 ( $xyz$  空間での平面であることも意識せよ)。東西方向には気温は一定。

一般に、任意のスカラー場  $\phi(x, y)$  の勾配ベクトル  $\nabla\phi$  は、 $\phi$  の等値線に直交し、値の小さい方から大きい方に向く。

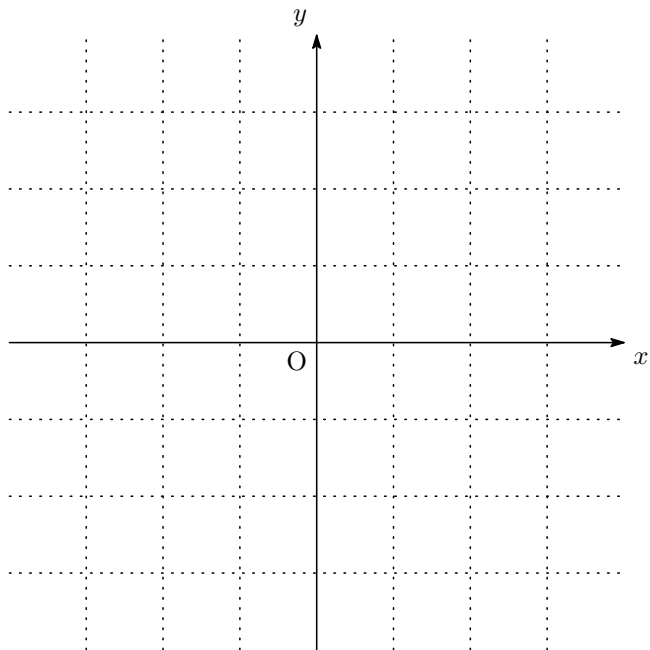
## 演習 5.3

温度場が  $T(x, y) = x + 2y + 30$  [ $^{\circ}\text{C}$ ] と表されるとき、次の各問に答えよ。

- (1) 温度場 (つまり、等温線) を  $xy$  平面上に描け。
- (2) 温度勾配  $\nabla T$  を図示し、等温線と直交することを示せ。

## 【解答】

(1)



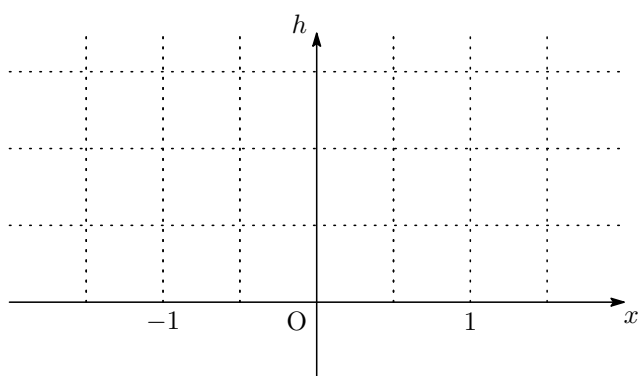
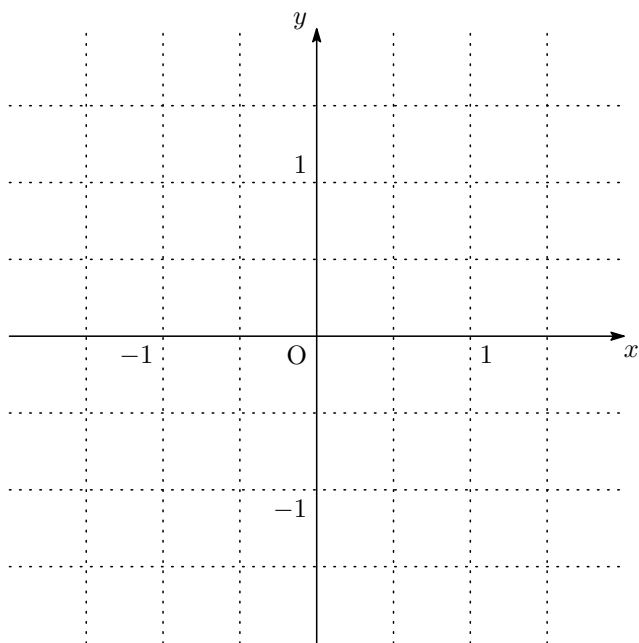
(2)

## 演習 5.4

ある山の標高  $h(x, y)$  は、 $h(x, y) = h_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$  と表せるという。

- (1)  $h(x, y)$  の等値線を  $xy$  平面上に、 $y = 0$  での山の断面を  $xh$  平面上に描け。
- (2) 勾配ベクトル  $\nabla h$  の分布を  $xy$  平面上に大まかに描け。

## 【解答】



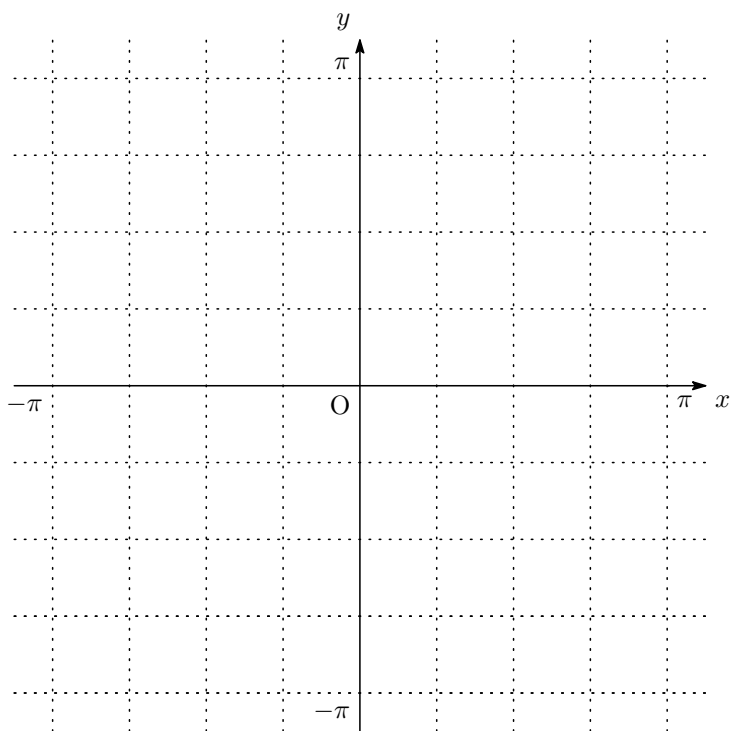
## 演習 5.5

気圧場が  $p(x, y) = p_0 + 20 \cos x \sin y$  [hPa] と表されるとき、次の各問に答えよ ( $p_0 = 10^3$  [hPa] とする)。

- (1) 気圧場 (つまり、等圧線) を  $xy$  平面上に大まかに描け。
- (2) 気圧傾度力  $-\frac{1}{\rho} \nabla p$  を図示し、等圧線と直交することを示せ (簡単のため空気密度は  $\rho = 1$  とする)。

## 【解答】

(1)



(2)

### 5.3 移流 - 勾配をもつ物理量が風によって運ばれる効果 -

偏微分演算子  $\nabla$  をベクトルのように扱うことで、数式を簡単に書き換えることができる。例えば、後述する温度  $T(t, x, y)$  の水平移流 (暖かい (冷たい) 空気が水平風により流されてくる効果) に関する式は、 $-u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y}$  と表されるが、この移流項は、風ベクトル  $\boldsymbol{v} = (u, v)$  と温度の勾配ベクトル  $\nabla T$  の内積により、 $-\boldsymbol{v} \cdot \nabla T$  と簡単に書くことができる。

$$\text{移流項: } -\boldsymbol{v} \cdot \nabla T = -\underbrace{(u, v)}_{\boldsymbol{v}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right)}_{\nabla T} = -u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} \quad (5.19)$$

さて、この移流項  $-u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y}$  が何を表しているか詳しく見ることにする (なぜ、マイナスが必要なのだろうか?)。簡単のため、 $-u \frac{\partial T}{\partial x}$  について考えてみる。 $\frac{\partial T}{\partial x}$  は東西 ( $x$ ) 方向の温度勾配を表し、東に行くほど温度が高くなれば正、東に行くほど温度が低くなれば負となる。いま、つくばの西に寒気、東に暖気があり (つまり  $\frac{\partial T}{\partial x} > 0$ )、西風が吹いている場合 ( $u > 0$ ) を考えると、寒気の移流によりつくばの気温が低下することは経験的にすぐ分かる。

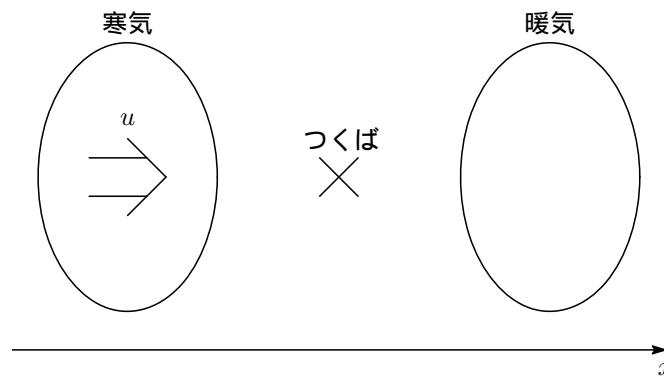


図 5.7 つくばの西に寒気、東に暖気があり、西風が吹いている状況。

また、温度勾配が強いほど、あるいは、風が強いほど、気温が低下することも経験的に分かる。これを数式で表したのが  $-u \frac{\partial T}{\partial x}$  である (風向きが逆 ( $u < 0$ )、あるいは、温度勾配が逆 ( $\frac{\partial T}{\partial x} < 0$ ) であってもこの式で十分なことはすぐ分かるだろう)。移流項の単位は、 $u$  [m/s]  $\times$   $\frac{\partial T}{\partial x}$  [K/m] より、[K/s] (1s あたりの温度変化 [K]) となる。いま、東西 ( $x$ ) 方向のみについて考えたが、南北 ( $y$ ) 方向の移流についても同様に  $-v \frac{\partial T}{\partial y}$  と表すことができる。つくばでの実際の気温変化  $\frac{\partial T}{\partial t}$ <sup>5</sup> は、つくばでの東西方向と南北方向の温度移流  $-\boldsymbol{v} \cdot \nabla T$  と、つくばでの加熱冷却 (日射など) の効果  $Q$  の足し合わせによって決まる。これを式で書けば、以下のようになる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\boldsymbol{v} \cdot \nabla T + Q \quad (5.20)$$

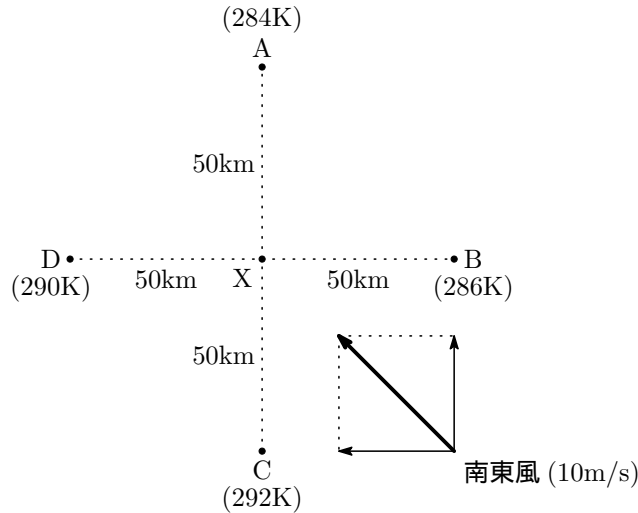
温度  $T$  だけでなく水蒸気  $q$  についても同じような形の移流方程式となる (ただし、 $Q$  が蒸発・凝結の効果になる)。

<sup>5</sup>気温  $T$  は本来、場所  $x, y$  と時間  $t$  の関数であるが、「つくば」の気温を考えようとする時点で緯度・経度が 1 つに決まる、つまり、 $x, y$  が固定され定数とみなせる。そのため、 $\frac{dT}{dt}$  ではなく、 $\frac{\partial T}{\partial t}$  ( $t$  以外の変数を定数とみなして  $T$  を  $t$  で微分する) を使うのが妥当である。

## 演習 5.6

地点 X の北 50km、東 50km、南 50km、西 50km に、それぞれ地点 A、B、C、D がある。地点 A、B、C、D における気温はそれぞれ 284 K、286 K、292 K、290 K という。もし、この領域全体で一様に 10 m/s の南東風が吹いていて、地点 X における太陽放射による局地的な加熱が 1 K/hr のとき、地点 X での気温変化を求めよ。

## 【解答】



東西方向の温度勾配  $\frac{\partial T}{\partial x}$  と、南北方向の温度勾配  $\frac{\partial T}{\partial y}$  は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{286 - 290}{100} = -\frac{4}{100} \text{ [K/km]} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{284 - 292}{100} = -\frac{8}{100} \text{ [K/km]}\end{aligned}$$

となり、東西風が  $u = -\frac{10}{\sqrt{2}}$ 、南北風が  $v = \frac{10}{\sqrt{2}}$  であることから、地点 X における温度変化  $\frac{\partial T}{\partial t}$  は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= -v \cdot \nabla T + Q \\ &= -u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} + Q \\ &= -\underbrace{\left(-\frac{10}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{[m/s]}} \underbrace{\left(-\frac{4}{100}\right)}_{\text{[K/km]}} - \underbrace{\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{[m/s]}} \underbrace{\left(-\frac{8}{100}\right)}_{\text{[K/km]}} + \underbrace{1}_{\text{[K/hr]}} \\ &= -\underbrace{\left(-\frac{10}{\sqrt{2}} \times \frac{60^2}{10^3}\right)}_{\text{[km/hr]}} \underbrace{\left(-\frac{4}{100}\right)}_{\text{[K/km]}} - \underbrace{\left(\frac{10}{\sqrt{2}} \times \frac{60^2}{10^3}\right)}_{\text{[km/hr]}} \underbrace{\left(-\frac{8}{100}\right)}_{\text{[K/km]}} + \underbrace{1}_{\text{[K/hr]}} \\ &= -\frac{10}{\sqrt{2}} \frac{60^2}{10^3} \left(\frac{4}{100} - \frac{8}{100}\right) + 1 \\ &= \frac{36}{25\sqrt{2}} + 1 \\ &\simeq 2.0 \text{ [K/hr]}\end{aligned}$$

## 5.4 局所微分 (オイラー表示) と実質微分 (ラグランジュ表示)

第 5.3 章では、つくばにおける局所的な気温の時間変化  $\frac{\partial T}{\partial t}$  を考えた。これは空間的に固定された  $(x, y)$  を定数とした) 地点における気温変化なので、『局所微分 (オイラー表示)』とよぶ。これに対して、(つくばの西から東へ) 移動している空気塊の温度変化を、『実質微分 (ラグランジュ表示)』とよび  $\frac{dT}{dt}$  と書く。局所微分と実質微分が移流項によってつながることを今から示す。第 1.5 章「2 変数関数のテイラー展開」で、2 変数関数  $f(x, y)$  の変化が

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (5.21)$$

という全微分の形で書けることを図 1.7 をもとに示したが、3 変数関数である  $T(t, x, y)$  についても同じような形で

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy \quad (5.22)$$

と書くことができる。いま、この両辺を  $dt$  で割ることで

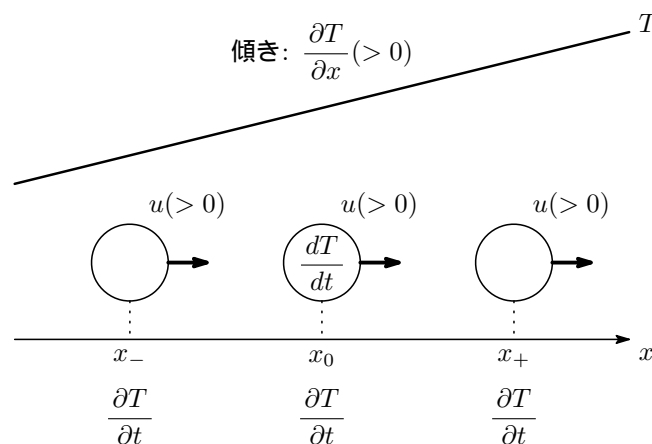
$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=u} + \frac{\partial T}{\partial y} \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=v} \quad (5.23)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \quad (5.24)$$

というように、実質微分と局所微分を移流項によってつなげる重要な式 が現れる。式 (5.24) を言葉で説明するなら、

$$\left[ \begin{array}{c} \text{移動する空気塊} \\ \text{の温度変化} \end{array} \right] = \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \text{通過する各場所での} \\ \text{局地的な温度変化} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{水平温度勾配 } \nabla T \text{ がある背景場を} \\ \text{速度 } v \text{ で進むことによる温度変化} \end{array} \right]}_{\text{外的な要因による空気塊の温度変化}} \quad (5.25)$$

ということになる<sup>6</sup>。



<sup>6</sup>式 (5.24) では、ラグランジュ的に見ている (対象とするものを追跡して見ている) ので、ここでは  $v$  は風ではなく、空気塊の移動速度となる。図 5.7 でつくばにいる人 (オイラー的見方) にとっては「 $u$  は風速」というのが自然で、空気塊と一緒に移動している人 (ラグランジュ的見方) にとっては「 $u$  は移動速度」というのが自然であろう。

## 5.5 流れの場の収束・発散と渦度

第 5.2 章ではスカラー場に対して勾配 ( $\nabla$ ) を考えたが、ここではベクトル場 (流れの場) に対して勾配 ( $\nabla$ ) を考える。ベクトル場に勾配があるというのは、流れに速度差があるということで、このとき収束、発散、渦が起こる。例えば、幅が広く障害物のない川のまっすぐで一樣な流れ (静かな川) と岩などの障害物にぶつかりながら流れる激流 (速度差のある川) を比較すれば、流れの速度差により収束、発散、渦が起こることは経験的にすぐ分かるだろう。

### 5.5.1 収束と発散

川の流れを車の流れに置き換えて考える。いま、東西を結ぶ高速道路を西から東へ車 X, Y, Z が時速 80 km で等間隔に走っているとす (図 5.8 上)。車 Y が突然速度を落とすと、

1. 車 Y とその後ろの車 X との車間距離は縮まり
2. 車 Y とその前の車 Z との間距離は広がる

ことはすぐに分かると思う (図 5.8 下)。1 つ目の車間距離が縮まるのが『収束』、2 つ目の車間距離が広がるのが『発散』に対応する<sup>7</sup>。水や空気であっても、速度差によってこのような前後の間隔が縮まったり広がったりする。

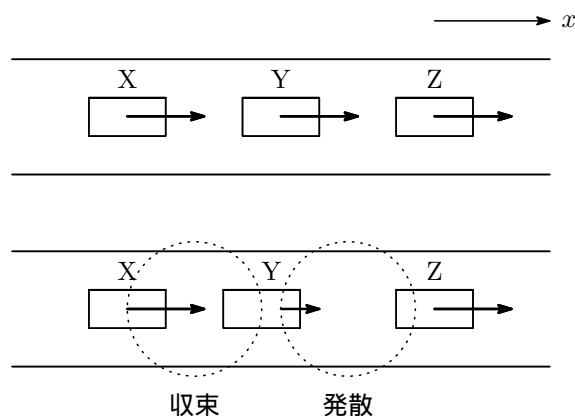


図 5.8 東西を結ぶ高速道路を時速 80 km で走る車 X, Y, Z (上図)。車 Y のみ速度を落とした (下図)。

車 Y は速度を 80 [km/h] 以下に落とすので、車 Y とその前後の車 X, Z の速度の間には、

1. (車 X の速度) > (車 Y の速度)
2. (車 Y の速度) < (車 Z の速度)

という関係が成り立つが、この速度差が起こっている状況を式で表すことを考える。いま、 $u$  を車の速度とすると、収束を起こした車 X と車 Y については、前 (わずかに東) を走る車 Y の速度の方が遅いことから  $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ 、また、発散を

<sup>7</sup>収束は「一箇所に向かって集まる」、発散は「一箇所から四方八方に散らばる」というイメージをもつかもしいないが、車間距離の例のように、一様であった密度 (車間距離) が大きく (短く)・小さく (大きく) なることも数学的には収束・発散と考える。

起こした車 Y と車 Z については、前(わずかに東)を走る車 Z の速度の方が速いことから  $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$  となる。ここでは、東西 ( $x$ ) 方向のみについて考えたが、南北 ( $y$ ) 方向についても同様に  $\frac{\partial v}{\partial y}$  の正負を考えることができ、実際には、東西方向と南北方向を足し合わせた  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$  の正負から、その場で収束・発散が起こっているかを判断する。

まとめると、2次元の任意のベクトル場  $v = (u, v)$  で、各地点において収束・発散が起こっているかどうかは、次のような  $\nabla$  と  $v$  の内積  $\nabla \cdot v$  の正負により判断する ( $\nabla \cdot v$  を発散 (divergence) の頭文字をとって  $\text{div } v$  と書くこともある)。

$$\nabla \cdot v = \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)}_{\nabla} \cdot \underbrace{(u, v)}_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \begin{cases} > 0 & (\text{発散}) \\ = 0 & (\text{収束も発散もない}) \\ < 0 & (\text{収束}) \end{cases} \quad (5.26)$$

また、3次のベクトル場  $v = (u, v, w)$  の収束・発散についても同様に内積により表すことができる。

$$\nabla \cdot v = \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\nabla} \cdot \underbrace{(u, v, w)}_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (5.27)$$

例えば、大気科学では、水蒸気の収束域(つまり、水蒸気が集まり降水が起こりやすくなる場所)を特定する際に、水蒸気フラックス  $qv = (qu, qv)$  に対して ( $q$  は比湿 [kg/kg])、その収束・発散  $\nabla \cdot (qv)$  を計算する (図 5.9)。

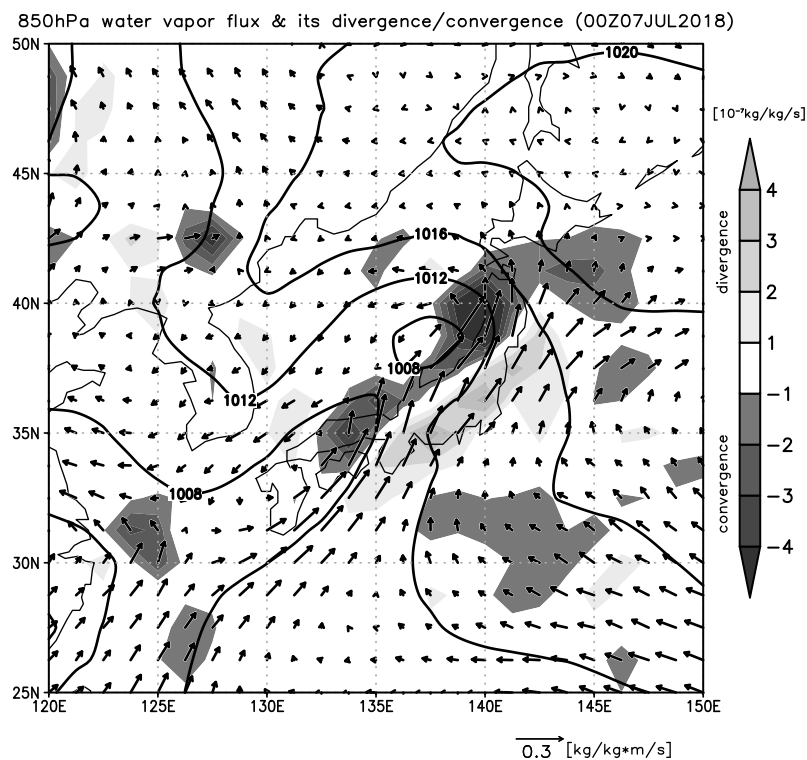


図 5.9 2018 年 7 月の西日本豪雨時の海面更正気圧 (コンター)、850hPa 面における水蒸気フラックス (矢印) とその収束・発散 (シェード)。西日本上に豪雨をもたらした水蒸気フラックスの収束域 (濃いシェード) があるのが分かる。

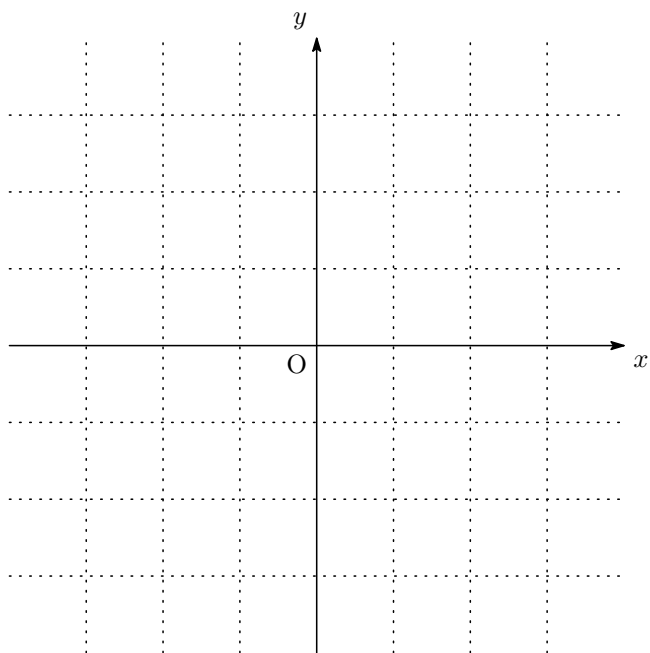
## 演習 5.7

次のそれぞれの風の間  $v = (u, v)$  に対して、風の間を描いたうえで ( $x$  軸上、 $y$  軸上、 $y = \pm x$  上のみでよい)、収束・発散があるか計算により調べよ。

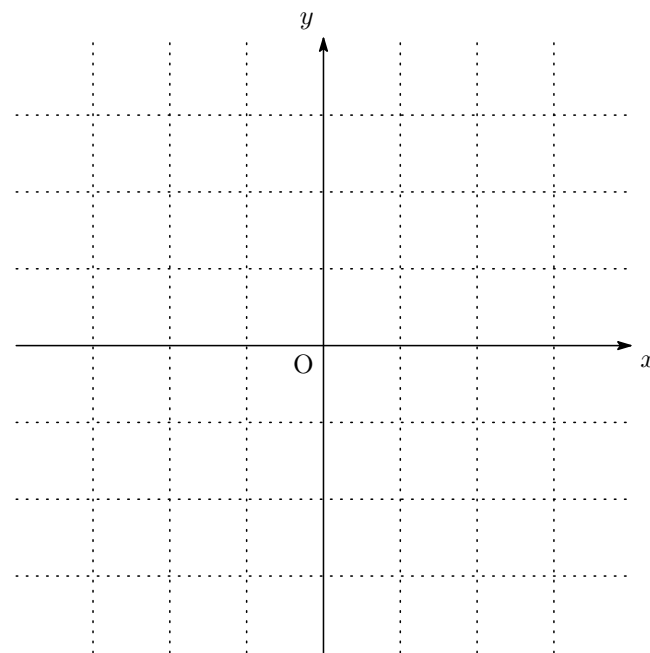
(1)  $(u, v) = (-x, -2y)$       (2)  $(u, v) = (x, -y)$       (3)  $(u, v) = (x^2, y)$

## 【解答】

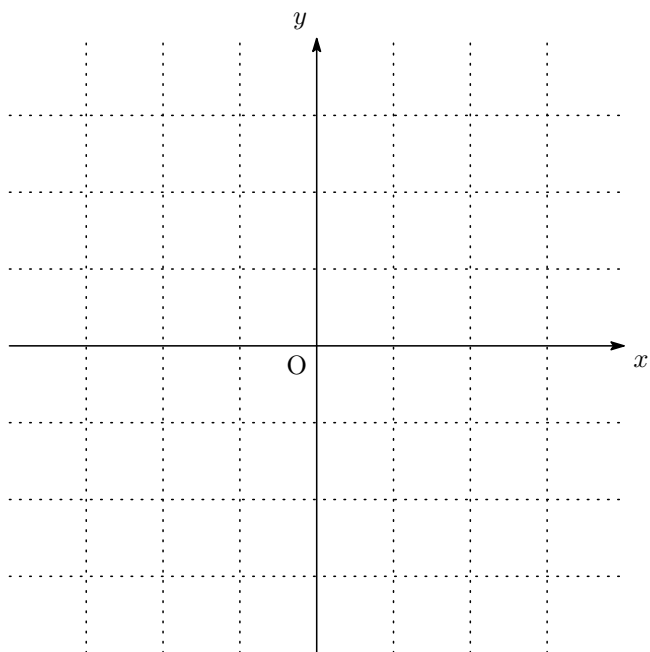
(1)



(2)



(3)



## 演習 5.8

$c$  がスカラー定数、 $\phi(x, y)$  がスカラー場、 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  が 2 次元のベクトル場  $\mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2)$  であるとき、 $\nabla$  に関する以下の各式が成り立つことを示せ。

$$(1) \quad \nabla \cdot (c\mathbf{u}) = c\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2) \quad \nabla \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3) \quad \nabla \cdot (\phi\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla\phi + \phi\nabla \cdot \mathbf{u}$$

【解答】(1)

$$\nabla \cdot (c\mathbf{u}) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (cu_1, cu_2) = \frac{\partial(cu_1)}{\partial x} + \frac{\partial(cu_2)}{\partial y} = c \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = c\nabla \cdot \mathbf{u}$$

(2)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ &= \frac{\partial(u_1 + v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(u_2 + v_2)}{\partial y} \\ &= \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

(3) (1) と異なり、 $\phi$  は  $x, y$  の関数であることに注意する。

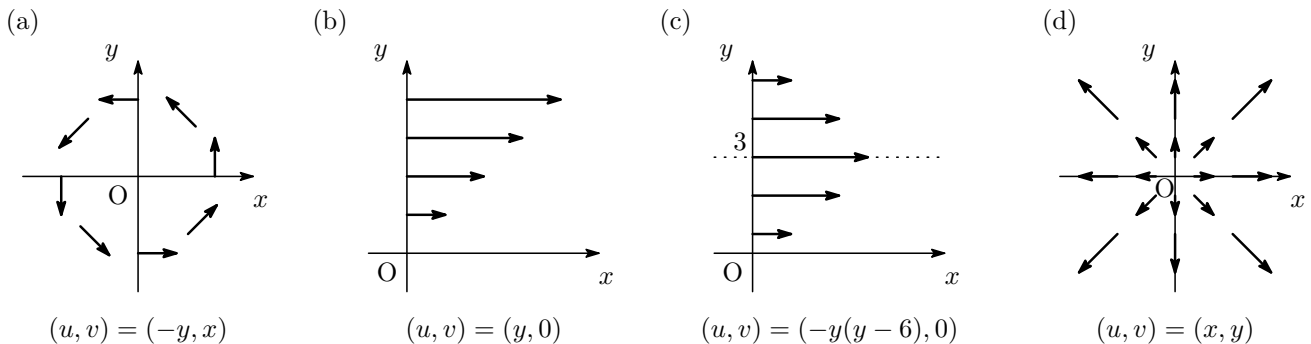
$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi\mathbf{u}) &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (\phi u_1, \phi u_2) \\ &= \frac{\partial(\phi u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi u_2)}{\partial y} \\ &= \underbrace{u_1 \frac{\partial\phi}{\partial x}} + \underbrace{\phi \frac{\partial u_1}{\partial x}} + \underbrace{u_2 \frac{\partial\phi}{\partial y}} + \underbrace{\phi \frac{\partial u_2}{\partial y}} \\ &= \underbrace{u_1 \frac{\partial\phi}{\partial x} + u_2 \frac{\partial\phi}{\partial y}} + \underbrace{\phi \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)} \\ &= \underbrace{(u_1, u_2) \cdot \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)} + \underbrace{\phi \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)} \\ &= \mathbf{u} \cdot \nabla\phi + \phi\nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

## 5.5.2 渦度

高低気圧に代表されるような「渦」が存在しているかを調べるには、流れの場(ベクトル場)に対して『渦度』というものを計算する。渦度は、「どのような回転をしているか」を表す指標であり、2次元ベクトル場  $v = (u, v)$  に対しては、

$$\xi \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ u & v \end{vmatrix} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.28)$$

と定義される。例えば、以下のような4通りの流れの場(例えば、水や空気の流れ)があったとする。



「どのような回転をしているか」(つまり、渦度)を調べるには、このような(水の)流れに落とした葉っぱがどう振る舞うかを考えてみるとよい。例えば、(a)の原点付近に葉っぱを落とせば、葉っぱが反時計回りに回転すると想像できる。また、(b)の場合、第一象限( $x > 0, y > 0$ )に葉っぱを落とせば、葉っぱが時計回りに回転するのが想像できる。(c)に関しては、第一象限の  $y = 3$ (点線)より上に葉っぱを落とせば、葉っぱが反時計回りに回転し、 $y = 3$ (点線)の上に静かに葉っぱを落とせば、葉っぱは回転せずに  $x$  軸方向に流れてゆき、 $y = 3$ (点線)より下に葉っぱを落とせば、葉っぱが時計回りに回転することが想像できる。(d)の場合、明らかに発散場であるが、原点付近に葉っぱを落とせば、葉っぱは回転しないと想像できる(実際は葉っぱと落とした点がちょっとずれると、いずれかの方向に流されていくがここでは理想的な状態を考えている)。それぞれの流れに対して、式(5.28)により渦度を計算してみると次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - (-1) = \underbrace{2}_{+} \quad \leftarrow \text{反時計回りに回転} \\ (b) \quad \xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - 1 = \underbrace{-1}_{-} \quad \leftarrow \text{時計回りに回転} \\ (c) \quad \xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - (-2y + 6) = 2(y - 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0 (y > 3) \quad \leftarrow \text{反時計回りに回転} \\ = 0 (y = 3) \quad \leftarrow \text{回転せず} \\ < 0 (y < 3) \quad \leftarrow \text{時計回りに回転} \end{array} \right. \\ (d) \quad \xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - 0 = 0 \quad \leftarrow \text{回転せず} \end{array} \right. \quad (5.29)$$

以上のことから、渦度が0であれば回転は起こらず、渦度が正(負)であれば反時計(時計)回りの回転が起こると分かる。

北半球の高低気圧に当てはめれば、高気圧ではコリオリ効果<sup>8</sup>により時計回りに空気が吹き出すので渦度は負、低気圧では反時計回りに空気が吹き込むので渦度が正となる(南半球ではコリオリ効果が逆向きなので渦度の正負も逆になる)。

<sup>8</sup>空気の進行方向を北半球では右に曲げ、南半球では左に曲げる地球の自転によるみかけの力。

一般に、3次元ベクトル場  $v = (u, v, w)$  に対して、 $\nabla$  とベクトル場 (流れの場) の外積により、以下のような渦度ベクトル (回転) が定義される ( $\nabla \times v$  を、渦 (curl) や回転 (rotation) の頭文字をとって curl  $v$ , rot  $v$  と書くこともある)。

$$\xi(x, y, z) \equiv \nabla \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) k \quad (5.30)$$

前ページで扱った  $xy$  平面での2次元ベクトル場  $v = (u, v)$  に対する渦度は、渦度ベクトルの鉛直 ( $z$ ) 成分に現れるので<sup>9</sup>、鉛直渦度<sup>10</sup>と呼ぶこともできる。 $z$  成分なので、 $k = (0, 0, 1)$  と  $\nabla \times v$  の内積により表すことができる (第 5.1.2 章参照)。

$$\xi \equiv k \cdot \nabla \times v = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.31)$$

例えば、大気科学では、水平風  $v = (u, v)$  に対して、(鉛直) 渦度  $k \cdot \nabla \times v$  を計算することで、どこに高気圧性循環、あるいは、低気圧性循環があるかを特定する (図 5.10)。

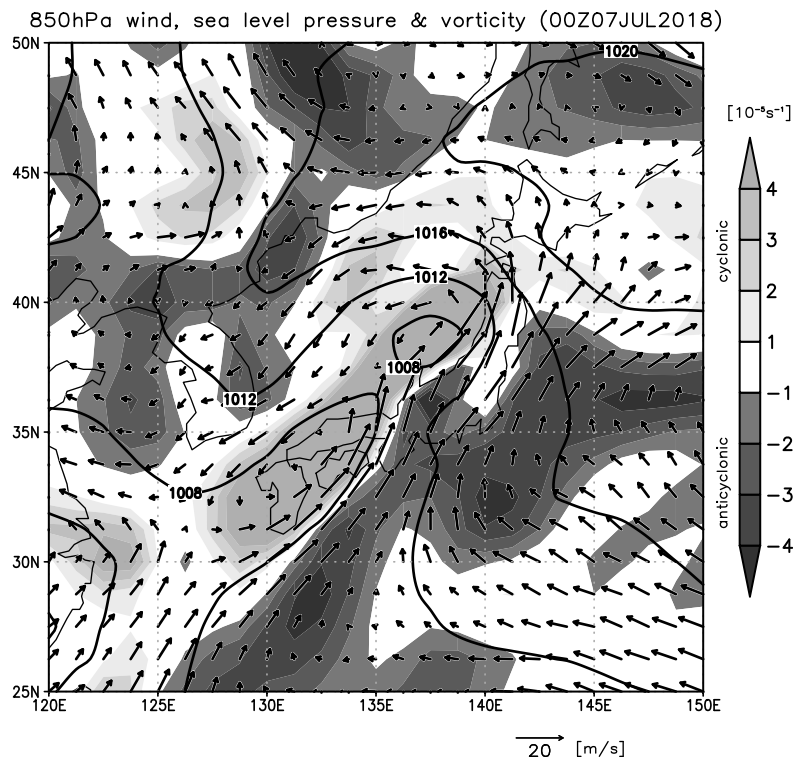


図 5.10 2018 年 7 月の西日本豪雨時の海面更正気圧 (コンター)、850hPa 風、(鉛直) 渦度 (シェード)。風が時計 (反時計) 回りになっているところで負 (正) の渦度、つまり、高気圧性 (低気圧性) 循環になっているのが分かる。

<sup>9</sup>同様に、 $xz$  平面でのベクトル場  $v = (u, w)$  に対する渦度は渦度ベクトルの  $y$  成分に、 $yz$  平面でのベクトル場  $v = (v, w)$  に対する渦度は渦度ベクトルの  $x$  成分になる。

<sup>10</sup>地球大気では水平 ( $xy$ ) 方向の大気運動のほうが、鉛直 ( $z$ ) 方向の大気運動よりも卓越しているため、水平風  $u = (u, v)$  に対する鉛直渦度を単に渦度と呼ぶことが多い。

## 演習 5.9

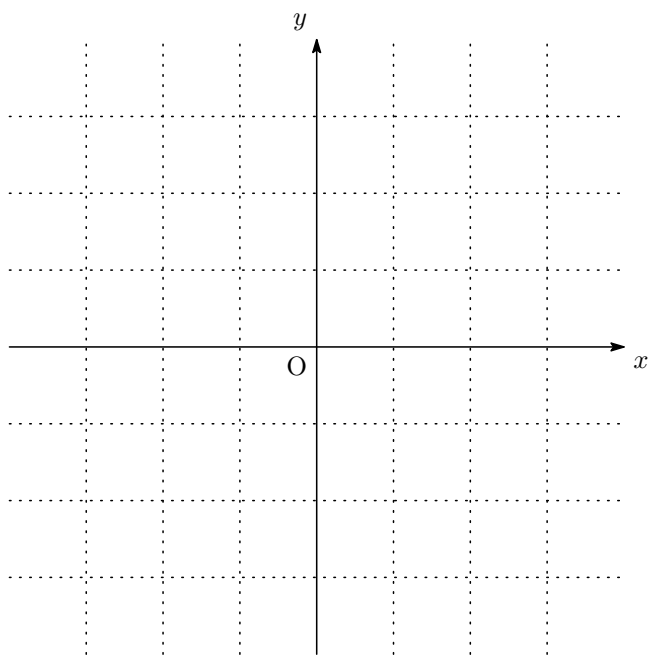
次のそれぞれの風の場  $v = (u, v)$  に対して、風の場を描いたうえで、渦度について計算により調べよ。

(1)  $(u, v) = (-y, x)$

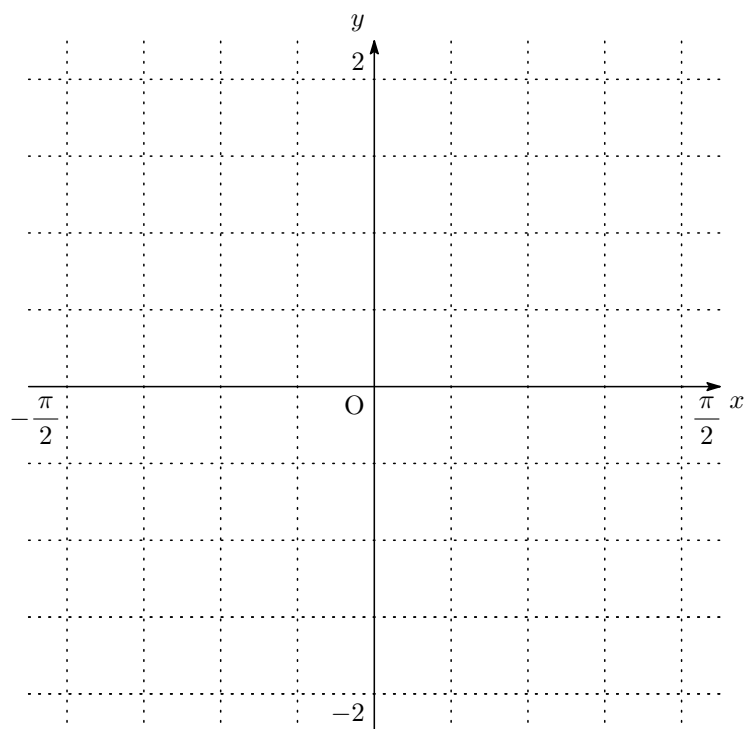
(2)  $(u, v) = (\cos x, xy) \left( -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$

## 【解答】

(1)



(2)



## 演習 5.10

スカラー場  $\phi(x, y, z)$ 、3次元ベクトル  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  について、以下の関係式を証明せよ。

(1)  $\operatorname{curl}(\nabla\phi) = \mathbf{0}$

(2)  $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{u}) = 0$

(3)  $\operatorname{curl}(\phi \mathbf{u}) = \nabla\phi \times \mathbf{u} + \phi \operatorname{curl} \mathbf{u}$

(4)  $\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{v}$

【解答】(1)

$$\operatorname{curl}(\nabla\phi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\right)}_{=0} \mathbf{i} + \underbrace{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}\right)}_{=0} \mathbf{j} + \underbrace{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)}_{=0} \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{u}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial z\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y\partial z}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \operatorname{curl}(\phi \mathbf{u}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi u_1 & \phi u_2 & \phi u_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(\phi u_3)}{\partial y} - \frac{\partial(\phi u_2)}{\partial z}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial(\phi u_1)}{\partial z} - \frac{\partial(\phi u_3)}{\partial x}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial(\phi u_2)}{\partial x} - \frac{\partial(\phi u_1)}{\partial y}\right) \mathbf{k} \\ &= \left(u_3 \frac{\partial\phi}{\partial y} + \phi \frac{\partial u_3}{\partial y} - u_2 \frac{\partial\phi}{\partial z} - \phi \frac{\partial u_2}{\partial z}\right) \mathbf{i} \\ &= + \left(u_1 \frac{\partial\phi}{\partial z} + \phi \frac{\partial u_1}{\partial z} - u_3 \frac{\partial\phi}{\partial x} - \phi \frac{\partial u_3}{\partial x}\right) \mathbf{j} \\ &= + \left(u_2 \frac{\partial\phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial u_2}{\partial x} - u_1 \frac{\partial\phi}{\partial y} - \phi \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \mathbf{k} = \nabla\phi \times \mathbf{u} + \phi \operatorname{curl} \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{u}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(u_2 v_3 - u_3 v_2) + \frac{\partial}{\partial y}(u_3 v_1 - u_1 v_3) + \frac{\partial}{\partial z}(u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= \underbrace{v_3 \frac{\partial u_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial u_3}{\partial x}}_{\text{}} + \underbrace{v_1 \frac{\partial u_3}{\partial y} - v_3 \frac{\partial u_1}{\partial y}}_{\text{}} + \underbrace{v_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} - v_1 \frac{\partial u_2}{\partial z}}_{\text{}} \\ &\quad + \underbrace{u_2 \frac{\partial v_3}{\partial x} - u_3 \frac{\partial v_2}{\partial x}}_{\text{}} + \underbrace{u_3 \frac{\partial v_1}{\partial y} - u_1 \frac{\partial v_3}{\partial y}}_{\text{}} + \underbrace{u_1 \frac{\partial v_2}{\partial z} - u_2 \frac{\partial v_1}{\partial z}}_{\text{}} \\ &= (\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}) \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \\ &\quad + (\underline{u_1}, \underline{u_2}, \underline{u_3}) \cdot \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{v} \end{aligned}$$

## 5.6 質量保存の法則 (連続の式)

大気や水のような連続流体には、『質量保存の法則 (連続の式)』という重要な法則がある。これは、連続流体の質量は、移動中にどんなに形が変わろうとも保存されるというもので、いま、空気塊の密度を  $\rho$ 、体積を  $V$  とすれば、

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = 0 \quad (5.32)$$

と表すことができる。この式に積の微分公式を適用すると、

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dV}{dt} = 0 \iff \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \quad (5.33)$$

となる。いま、図 5.11 上のような微小空気塊 (3 辺が  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  の立方体) が  $x$  方向に移動している場合を考える。

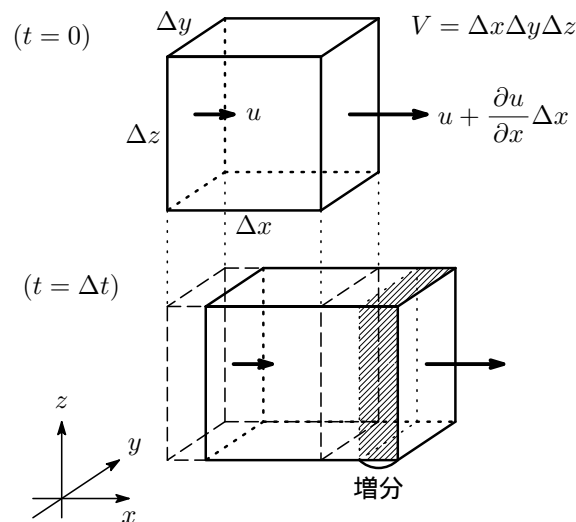


図 5.11  $x$  方向に速度差をもって移動する体積  $V (= \Delta x \Delta y \Delta z)$  の微小空気塊。

空気塊の  $x$  方向の流れに速度差があるなら、空気塊の左側面の速度を  $u$  とすることで、空気塊の右側面 (左側面から  $\Delta x$  離れている) の速度はテイラー展開 (第 1.3 章) より  $u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x$  とかける (図 5.11 上では右側面の速度のほうが左側の速度より速い)。この速度差により、 $\Delta t$  秒後には (図 5.11 下)、微小立方体の形が変わる (図では  $x$  方向に伸びる) が、その体積の増分 (斜線部) は、

$$\underbrace{\left\{ \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) \Delta t - u \Delta t \right\}}_{x \text{ 方向の増分}} \underbrace{\Delta y \Delta z}_{\text{側面の面積}} = \frac{\partial u}{\partial x} \underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_V \Delta t = \frac{\partial u}{\partial x} V \Delta t \quad (5.34)$$

となる。 $y, z$  方向にも同じように速度差があれば、 $y, z$  方向でも同様の体積変化  $\frac{\partial v}{\partial y} V \Delta t, \frac{\partial w}{\partial z} V \Delta t$  がそれぞれおこるので、空気塊全体での体積の変化  $\Delta V$  は、

$$\Delta V = \frac{\partial u}{\partial x} V \Delta t + \frac{\partial v}{\partial y} V \Delta t + \frac{\partial w}{\partial z} V \Delta t \quad (5.35)$$

となる。この式の両辺を  $V\Delta t$  で割り、 $\Delta t \rightarrow 0$  とする (つまり、 $\Delta \rightarrow d$  とする) ことで、

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (5.36)$$

となるので、これを式 (5.33) に代入し、変形すると、

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (5.37)$$

となる。この式は、流体 (例えば空気塊) が収束すれば ( $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$ ) 密度が高くなり ( $\frac{d\rho}{dt} > 0$ )、発散すれば ( $\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$ ) 密度が低くなる ( $\frac{d\rho}{dt} < 0$ ) ことを表している。これは、流体が連続であるがゆえに成り立つものなので、質量保存の法則は連続の式とも呼ぶ。この式をさらに実質微分と局所微分の関係式  $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$  を使って変形すると、質量保存の法則は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (5.38)$$

と書くこともでき (演習 5.8(3) を利用した)、ある場所での密度変化は、質量フラックス  $\rho \mathbf{v}$  の収束・発散により決まる (フラックスが収束  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) < 0$  すれば密度が高くなり、発散  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) > 0$  すれば密度が低くなる)、ということを表している。図 5.9 で、水蒸気フラックス  $q \mathbf{v}$  の収束・発散をみたが、これも同じように考えることができる (水蒸気フラックスが収束するところでは比湿  $q$  が大きくなり、発散するところでは比湿が小さくなる)。

理論を簡単にするために、なんらかの仮定をすることで、質量保存の法則を簡略化することがある。たとえば、流体の密度が移動中変わらない (そう簡単に圧縮されないという非圧縮の仮定) とすると、 $\frac{d\rho}{dt} = 0$  なので、式 (5.37) から、

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.39)$$

という、非圧縮性流体に対する質量保存の法則が導かれる。また、流れが定常で密度の局所変化がない (流れが一定で局所的に大きく密度が変わることはない) とすると、 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  なので、式 (5.38) から、

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (5.40)$$

という、非弾性流体<sup>11</sup>に対する質量保存の法則が導かれる。これらの仮定は、対象とする現象や条件によって使い分ける必要がある。なお、全く仮定をしない (あらゆる現象や条件に対して成り立つ) 式 (5.37), (5.38) は、完全圧縮流体 (圧縮可能な流体) に対するものとなる。

<sup>11</sup>弾性体とは、力を加えることで変形が生じた際に、それを元の形に戻そうという復元力 (局所的な変化を引き起こす) がはたらく物体のこと。

## 5.7 ラプラシアン

2次元の任意のスカラー場  $\phi(x, y)$  の勾配  $\nabla\phi$  はベクトル場になるので、これに対する収束・発散 ( $\nabla$ ) を考えると、

$$\nabla \cdot (\nabla\phi) = \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)}_{\nabla} \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)}_{\nabla\phi} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \quad (5.41)$$

というように、スカラー場に戻る。この2階の偏微分  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  の和により表される

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (5.42)$$

をラプラシアンと呼ぶ。 $\nabla^2$  は、2階の偏微分であることを2乗であるかのように便宜上表したものであり、この他にも  $\Delta$  や  $\nabla \cdot \nabla$  と書く。 $\nabla$  がベクトル型の偏微分演算子であるのに対し、 $\nabla^2$  はスカラー型の偏微分演算子であるので注意が必要。 $\nabla \cdot \nabla$  を、2つのベクトルの内積計算と同じように考えることで、 $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$  となることは容易に分かる。

$$\nabla \cdot \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \nabla^2 \quad (5.43)$$

3次元の  $xyz$  空間の場に対するラプラシアンは同様な形で表される。

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5.44)$$

ラプラシアンは、熱伝導 (拡散) 方程式  $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \nabla^2 u$ 、波動方程式  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 u$ 、ラプラス方程式  $\nabla^2 u = 0$ 、ポアソン方程式  $\nabla^2 u = f(x, y, z)$  といった重要な偏微分方程式に登場し、直交座標系のほか、円柱座標系や球座標系に応用され、様々な物理現象の理解に役立っている。

最後に2次元のラプラシアンでその直感的意味に触れておく。 $\nabla^2$  は2階の偏微分なので、ある点  $(x_0, y_0)$  で  $\nabla^2 u > 0$  ( $\nabla^2 u < 0$ ) であるとは、その近傍で接平面 (接線) の傾き  $\nabla u$  がどんどん増加 (減少) する状況で、このことは、点  $(x_0, y_0)$  における  $u$  の値  $u(x_0, y_0)$  が、点  $(x_0, y_0)$  周辺の点での  $u$  の平均値より低い (高い) ことを意味している<sup>12</sup>。これをふまえると、温度あるいは濃度  $u$  を問題にする熱伝導方程式  $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \nabla^2 u$  は、ある点で周りより温度が低い ( $\nabla^2 u > 0$ ) なら、熱の伝導 (高温 低温) により、温度が上がる ( $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$ ) ことを表す (逆に、周りより温度が高い点 ( $\nabla^2 u < 0$ ) では、温度が下がる)。また、太鼓の膜の変位  $u$  (または水位や音波) を問題にする波動方程式  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 u$  は (左辺は変位  $u$  の2階微分なので加速度を表す)、ある点での太鼓の膜の高さが周りより低い ( $\nabla^2 u > 0$ ) なら、太鼓の膜  $u$  は上向き (加速度  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} > 0$ ) を受けて変位  $0$  に戻ろうとすることを表す (逆に、周りより膜が高い点 ( $\nabla^2 u < 0$ ) では、下向き (加速度を受ける)。このように、 $\nabla^2$  を直感的に理解しておくことで、偏微分方程式を簡単に解釈することができる。

<sup>12</sup> $xy$  平面に接線の傾きがどんどん大きくなる適当な1変数関数  $u(x)$  を描き、 $u(x_0 - \Delta x), u(x_0), u(x_0 + \Delta x)$  の平均と  $u(x_0)$  の値を比べてみよ。

## 演習 5.11

- (1) 演習 5.3 の温度場  $T(x, y) = x + 2y + 30$  に対して、 $\nabla^2 T$  を求めよ。
- (2) 2次元のスカラー場  $f(x, y), g(x, y)$  に対して、 $\nabla^2(fg) = f\nabla^2g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\nabla^2f$  を示せ。

【解答】(1)  $T(x, y)$  を  $x, y$  それぞれで 2 回微分すれば良い。

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

(2)  $fg$  に  $\nabla^2$  の定義  $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  を当てはめたのち、 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  が 2 回微分であること、積の微分の公式、内積の成分表示などを使う。

$$\begin{aligned} \nabla^2(fg) &= \frac{\partial^2(fg)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(fg)}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial(fg)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial(fg)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( f \frac{\partial g}{\partial y} + g \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \underbrace{f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \\ &\quad + \underbrace{f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + g \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \underbrace{f \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)} + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + g \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ &= f \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) + 2 \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) + g \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ &= f\nabla^2g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\nabla^2f \end{aligned}$$

## 5.8 流れの場の収束・発散と渦度 (導出編)

第 5.5 章では、流れの収束・発散と渦度が以下のように表せることに触れた。

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.45)$$

$$\xi = \boldsymbol{k} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.46)$$

ここでは、収束・発散や渦度を物理学的に考えることで、これらの式が自然に導出されることを示す。導出の際は、面積分と線積分を用いる。単に上の式を覚えるよりも、物理学的に考える方が現象の正確な理解につながるだろう。

収束・発散は、物理学的には「ある場所 (点) で空気や水などが集まるか・遠ざかるか」を表す。つまり、ある場所での空気や水などの出入りである。また、渦度は、物理学的には「ある場所 (点) で空気や水の渦ができるか」を表す。つまり、ある場所での空気や水などの回転である。これらを数式で表してみる。いま、図 5.12 のような点 X の周りの微小領域 C (微小な領域なので計算が楽になる四角形 PQRS とする) での空気の出入りを考える。「ある場所 (点)」とっておきながら、微小領域を考える理由は、ある時のある 1 点の流れの情報だけでは、そこでの流れの出入りや流れの回転の有無が分からないからで、微小領域にしておけばその周辺でどのような流れになっているかをテイラー展開により記述することができる。これにより、今後の時間変化を知るための偏微分が出てきてくれ、微分方程式ができあがる。

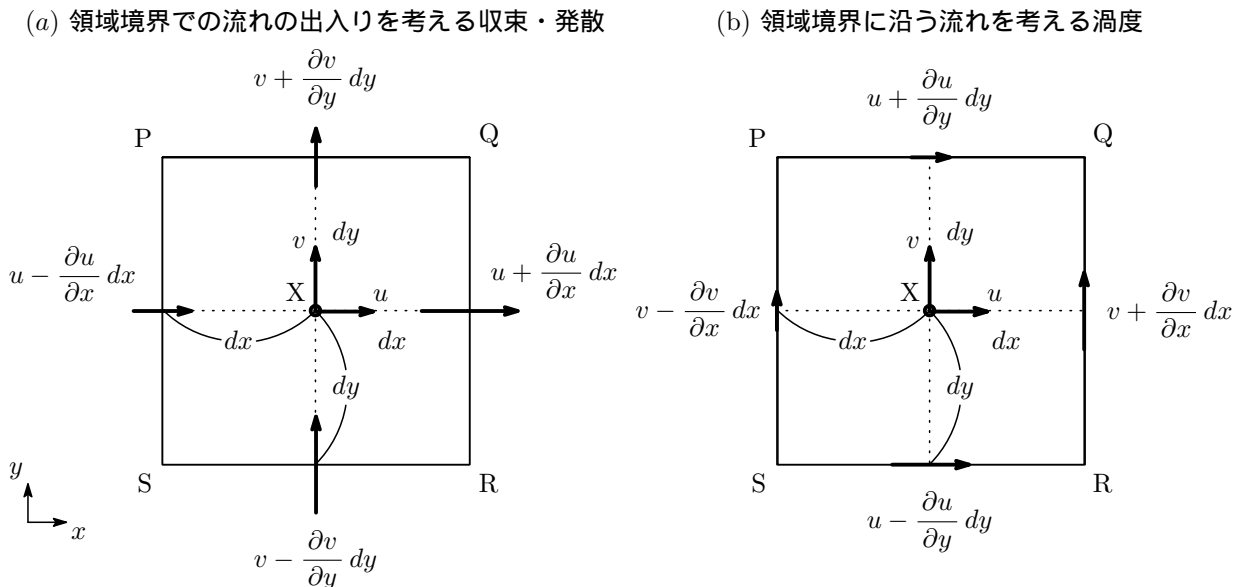


図 5.12 点 X の周りの微小領域 C (四角形 PQRS, 見やすくするために拡大しているが実際は微小) での流れの模式図。

点 X での流れを  $\boldsymbol{v} = (u, v)$  とすると、テイラー展開を用いて境界線上での流れを偏微分により記述できる。(a) 微小領域の各辺から出入りする流れ (面積分) を考える収束・発散。(b) 微小領域の各辺に沿う流れ (線積分) を考える渦度。

点 X での流れを  $v = (u, v)$  として以下考えていく。収束・発散を表す微小領域での流れの出入りは、領域境界を垂直に横切る流れの成分だけが分かれば良い (境界に沿う方向の成分は出入りに関係しない) ので、境界線 PS, QR を貫く  $x$  方向の流れと境界線 SR, PQ を貫く  $y$  方向の流れを点 A 近くでのテイラー展開 (2 次以上の微小項は無視) により求めると、

$$\text{PS の中点} : u - \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad \text{QR の中点} : u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad \text{SR の中点} : v - \frac{\partial v}{\partial y} dy, \quad \text{PQ の中点} : v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

となる (図 5.12(a))。各境界線を垂直に貫く流れの速さ ( $v_n$  [m/s]) と境界線の長さ ( $ds$  [m]) の積 ( $v_n ds$  [m<sup>2</sup>/s], 1 秒あたりの領域 C の面積変化を表す) を計算し (ただし、出入りを議論するので 外向き (流出) で  $v_n > 0$  とする)、それらを足し合わせる (積分する<sup>13</sup>) ことで、微小領域全体での流れの出入り (領域 C の面積の変化率) を考えることができる。その際、考えている微小領域が大きいほど、流入量または流出量も大きくなるので、収束・発散の強さが微小領域の大きさによらないように領域面積の変化を領域面積 ( $S = 4dxdy$ ) で割り、単位面積あたりの変化を考える必要がある (また、ある点での収束・発散を考えるので  $\lim_{S \rightarrow 0}$  とする必要もある)。以上を式で書けば、収束・発散 D (Divergence の D) は、

$$\begin{aligned} D &\equiv \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C v_n ds \quad \leftarrow v_n \text{は曲線 } C \text{ の垂直方向の成分で、外向きが正} \\ &= \frac{1}{4dxdy} \left\{ \underbrace{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) 2dy}_{\text{境界 QR}} + \underbrace{\left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) 2dx}_{\text{境界 PQ}} - \underbrace{\left(u - \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) 2dy}_{\text{境界 PS}} - \underbrace{\left(v - \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) 2dx}_{\text{境界 SR}} \right\} \quad (5.47) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

となり、これは流れの収束・発散の式  $\nabla \cdot v$  に他ならない。ここで考えた、境界線 (曲線) を垂直に貫く流れを曲線に沿って積分することを面積分と呼ぶ (今は境界線を貫く流れだが、3 次元だと境界面を貫く流れを考えるので面積分とよぶ)。図 5.12(a) では、簡単のため、微小領域の境界線を 4 つの線分に分け、その長さ各線分を垂直に貫く流れの速さの積を足し合わせた。一般には、曲線 C (開曲線か閉曲線かは問わない) を長さ  $ds$  の細かい線分 (線素分) に切って、その長さ  $ds$  と各線分を垂直に貫く流れの速さ  $v_n$  ( $v_n$  は外向きが正) との積 ( $= v_n ds$ ) を足し合わせるイメージで、式で書けば  $\int_C v_n ds$  となる。この式はベクトル表記をすることもでき、流れのベクトル  $v$  と線素分の法線ベクトル  $n$  (ただし、 $|n| = 1$ ) のなす角を  $\theta$  とすれば、 $v_n$  が線素分  $ds$  の法線ベクトル方向の成分であることを踏まえて、 $v_n = |v| \cos \theta = |v| |n| \cos \theta = v \cdot n$  (第 5.1.2 章参照)、つまり、 $\int_C v_n ds = \int_C v \cdot n ds$  となる (閉曲線なら  $\oint_C$  とする)。見た目の便宜上、ベクトル表記をするが、計算を行う際には、ベクトル表記のままでは計算が進まない (  $n$  は線素分によって方向が違ふので)、図 5.12(a) のように各線分を貫くベクトルをそれぞれ考え (これで各線分での  $n$  を考えたことになる)、計算を行えばよい。

<sup>13</sup>いまは特に、閉じた領域の境界線 C (閉曲線とよぶ) に沿って積分するので  $\oint_C$  と表す。閉曲線とは、つながってる曲線のことで、例えば地球儀に見られる海岸線はすべて閉曲線である。また、曲線に端点があれば開曲線とよび、開曲線 C に沿う積分であればこれまで同様  $\int_C$  と表す。

同様に、渦度を表す微小領域での回転は、微小領域  $C$  を回転させようとする境界に沿う流れの成分だけが分かれば良い (収束・発散のときに重要だった各辺を垂直に横切る方向の成分は回転に関係しない<sup>14</sup>) ので、境界線 PS, QR に沿う  $y$  方向の流れと境界線 SR, PQ に沿う  $x$  方向の流れを点 A 近くでのテイラー展開 (2 次以上の微小項は無視) により求めると、

$$\text{PS の中点} : v - \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad \text{QR の中点} : v + \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad \text{SR の中点} : u - \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad \text{PQ の中点} : u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

となる (図 5.12(b)). 各境界線に沿う流れの速さ ( $v_t$  [m/s]) と境界線の長さ ( $ds$  [m]) の積 ( $v_t ds$  [m<sup>2</sup>/s]) を計算し (ただし、回転方向を議論するので反時計回りで  $v_t > 0$  とする)、それらを足し合わせる (境界領域  $C$  に沿って積分する) ことで、微小領域での流れによる回転を考えることができる。その際、考えている微小領域が大きいほど、回転の度合いが大きくなるので、渦度が微小領域の大きさによらないように領域面積 ( $S = 4dxdy$ ) で割り、単位面積あたりの渦度を考える必要がある (また、ある点での渦度を考えるので  $\lim_{S \rightarrow 0}$  とする必要もある)。以上を式で書けば、渦度  $\xi$  は、

$$\begin{aligned} \xi &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C v_t ds \quad \leftarrow v_t \text{は曲線 } C \text{ の接線方向の成分で、反時計回りが正} \\ &= \frac{1}{4dxdy} \left\{ \underbrace{\left(u - \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) 2dx}_{\text{境界 SR}} + \underbrace{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) 2dy}_{\text{境界 RQ}} - \underbrace{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) 2dx}_{\text{境界 QP}} - \underbrace{\left(v - \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) 2dy}_{\text{境界 PS}} \right\} \quad (5.48) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

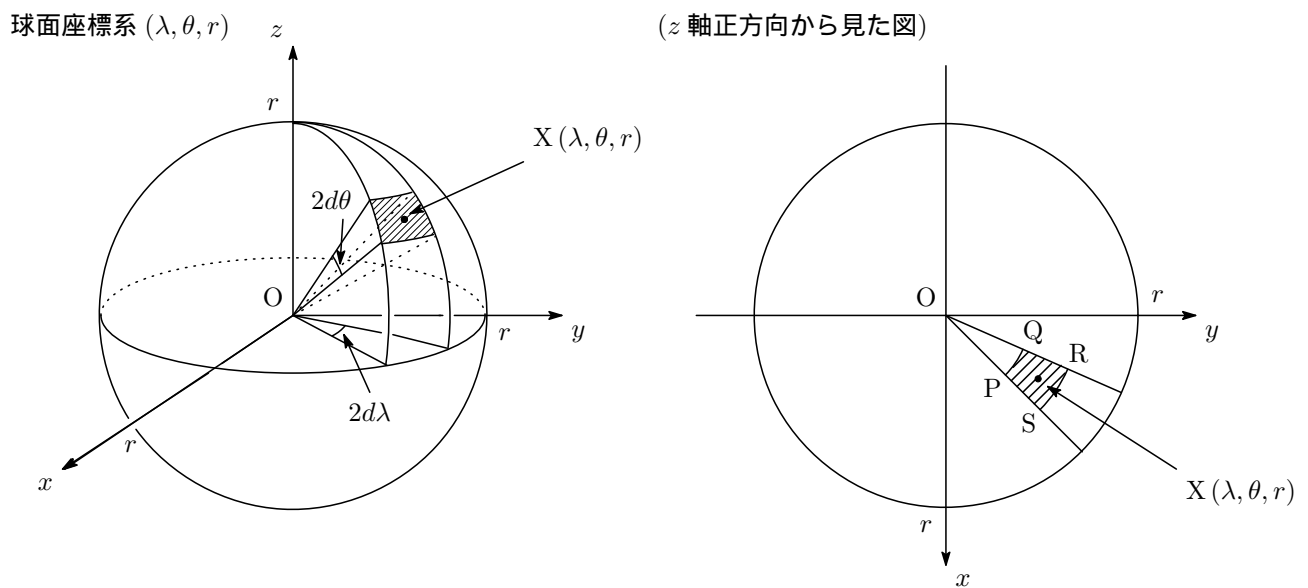
となり、これは渦度 (の鉛直  $z$  成分) の式  $\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{v}$  に他ならない。ここで考えた、境界線 (曲線) に沿う流れを曲線に沿って積分することを線積分と呼ぶ。図 5.12(b) では、簡単のため、閉曲線を 4 つの線分に分け、その長さ各線分に沿う流れの速さの積を足し合わせたが、一般には、曲線  $C$  (開曲線か閉曲線かは問わない) を長さ  $ds$  の細かい線分 (線素分) に切って、その長さ  $ds$  と各線分の線分に沿う流れの速さ  $v_t$  ( $v_t$  は反時計回りが正) との積 ( $= v_t ds$ ) を足し合わせるイメージで、式で書けば  $\int_C v_t ds$  となる。この式はベクトル表記をすることもでき、流れのベクトル  $\mathbf{v}$  と線素ベクトル  $d\mathbf{s}$  (曲線の接線方向を向く) のなす角を  $\theta$  とすれば、 $v_t$  が線素ベクトル  $d\mathbf{s}$  方向の成分であることを踏まえて、 $v_t ds = (|\mathbf{v}| \cos \theta) |d\mathbf{s}| = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$  (第 5.1.2 章参照)、つまり、 $\int_C v_t ds = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$  となる (閉曲線なら  $\oint_C$  とする)。ベクトル表記は、ここでも物理的な意味を理解するための便宜上のものなので、実際に計算する際には、図 5.12(b) のように各線分に沿う方向の流れを考えるとよい。

<sup>14</sup>つまり、収束・発散と渦度は独立なものといえる。

## 5.9 球面座標系における収束・発散と渦度

これまで水平面に対する収束・発散や渦度を考えてきたが、対象とする空間スケールが大きくなると、地球が球であることを考える必要が出てくる<sup>15</sup>。ここでは、球面座標系での収束・発散と渦度の式を導出するが、基本的な考え方は第5.8章と同じで、収束・発散は面積分を渦度は線積分を用いる。

地球の中心を原点  $O$ 、経度  $\lambda$ 、緯度  $\theta$ 、半径  $r$  とするような球面座標系  $(\lambda, \theta, r)$  がある (下図)。ここではイメージしやすいように、流れとして風について考えることにする。



球面上の地点  $X(\lambda, \theta, r)$  における風を  $v = (u, v)$  とし、上図の斜線部の微小領域  $C$  (領域 PQRS) に入出入りする風を考える。収束・発散  $D$  の定義式は、式 (5.47) で出てきたように、閉曲線  $C$  の線素分  $ds$  の垂直方向の成分  $v_n$  を用いて、

$$D \equiv \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C v_n ds \quad (5.49)$$

と表せるので、図 5.13 をもとに、境界線 PS, QR を貫く  $u$  成分と境界線 SR, PQ を貫く  $v$  成分をそれぞれ考えると、

$$\text{PS の中点} : u - \frac{\partial u}{\partial \lambda} d\lambda, \quad \text{QR の中点} : u + \frac{\partial u}{\partial \lambda} d\lambda, \quad \text{SR の中点} : v - \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta, \quad \text{PQ の中点} : v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta$$

となる (テイラー展開の 2 次以上の微小項は無視した)。また、地点 P, Q が緯度  $\theta + d\theta$ 、地点 R, S が緯度  $\theta - d\theta$  にある

ことを踏まえて、各境界線 (円弧であることに注意) の長さを求めると、

<sup>15</sup>水平面が曲面になることが問題に思えるが、これよりも大きな問題は、世界地図 (地球儀ではない) 上で領域として選んだ“四角形”の境界の長さが北と南で大きく異なる場合があることである。地球儀で考えれば、赤道での経度 90 度分の緯度線の長さは北に行くにつれて短くなり、北緯 60 度で赤道での長さの半分 ( $\cos \theta = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  なので)、経度 90 度で 0 になることは分かるだろう。この緯度による長さの違いが、流れの出入りや回転を考える際に大きな問題となる。例えば、北半球での収束・発散を考える場合、領域の北と南で同じ強さの南風  $v$  が吹いていても、領域内に南から流入する空気の量が北から流出する空気の量よりも多いために領域内での空気の量が増える、つまり、領域で収束が発生することになる。渦度についても同様で、領域の北と南で同じ強さの西風  $u$  が吹いていても、回転に使われる力が南北で異なるために回転 (渦) が発生することになる。

PS:  $r \times 2d\theta$  (扇形 OPS の弧)

QR:  $r \times 2d\theta$  (扇形 OQR の弧)

$$\begin{aligned} \text{SR: } & \underbrace{r \cos(\theta - d\theta)}_{\text{弧 SR の半径}} \times 2d\lambda \\ & = r \left( \cos \theta - \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} d\theta \right) \times 2d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{PQ: } & \underbrace{r \cos(\theta + d\theta)}_{\text{弧 PQ の半径}} \times 2d\lambda \\ & = r \left( \cos \theta + \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} d\theta \right) \times 2d\lambda \end{aligned}$$

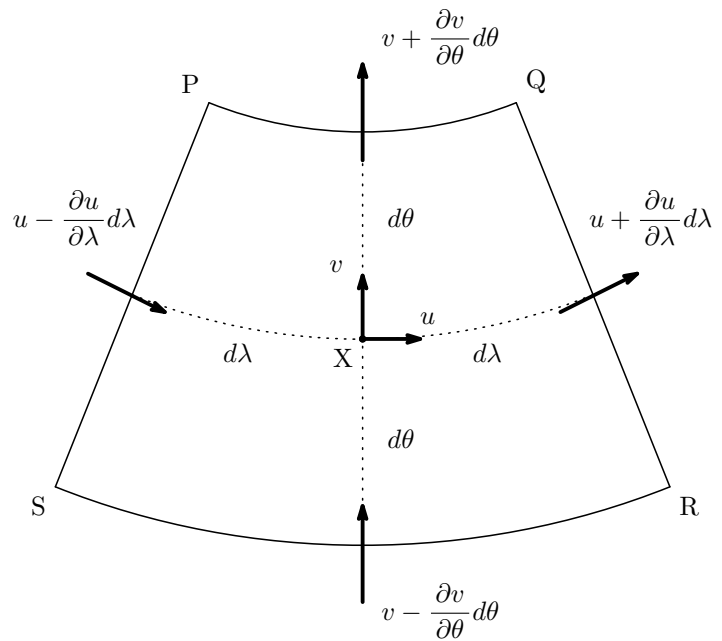


図 5.13 球面上の領域 PQRS における風の出入り (各境界線は円弧)。

のようになる。円弧 SR, PQ の長さを求める際には、 $xy$  平面に平行で円弧 SR, PQ を通る半径  $r \cos(\theta - d\theta), r \cos(\theta + d\theta)$  の断面を考え、 $\cos(\theta \pm d\theta)$  の 1 次の項までのテイラー展開を利用した。

$$\cos(\theta - d\theta) = \cos \theta - \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} d\theta, \quad \cos(\theta + d\theta) = \cos \theta + \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} d\theta$$

よって、領域 PQRS の面積が  $S = 2(r \cos \theta)d\lambda \times 2rd\theta = 4r^2 d\lambda d\theta \cos \theta$  となる<sup>16</sup>ことから、球面上の点における収束・発散  $D$  は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} D & \equiv \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C v_n ds \quad (v_n \text{ は曲線の垂直方向の成分で、外向きが正}) \\ & = \frac{1}{4r^2 d\lambda d\theta \cos \theta} \left[ \underbrace{\left( u + \frac{\partial u}{\partial \lambda} d\lambda \right) \times 2rd\theta}_{\text{境界 QR}} + \underbrace{\left( v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta \right) \times \left( \cos \theta + \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} d\theta \right) 2rd\lambda}_{\text{境界 PQ}} \right. \\ & \quad \left. - \underbrace{\left( u - \frac{\partial u}{\partial \lambda} d\lambda \right) \times 2rd\theta}_{\text{境界 PS}} - \underbrace{\left( v - \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta \right) \times \left( \cos \theta - \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} d\theta \right) 2rd\lambda}_{\text{境界 SR}} \right] \\ & = \frac{1}{4r^2 d\lambda d\theta \cos \theta} \left[ 4rd\lambda d\theta \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} + v \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] \\ & = \frac{1}{r \cos \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v \cos \theta)}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

$\partial\lambda$  を  $\partial x$ 、 $\partial\theta$  を  $\partial y$  とすれば、平面の場合 (式 (5.45)) と似た形になり、地球が球である影響が  $r$  や  $\cos \theta$  に現れることが分かる。つまり、柱脚 15 の領域の北と南を貫く南北風  $v$  にだけ緯度  $\theta$  による  $\cos \theta$  (北ほど小さい) の重みが必要になる。

<sup>16</sup>点 X を通る緯度線 ( $= r \cos \theta \times 2d\lambda$ ) と経度線 ( $= r \times 2d\theta$ ) の積により、曲面 PQRS が平らな四角形であるとみなして面積を求めている。

同様に、渦度  $\zeta$  の定義式は、式 (5.48) で出てきたように、閉曲線  $C$  に沿う線素ベクトル  $ds$  方向の成分  $v_t$  を用いて、

$$\zeta \equiv \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C v_t ds$$

と表せるので、図 5.14 をもとに、境界線 PS, QR に沿う  $v$  成分と境界線 SR, PQ に沿う  $u$  成分をそれぞれ考えると、

$$\text{PS の中点} : v - \frac{\partial v}{\partial \lambda} d\lambda, \quad \text{QR の中点} : v + \frac{\partial v}{\partial \lambda} d\lambda, \quad \text{SR の中点} : u - \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta, \quad \text{PQ の中点} : u + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta$$

となる (テイラー展開の 2 次以上の微小項は無視した)。また、各境界線 (円弧) の長さを求めると以下ようになる。

$$\text{PS: } r \times 2d\theta \quad (\text{扇形 OPS の弧})$$

$$\text{QR: } r \times 2d\theta \quad (\text{扇形 OQR の弧})$$

$$\begin{aligned} \text{SR: } & \underbrace{r \cos(\theta - d\theta)}_{\text{弧 SR の半径}} \times 2d\lambda \\ & = r \left( \cos \theta - \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} d\theta \right) \times 2d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{PQ: } & \underbrace{r \cos(\theta + d\theta)}_{\text{弧 PQ の半径}} \times 2d\lambda \\ & = r \left( \cos \theta + \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} d\theta \right) \times 2d\lambda \end{aligned}$$

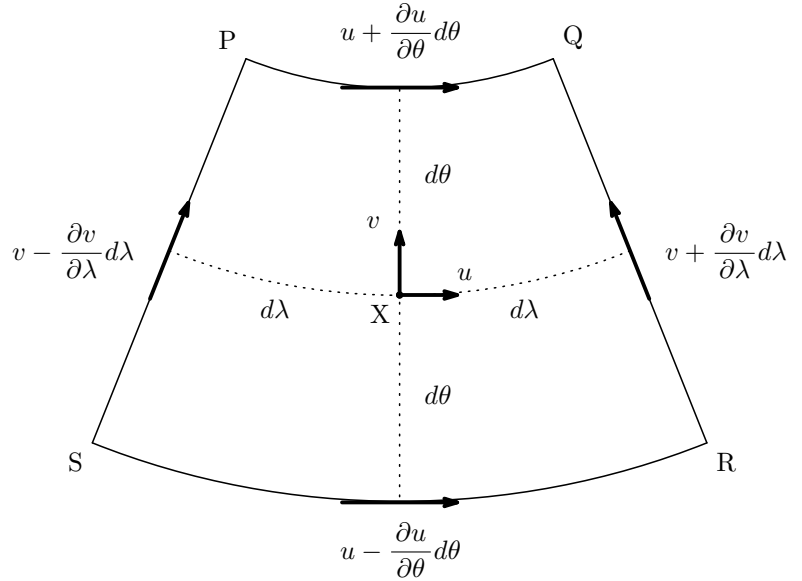


図 5.14 球面上の領域 PQRS に沿う風の流れ (各境界線は円弧)。

よって、領域 PQRS の面積が  $S = 4r^2 d\lambda d\theta \cos \theta$  となることから、球面上の点における渦度  $\zeta$  は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \zeta & \equiv \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C v_t ds \quad (v_t \text{ は曲線の接線方向の成分で、反時計回りが正}) \\ & = \frac{1}{4r^2 d\lambda d\theta \cos \theta} \left[ \underbrace{\left( u - \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta \right) \times \left( \cos \theta - \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} d\theta \right) 2rd\lambda}_{\text{境界 SR}} + \underbrace{\left( v + \frac{\partial v}{\partial \lambda} d\lambda \right) \times 2rd\theta}_{\text{境界 RQ}} \right. \\ & \quad \left. - \underbrace{\left( u + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta \right) \times \left( \cos \theta + \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} d\theta \right) 2rd\lambda}_{\text{境界 QP}} - \underbrace{\left( v - \frac{\partial v}{\partial \lambda} d\lambda \right) \times 2rd\theta}_{\text{境界 PS}} \right] \\ & = \frac{1}{4r^2 d\lambda d\theta \cos \theta} \left[ 4rd\lambda d\theta \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda} - u \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] \\ & = \frac{1}{r \cos \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial (u \cos \theta)}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

ここでもやはり、 $\partial \lambda$  を  $\partial x$ 、 $\partial \theta$  を  $\partial y$  とすれば、平面の場合 (式 (5.46)) と似た形になり、地球が球である影響が  $r$  や  $\cos \theta$  に現れることが分かる。収束・発散と同様に、注脚 15 の領域の北と南を吹く東西風  $u$  にだけ  $\cos \theta$  の重みを掛ける必要がある。

## 付録A 補足

## A.1 行列式について

テキストの第 3.11 節や第 3.12.1 節で、行列式は方程式が解を持つかどうかの判定に使われると述べたが、行列式にはいろいろな性質があるので、これまで出てきたものも含めてまとめておく。ここでは、簡単のため、 $2 \times 2$  行列 (2 次正方行列) と  $3 \times 3$  行列 (3 次正方行列) を中心に見ていくが、4 次以上の正方行列でも同じことが言える。

### A.1.1 性質 1: 単位行列の行列式は 1

対角成分 (左上から右下の成分) が 1、それ以外が 0 である単位行列の行列式は、計算するとすぐに分かるが 1 である。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (\text{A.1})$$

(A.2)

また、 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  のような反対角成分 (左下から右上にかけての成分) が 1、それ以外の成分が 0 である行列<sup>1</sup>の行列式は  $-1$  である (実際に計算せよ)。行列式は、これらを基準 (1 または  $-1$ ) として、行列の”大きさ”のようなものを考えている。もちろん、すべての成分が 0 (つまり零行列) であれば行列式は 0 である。例えば、正の対角成分が大きく (小さく) になると、行列式も大きく (小さく) なり、

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25, \quad \begin{vmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.5, \quad \begin{vmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{vmatrix} = 0.25 \quad (\text{A.3})$$

また、正の反対角成分が大きく (小さく) になると、行列式が小さく (大きく) なる (マイナスがつくので大小が逆)。

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -25, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -0.5, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{vmatrix} = -0.25 \quad (\text{A.4})$$

3 次以上の正方行列でも同じようになることはすぐ分かるだろう。

さらに、対角行列や反対角行列以外の行列、例えば、 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  の行列式が  $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -2$  となることから、「成分が正であれば、対角成分は行列式を増やす、反対角成分は行列式を減らす」ように働く (成分が負だと、働きは逆になる) ことが認識できるだろう。要するに、両者の大小の兼ね合いで行列式が決まるということである。3 次正方行列に対するサラスの方法や 3 次以上の正方行列に対する余因子展開の式を考えても、この働きを認識できるだろう。

<sup>1</sup>反対角成分以外が 0 のものを反対角行列と呼ぶ。

成分が全部 0 である零行列の行列式が 0 になることに触れたが、この他、同じ行、または、同じ列が 1 組でも含まれる行列の行列式も 0 になる。これは小さいサイズの行列から順に考えていくことで帰納的に示すことができる。まず、2 次正方行列が同じ行 (列) をもつ場合、その行列式が 0 になることは、

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ba = 0, \quad \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0 \quad (\text{A.5})$$

というように簡単に示せる。同じ行 (列) を 1 組でも含む 3 次正方行列についても、他と異なる行 (列)(太字) に対して余因子展開をすることで、同じ行 (列) を持つ  $2 \times 2$  の行列式が現れ、行列式が 0 になることがすぐに分かる。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \end{vmatrix} &= +d \underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix}}_{=0} - e \underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix}}_{=0} + f \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}}_{=0} = 0 \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ a & b & c \end{vmatrix} &= -d \underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix}}_{=0} + e \underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix}}_{=0} - f \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}}_{=0} = 0 \\ \begin{vmatrix} a & a & \mathbf{d} \\ b & b & \mathbf{e} \\ c & c & \mathbf{f} \end{vmatrix} &= +d \underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix}}_{=0} - e \underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix}}_{=0} + f \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}}_{=0} = 0 \\ \begin{vmatrix} a & \mathbf{d} & a \\ b & \mathbf{e} & b \\ c & \mathbf{f} & c \end{vmatrix} &= -d \underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix}}_{=0} + e \underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix}}_{=0} - f \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}}_{=0} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

同様に、同じ行 (列) を 1 組でも含む 4 次 (以上) の正方行列の行列式が 0 になることも以下のように簡単に示せる。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ i & j & k & l \end{vmatrix} &= -e \underbrace{\begin{vmatrix} b & c & d \\ b & c & d \\ j & k & l \end{vmatrix}}_{=0} + f \underbrace{\begin{vmatrix} a & c & d \\ a & c & d \\ i & k & l \end{vmatrix}}_{=0} - g \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a & b & d \\ i & j & l \end{vmatrix}}_{=0} + h \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ i & j & k \end{vmatrix}}_{=0} = 0 \\ \begin{vmatrix} a & e & i & a \\ b & f & j & b \\ c & g & k & c \\ d & h & l & d \end{vmatrix} &= -e \underbrace{\begin{vmatrix} b & j & b \\ c & k & c \\ d & l & d \end{vmatrix}}_{=0} + f \underbrace{\begin{vmatrix} a & i & a \\ c & k & c \\ d & l & d \end{vmatrix}}_{=0} - g \underbrace{\begin{vmatrix} a & i & a \\ b & j & b \\ d & l & d \end{vmatrix}}_{=0} + h \underbrace{\begin{vmatrix} a & i & a \\ b & j & b \\ c & k & c \end{vmatrix}}_{=0} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

正方行列は連立方程式の係数でもあるので、同じ行 (列) を含むというのは、連立方程式の一部の式が一致しているため解がただ 1 つに決まらない状態である (だからこそ行列式が 0)。行列式が 0 というのは、行列が重複した情報 (行/列) を含んでいるため、行列のサイズと階数(重複していない有効な行 (列) の数でランクとも) が一致していないことも表す。

### A.1.2 性質 2: 行や列を入れ替えると行列式の正負は逆になる (交代性)

前節の式 (A.3), (A.4) にある行列式は正負が逆であるが、式 (A.3) と式 (A.4) の行列は、行 (または列) を入れ替えた関係になっている。これは、対角行列や反対角行列に限った話ではなく、例えば、直前に出てきた  $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  の行を入れ替えた行列

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 、列を入れ替えた行列  $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  の行列式は、共に  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 2$ ,  $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2$  というように、元の行列の行列式 (-2) と正負が逆である。これをふまえると、行 (列) を入れ替えた後、列 (行) を入れ替えた行列  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  の行列は、元の行列と同じ行列式 -2 になることはすぐに分かるだろう。この性質は 3 次以上の正方

行列でも成り立ち、例えば、行列式が 1 である 3 次の単位行列  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  の第 1 行 (列) と第 3 行 (列) を入れ替え

た反対角行列  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  の行列式は -1 であり、任意の行列  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  に対しても、次のように、1 組の任

意の行、または、列を入れ替えれば行列式の正負が逆になる。以下の例では、行を入れ替えた場合に対して、列 (第 1 列) で余因子展開を行うことで正負が逆になることを示した (列を入れ替えた場合については、行で余因子展開するとよい)。

$$\begin{array}{l}
 \text{元の行列:} \\
 \text{2 行と 3 行入れ替え:} \\
 \text{1 行と 2 行入れ替え:} \\
 \text{1 行と 3 行入れ替え:}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\
 +a \begin{vmatrix} h & i \\ e & f \end{vmatrix} - g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} \\
 +d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} e & f \\ b & c \end{vmatrix} \\
 +g \begin{vmatrix} e & f \\ b & c \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} h & i \\ b & c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} h & i \\ e & f \end{vmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 p + q + r \\
 -p - q - r \\
 -p - q - r \\
 -p - q - r
 \end{array}
 \tag{A.8}$$

## A.1.3 性質 3: ある行(列)を定数倍すると、行列式も定数倍される(線型性)

式(A.3)の左の3つの行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$  に注目する。 $A$ の第1行(または第1列)を5倍したものが $B$ であるが、 $B$ の行列式も $A$ の行列式の5倍になっていた。同様に、 $B$ の第2行(または第2列)を5倍したものが $C$ であるが、 $C$ の行列式も $B$ の行列式の5倍になっていた。これは対角行列でない場合も同様で、例えば、行列  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  について、以下のように、ある行(列)を3倍すると、行列式も3倍される。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2, \quad \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{第1行を3倍}} = 3 - (-3) = 6, \quad \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{第1列を3倍}} = 3 - (-3) = 6 \quad (\text{A.9})$$

一般に、 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の ある1行(列)を $t$ 倍した行列の行列式は、 $X$ の行列式 $|X| = ad - bc$ の $t$ 倍になる。

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = tad - tbc = t(ad - bc), \quad \begin{vmatrix} a & b \\ tc & td \end{vmatrix} = tad - tbc = t(ad - bc) \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{vmatrix} ta & b \\ tc & d \end{vmatrix} = tad - tbc = t(ad - bc), \quad \begin{vmatrix} a & tb \\ c & td \end{vmatrix} = tad - tbc = t(ad - bc)$$

3次以上の正方行列でも同様に、例えば、行列 $X$ とその第2列のみ(実際はどの行、どの列でもよい)を $t$ 倍した行列 $Y$

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} a & tb & c \\ d & te & f \\ g & th & i \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

の行列式 $|X|, |Y|$ を第2列で余因子展開により求めようとするれば、 $|Y|$ が $|X|$ の $t$ 倍になることはすぐに分かるだろう。

$$|X| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \underbrace{-b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}}_{=p} + \underbrace{e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}}_{=q} - \underbrace{h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}_{=r} = p + q + r \quad (\text{A.12})$$

$$|Y| = \begin{vmatrix} a & tb & c \\ d & te & f \\ g & th & i \end{vmatrix} = \underbrace{-tb \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}}_{=tp} + \underbrace{te \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}}_{=tq} - \underbrace{th \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}_{=tr} = t(p + q + r) = t|X|$$

実用的には、行列式を求める際に、ある列、または、ある行に共通する数 (公約数) が含まれているのであれば、行列式の計算を始める前に最大公約数で括ってしまえばよいということである (下の例では 3 行が 99 の倍数、3 列目が 2 の倍数)。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 297 & 99 & 198 \end{vmatrix} = 99 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 99 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.13})$$

また、例えば、 $\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  の右辺は、行列式  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  が  $t$  個ということなので、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} &= \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}_{t \text{ 個}} \\ &= \underbrace{\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{vmatrix}}_{2 \text{ 個}} + \underbrace{\begin{vmatrix} (t-2)a & (t-2)b \\ c & d \end{vmatrix}}_{(t-2) \text{ 個}} = \underbrace{\begin{vmatrix} 5a & 5b \\ c & d \end{vmatrix}}_{5 \text{ 個}} + \underbrace{\begin{vmatrix} (t-5)a & (t-5)b \\ c & d \end{vmatrix}}_{(t-5) \text{ 個}} \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

というように、注目する行 (ここでは第 1 行) の成分を自由に分けて良いことが分かる (太字の第 2 行はそのままであることに注意)。実は、任意の行列について、注目していない行 (列) を固定しさえすれば、任意の数  $m, n$  を使い、もっと自由に分解することができる。分解して良いことは、実際に行列式を計算してみるとすぐに分かる (太字は固定する行または列)。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} m & n \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-m & b-n \\ c & d \end{vmatrix} = (\underline{m}d - \underline{n}c) + \{(a-\underline{m})d - (b-\underline{n})c\} = ad - bc \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c-m & d-n \end{vmatrix} = (\underline{a}n - \underline{b}m) + \{(d-\underline{n})a - (c-\underline{m})b\} = ad - bc \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-m & b \\ c-n & d \end{vmatrix} = (\underline{m}d - \underline{b}n) + \{(a-\underline{m})d - (c-\underline{n})b\} = ad - bc \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b-m \\ c & d-n \end{vmatrix} = (\underline{a}n - \underline{m}c) + \{(d-\underline{n})a - (b-\underline{m})c\} = ad - bc \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

(補足) 行列式の分割計算の際には、行列の足し算や引き算と混同しないように注意！行列式の分割計算では、行列の足し算や引き算のように全成分同時に計算するのではなく、あくまでも 1 行 (列) ごとに順に分割 (ほかの行 (列) は固定) する。つまり、行列計算  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{pmatrix}$  は正しいが、行列式の分解  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{vmatrix}$  は間違いである。絶対値の計算で  $|a+b| = |a|+|b|$  が必ずしも正しくない (例えば、 $a, b$  のいずれかが負の場合) のと同様に、 $|A+B| \neq |A|+|B|$  である。

行列式の分割が 3 次以上の正方行列でも成り立つことは、分割した行 (列) に対する余因子展開を考えればすぐに分かる。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + r \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a-p & b & c \\ d-q & e & f \\ g-r & h & i \end{vmatrix} = (a-p) \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - (d-q) \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + (g-r) \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \tag{A.16}$$

実用的には、行列式の計算を面倒にさせる行 (列) があるときに、その成分を便利そうな数を使って分割すれば良い (分割する行 (列) 以外は変えてはいけない) ということである。例えば、 $\begin{vmatrix} 47 & 103 \\ 8 & 16 \end{vmatrix}$  については、計算を面倒にする 47 と

103 を  $47 = 50 - 3, 103 = 100 + 3$  と考えることで (第 2 行はそのまま)、

$$\begin{vmatrix} 47 & 103 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 47 & 103 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \left\{ \begin{vmatrix} 50 & 100 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} = 8 \left\{ 50 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} = -72 \tag{A.17}$$

第 2 行を 8 で括る
第 2 行の 1, 2 はそのまま
同じ行だから 0
= -9

と簡単に求めることができる。また、性質 1 で扱った、同じ行 (列) があるときは行列式が 0 になることを利用する、つまり、同じ行 (列) ができるように意図的に分割することで、

$$\begin{vmatrix} 47 & 103 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \times 8 & 5 \times 16 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 23 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 8 & 16 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 7 & 23 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -72 \tag{A.18}$$

第 2 行の 5 倍を作る
47-40, 103-80
同じ行だから 0
= -9

とすることもできる (5 で括れば同じ行が現れることを見越して、第 1 行の 47 と 100 を第 2 行の 8 と 16 の定数 (5) 倍により分割した)。2 つの求め方を紹介したが、この他にも簡単に求める方法はあるだろう。

式 (A.18) の「行列式が 0 になることを見越して、意図的に同じ行 (列) を作る」を一般的に書くと以下のようになる。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} tc & td \\ c & d \end{vmatrix}}_{\text{本質的に同じ行で 0}} + \begin{vmatrix} a-tc & b-td \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{a-tc} & \underline{b-td} \\ c & d \end{vmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a & ta \\ c & tc \end{vmatrix}}_{\text{本質的に同じ列で 0}} + \begin{vmatrix} a & b-ta \\ c & d-tc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \underline{b-ta} \\ c & \underline{d-tc} \end{vmatrix} \quad (\text{A.20})$$

もちろん、両式とも最右辺の行列式を計算すると、 $t$  が消え  $ad - bc$  になる。 $t$  の正負が何であれ、両式は成り立つので、

ある行 (列) に他の行 (列) の定数倍を足し引きしても行列式の値は変わらない

ということになる。3 次以上の正方行列でも同様に、例えば、

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ ta & tb & tc \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{\text{第 1,2 行が同じなので 0}} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-ta & e-tb & f-tc \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \underline{d-ta} & \underline{e-tb} & \underline{f-tc} \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} tb & b & c \\ te & e & f \\ th & h & i \end{vmatrix}}_{\text{第 1,2 列が同じなので 0}} + \begin{vmatrix} a-tb & b & c \\ d-te & e & f \\ g-th & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{a-tb} & b & c \\ \underline{d-te} & e & f \\ \underline{g-th} & h & i \end{vmatrix} \quad (\text{A.22})$$

となる。さらに、式 (A.21) の最右辺に対して、第 1 行と本質的に同じ行を意図的に作れば (式 (A.23) の中辺第 1 項第 3 行)、

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-ta & e-tb & f-tc \\ sa & sb & sc \end{vmatrix}}_{\text{第 1,3 行が同じなので 0}} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-ta & e-tb & f-tc \\ g-sa & h-sb & i-sc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \underline{d-ta} & \underline{e-tb} & \underline{f-tc} \\ \underline{g-sa} & \underline{h-sb} & \underline{i-sc} \end{vmatrix} \quad (\text{A.23})$$

となり、他の行 (列) の定数倍の足し引きは同時に行って良いことも分かる。具体的な例をあげると以下の通りである。

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{この行 (第 1 行) を定数倍} \\ \leftarrow \text{第 2 行} + 1 \times (\text{第 1 行}) \\ \leftarrow \text{第 3 行} - 2 \times (\text{第 1 行}) \end{array} = 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{第 1 列で余因子展開}} = 8 \quad (\text{A.24})$$

以上が行列式のもつ性質である。

行列式の線型性を利用すると、連立方程式の解の公式であるクラメル公式 (p55) も簡単に示せる。3元連立1次連立方程式

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}} \quad (\text{A.25})$$

を例に示してみる。この連立方程式に対して、行列式

$$\begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 & b_1 & c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & b_2 & c_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 & c_1 \\ a_2 & a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & c_2 \\ a_3 & a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 \\ a_2 & b_2 & a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \\ a_3 & b_3 & a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A.26})$$

を考えるのがポイントである。 $x_1, x_2, x_3$  は定数なので、行列式の線型性から、式 (A.26) の1つ目は以下ようになる。

$$\begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 & b_1 & c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & b_2 & c_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{|\mathbf{A}|} + x_2 \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{第1,2列が同じなので0}} + x_3 \underbrace{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{第1,3列が同じなので0}} = x_1 |\mathbf{A}| \quad (\text{A.27})$$

ここで、式 (A.27) の最左辺の第1列が上から順に  $d_1, d_2, d_3$  であることに注意すると、 $x_1$  は以下のように表せる。

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = x_1 |\mathbf{A}| \iff x_1 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A.28})$$

式 (A.26) の2つ目と3つ目に対して、同様に考えることで、 $x_2, x_3$  についても以下のように表せる。

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 & c_1 \\ a_2 & a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & c_2 \\ a_3 & a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{=x_2|\mathbf{A}|} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \iff x_2 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 \\ a_2 & a_2 & a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \\ a_3 & a_3 & a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 \end{vmatrix}}_{=x_3|\mathbf{A}|} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \iff x_3 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A.30})$$

## 行列式のまとめ

1. 単位行列の行列式は1  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

2. 行(列)を入れ替えると行列式の正負が逆になる(交代性)  $\begin{cases} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3 \text{ なら} & \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -3 \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4 \text{ なら} & \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -4 \end{cases}$

3. 同じ行(列)が1組でもあれば行列式は0  $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = 0$

4. ある行(列)に同じ数字が掛けられていれば行列式の前に括り出せる(線型性1)

→ 3と合わせると、ある行(列)とそれが定数倍された行(列)は実質的に同じものなので行列式が0

$$\begin{vmatrix} 10a & 10b \\ c & d \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 10a & b \\ 10c & d \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 10a & 10b \\ a & b \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 10a & 2a \\ 10b & 2b \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$$

4. ある行(列)を自由に分割して良いが、その他の行(列)は変えてはいけない(線型性2)

→ どうせ分割するなら行列式が0になるものを作ろうと分割すると良い(=各行(列)の定数倍の足し引きでも行列式は不変)。

$$\begin{vmatrix} 47 & 103 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20+27 & 30+73 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 30 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 27 & 73 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{計算するときに嬉しくない分割} \\ \text{実質的に同じで0} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 47 & 103 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40+7 & 80+23 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40 & 80 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 23 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 7 & 23 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -72$$

$$\begin{vmatrix} 40 & 103 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40+0 & 80+23 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40 & 80 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 23 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = -184 \quad \begin{matrix} \text{実質的に同じで0} \\ \text{運がいいと0} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 10 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3+0 & 6+4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \quad \begin{matrix} \text{実質的に同じで0} \\ \text{1が含まれると0が作れる} \end{matrix}$$

1行目=1行目-5x2行目

1行目=1行目+3x2行目

列で分割でも同じ

地球基礎数学・物理学 (EE11881) 第 1 回レポート課題 (松枝担当分)

出題日: 2022 年 4 月 15 日 (金) 提出期限: 2022 年 4 月 22 日 (金) (manaba または CCS1 階レポート box)

(微分・積分)

問 1 次の関数を  $x$  で微分せよ。

(1)  $\frac{1}{(2x+1)^3}$     (2)  $-\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}$     (3)  $\sin^2 3x$     (4)  $\log(\sqrt{x^2+1}+x)$     (5)  $x^{\log x}$

問 2 以下の問に答えよ。

- (1)  $\sin x$  を  $e^{ix}, e^{-ix}$  を用いて表わせ。
- (2) (1) を利用して、 $\int_0^\pi e^x \sin^2 x dx$  を計算せよ。また、 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  を用いて同じく計算せよ。
- (3)  $e^x$  を  $x = 3$  の周りでテイラー展開せよ。
- (4) (3) を利用して、 $\int_0^\pi e^x \sin^2 x dx > 8$  を示せ。ただし、 $e = 2.7, \pi = 3.1$  とする。

問 3  $\int_a^b \int_c^d \int_e^f (2x + y + z) dx dy dz$  を計算せよ。(ヒント: 各変数の積分区間に注意し、括りながら計算せよ)。

問 4  $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$ ,  $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$  の値を求めよ (ヒント: 置換後は問 1(2) を利用せよ)。

問 5 manaba のアンケートに素直に回答せよ。なお、お世辞を書いても悪口を書いても点数は変わらない。

地球基礎数学・物理学 (EE11881) 第 2 回レポート課題 (松枝担当分)

出題日: 2022 年 4 月 22 日 (金) 提出期限: 2022 年 4 月 29 日 (金) (manaba または CCS1 階レポート box)

(線型代数 1)

$E$  を単位行列とする。行列式に関する補足 (テキストの付録 A として配布した p154-161、および、p154 と p155 の間のカラーページ要点) を読んだ上で、以下の各問に答えよ。カラーページ要点の理屈を説明したのが p154-161 なので、少なくともカラーページ要点に書かれていることを理解しておくこと (理解できれば、一部の問題は非常に簡単に解くことができる)。

問 1 型の同じ行列  $A, E$  に対して、 $A^3 - E^3 = (A - E)(A^2 + AE + E^2)$  は成り立つか?

問 2  $X^2 = E$  を満たす 2 次の正方行列  $X$  を次のようにして求めた。

$$X^2 - E = O \text{ より、} (X - E)(X + E) = O \text{ なので、} X = E, \text{ または、} X = -E$$

しかし、 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  も  $X^2 = E$  を満たすことから、この求め方には誤りがある。それを指摘せよ (指摘するだけで良い)。

問 3 正方行列に関して、 $|AX| = |A||X|$  が成り立つ (例題 3.18) が、 $|ABC| = |A||B||C|$  はどうか?

問 4 3 次の正方行列  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  を用いて、 $|A^\top| = |A|$  であることを示せ (ヒント: 左辺と右辺それぞれについて、余因子展開 (列、行いづれでも可) で途中まで計算してみるとよい)。

問 5 以下の行列の行列式を求めよ。ただし、 $|G|, |H|$  は因数分解した形で答えよ (ヒント:  $H$  は各行に  $a, b, c, d$  が含まれているので、第 1 列に第 2-4 列を..)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & a & 1+a \\ 2 & b & 2+b \\ 3 & c & 3+c \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 1 & 101 & 4 \\ 2 & 100 & 5 \\ 3 & 99 & 6 \end{pmatrix}, & C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, & E &= \begin{pmatrix} 1 & 75 & 2 \\ 10 & 125 & 20 \\ -1 & 50 & -4 \end{pmatrix}, & F &= \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 \\ 19 & 20 & 15 \\ 18 & 17 & 16 \end{pmatrix} \\ G &= \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}, & H &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}, & J &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(裏面へ続く)

問6 補充プリントにある行列式の交代性と線型性を使うことで、いくつかのことが非常に簡単に示せる。

(1) 3次の正方行列に対して交代性を使うことで、「同じ行(列)があると行列式が0になる」ことを示せ(ヒント: あえて同じものを入れ替えると...)

(2) 3元連立1次連立方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}}$$

の解を求めるクラメルの公式

$$x = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

を、行列式

$$\begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_1x + b_1y + c_1z & c_1 \\ a_2 & a_2x + b_2y + c_2z & c_2 \\ a_3 & a_3x + b_3y + c_3z & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3z \end{vmatrix}$$

に対して線型性を使うことで示せ(ヒント: 行列式の計算が終わったら、 $d_1, d_2, d_3$  になる場所を探してみよ)。

問7  $V^{-1}AV = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$  のとき、 $A^n$  はどうなるか?(ヒント: とりあえず与式を  $A=$  の形に..)

問8 以下の行列の逆行列を求めよ。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

問9 manaba のアンケートに素直に回答せよ。なお、お世辞を書いても悪口を書いても点数は変わらない。

## 地球基礎数学・物理学 (EE11881) 第3回レポート課題 (松枝担当分)

出題日: 2022年4月29日(金)      提出期限: 2022年5月13日(金) (manaba または CCS1 階レポート box)

(線型代数 2)

問1 以下の行列の固有値を求めよ (ヒント: 素直に計算せず、計算がなるべく楽になるように工夫するとよい)。

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 77 & 1 & -1 \\ 1 & 77 & 1 \\ -1 & 1 & 77 \end{pmatrix}$$

問2 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  の固有値、トレース、行列式を求めよ。

(補足) 計算が終わったら答えがどの成分からきたか観察せよ。

問3 正方行列  $A$  の固有値を  $\lambda$  とする。 $A$  の逆行列  $A^{-1}$  の固有値が  $\lambda^{-1}$  になることを示せ (ヒント: 第1文を式で書くと  $Ax = \lambda x$  なので、第2文にある示せばよいことを式で書くと... )。

問4 正方行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$  で表される一次変換 (行列を前から掛けることによる点の移動) を考える。

- (1) 直線  $2x - y + 3 = 0$  は一次変換によりどのような図形に移されるか (ヒント: 直線上の点はどうか表せるか)。
- (2)  $A$  の固有値、固有ベクトルを求めたうえで、(1) の図形との関係を論ぜよ (ヒント: 図を書いてみると良い)。
- (3)  $xy$  平面全体は一次変換によりどのような図形に移されるか? (ヒント: 平面上の任意の点  $(x, y)$  を変数  $s, t$  と固有ベクトルにより表して (1) と同様に求めるか、または、(1), (2) をふまえて幾何学的に考えるとよい)

問5 次の各問に答えよ。

- (1) 点  $P(x, y)$  を直線  $y = x$  に関して対称移動した点  $Q$  の座標を  $x, y$  を用いて表せ (ヒント: 具体的な数値で考えるとよい)。
- (2) 点  $P$  を点  $Q$  に移すような一次変換  $f$  を考える。この一次変換  $f$  を表す行列  $A$  を求めよ (ヒント:  $A$  の成分をいくつか適当に書いてみるとよい)。
- (3) いま、 $xy$  平面上に次のような4つの図形  $A, B, C, D$  がある。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{図形 A} : 6 \text{ 点 } (4, 3), (5, 3), (5, 1), (4, 1), (4, 2), (6.5, 2) \text{ をこの順につないだもの} \\ \text{図形 B} : 2 \text{ 点 } (6, 3), (6, 1) \text{ をこの順につないだもの} \\ \text{図形 C} : 2 \text{ 点 } (7, 3), (9, 3) \text{ をこの順につないだもの} \\ \text{図形 D} : 6 \text{ 点 } (8, 3.5), (8, 1), (7, 1), (7, 2), (9, 2), (9, 1) \text{ をこの順につないだもの} \end{array} \right.$$

これらの図形は一次変換  $f$  によってどのように移されるか? 1つの  $xy$  平面上にすべて図示せよ (ヒント: ノーヒントですが、担当する先生の名前を知っていれば、答えが合っていることがすぐに分かると思います。 )。

問6 行列の対角化には様々な利点がある。例えば、 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$  は、一見するとどのようなグラフか分からないが、 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  の対角化を考えることで、容易に分かるようになる (もし  $2xy$  が無ければグラフは容易に描けるが、 $2xy$  を消す操作が  $A$  の対角化にあたる)。

(1)  $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とする。 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$  を  $A, x, x^\top$  で表わせ (ヒント: とりあえず  $Ax$  を計算してみよ)。

(2) 行列  $A$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 > \lambda_2)$  に対応する固有ベクトルをそれぞれ  $v_1, v_2$  とする。固有ベクトル  $v_1, v_2$  を求めよ。ただし、固有ベクトルを列とする行列  $V = \begin{pmatrix} \boxed{v_1} & \boxed{v_2} \end{pmatrix}$  が回転行列になるように  $v_1, v_2$  を決定せよ (ヒント: テキスト p73-74 にある回転行列の性質  $|V| = 1$  が成り立つように、固有ベクトルのノルムと各成分の正負を決めよ)。

(3) 回転行列  $V$  は点をどのように回転させる行列か?

(4) 行列  $A$  の対角化により  $A = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} V^{-1}$  と表すことができるが (テキスト p87 にある  $V^{-1}AV$  の式の両辺に前から  $V$ 、後ろから  $V^{-1}$  をかければよい)、 $V$  が回転行列であることから  $V^{-1} = V^\top$  なので、さらに、 $A = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} V^\top$  と変形できる。これを (1) で求めた式に代入し、 $V^\top x = x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  とすることで、 $x', y'$  に関する式を求めよ (ヒント: 途中、 $V = (V^\top)^\top, X^\top Y^\top = (YX)^\top$  であることを利用せよ)。

(5) (3),(4) をふまえ、 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$  がどのようなグラフであるか図示せよ。

地球基礎数学・物理学 (EE11881) 第 4 回レポート課題 (松枝担当分)

出題日: 2022 年 5 月 13 日 (金) 提出期限: 2022 年 5 月 20 日 (金) (manaba)

(常微分方程式)

係数変化法に関して書かれたテキスト p116 – 117 を読み、テキスト中の演習問題を解いたうえで、以下の問いに答えなさい。とくに、以下の演習

演習 4.1, 演習 4.2, 演習 4.3, 演習 4.4, 演習 4.6, 演習 4.7, 演習 4.8, 演習 4.10

については必ず解くこと (提出の必要はないが、分からないところは聞いて理解してから課題に取り組むこと)。

問 1 以下の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4 \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + x = t^2 e^t \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = t \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

問 2 manaba のアンケートに素直に回答せよ。なお、お世辞を書いても悪口を書いても点数は変わらない。

地球基礎数学・物理学 (EE11881) 第 5 回レポート課題 (松枝担当分)

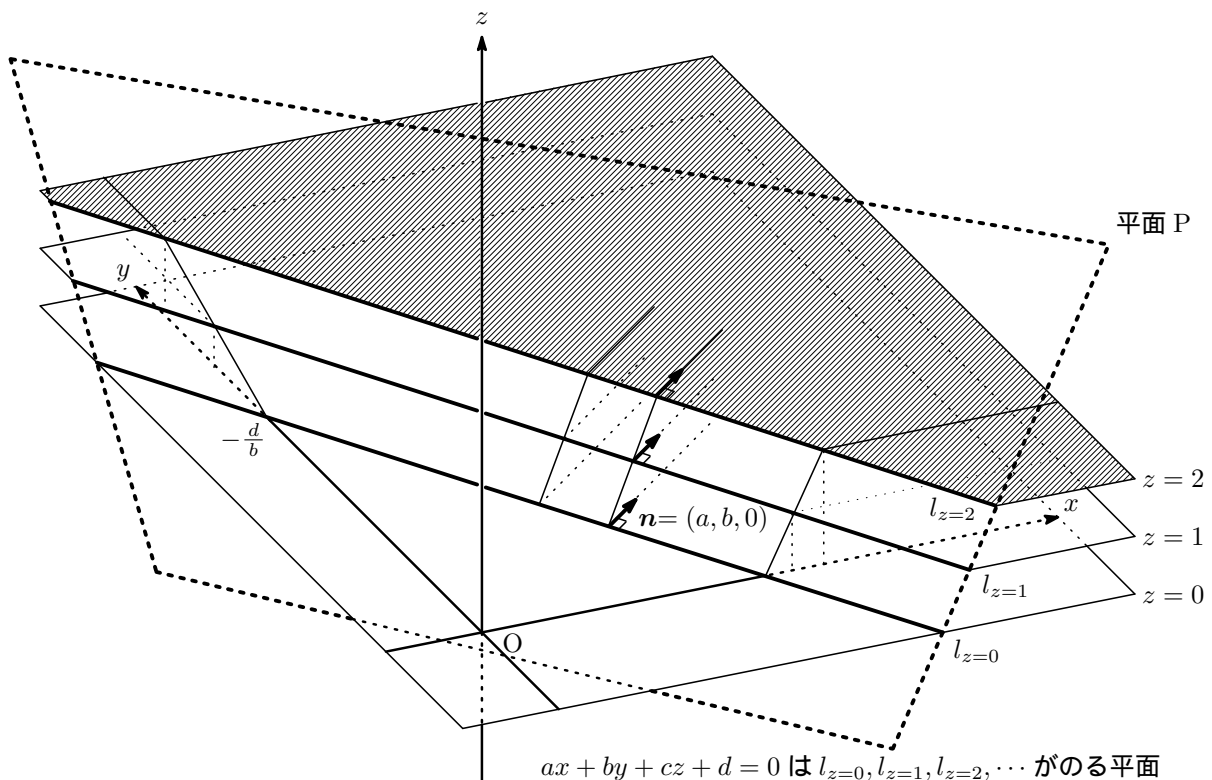
出題日: 2022 年 5 月 20 日 (金) 提出期限: 2022 年 5 月 29 日 (日) (manaba)

(ベクトル解析)

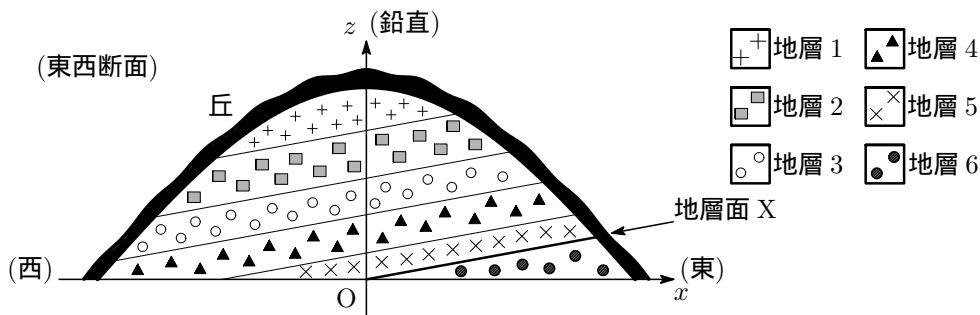
問 1 次の文章を読み、つづく (1)~(4) に答えよ。角度を求める際には関数電卓を用いてよい。

$xy$  平面における  $ax+by+c=0$  は直線 ( $l$  とする) を表し、その傾きは  $-\frac{a}{b}$  である。これに直交する直線  $m$  の傾きは  $\frac{b}{a}$  なので、この直線  $m$  上にのるベクトル  $n$  は、 $n=(a,b)$  と成分表示できる (この  $n$  を直線  $l$  の法線ベクトルとよぶ)。直線  $l$  の法線ベクトルの成分は、直線  $l$  の式の  $x$  と  $y$  の係数であることが分かるが、逆に言えば、ある直線に垂直な法線ベクトルの成分が分かれば、その直線の式の  $x$  と  $y$  の係数はすぐに決まるということである (定数項  $c$  はどの点を通るかで決まる)。なお、法線ベクトルを  $n=(-a,-b)$  としてももちろん問題はない。

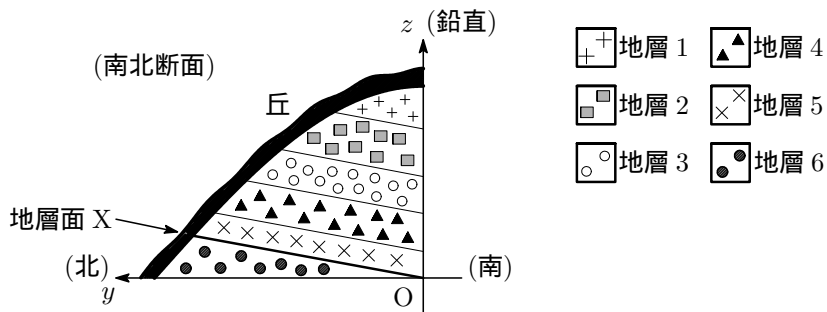
以上を踏まえて、下図を基に  $xyz$  空間における  $ax+by+cz+d=0$  のグラフについて考えてみる。このグラフは  $xy$  平面 ( $z=0$  の水平面) 上では、 $ax+by+d=0$  と直線 ( $l_{z=0}$  とする) になることが分かる。また、 $z=1$  の水平面上でも  $l_{z=1}:ax+by+(c+d)=0$ 、 $z=2$  の水平面上 (斜線) でも  $l_{z=2}:ax+by+(2c+d)=0$  というように、直線  $l_{z=0}$  と傾きが同じだが  $y$  切片が異なる直線であることが分かる。いろいろな高さ  $z$  の水平面で同様に考えることで、 $ax+by+cz+d=0$  が平面を表す (平面 P) ことは分かるだろう。この平面 P に垂直な法線ベクトル  $n$  は、先程同様に  $n=(a,b,c)$  と表すことができる。これは次のように考えると良い。各高さ  $z$  の水平面における直線  $l_z$  の法線ベクトルは  $n=(a,b,0)$  であり (下図)、高さ  $z$  が変わると直線  $l_z$  が傾きを保ったまま水平に (今回の場合、紙面の右奥の方に) 移動する ( $y$  切片が変わる)。よって、法線ベクトル  $n$  を平面 P に垂直にさせるには、 $z$  座標  $c$  で補正すればよい (下図だと、水平だった法線ベクトルの先端を下向きに倒し ( $c < 0$ )、平面 P に垂直な法線ベクトルとすればよい)。 $xy$  平面における直線  $ax+by+c=0$  同様に、法線ベクトルさえ分かれば平面の式の  $x, y, z$  の係数はすぐに決まることになる ( $d$  はその平面がどの点を通るかで決まる)。



(1)  $x$  軸が西から東に、 $y$  軸が南から北に、 $z$  軸が地表面 ( $xy$  平面) から鉛直上方に向かう  $xyz$  座標系を考える。下の図はある丘で見られた東西断面 ( $y = 0$ ) における地層の露頭を表したものである。各地層面は平行であり、地表面 ( $x$  軸) とのなす角度は  $\frac{\pi}{6}$  であった。丘の内部 ( $y$  軸正方向) でも同様の傾きで地層面 X が広がっている (つまり、地層面 X は、北に向かって傾斜はなく、 $x$  軸とのなす角が  $\frac{\pi}{6}$  のまま) と仮定すると、原点を通る地層面 X (地層 5 と地層 6 の境の層理面) の式はどうなるか? 地層面は無限に広がるものとする。



(2) 地震が発生した後に再びこの丘を訪れたところ、丘の一部が崩壊し、南北断面 ( $x = 0$ ) における地層の露頭も確認できるようになっていた (下図)。断面を見たところ、地層面 X は丘の内部 ( $y$  軸正方向) では、実は北に向かって  $\frac{\pi}{6}$  の傾斜になっていることが分かった。このとき、改めて地層面 X の式を求めよ (地層面は無限に広がるものとし、 $x, y, z$  の範囲については答えなくてよい)。また、地層面 X と地表面 ( $xy$  平面) の交線は直線となるが (いわゆる走向を表す式である)、この直線の式を求めたうえで、この直線と  $y$  軸のなす角 (つまり、走向の北からの角度) を求めよ。



(3) 地層面 X と  $x$  軸、 $y$  軸とのなす角がともに  $\frac{\pi}{6}$  であることをふまえて、地層面 X と地表面 ( $xy$  平面) とのなす角を幾何学的に求めよ。なお、斜面を下る際、直滑降するよりは、斜めに降りたほうが”傾斜”がゆるくなることは経験的に分かると思うが、なす角とは、地層面 X 上から地表へ下ろうとしたときに、最も急な傾斜角 (つまり、傾斜が最も急だからと多くの人が降りたくない直滑降の方向での傾斜角、または、斜面全体を真横から見たときの傾斜角) である。

(4) 実は測定ミスをしており、地層面 X の  $y$  軸正方向での傾斜角は  $\frac{\pi}{4}$  であった。改めて、地層面 X の方程式を求めよ ( $x, y, z$  の範囲については答えなくてよい)。また、地層面 X と地表面 ( $xy$  平面) の交線と  $y$  軸のなす角を求めよ。さらに、地層面 X の法線ベクトル、および、地表面 ( $xy$  平面) の法線ベクトルをもとにして、地層面 X と地表面とのなす角を求めよ (補足: 一般に、任意の 2 つの面のなす角はこのように各面の法線ベクトルから求める)。

問2 テキスト p132 の演習 5.5 を解け。なお、(1) の図を描く際には、気圧場の極大・極小 (高低気圧の中心) に近づくとつれ等圧線の形状がどのように変わるか分かるように描け (ヒント:  $x = x_0, y = y_0$  で極大値をとると分かたら、 $x = x_0, y = y_0$  の近傍での  $p(x, y)$  の近似式がどう書けたか第 1 章を見直すとよい)。また、演習 5.5(3) として、(2) の直交性を以下の手順で厳密に示せ (  ~  を埋めよ)。 (2) と異なり、 $\rho = 1$  ではなく  $\rho$  のままでよい。

(直交することの証明)

簡単のため、 $p(x, y) = \cos x \sin y$  に対して考える (スライドでも触れたように、 $p_0$  は気圧場の底上げ、 $20$  は気圧場の振幅を大きくさせるだけなので、これらを見捨てても気圧場の形状は変わらない)。ある気圧の値  $p_1$  に対する等圧線の式 ( $p(x, y) = p_1$  での断面の式) は  $\cos x \sin y = p_1$  と書けるので、この等圧線上の点  $(x_1, y_1)$  における接線とそこでの気圧傾度力  $-\frac{1}{\rho} \nabla p$  が直交することを示せばよい。点  $(x_1, y_1)$  における接線の傾き  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1, y=y_1}$  をまず求める。  $\cos x \sin y = p_1$  において、 $y$  が  $x$  の関数であることに注意して両辺を  $x$  で微分すると、

$$\frac{d}{dx}(\cos x \sin y) = \frac{d}{dx} p_1$$

$$\text{ア} = 0 \quad \text{合成関数の微分により } \frac{d}{dx} \sin y = \cos y \text{ イ であることに注意}$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{ウ}$$

となるので、点  $(x_1, y_1)$  における接線の傾きは  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1, y=y_1} = \text{エ}$  となる。よって、接線の傾きを表すベクトルは、

$$\left( \text{オ}, \text{カ} \right)$$

となる。また、気圧傾度力が  $-\frac{1}{\rho} \nabla p = \left( \text{キ}, \text{ク} \right)$  と表せることから、点  $(x_1, y_1)$  における気圧傾度力 (ベクトル) は、

$$\left( \text{ケ}, \text{コ} \right)$$

となる。よって、これら 2 つのベクトルの内積を考えると、

$$\left( \text{オ}, \text{カ} \right) \cdot \left( \text{ケ}, \text{コ} \right) = \text{サ}$$

となるので、等圧線と気圧傾度力は直交する。

(補足) 本問のように、ある場所での接線の傾きを求める場合は、最終的にそこでの  $x, y$  の値を代入するので、 $y$  を  $x$  で微分する前にわざわざ「 $y = (x \text{ の式})$ 」と変形せずに (または、変形できなくても)、「 $y$  は  $x$  の式である」ことに注意しながら式ごと  $x$  で微分してしまえば良い。

問3 テキスト p142 の演習 5.9(2) を解け (ヒント: スライドのヒントにあるように特定の場所での風の場を順次描いてみるとよいが、その際、「まず、 $y$  をある値で固定したまま  $x$  を変化させ、次に、 $y$  を別の値で固定したまま  $x$  を変化させる (以下繰り返し)」というようにするとよい)。なお、風の場の見た目から判断した渦度 (時計回り/反時計回り) と計算から求めた渦度 (の正負) が一致しない場合は、いずれかが間違えていることになるので参考にするるとよい。

問4 3次元のベクトル場  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  とスカラー場  $T(x, y, z)$  に対し、

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad : \quad \text{ベクトル演算子}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad : \quad \text{スカラー演算子}$$

であることに注意して、以下のうちから計算可能なものを全て選べ。ただし、 $\cdot$  は内積、 $\times$  は外積を表し、微分可能性や物理学的に意味のある量かどうかは気にしないでよい (ヒント: 内積や外積の記号の前後がベクトルかスカラーを考えるとよい。例えば、スカラーとスカラーに対して内積は定義されないので計算不可能とわかる。内積と外積が複数含まれる場合は、計算順を変えることで計算できたりできなかったりすることがあるので慎重に。)

ア: $\nabla T$	イ: $\nabla \mathbf{u}$	ウ: $\nabla^2 T$	エ: $\nabla^2 \mathbf{u}$
オ: $\nabla \cdot T$	カ: $\nabla \cdot \mathbf{u}$	キ: $\nabla^2 \cdot T$	ク: $\nabla^2 \cdot \mathbf{u}$
ケ: $\nabla \times T$	コ: $\nabla \times \mathbf{u}$	サ: $\nabla^2 \times T$	シ: $\nabla^2 \times \mathbf{u}$
ス: $\nabla(T\mathbf{u})$	セ: $\nabla \cdot (T\mathbf{u})$	ソ: $\nabla \times (T\mathbf{u})$	タ: $\nabla \times (\nabla T)$
チ: $\nabla^2(T\mathbf{u})$	ツ: $\nabla^2 \cdot (T\mathbf{u})$	テ: $\nabla^2 \times (T\mathbf{u})$	ト: $\nabla^2 \times (\nabla T)$
ナ: $\nabla \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{u}$	ニ: $\nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$	ヌ: $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u}$	ネ: $\nabla \times \nabla \cdot \mathbf{u}$
ノ: $\mathbf{u} \cdot \nabla T$	ハ: $T \cdot \nabla \mathbf{u}$	ヒ: $\mathbf{u} \times \nabla T$	フ: $T \times \nabla \mathbf{u}$
ヘ: $\mathbf{u} \cdot \nabla^2 T$	ホ: $T \cdot \nabla^2 \mathbf{u}$	マ: $\mathbf{u} \times \nabla^2 T$	ミ: $T \times \nabla^2 \mathbf{u}$
ム: $\mathbf{u} \cdot \nabla \times T$	メ: $T \cdot \nabla \times \mathbf{u}$	モ: $\mathbf{u} \times \nabla \cdot T$	ヤ: $T \times \nabla \cdot \mathbf{u}$
ユ: $\nabla \cdot \nabla \mathbf{u}$	ヨ: $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$	ラ: $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$	リ: $\nabla \times \nabla \times \nabla T$

問5 manaba のアンケートに素直に回答せよ。なお、お世辞を書いても悪口を書いても点数は変わらない。第1-4回分アンケートにも回答すること。

(最後に)

地球基礎数学・物理学の松枝担当回はこれで終了です。本当にお疲れさまでした。少しでも理解が進んだ分野、できるようになった分野はありましたか? 試験 (松枝出題分) では、易しめの問題を多めに出题する予定ですので、全範囲についてまんべんなく復習し、試験に望んでください。復習していて分からないことが出てきたら、遠慮なく聞いてください (teams の chat でもメールでもどちらでもかまいません)。